

Comportement non-orthotrope d'une tôle asymétrique

Oualid Chahaoui, Naoél Brinis, Abdelaziz Abboudi, Salim Boulahrouz, Abdelmadjid Chehhat

Engineering Sciences and Advanced Materials Laboratory (ISMA), department of mechanical engineering
Laghrour-Abbes University of Khenchela

Corresponding Author oualid.chahaoui@gmail.com

Abstract— Au cours du laminage, les tôles peuvent présenter des états de déformations différents d'une couche à une autre de sorte que les surfaces (les peaux) en contact avec les cylindres du laminage subissent des cisaillements simples suivant la direction de laminage. On parle alors de symétrie monoclinique prismatique qui consiste à considérer 2 composantes de textures ayant d'inégales fractions volumiques et qui admettent respectivement le plan (DL, DN) et l'axe DT comme plan et axe de symétrie.

Keywords—Comportement Non orthotrope, Tôle asymétrique, Modélisation, Modèle CSC

I. INTRODUCTION

Le laminage asymétrique est un processus de déformation ayant le même aspect opératoire que le laminage symétrique sauf que les rayons où les vitesses circiférentielles des deux cylindres du laminage sont différentes (Fig.1). Ces différences contribuent à introduire une composante de cisaillement plus intense au niveau de la surface du matériau qui peut présenter plusieurs avantages par rapport au laminage classique. Les efforts appliqués seront plus faibles ce qui conduit à la possibilité d'augmenter la réduction d'épaisseur par passe par rapport au laminage classique [1,2]. Lorsque, par exemple, les vitesses de rotation des cylindres sont différentes, la vitesse de déformation dans le plan de la tôle est plutôt asymétrique. Par conséquent, la symétrie orthotrope de l'échantillon devient non justifiée et plus particulièrement, dans le cas d'un cisaillement prononcé. Dans ce contexte, Hill [3] a conservé la symétrie orthotrope dans l'étude du changement de longueur pendant un essai de torsion d'un tube, mais cette prétention n'a pas été justifiée expérimentalement. La plupart des expériences antérieures (Bailey et al. [4]; Michino et al. [5]; Stout et al [6]; Eisenberg et al [7]; Helling et al [8]) ont été effectuées pour étudier les surfaces d'écoulements dans l'espace de contraintes sans se référer à une éventuelle symétrie orthotrope. Une étude expérimentale, menée par Kim [9] a montré que la symétrie orthotrope est maintenue pendant la torsion des tubes étirés à froid avec un changement des axes d'orthotropie. Darrieulat et al. [10] dans des études se rapportant à des essais de torsion (déformation de cisaillement simple), ont avancé que le critère de Hill peut être élargi au cas de la symétrie monoclinique prismatique.

Au regard de ce qui a été cité précédemment, un écart à l'orthotropie plus important est prévisible et le comportement mécanique des tôles est susceptible de devenir à caractère monoclinique [11]. Dans ce cas, la direction transverse $DT//\Lambda^2$ sera un axe de rotation et (DL, DN) un plan miroir de symétrie, cependant (DT, DN) et (DL, DT) ne sont plus des plans de symétrie.

Ce type d'anisotropie a fait l'objet déjà de nombreuses études [12]. Généralement, dans le cas d'une tôle laminée, le cœur du produit présente une symétrie orthotrope caractérisée par des plans de symétrie (DL, DT), (DT, DN), et (DN, DL) (voir Fig.2. En revanche, du fait des composantes de cisaillement imposées par les cylindres au voisinage de la surface de la tôle, il est attendu que les zones de peau présentent plutôt une symétrie monoclinique prismatique (appelée simplement monoclinique dans la suite). Ces zones seront caractérisées par un seul plan de symétrie, en l'occurrence le plan (DN, DL) pour lequel la direction transverse DT en est l'axe de symétrie (noté Λ^2).

