



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH

جامعة عباس لغرور خنشلة

ABBAS LAGHROUR-KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty Of Sciences And Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

**Mémoire de fin d'étude**

Pour l'obtention de diplôme de **Master Mathématiques**

Filière : **Mathématique**

Spécialité : **Mathématique Appliquée**

Intitulé par :

**Calcul numérique d'un problème pour équations  
aux dérivées partielles fractionnaires**

Réaliser Par : **Boussalem Aicha**

Dirigé par : **Mr.BRAHIMI Saadoune**

Présenté : le 13/09/2020

Membres de jury :

**Mr MANSOURI Djamel** Président

**Mr BENHADID Ayache** Examineur

Année universitaire 2019/2020

## *Remerciement*

*Je remercie ALLAH le tout puissant pour la volonté et la force, qu'il m'a donné pour terminer ce travail.*

*Je remercie chaleureusement mon encadreur, Monsieur Brahimi Saadoune, pour la proposition du sujet de cette thèse, et pour son soutien tout au long de ce travail.*

*Merci beaucoup pour vos conseils au cours d'encadrement .*

*Je tiens à remercier Monsieur Mansouri Djamel, d'avoir accepté la présidence du jury de ma soutenance .*

*Ainsi que Monsieur Ben hadid Ayache, pour accepter d'examiner ma mémoire.*

*Je remercie spécialement mon mari, pour le courage, la patience et le soutien pendant toute la durée de réaliser cette mémoire.*

## *Dédicace*

*Je dédie ce mémoire*

*A mes très chers parents, qui m'ont donnés un magnifique modèle de labeur  
et de persévérances. Que ALLAH les protège.*

*A mes chers frères et soeurs.*

*A mon cher mari, et ma petite fille.*

*A toutes les familles Boussalem, Djebli et Sahraoui .*

*A toutes mes amies.*

*A tous mes enseignants tout le long de ma formation.*

*A toute la promotion 2019 et 2020.*

*Aicha.B*

# Notation

$\Gamma$  : la fonction Gamma .

$\beta$  : la fonction Béta .

$C_n^k$  : coefficients binomiaux, tel que  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $k \leq n$   $n \in \mathbb{N}$ .

${}^RL D_x^\alpha f$  : dérivée à gauche au sens de Reimann-Liouville.

${}^GL D_x^\alpha f$  : dérivée à gauche au sens de Grünwald-Letnikov .

${}^c D_x^\alpha f$  : dérivée à gauche au sens de Caputo .

AEDF : approximation explicite de la différence finie.

EDFS : équation de diffusion fractionnaire spatiale .

$\partial^\alpha u$  : la dérivée d'ordre  $\alpha$  de Caputo.

# Table des matières

<b>Remerciement</b>	<b>2</b>
<b>Dédicace</b>	<b>3</b>
<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>8</b>
1.1 Les fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire . . . . .	8
1.1.1 La fonction Gamma . . . . .	8
1.1.2 La fonction Bêta . . . . .	12
1.1.3 La fonction Mittag Leffler . . . . .	13
1.2 Méthode des différences finies . . . . .	15
<b>2 Eléments de calcul fractionnaire</b>	<b>19</b>
2.1 Intégrale fractionnaire . . . . .	19
2.2 Dérivée fractionnaire . . . . .	23
2.2.1 Dérivée au sens de Reimann-Liouville . . . . .	24
2.2.2 Dérivée au sens de Grünwald-Letnikov . . . . .	25
2.2.3 Dérivée au sens de Caputo . . . . .	26
2.2.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires . . . . .	29
2.2.5 Relation entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Reimann-Liouville	31
2.2.6 Comparaisons entre les définitions de dérivée fractionnaire . . . . .	34
2.2.7 Dérivée à gauche et à droite . . . . .	34

---

2.2.8	Méthode des différences finies cas fractionnaire . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Application et simulation</b>	<b>43</b>
3.1	Introduction . . . . .	43
3.2	L'équation de diffusion classique . . . . .	44
3.3	L'équation d'advection-dispersion fractionnaire . . . . .	44
3.4	Application . . . . .	45
3.4.1	Approximation explicite des différences finies pour EDFs . . . . .	46
3.4.2	Analyse de stabilité de AEDF . . . . .	50
3.4.3	Exemple d'application . . . . .	58
	<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>
	<b>Résumé</b>	<b>66</b>
	<b>Abstract</b>	<b>66</b>

# Introduction

L'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse mathématique qui est considérée comme un axe de recherche dans le domaine des E.D.P.

L'appellation "Calcul fractionnaire" ne signifie pas le calcul des fractions.

Le calcul fractionnaire est la théorie des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire réel ou complexe. C'est une généralisation du calcul classique et par conséquent elle conserve quelques propriétés de base.

Le mémoire contient trois chapitres.

D'abord, on commence par l'historique de calcul fractionnaire.

-Le premier chapitre est consacré aux définitions et notations générales de calcul fractionnaire qu'on aura besoin dans la suite du travail.

-Le deuxième chapitre est consacré aux notions des intégrales et dérivées fractionnaires de Reimann -Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov ainsi que leurs propriétés .

-Dans le troisième chapitre, on présente la méthode des différences finies dans le cas fractionnaire avec un problème et une application numérique.

Enfin, on termine par une conclusion générale dans laquelle on présente les principaux résultats de ce mémoire.

# Historique

L'histoire de la dérivation fractionnaire s'étale de la fin du 17<sup>ème</sup> siècle jusqu'à nos jours. Il commença par une question clé de Leibniz, à qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire, il introduit le symbole de dérivation d'ordre  $n$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , où  $n$  est un entier positif. Ce que fut peut être un jeu simple des symboles qui poussa l'Hôpital à s'interroger sur la possibilité d'avoir  $n$  dans  $\mathbb{Q}$ . IL posa la question et si  $n = \frac{1}{2}$ ? En 1695. Sur cette question, on trouve les contributions de grands mathématiciens tel que Euler, Laplace, Liouville, Grünwald, Reimann ainsi Caputo. Il semble qu'une contradiction, dans les définitions et l'absence d'interprétation géométrique où physique aient empêché un succès plus grand de la théorie de la dérivée fractionnaire.

Le mérite de la première conférence concerne le calcul fractionnaire est attribué à B.Ross qui a organisé cette conférence à l'université de New Haven en Juin 1974, sous le titre "Le calcul fractionnaire et ses applications" ([2]).

Plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'application se sont diversifiés, par exemple

Les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans le modèle mathématique de la visco-élasticité des matières ([10]).