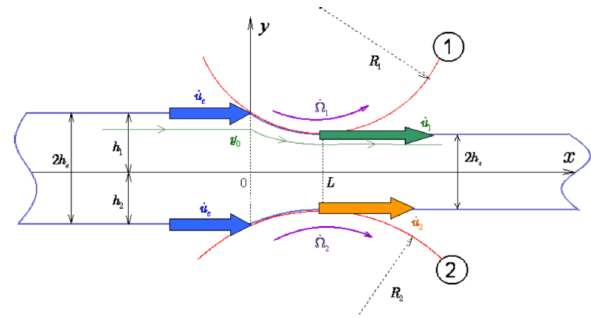


Fig.1 : Schéma du laminage asymétrique des tôles. [13]

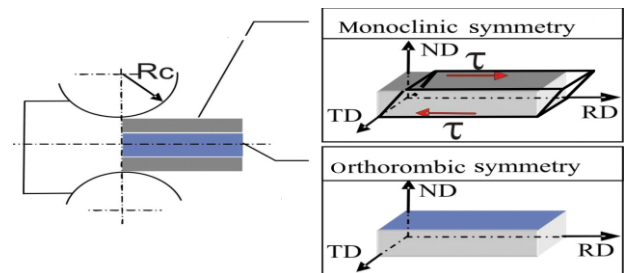


Fig.2 : Procédé de laminage présentant les types de symétrie à travers l'épaisseur de la tôle.

II. EXTENSION MONOCLIQUE DU CRITERE DE HILL 48

Le critère de plasticité quadratique, se présentant comme une généralisation du critère orthotrope de Hill [4] peut décrire le comportement associé à ce type de symétrie :

$$f(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{13}^2 + 2N\sigma_{12}^2 + 4p\sigma_{12}\sigma_{23} + 4\sigma_{13}(q\sigma_{11} + r\sigma_{22} + t\sigma_{33}) = 2\sigma_0^2 \quad (1)$$

Avec $q + r + t = 0$ car le matériau est supposé insensible à la contrainte moyenne.

Ce critère comporte donc 9 paramètres indépendants qui sont : F, G, H, L, M, N, p, q et r. Par exemple, si l'on pose $p = q = r = 0$, on retrouve bien le critère de Hill.

Si: σ_0^1 , σ_0^2 et σ_0^3 sont des contraintes d'écoulement en traction uniaxiale suivant les directions principales d'anisotropie, on voit que:

$$G + H = \frac{1}{(\sigma_0^1)^2}, F + H = \frac{1}{(\sigma_0^2)^2}, F + G = \frac{1}{(\sigma_0^3)^2}$$

Si: σ_0^{23} , σ_0^{13} et σ_0^{12} sont des contraintes en cisaillement simples par rapport aux axes principaux d'anisotropie, on obtient :

$$2L = \frac{1}{(\sigma_0^{23})^2}, 2M = \frac{1}{(\sigma_0^{13})^2}, 2N = \frac{1}{(\sigma_0^{12})^2}$$

Les coefficients p, q, r et t doivent satisfaire les conditions de convexité du critère en auquel lui est associé la matrice Hessienne: $M_{ij} = \partial^2 f / \partial \sigma_i \partial \sigma_j$ qui est définie semi positive ($\det M_{ij} \geq 0$ et la diagonale positives ou nulles).

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 2q & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 2r & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2L & 0 & 2p \\ 2q & 2r & 2t & 0 & 2M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p & 0 & 2N \end{bmatrix} \quad (2)$$

La première condition de convexité étant :

$$p^2 \leq LN \quad \text{Avec : } L + N \geq 0$$

Le déterminant de la matrice Hessienne devient :

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 2q \\ -H & F+G & -F & 2r \\ -G & -F & F+G & 2t \\ 2q & 2r & 2t & 2M \end{bmatrix} \quad (3)$$

Les valeurs propres sont déterminées selon la relation caractéristique suivante : $\det (M_{ij} - KI) = 0$

II.1 Extension monoclinique du critère de Hill48

L'écriture abrégée de la fonction d'écoulement (1) peut être transcrite sous forme tensorielle :

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma : M : \sigma = M_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (4)$$

Les indices de sommation tensorielle sont $i, j, k, l = 1, 2, 3$ et M représente le tenseur d'élasticité d'ordre 4 et de dimension 3.