En biologie, il a été déduit que les membranes de cellules d'organisme biologique ont la conduction électrique d'ordre fractionnaire ([6]), et alors est classé en groupe de modèles d'ordre non-entier.

En économie, quelques systèmes de la finance peuvent afficher une dynamique d'ordre fractionnaire([1]).

En physique, pour intervenir des phénomènes de diffusion comme l'électromagnétisme.



# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre, on présente les notions préliminaires utiles qui sont utilisées dans les autres chapitres, voir ([7], [8]).

### 1.1 Les fonctions spéciales pour la dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs fonctions, qui sont nécessaires dans la théorie de calcul fractionnaire (dérivée, intégrale).

#### 1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma (noté par la lettre  $\Gamma$ ) est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale.

**Définition 1.1.1** *Soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(z) > 0$ , la fonction Gamma  $\Gamma(z)$  est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

**Exemples**

$\Gamma(1) = 1$ , car

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , car

$$\Gamma(0.5) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt$$

On fait un changement de variable

On pose  $\sqrt{t} = x$ , alors

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

donc

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \implies I^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

on pose

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

alors

$$\frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \implies dx dy = \left| \frac{d(x, y)}{d(r, \theta)} \right| dr d\theta = r dr d\theta$$

or

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} -\frac{1}{2}(-2re^{-r^2}) dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{-1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \left[ \frac{1}{2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

alors

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

donc

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

### Propriétés

1) Pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

2) Pour  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

3)  $\Gamma(z)$  est une fonction monotone ( $z$  doit être un réel), pour  $0 < z < 1$ .

4)

$$\Gamma(0_+) = +\infty$$

5) Pour  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$$

### Preuve

$$1) \Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

alors,  $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

2) Par récurrence

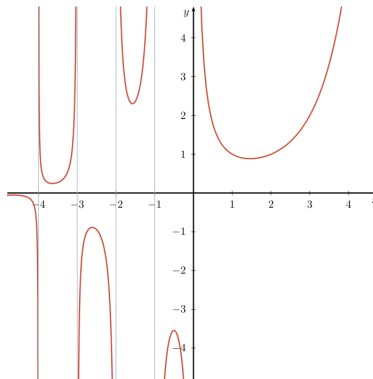
- On a  $\Gamma(0) = 1$ .
- Supposons que  $\Gamma(n+1) = n!$  est vrai, et montrons que  $\Gamma(n+2) = (n+1)!$ .

$$\begin{aligned}\Gamma(n+2) &= \Gamma(n+1+1) = \Gamma((n+1)+1) \\ &= (n+1)\Gamma(n+1) \\ &= (n+1)n! \\ &= (n+1)!\end{aligned}$$

alors, pour  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

3) Par son graphe.



$$4) \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \implies \lim_{z \rightarrow 0} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Gamma(z+1)}{z} = +\infty$$

alors

$$\Gamma(0_+) = +\infty$$

5) Par récurrence

- Pour  $n = 0$  :  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$
- Supposons que la propriété  $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  est vrai, et on va démontrer que elle est vrai pour  $n + 1$

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!} \\
&= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)(2n + 2)(2n + 1)2n!\sqrt{\pi}}{(2n + 2)(2n + 1)2^{2n}n!} \\
&= \frac{(2n + 2)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+2}(n + 1)!}
\end{aligned}$$

alors

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

□

### 1.1.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de calcul fractionnaire la fonction Bêta, cette fonction joue un rôle important spécialement dans certaine combinaison avec la fonction Gamma.

La fonction Bêta également connue sous le nom intégrale d'Euler de premier type.

**Définition 1.1.2** La fonction Bêta est définie sur  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  par l'intégrale suivant

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \quad \forall \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0$$

#### Propriétés

$\forall x, y \in \mathbb{C}$ , avec  $\operatorname{Re}(x) > 0$ ,  $\operatorname{Re}(y) > 0$

i-  $\beta(x, y) = \beta(y, x)$

ii-  $\beta(x, y) = \beta(x + 1, y) + \beta(x, y + 1)$

#### Preuve

i-  $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$

on pose

$$u = 1 - t \implies t = 1 - u \implies dt = -du$$

alors

$$\beta(x, y) = \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du = \beta(y, x)$$

ii-

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \int_0^1 [t + (1-t)] t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\ &= \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} dt + \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^y dt \\ &= \beta(x+1, y) + \beta(x, y+1) \end{aligned}$$

alors

$$\beta(x, y) = \beta(x+1, y) + \beta(x, y+1)$$

□

### Remarque

Le lien entre la fonction Gamma et la fonction Bêta est donné par

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

### Exemple

$$\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi$$

### 1.1.3 La fonction Mittag Leffler

La fonction Mittag Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, et on la trouve largement utilisée dans les solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cette fonction a été présentée par G.M.Mittag Leffler, et étudié par A.Wiman. pour plus de détails voir ([4])

**Définition 1.1.3** ([12]). *La fonction Mittag Leffler est définie comme suit*

$\forall z \in \mathbb{C}$

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

avec  $\operatorname{Re}(z) > 0$

Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres comme suit

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

### Exemple

Pour des valeurs spéciales des  $\alpha$  et  $\beta$ , on a

- $E_{1,1}(z) = e^z$
- $E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{2}$

### Remarque

Les coefficients binomiaux  $\binom{n}{k}$ , définis par tout entier naturel  $n$  et tout entier naturel  $k$  inférieur ou égal à  $n$ , donnent le nombre de parties de  $k$  éléments dans un ensemble de  $n$  éléments, notés aussi  $C_n^k$ .

Cette quantité s'exprime à l'aide de la fonction factorielle par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k \leq n$$

la formule généralisée  $\binom{\alpha}{k}$  est donnée par

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \quad \text{Avec } \alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_-^* \text{ et } k \in \mathbb{N}$$

cette formule peut être exprimée en terme de la fonction Gamma comme suit pour  $\alpha \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}_-$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)\Gamma(\alpha - k + 1)}$$

## 1.2 Méthode des différences finies

Dans cette section, on présente une des méthodes utilisées dans la résolution des équations aux dérivées partielles, cette méthode est la méthode des différences finies.

**Définition 1.2.1** *La méthode des différences finies est l'une des techniques de recherche de solution approchée d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. En apparence, cette méthode est en général simple à mettre en oeuvre, elle est basée sur les deux étapes suivantes :*

1. *La discrétisation du domaine d'étude (l'espace discrétisé ou maillage) et des opérateurs de dérivation/différentiation. Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes, etc, dérivées partielles) peut être obtenue par les formules de Taylor, en particulier celle de Taylor avec reste intégral permet de mesurer les erreurs.*
2. *La convergence d'un schéma numérique est une propriété théorique globale assurant que la distance entre la solution approchée et la solution exacte tend vers 0 (la distance entre les points est diminuée).*

**Définition 1.2.2** • *Le maillage*

*Un maillage est un ensemble des points isolés (appelés noeuds) situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles, une grille sur les seuls noeuds de laquelle sont définies les inconnues correspondant aux valeurs approximatives de ces fonctions.*

- *Pas du maillage*



On appelle pas du maillage la distance entre deux noeuds voisins situés sur une droite parallèle à l'un des axes.