Il est courant de représenter les tenseurs de ce type sous forme d'une matrice 6 x 6 symétriques. La forme matricielle de l'Eq. (2) s'écrit pour une symétrie monoclinique :

$$f(\sigma_{ij}) = {}^T \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & \sqrt{2}q & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & \sqrt{2}r & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & \sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & p \\ \sqrt{2}q & \sqrt{2}r & \sqrt{2}t & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Dans le repère de la tôle, le tenseur M peut se décomposer en deux tenseurs :

- M_o (associé au comportement orthotrope)
- M_{pm} (associé au comportement purement monoclinique) :

$$M = M_o + M_{pm}$$

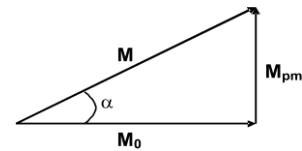


Fig.3 : Représentation de l'écart entre les tenseurs orthotrope et monoclinique

Le calcul de l'écart à l'orthotropie consiste alors à trouver l'angle α entre les deux tenseurs avec : $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$

Ou :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{M : M_o}{\|M\| \|M_o\|} = \frac{\|M_o\|}{\sqrt{\|M_o\|^2 + \|M_{pm}\|^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\|M_{pm}\|^2}{\|M_o\|^2}}} \end{aligned} \quad (6)$$

Avec:

$$M_o = \begin{bmatrix} G+H & -H & -G & 0 & 0 & 0 \\ -H & F+H & -F & 0 & 0 & 0 \\ -G & -F & F+G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{bmatrix}$$

Et:

$$M_{pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \\ \sqrt{2}q & \sqrt{2}r & \sqrt{2}t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

II.2 Prévision et illustration du comportement monoclinique d'une tôle déformée par laminage asymétrique

Toute caractérisation de mesure du coefficient de Lankford, réalisée au moyen des essais mécaniques classiques tel que la traction, dans le plan d'une tôle déformée par le laminage asymétrique (état de contraintes planes $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$), ne permet pas de mettre en évidence les termes non orthotropes p, q, r et t issus de la relation (1). Ainsi, un éventuel écart à l'orthotropie ne pouvant pas être estimé, on se propose alors d'examiner différemment la partie monoclinique du critère par la considération d'un test de caractérisation simple présenté en Fig.3. Un tel test, noté "CSC", repose sur un principe simple de déformation combinant un effort normal de compression σ_{33} et une contrainte tangentielle de cisaillement τ dans le plan de la tôle (Combined Shear and Compression). Cette sollicitation mécanique, permet d'identifier les grandeurs mécaniques du caractère monoclinique du matériau, à partir des composantes de textures développées à l'aide de l'approche C.M.T.P (Continuum mechanics of Textured polycrystals).

Le tenseur de contrainte peut être écrit dans les axes de l'échantillon (S) :

$$\sigma_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (8)$$

Où $\tau = \sigma_{xz}$, est la contrainte de cisaillement et σ la contrainte extérieure de compression. Soit P La matrice de passage du repère "échantillon" au repère "Tôle" et P^T sa matrice transposée :

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

On peut exprimer le tenseur des contraintes dans le nouveau repère de la tôle (R) comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_R &= P\sigma_S P^T = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau & 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \sigma_T &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau \cos\theta \\ 0 & 0 & \tau \sin\theta \\ \tau \cos\theta & \tau \sin\theta & \sigma \end{bmatrix} \quad (10) \end{aligned}$$

Compte tenu des conditions des contraintes de compression et de cisaillement imposées par l'essai, le critère monoclinique (Eq : 1) s'écrit :

$$\begin{aligned} (2L\sin^2\theta + 2M\cos^2\theta)\tau^2 + 4t\cos\theta\sigma\tau + \\ + (F+G)\sigma^2 &= 2\sigma_0^2 \\ (2L\sin^2\theta + 2M\cos^2\theta)\tau^2 + 4t\cos\theta\sigma\tau + \\ + (F+G)\sigma^2 - 2\sigma_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

La solution de cette équation de 2^{ème} degré pour $\tau > 0$ est :

$$\begin{aligned} \tau(\theta) = \\ \frac{-2t\sigma\cos\theta + \sqrt{4t^2\sigma^2\cos^2\theta - (2L\sin^2\theta + 2M\cos^2\theta)}}{2L\sin^2\theta + 2M\cos^2\theta} \\ + \frac{\sqrt{[(F+G)\sigma^2 - 2\sigma_0^2]}}{2L\sin^2\theta + 2M\cos^2\theta} \quad (11) \end{aligned}$$

La contrainte de cisaillement τ dans les 2 sens de laminage (RD) sera :

- Pour $\theta = 0$, (III.54)

$$\tau_1 = \frac{-2t\sigma + \sqrt{4t^2\sigma^2 - 2M[(F+G)\sigma^2 - 2\sigma_0^2]}}{2M}$$
- Pour $\theta = \pi$,

$$\tau_2 = \frac{2t\sigma + \sqrt{4t^2\sigma^2 - 2M[(F+G)\sigma^2 - 2\sigma_0^2]}}{2M}$$

La différence entre les 2 sens donne l'effet monoclinique de la tôle :

$$\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 = \frac{2t\sigma}{M}$$

En Générale :

$$\tau(\theta + \pi) - \tau(\theta) = \frac{2t\sigma \cos\theta}{L \sin^2 \theta + M \cos^2 \theta} \quad (12)$$

III. RESULTATS DES PREVISIONS DU COMPORTEMENT MONOCLIQUE

Dans cette section, nous présentons l'évolution des propriétés mécaniques de la tôle telles que les vitesses de déformations, la contrainte de cisaillement et l'effet de chaque composante de texture sur le coefficient de Lankford, en tenant compte de la symétrie monoclinique du critère de plasticité.

A partir des courbes représentatives de l'évolution des de la contrainte d'écoulement et du coefficient d'anisotropie dans le plan de laminage de la tôle, présentées en Fig.4 (a, b), on constate que le comportement anisotrope des trois tôles est grandement écarté et la tôle 2 est préférée pour l'emboutissage. Dans la Fig.5 (a), on remarque que pour une contrainte de compression σ_{33} donnée, la norme de la contrainte de cisaillement τ est plus importante dans la direction de laminage (sens positif de τ) que dans l'autre sens (sens négatif de τ), et sur Fig.5 (b), l'effet de l'écart monoclinique sur les tôles 1,3 et nul sur la deuxième.

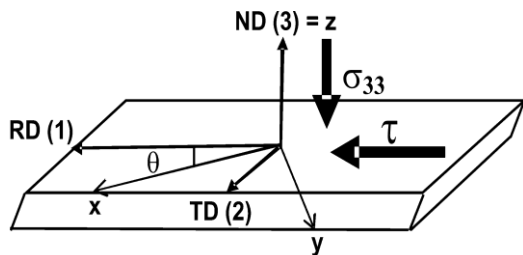


Fig.3 : Géométrie de l'essai de "Compression Cisaillement Combinés" (CSC)

L'influence des orientations individuelles et celle globale de la tôle sur son comportement final est conditionnée par les valeurs des paramètres d'anisotropie, déterminés moyennant la méthode CMTP et qui sont répertoriés dans le Tableau 1.