- *Le schéma numérique*

Un schéma numérique peut être défini comme la formulation algébrique d'un problème discret conçu à l'aide de la méthode des différences finies.

### Schémas des différences finies

Le schéma est basé sur la formule de Taylor, où on remplace les fonctions dérivées par des formules discrètes.

Soit  $u$  une fonction  $n$  fois dérivable dans l'intervalle  $I$  de deux variables  $x$  et le temps  $t$  on pose

$$u = u(x, t)$$

$$u(x + h, t) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2!} + u^{(3)}(x)\frac{h^3}{3!} \dots (1)$$

on pose

$$u(x, t) = u_i, u(x + h, t) = u_{i+1}, u(x - h, t) = u_{i-1}, u'(x, t) = u'_i$$

alors

$$u_{i+1} = u_i + u'_i h + u''_i \frac{h^2}{2!} + u^{(3)}_i \frac{h^3}{3!} + u^{(4)}_i \frac{h^4}{4!} \dots (2)$$

$$u_{i-1} = u_i - u'_i h + u''_i \frac{h^2}{2!} - u^{(3)}_i \frac{h^3}{3!} + u^{(4)}_i \frac{h^4}{4!} \dots (3)$$

en tronquant les deux séries (1) et (2) en premier ordre en  $h$ , on trouve

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + 0(h)$$

cette formule est appelée schéma avant aux différences finies d'ordre 1 de  $u'_i$ .

$$u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + 0(h)$$

cette formule est appelée schéma arrière aux différences finies d'ordre 1 de  $u'_i$ .

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + 0(h^2)$$

cette formule est appelée schéma centré aux différences finies d'ordre 2 de  $u'_i$ .

en tronquant les deux séries (1) et (2) en ordre supérieur en  $h$

$$\bullet u_{i+2} = u_i + u'_i(2h) + u''_i \frac{(2h)^2}{2!} + u_i^{(3)} \frac{(2h)^3}{3!} + u_i^{(4)} \frac{(2h)^4}{4!} + \dots$$

$$u_{i+2} - 2u_{i+1} = -u_i + u''_i h^2 + u_i^{(3)} h^3 + \frac{7}{12} u_i^{(4)} h^4 + \dots$$

$$u''_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} + 0(h)$$

donc, on trouve le schéma avant.

$$\bullet u_{i-2} = u_i + u'_i(-2h) + u''_i \frac{(-2h)^2}{2!} + u_i^{(3)} \frac{(-2h)^3}{3!} + u_i^{(4)} \frac{(-2h)^4}{4!} + \dots$$

$$u_{i-2} - 2u_{i-1} = -u_i + u''_i h^2 - u_i^{(3)} h^3 + \frac{7}{12} u_i^{(4)} h^4 + \dots$$

$$u''_i = \frac{u_{i-2} - 2u_{i-1} + u_i}{h^2} + 0(h)$$

donc, on trouve le schéma arrière.

- $u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + h^2 u_i'' + \frac{2h^4}{4!} u_i^{(4)} + \dots$

$$u_i'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2)$$

donc, on trouve le schéma centré.

# Chapitre 2

## Eléments de calcul fractionnaire

Bien que le concept de la dérivation et l'intégration d'ordre non entier soit pas nouveau, il remonte aux travaux de Leibniz.

L'intégration et la dérivation d'ordre non entier est la généralisation de l'intégrale et de la dérivée entière.

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et résultats concernant le calcul fractionnaire (Intégrale, Dérivée).

### 2.1 Intégrale fractionnaire

Dans cette section, on va présenter la définition de l'intégrale fractionnaire.

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a,b]$ , on considère l'intégrale

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t) dt$$

la primitive seconde de  $f$  définie comme suit

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \left( \int_a^u f(t) dt \right) du$$

permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x \left( \int_t^x du \right) f(t) dt$$

$$I_a^2 f(x) = \int_a^x (x - t) f(t) dt$$

le  $n^{\text{eme}}$  itéré de l'opérateur  $I$ , peut s'écrire

$$I_a^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \dots (2.1)$$

$n$  doit être entier positif à cause de l'utilisation de la fonction factorielle, qui n'a pas de sens que pour des valeurs entières.

La formule (2.1) est appelée formule de Cauchy, et pour la généraliser, Reimann en 1947 a proposé de remplacer la fonction factorielle par la fonction Gamma qui en est la généralisation aux nombres réels.

On obtient alors la fonction d'intégration non entière suivante

**Définition 2.1.1** Soit  $f \in C([a, b])$ , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  est définie par

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

cette formule est appelée *intégrale de Riemann-Liouville*, car Liouville aussi a proposé la même définition que Riemann, mais en remplaçant la borne inférieure d'intégration par  $-\infty$ . L'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  est définie par l'intégrale

$$I_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

L'intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$  est définie par

$$I_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt$$

### Exemple

On considère la fonction  $f(x) = (x-a)^c$ ,  $x > a$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$ , on calcul l'intégrale fractionnaire de Riemann – Liouville.

$$I_a^{(\alpha)}(x-a)^c = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^c dt$$

pour évaluer cette intégrale, on pose le changement

$$t = a + (x-a)z$$

alors

$$dt = (x-a)dz$$

d'où

$$t = a \Rightarrow (x - a)z = 0 \quad \Rightarrow z = 0$$

$$t = x \Rightarrow x = a + (x - a)z$$

$$\Rightarrow x - a = (x - a)z \quad \Rightarrow z = 1$$

alors

$$\begin{aligned} I_a^{(\alpha)}(x - a)^c &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [(x - a) - (x - a)z]^{\alpha-1} [(x - a)z]^c (x - a) dz \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^c (1 - z)^{\alpha-1} dz \\ &= \frac{(x - a)^{\alpha+c}}{\Gamma(\alpha)} \beta(c + 1, \alpha). \end{aligned}$$

Après l'utilisation de lien entre la fonction Gamma et Béta, on a

$$I_a^{(\alpha)}(x - a)^c = \frac{\Gamma(c + 1)}{\Gamma(\alpha + c + 1)} (x - a)^{\alpha+c}.$$

### Proposition(Loi de composition)

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs, et  $f$  une fonction intégrable, on a