TABLE I. PARAMETRES D'ANISOTROPIE POUR CHAQUE TOLE

	Tole1	Tole2	Tole3
F	0.2528	0.1363	0.1933
G	0.2615	0.1363	0.1797
H	0.2505	0.1961	0.1470
L	0.8531	0.6926	0.5522
M	0.8356	0.6926	0.5818

N	0.8576	0.5227	0.6749
P	-0.0691	0.00961	0.0213
q	0.0372	0.0481	0.0083
r	-0.0244	-0.0481	0.0133
t	-0.0128	0	-0.02165

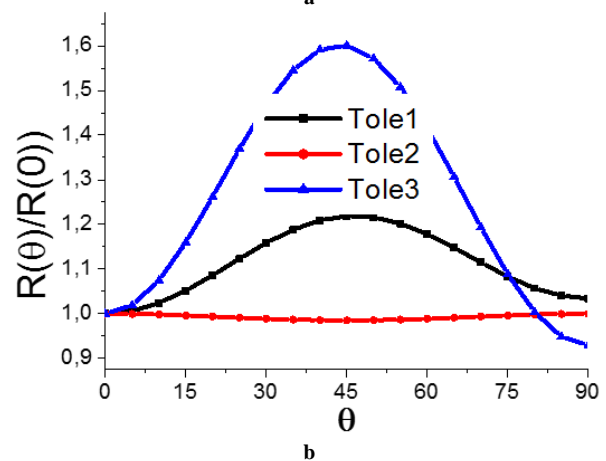
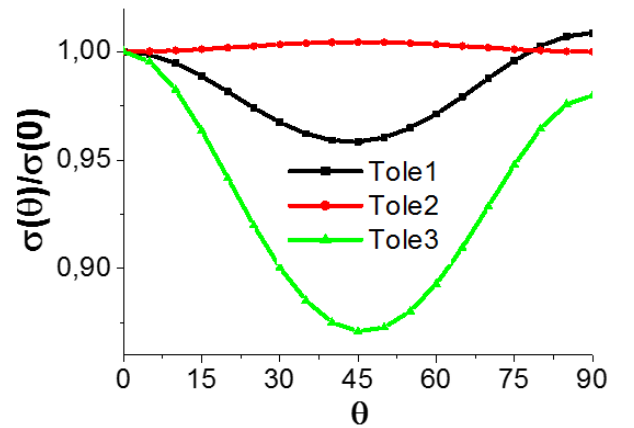
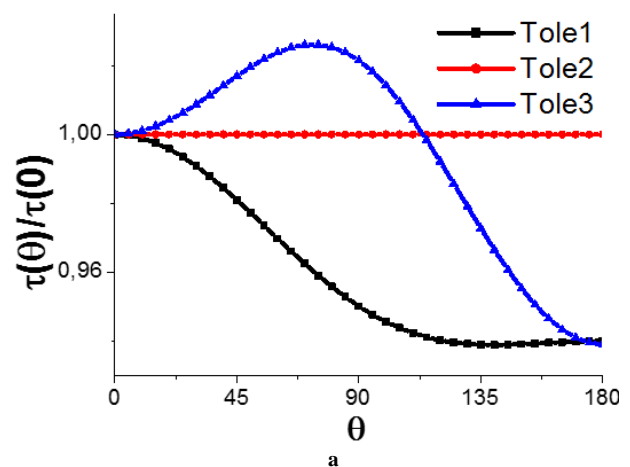


Fig.4. Distribution des paramètres mécaniques suivant la direction uniaxiale de l'acier (a) la contrainte d'écoulement normalisé (b) le coefficient d'anisotropie normalisé.



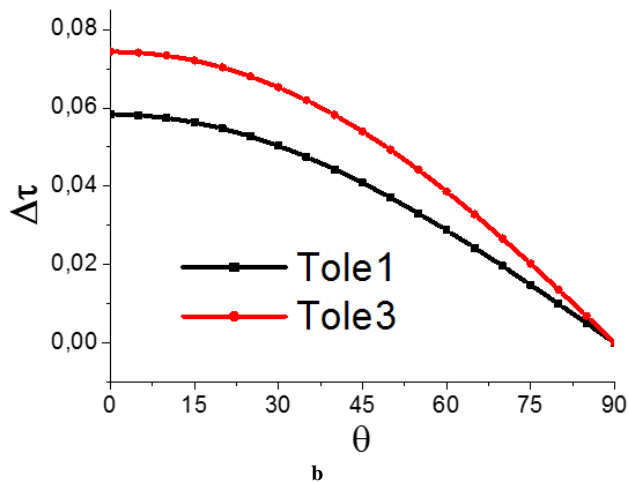


Fig.4. Distribution des paramètres mécaniques suivant la direction uniaxiale de l'acier (a) la contrainte d'écoulement normalisé (b) le coefficient d'anisotropie normalisé.