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)} f(x)) = I^{(\beta)}(I^{(\alpha)} f(x)) = I^{(\alpha+\beta)} f(x)$$

### Preuve

La preuve découle directement de La définition

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)}(I^{(\beta)} f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - y)^{\alpha-1} I^{(\beta)} f(y) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x - y)^{\alpha-1} \int_a^y (y - t)^{\beta-1} f(t) dt dy \end{aligned}$$

d'après le théorème de Fubini, on a

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(t)dt \int_t^x (x-y)^{\alpha-1}(y-t)^{\beta-1}dy$$

par le changement de variable

$$y = t + (x-t)\tau, \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

alors

$$dy = (x-t)d\tau$$

on obtient

$$\begin{aligned} I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{\beta(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt \\ I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) &= I^{(\alpha)+(\beta)}f(x) \end{aligned}$$

donc

$$I^{(\alpha)}(I^{(\beta)}f(x)) = I^{(\alpha)+(\beta)}f(x)$$

□

## 2.2 Dérivée fractionnaire

Dans cette section, on va donner les définitions des dérivées fractionnaires les plus utilisées (dérivée au sens de Reimann-Liouville, Caputo et au sens de Grünwald-Letnikov) (voir [3], [4], [5]).



### 2.2.1 Dérivée au sens de Reimann-Liouville

La dérivée au sens de Riemann-Liouville est définie à partir de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, en se basant sur la relation entre la dérivation et l'intégration classique, cette relation est donnée par

$$D^m = D^n(I^{n-m}), \quad \text{ou } n, m \in \mathbb{N}.$$

$D$  est l'opérateur de dérivation classique et  $I$  est l'opérateur d'intégration classique.

**Définition 2.2.1** *Soit  $f$  une fonction intégrable sur l'intervalle  $[0, T]$ . La dérivée fractionnaire au sens de Reimann-Liouville d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  est définie par*

$${}^{\text{RL}}_0 D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}} dt, \quad n-1 < \alpha < n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

en particulier

quand  $\alpha = 0$ , on aura

$${}^{\text{RL}}_0 D_x^\alpha f(x) = D^1(I^1 f(x)) = f(x)$$

quand  $\alpha \in \mathbb{N}$ , on obtient la dérivée usuelle

$${}^{\text{RL}}_0 D_x^\alpha f(x) = D^{\alpha+1}(I^1 f(x)) = D^\alpha f(x)$$

pour  $0 < \alpha < 1$ , c'est à dire  $n = 1$

on a

$${}^{\text{RL}}_0 D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt$$

#### Remarque

En général, la dérivée au sens de Reimann-Liouville d'un constant n'est pas nulle.

**Exemple**

Soit  $f(x) = c \in \mathbb{R}^*$ ,  $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned}
 {}_0^{RL}D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt \\
 &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} dt \\
 &= \frac{c}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\
 &= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)x^\alpha} \neq 0
 \end{aligned}$$

**Proposition**

- 1) L'opérateur de dérivation de Reimann-Liouville est linéaire.
- 2) En général  ${}_0^{RL}D_x^\alpha \circ {}_0^{RL}D_x^\beta \neq {}_0^{RL}D_x^\beta \circ {}_0^{RL}D_x^\alpha$ .
- 3)  ${}_0^{RL}D_x^\alpha \circ I_0^\alpha = id$ .

**2.2.2 Dérivée au sens de Grünwald-Letnikov**

L'idée de cette dérivée est de généraliser la définition classique pour l'utilisation d'une définition de dérivée d'ordre quelconque d'une fonction continue .

On rappelle que la dérivée d'ordre 1 d'une fonction  $f$  à variable  $x$  est définie par

$$D^1 f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \dots (1)$$

l'application de cette définition deux fois donne la dérivée seconde

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= D^{(2)} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \\
 f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} \dots (2)
 \end{aligned}$$

en utilisant (1) et (2), on obtient

$$f'''(x) = D^{(3)}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(x-h) + 3f(x-2h) - f(x-3h)}{h^3}$$

et par récurrence, on peut établir que

$$f^n(x) = D^{(n)}f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh), n \in \mathbb{N}$$

la dérivée fractionnaire au sens de Grünwald-Letnikov est une extension de cette formule, puisque pour tout nombre fractionnaire positif  $\alpha$ , on a

$${}^{GL}D_x^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\alpha \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh), (a \leq x \leq b)$$

en utilisant la fonction Gamma telle que  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ , donnant  $\Gamma(n+1) = n!$ , pour tout  $n-1 < \alpha < n$ , on peut écrire l'expression suivante généralisée aux cas entier ou nuls

$$(-1)^k \binom{\alpha}{k} = (-1)^k \frac{\alpha!}{k!(\alpha-k)!} = \frac{-\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(k-\alpha-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}$$

donc, on obtient la formule de Grünwald-Letnikov pour  $\alpha > 0$  non entier .

L'approche de Grünwald-Letnikov est importante pour la discrétisation de nos équations incluant des opérateurs d'ordre non entier.

### 2.2.3 Dérivée au sens de Caputo

Bien que la définition de la différentiation fractionnaire, de type de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires, et pour son application dans les mathématiques pure (solution des équations différentielles d'ordre entier, définitions de nouvelles classes de fonctions, sommation des séries, etc...).

Les problèmes modélisent les phénomènes réels demandent des définitions de dérivées fractionnaire en autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent  $f(a)$ ,  $f'(a)$ , etc...

Ces problèmes avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement.

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville en la borne inférieure  $x = a$ , par exemple

$$\lim_{x \rightarrow a} D_x^{\alpha-1} f(x) = b_1$$

...

$$\lim_{x \rightarrow a} D_x^{\alpha-2} f(x) = b_2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} D_x^{\alpha-n} f(x) = b_n$$

avec  $b_k (k = 1, \dots, n)$  sont des constantes données.

Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales, avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de tels types des conditions initiales.

Ici, on observe le conflit entre la théorie mathématique bien établie et les besoins pratiques.

Une certaine solution pour ce conflit a été proposée dans les années soixante par M. Caputo dans son papier et deux ans après dans son livre, où il a défini un opérateur de dérivation modifiée une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.

**Définition 2.2.2** Soit  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $f \in C^n[0, T]$ , et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on appelle dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo de la fonction  $f$ , la dérivée suivante

$${}^c_0 D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt, \quad n-1 < \alpha < n$$

**Remarque**

On intéresse dans ce travail uniquement à la définition de dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

**Exemple**

1)  $f(x) = x$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha = 0.5$

$$\begin{aligned} {}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x f^{(n)}(t)(x - t)^{n-\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x - t}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x - t}} dt \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

2) Soit  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} {}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x f^{(n)}(t)(x - t)^{n-\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x 0 \cdot (x - t)^{n-\alpha-1} dt = 0. \end{aligned}$$

**Proposition**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n - 1 < \beta < \alpha < n$  et  $f \in C^n([0, +\infty[)$ .

$$1) {}_0^c D_x^\alpha {}_0^c D_x^{(-\alpha)} f(x) = f(x).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} {}_0^c D_x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} {}_0^c D_x^{(-\alpha)} f(x) = 0.$$

### 2.2.4 Propriétés générales des dérivées fractionnaires

Dans cette partie, on va présenter des propriétés générales de la différentiation fractionnaire, qui sont plus souvent utilisées dans les applications.

#### Linéarité

Soit  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et soit les deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  existent.

La dérivation fractionnaire est un opérateur linéaire, alors on a

$$D^\alpha(\lambda f(x) + g(x)) = \lambda D^\alpha f(x) + D^\alpha g(x)$$

avec  $D^\alpha$  est un opérateur de dérivée fractionnaire ( $D^\alpha$  peut être au sens de Riemann-Liouville, Caputo ou d'autre sens).

#### Preuve

On a

$$D^\alpha f(x) = I^{n-\alpha} D^n f(x)$$

puis

$$D^\alpha(\lambda f(x) + g(x)) = I^{n-\alpha} D^n(\lambda f(x) + g(x))$$

comme la dérivée  $n^{eme}$  et l'intégrale sont linéaires, alors

$$\begin{aligned} D^\alpha(\lambda f(x) + g(x)) &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(x) + I^{n-\alpha} D^n g(x) \\ &= \lambda D^\alpha f(x) + D^\alpha g(x) \end{aligned}$$

□

#### La formule de Leibniz

On prend deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$ , avec toutes les dérivées de  $f(x)$  et  $g(x)$  sont continues sur  $[a, b]$ .

Sur cette condition, on sait que de la règle de Leibniz pour calculer la dérivée  $n^{eme}$ , de produit

de deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  est donnée par la relation suivante

$$D^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} f^k(x) D^{\alpha-k} g(x) + R_n^\alpha(x)$$

tel que  $n = [\alpha] + 1$ ,  $\alpha$  est un paramètre réel

ou

$$R_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! \Gamma(-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{-\alpha-1} g(\tau) d\tau \int_\tau^x f^{(n+1)}(t) (\tau-t)^n dt$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^\alpha(x) = 0$$

alors, on a une généralisation de la règle de Leibniz d'ordre fractionnaire.

### Remarque

On remarque l'absence de la généralisation pour la dérivée du produit, et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(f.g) \neq f \frac{d^\alpha g}{dx^\alpha} + g \frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}(f \circ g) \neq \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(g).g'$$

### Non-commutativité

En général, les dérivées fractionnaires ne commutent pas ; c.à.d

$$D_a^\alpha D_a^m f(x) \neq D_a^m D_a^\alpha f(x)$$

ou

$$n - 1 < \alpha < n, \quad m, n \in \mathbb{N}^*$$

### Preuve

Il suffit de prendre un contre exemple.

Par exemple pour la dérivation fractionnaire au sens de Caputo,

on prend  $m = 1$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $f(x) = x$

alors on obtient

$${}_0^c D_x^\alpha D^m f(x) = {}_0^c D_x^\alpha 1 = 0$$

et

$$D^m {}_0^c D_x^\alpha f(x) = D \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

□

## 2.2.5 Relation entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Reimann-Liouville

**Théorème 2.2.1** *La dérivée fractionnaire de Reimann-Liouville d'ordre  $\alpha$ , avec  $n - 1 < \alpha < n$  d'une fonction puissance  $f(x) = x^p$  pour  $p \geq n$  est donnée par*

$${}_0^{RL} D_x^\alpha x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}$$

### Preuve

$${}_0^{RL} D_x^\alpha x^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^p dt$$

en faisant un changement de variable  $t = \lambda x$



on aura

$$\begin{aligned}
{}_0^{RL}D_x^\alpha x^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x (x(1-\lambda))^{n-\alpha-1} (\lambda x)^p x d\lambda \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} x^{n-\alpha+p} \int_0^x (1-\lambda)^{n-\alpha-1} \lambda^p d\lambda \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)\beta(n-\alpha, p+1)}{\Gamma(n-\alpha)} x^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(n-\alpha+p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha+p+1)} x^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} x^{p-\alpha}.
\end{aligned}$$

□

Par exemple lorsque on prend  $p = 1$ ,  $f(x) = x$ ,  $\alpha = 0.5$ , on obtient

$${}_0^{RL}D_x^\alpha x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} x^{1-\alpha} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \sqrt{x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

**Théorème 2.2.2** Soit  $x > 0$ , avec  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , alors la relation entre l'opérateur de Reimann-Liouville et de Caputo est donnée par

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = {}_0^{RL} D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0).$$

**Preuve** On considère le DL en série de Taylor de fonction  $f$  au point  $x = 0$ .

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}$$

avec

$$R_{n-1} = \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = I^n f^{(n)}(x)$$

d'où, en utilisant la linéarité de l'opérateur Reimann-Liouville, on a

$$\begin{aligned} {}_0^{RL}D_x^\alpha f(x) &= D^\alpha \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^\alpha x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^\alpha R_{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + D^\alpha I^n f^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + I^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + {}^c D_x^\alpha f(x) \end{aligned}$$

d'où

$${}^c D_x^\alpha f(x) = {}_0^{RL}D_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0).$$

□

### Remarque

La dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  au sens de Caputo est égale à celle de Reimann-Liouville si pour  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$f^{(k)}(0) = 0,$$

c.à.d

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = {}_0^{RL} D_x^\alpha f(x),$$

cette formule implique que les opérateurs fractionnaires de Caputo et de Reimann-Liouville coïncident, si est seulement si  $f(x)$  en même temps que les premiers  $n - 1$  dérivées sont nulles au point  $x = 0$ .

### 2.2.6 Comparaisons entre les définitions de dérivée fractionnaire

1) L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme que celle des équations différentielles d'ordre entier, i.e contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en la base inférieur  $x = a$ .

2) La propriété la plus remarquable est le cas d'une fonction constante

La dérivée de Riemann-Liouville d'une fonction constante  $f(x) = C$  n'est pas nulle.

La dérivée de Caputo d'une fonction constante  $f(x) = C$  est nulle.

La dérivée de Crünwald-Letnikov d'une fonction constante  $f(x) = C$  est ni nulle, ni constante.