CONCLUSION

La théorie des invariant des fonctions tensorielles a été appliquée pour exprimer le critère orthotrope de plasticité de Hill (1948) dans sa forme générale. L'extension de ce critère pour le cas de symétrie monoclinique prismatique donne une bonne prévision des paramètres d'anisotropie pour les tôles laminées et pour les tubes (cas de torsion) les principales conclusions sont les suivantes :

(i) Le comportement mécanique associé à la symétrie monoclinique prismatique est peut être décrite par le critère quadratique en impliquant neuf (9) paramètres indépendants.

(ii) La méthode CMTP (Continuum mechanics of Textured polycrystals), permet de déterminer les coefficients d'anisotropie à partir de l'orientation spatiale de structure cristalline.

(iii) Le test (CSC) " Combined shear Compression" est proposé pour mettre en évidence l'effet de la partie purement monoclinique du critère.

REFERENCES

- [1] R. Roumina, C.W. Sinclair. "Deformation Geometry and Through-Thickness Strain Gradients in Asymmetric Rolling". *Metallurgical and Materials Transactions* 39 pp. 2495-2503 (2008).
- [2] H. Watanabe, T. Muka, K. Ishikawa. " Differential speed rolling of an AZ31 magnesium alloy and the resulting mechanical properties" *J Mater Sci* 39 pp. 1477-1480 (2004).
- [3] O. Engler, M.Y.Huh, C.N. Tome. "A study of through-thickness texture gradients in rolled sheets". *Metall Mater Trans A31* pp. 2299-2315 (2000).
- [4] R. Hill. "The Mathematical Theory of Plasticity". Oxford University Press (1950).
- [5] J.A Bailey. S.L Haas, K.C Nawab. "Anisotropy In Plastic Torsion" JR, M. J Michino, W. N Findley. "Subsequent yield surfaces for annealed mild steel under dead-weight loading: aging, normality, convexity, corners, Baushinger, and cross effects" *J Engng Mat Tech Trans ASME* 96 pp. 56 (1974).
- [6] M. Young, *The Technical Writer's Handbook*. Mill Valley, CA: University Science, 1989.
- [7] M.G Stout, S. Hecker, R.J Boursier. " An evaluation of anisotropic effective stress-strain criteria for the biaxial yield and flow of 2024 aluminum tubes". *Engng Mat Tech Trans ASME* 105 pp. 240-242 (1983).
- [8] M.A Eisenberg, C.F Yen. " A Theory Of Multiaxial Anisotropic Viscoplasticity". *J. App. Mech.Trans. ASME* 48 pp.276-284 (1984).
- [9] D.E Helling, A.K Miller, M.G Stout.. *An Experimental Investigation Of The Yield Loci Of 1100-0Aluminium, And An Averaged 2024 Aluminum-Alloy After Prestrains*. *J Engng Mat Tech Trans ASME* 108 pp.313-320 (1987).
- [10] K.H Kim. " Evolution of anisotropy during twisting of cold drawn tubes. " *J Mech. Phys Solids* 40 pp. 127-139 (1992).
- [11] A. Wauthier, H. Réglé, J. Formigoni, G. Herman. " The effects of asymmetrical cold rolling on kinetics, grain size and texture in IF steels". *Mater Character* 60 pp.90-95 (2009).
- [12] M. Darrieulat. F. Montheillet. "Extension of the Hill 1948 yield criterion to the case of prismatic monoclinic symmetry". *Int. J. Mech. Sc* 38 pp. 1273-1284 (1996).
- [13] A. Halloumi, CH. Desrayaud, B. Bacroix, E. Rauch , F.Mmontheillet "a simple analytical model of asymmetric rolling" *archives of metallurgy and materials* volume 57 2012 issue 2 doi: 10.2478/v10172-012-0042-3