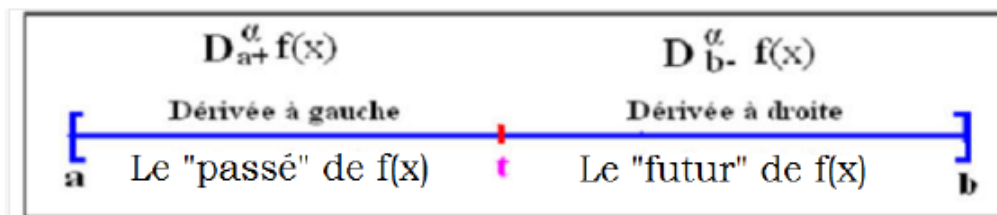
### 2.2.7 Dérivée à gauche et à droite

Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[a, b]$ , on considère que les dérivées fractionnaires avec la borne inférieure  $a$  fixée et faisant varier la borne supérieure  $x$  ( $a < x$ ), on peut considérer des dérivées fractionnaires en faisant varier la borne inférieure  $x$  tout en fixant la borne supérieure  $b$ .

La dérivée fractionnaire avec la borne inférieure à l'extrémité gauche de l'intervalle  $[a, b]$  est appelée la dérivée fractionnaire à gauche. La dérivée fractionnaire avec la borne supérieure à l'extrémité droite de l'intervalle  $[a, b]$  est appelée la dérivée fractionnaire à droite.

Les dérivées fractionnaires à gauche et à droite peuvent être considérées de points de vue physique et mathématique.

Et parfois l'interprétation physique suivante de la dérivée à droite et à gauche est utile.



Supposons que  $x$  est le temps, et que  $f(x)$  décrit un certain processus dynamique qui évolue en fonction du temps.

Si on prend  $s < x$ , ou  $x$  est le moment présent, alors l'état  $f(s)$  du processus  $f$  appartient au passé du processus.

Si on prend  $s > x$ ,  $f(s)$  appartient au futur du processus de  $f$ . De ce point de vue la dérivée à gauche est une opération exécutée dans les états passés du processus  $f$  et la dérivée à droite est une opération exécutée dans les états futurs du processus  $f$ .

**Définition 2.2.3** (*Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche et à droite*)

Soit  $0 < \alpha$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur  $[a, b]$ , les dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite d'ordre  $\alpha$ , notées respectivement par  ${}_0^c D_x^\alpha$  et  ${}_x^c D_b^\alpha$  Elles sont définies par

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad n-1 < \alpha < n$$

et

$${}_x^c D_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt, \quad n-1 < \alpha < n$$

avec  $n$  un entier positif vérifiant l'inégalité

$$n-1 < \alpha < n.$$

### 2.2.8 Méthode des différences finies cas fractionnaire

Pour le cas fractionnaire, On définit les schémas  $L_n$ , pour  $n = 1, 2$ .

Le but de ces algorithmes est pour approcher  $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ ,  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

#### Le schéma relatif à Grünwald-Letnikov

Le schéma relatif à Grünwald-Letnikov en se basant sur ([7], [8]et[9]).

Soient  $(k + 1)$  points uniformément espacés dans l'intervalle  $[0, x]$ ,  $h = x/k$ .

On va calculer  $\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$ ,  $\alpha \in [0, 2]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , on note

$$f_j = f\left(x - j\frac{x}{k}\right)$$

$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}$  est donnée aux sens de Reimann-Liouville.

Ces schémas sont basé sur la dérivation de Grünwald-Letnikov.

Pour  $\alpha$  fixé entre  $[0, 1]$ , On a l'algorithme standard de Grünwald- Letnikov

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = \lim_{k \rightarrow \infty} (x/k)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} f\left(x - j\frac{x}{k}\right)$$

en considérant

$$\begin{aligned} d^\alpha f dx^\alpha &\simeq \left(\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}\right) = (x/k)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} f\left(x - j\frac{x}{k}\right) \\ &= (x/k)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} f_j \dots (2.2). \end{aligned}$$

On peut écrire (2.2) sous la forme

$$\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha} = \sum_{j=0}^{k-1} b_j f_j$$

avec

$$b_j = h^{-\alpha} c_j, \quad c_j = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)}$$

et  $c_j$  vérifie la formule de récurrence suivante

$$c_0 = 1, \quad c_j = \left(1 - \frac{1 + \alpha}{j}\right) c_{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

pour  $\alpha$  fixé entre  $[1, 2]$ , On a le schéma relatif à Grünwald-Letnikov est s'écrit

$${}^{\text{GL}}D_x^\alpha f(x) \simeq (x/k)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} c_j f\left(x - (j-1)\frac{x}{k}\right)$$

$${}^{\text{GL}}D_x^\alpha f(x) \simeq \left(\frac{d^\alpha f}{dx^\alpha}\right) = (x/k)^{-\alpha} \sum_{j=0}^{k+1} c_j f_{k-j+1}$$

### Les schémas relatifs à Caputo

#### Shéma relatif à Caputo $L_1$

Pour  $n = 1$ , donc  $0 < \alpha < 1$ ,  $x \in [0, T]$

$${}^cD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x f'(t)(x - t)^{-\alpha} dt.$$

Faisons une subdivision uniforme de l'intervalle  $[0, T]$  comme suit

$$x_k = kh_x, \quad k = 1 \dots M, \quad f_{j+1} = f(x_j + h_x), \quad f_j = f(x_j), \quad f'(x_j) = \frac{f_{j+1} - f_j}{h_x} + 0(h)$$

$${}^cD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x - t)^\alpha} dt$$

on pose

$$x - t = z \implies t = x - z \implies dt = -dz$$

alors

$$\begin{aligned}
{}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^0 \frac{f'(x-z)}{(z)^\alpha} (-dz) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(x-z)}{z^\alpha} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_0^{h_x} \frac{f'(x-z)}{z^\alpha} dz + \int_{h_x}^{2h_x} \frac{f'(x-z)}{z^\alpha} dz + \dots + \int_{(k-1)h_x}^{kh_x} \frac{f'(x-z)}{z^\alpha} dz \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{f(x-h_x) - f(x)}{h_x} \int_0^{h_x} \frac{1}{z^\alpha} dz + \frac{f(x-2h_x) - f(x-h_x)}{h_x} \int_{h_x}^{2h_x} \frac{1}{z^\alpha} dz + \dots \right. \\
&\quad \left. + \frac{f(x-kh_x) - f(x-(k-1)h_x)}{h_x} \int_{(k-1)h_x}^{kh_x} \frac{1}{z^\alpha} dz \right]
\end{aligned}$$

alors

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x-(j+1)h_x) - f(x-jh_x)}{h_x} \int_{jh_x}^{(j+1)h_x} \frac{1}{z^\alpha} dz$$

et On a que

$$\int_{jh_x}^{(j+1)h_x} \frac{1}{z^\alpha} dz = \int_{jh_x}^{(j+1)h_x} z^{-\alpha} dz = \left[ \frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_{jh_x}^{(j+1)h_x} = \frac{1}{1-\alpha} [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] h_x^{1-\alpha}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
{}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x-(j+1)h_x) - f(x-jh_x)}{h_x} \left( \frac{1}{1-\alpha} [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}] h_x^{1-\alpha} \right) \\
&= \frac{h_x^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} [f(x-jh_x) - f(x-(j+1)h_x)] [(j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}]
\end{aligned}$$

alors

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{h_x^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (f_{k-j} - f_{k-(j+1)}) d_j$$

tel que

$$d_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

**Exemple**

$$f(x) = x^2, \quad n = 1, \quad \alpha = 0.5.$$

D'une part, On a

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-0.5)} \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{0.5}} dt = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^x \frac{2t}{(x-t)^{0.5}} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x 2t(x-t)^{-0.5} dt$$

on utilise l'I.P.P

$$\begin{cases} u = 2t, & u' = 2 \\ v' = (x-t)^{-0.5}, & v = -2(x-t)^{0.5} \end{cases}$$

alors

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ 0 + 4 \int_0^x (x-t)^{0.5} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ 4 \left[ -\frac{1}{0.5+1} (x-t)^{0.5+1} \right]_0^x \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{8}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]$$

pour  $x = 1$

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \simeq 1.5045.$$

D'autre part, par l' application de schéma  $L_1$ , On trouve

$$\begin{aligned} {}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{h_x^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (f_{k-j} - f_{k-(j+1)}) d_j \\ &= \frac{h_x^{-\alpha}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sum_{j=0}^{k-1} [(x-jh_x)^2 - (x-(j+1)h_x)^2] d_j \end{aligned}$$

si on prend

$$k = 100, \quad x = kh_x = 1, \quad \text{donc } h_x = \frac{1}{100}, \quad \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{100^{-0.5}}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sum_{j=0}^{99} \left[ \left(1 - j\frac{1}{100}\right)^2 - \left(1 - (j+1)\frac{1}{100}\right)^2 \right] [(j+1)^{0.5} - j^{0.5}] \simeq 1.5040.$$



Shéma relatif à Caputo  $L_2$ 

Pour  $n = 2$ , donc  $1 < \alpha < 2$ ,  $x \in [0, T]$

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x f''(t)(x-t)^{\alpha-1} dt.$$

Faisons une subdivision uniforme de l'intervalle  $[0, T]$  comme suit

$$x_k = kh_x, \quad k = 1 \dots M, \quad f_{j+1} = f(x_j + h_x), \quad f_j = f(x_j)$$

on pose

$$x - t = z \implies t = x - z \implies dt = -dz$$

alors

$$\begin{aligned} {}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_x^0 \frac{f''(x-z)}{z^{\alpha-1}} (-dz) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x \frac{f''(x-z)}{z^{\alpha-1}} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \int_0^{h_x} \frac{f''(x-z)}{z^{\alpha-1}} dz + \int_{h_x}^{2h_x} \frac{f''(x-z)}{z^{\alpha-1}} dz + \dots + \int_{(k-1)h_x}^{kh_x} \frac{f''(x-z)}{z^{\alpha-1}} dz \right] \end{aligned}$$

et par l'utilisation de la formule de schéma centré aux différences finie d'ordre 2 de  $f''$ , on obtient

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x - (j+1)h_x) - 2f(x - jh_x) + f(x - (j-1)h_x)}{h_x^2} \int_{jh_x}^{(j+1)h_x} \frac{1}{z^{\alpha-1}} dz$$

et on que

$$\int_{jh_x}^{(j+1)h_x} \frac{1}{z^{\alpha-1}} dz = \int_{jh_x}^{(j+1)h_x} z^{1-\alpha} dz = \left[ \frac{z^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{jh_x}^{(j+1)h_x} = \frac{1}{2-\alpha} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] h_x^{2-\alpha}$$

alors

$$\begin{aligned}
{}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x-(j+1)h_x) - 2f(x-jh_x) + f(x-(j-1)h_x)}{h_x^2} \\
&\quad \left( \frac{1}{2-\alpha} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] h_x^{2-\alpha} \right), \\
&= \frac{h_x^{-\alpha}}{(2-\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} f(x-(j+1)h_x) - 2f(x-jh_x) + f(x-(j-1)h_x) [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}]
\end{aligned}$$

donc

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{h_x^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (f_{k-(j+1)} - 2f_{k-j} + f_{k-(j-1)}) d_j$$

avec

$$1 < \alpha < 2, \quad d_j = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k-1.$$

### Exemple

$$f(x) = x^2, \quad n = 2, \quad \alpha = 1.5.$$

D'une part, On a

$$\begin{aligned}
{}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x \frac{f''(t)}{(x-t)^{\alpha-1}} dt = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^x 2(x-t)^{-0.5} dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x (x-t)^{-0.5} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} [-2(x-t)^{\frac{1}{2}}]_0^x = \frac{4}{\sqrt{\pi}} [x^{\frac{1}{2}}]
\end{aligned}$$

pour  $x = 1$

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \simeq 2.2567.$$

D'autre part, par l'application de schéma  $L_2$  relatif à Caputo, on trouve

$$\begin{aligned}
{}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{h_x^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} (f_{k-(j+1)} - 2f_{k-j} + f_{k-(j-1)}) d_j \\
&= \frac{h_x^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} [(x-(j+1)h_x)^2 - 2(x-jh_x)^2 + (x-(j-1)h_x)^2] d_j
\end{aligned}$$

Si on prend

$$k = 100, \quad x = kh_x, \quad \text{donc } h_x = \frac{1}{100}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\begin{aligned}
{}_0^c D_x^\alpha f(x) &= \frac{\frac{1}{100}^{-1.5}}{\Gamma(3-1.5)} \sum_{j=0}^{99} \left( f\left(x - \frac{j+1}{100}\right) - 2f\left(x - \frac{j}{100}\right) + f\left(x - \frac{j-1}{100}\right) \right) [(j+1)^{\frac{1}{2}} - j^{\frac{1}{2}}] \\
&= \frac{1000}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{99} \left[ \left(x - \frac{j+1}{100}\right)^2 - 2\left(x - \frac{j}{100}\right)^2 + \left(x - \frac{j-1}{100}\right)^2 \right] [(j+1)^{\frac{1}{2}} - j^{\frac{1}{2}}]
\end{aligned}$$

pour  $x = 1$

$${}_0^c D_x^\alpha f(x) \simeq 2.2567$$

# Chapitre 3

## Application et simulation

Dans ce chapitre, on va illustrer un exemple d'E.D.P fractionnaire par l'utilisation de notre méthode (méthode de différence finie fractionnaire), et on va appliquer le schéma numérique  $L_2$  de Caputo, ainsi on va montrer la stabilité et la convergence de ces schémas.

Enfin, la résolution numérique sera faite sur le logiciel "Matlab".

### 3.1 Introduction

Les dérivées fractionnaires ont trouvées de nouvelles applications dans l'ingénierie, la physique, la finance et l'hydrologie ([13])..., la théorie du calcul fractionnaire est un outil mathématique utile pour la science appliquée. Malgré ça, il est difficile à résoudre et ce n'est qu'au cours des dernières décennies que les chercheurs ont été motivés à appliquer les concepts associés.

Podlubny ([21]) a introduit une interprétation géométrique simple de plusieurs types d'intégration d'ordre fractionnaire et a proposé une interprétation physique de l'intégration fractionnaire en termes d'échelle de temps non homogène et changeante (non statique, dynamique).

Machado ([14]) a présenté une interprétation probabiliste de la dérivée d'ordre fractionnaire.

L'équation de diffusion fractionnaire spatiale (EDFS) est obtenue à partir de l'équation de diffusion classique en remplaçant la dérivée seconde spatiale par une dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$ ,  $1 < \alpha < 2$ . Les équations de diffusion fractionnaire spatiale ont été étudiées par

West et Seshadri ([22]) et plus récemment par Gorenflo et Mainardi ([15], [17]). Mais les méthodes numériques et l'analyse de ces équations fractionnaires sont des tâches très difficiles.

Plusieurs méthodes numériques différentes pour résoudre les équations aux dérivées partielles ont été proposées.

Meerschaert et al. ([16], [18], [19]) ont proposés des approximations aux différences finies pour les équations de flux d'advection-dispersion fractionnaires.

## 3.2 L'équation de diffusion classique

Diffusion est un processus de transport fondamental dans la mécanique des fluides environnementale.

L'équation de diffusion est une équation aux dérivées partielles, elle a donné par

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$d$  est le coefficient de diffusion.

$f(x, t)$  représente la source, par exemple elle représente une source thermique dans un problème de diffusion thermique.

## 3.3 L'équation d'advection-dispersion fractionnaire

Advection est le transport d'une quantité d'un élément donné par le mouvement (vitesse) du milieu environnant, elle courante en mécanique des fluides.

Dispersion est une variation statistique de mesure.

L'équation d'advection-dispersion fractionnaire est utilisée dans l'hydrologie souterraine pour modéliser le transport des solutés dans des milieux poreux saturé, elle a donné par

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}, \quad 1 \leq \alpha < 2$$

$u$  est la concentration de soluté.

$d \geq 0$  est le coefficient de dispersion.

$v \geq 0$  est la vitesse moyenne de fluide.

### 3.4 Application

On considère l'équation de diffusion fractionnaire spatiale (EDFS) avec conditions aux bord de type Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d(x) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} + f(x, t), & 0 < x < L, t \geq 0, 1 \leq \alpha < 2 & (1) \\ u(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq L & (2) \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0, & t \in [0, T] & (3) \end{cases}$$

tel que

$d > 0$  est le coefficient de diffusion.

$f$  est le second membre qui est une fonction continue appartenant au même espace de solution.

$\psi$  représente la condition initiale.

$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x}, \frac{\partial u(L, t)}{\partial x}$  représentent les conditions de Neumann.

$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha}$  est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de Caputo qui définie par ([13]),

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = {}_0^c D_x^\alpha u(x) = \begin{cases} \frac{\partial^n u(x)}{\partial x^n}, \alpha = n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^x (x - \xi)^{n - \alpha - 1} \frac{\partial^n u(\xi)}{\partial \xi^n} d\xi, n - 1 < \alpha < n & (4) \end{cases}$$

tel que  $\Gamma$  est la fonction de Gamma.

### 3.4.1 Approximation explicite des différences finies pour EDFs

La méthode de différence finie est l'une des plus anciennes méthodes qui permet de calculer numériquement la solution des équations différentielles, cette méthode consiste à approcher la dérivée d'une fonction  $u$  par une combinaison linéaire de points, proviennent de la discrétisation du domaine d'étude, donc on va réduire le problème au limite continue en un système d'équation algébrique.

D'abord, on cherche à calculer une solution approchée en un nombre finie de points  $(x_j, t_n)$  du domaine espace-temps  $[0, L] \times [0, T]$ .

Supposons que  $h = \frac{x}{k}$ ,  $k$  est un entier positif, en utilisant une différence de second ordre d'approximation, on trouve

$${}_0^c D_x^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-\xi)^{\alpha-1}} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial \xi^2} d\xi$$

on fait une subdivision uniforme de l'intervalle  $[0, T]$

on pose

$$x - \xi = z \implies \xi = x - z \implies d\xi = -dz$$

alors

$$\begin{aligned} {}_0^c D_x^\alpha u(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_x^0 \frac{\partial^2 u(x-z, t)}{z^{\alpha-1} \partial^2 z^2} (-dz) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^x z^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x-z, t)}{\partial^2 z^2} dz \\ &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \int_0^h \partial^2 u(x-z, t) z^{1-\alpha} dz + \int_h^{2h} z^{1-\alpha} \partial^2 u(x-z, t) dz \right. \\ &\quad \left. \dots + \int_{(k-1)h}^{kh} z^{1-\alpha} \partial^2 u(x-z, t) dz \right] \end{aligned}$$

et par l'utilisation de schéma centré aux différences finies d'ordre 2 de  $u''$ , on obtient

$${}^c_0D_x^\alpha u(x, t) \simeq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{u(x-(j-1)h, t) - 2u(x-jh, t) + u(x-(j+1)h, t)}{h^2} \int_{jh}^{(j+1)h} z^{1-\alpha} dz$$

et on a

$$\int_{jh}^{(j+1)h} z^{1-\alpha} dz = \frac{1}{2-\alpha} [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] h^{2-\alpha}$$

donc

$$\begin{aligned} {}^c_0D_x^\alpha u(x, t) &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} [u(x-(j-1)h, t) - 2u(x-jh, t) + u(x-(j+1)h, t)] \\ &\quad \times [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] \quad (5) \end{aligned}$$

Soient  $k, M$  deux entiers finis, on fait une subdivision uniforme des intervalles  $[0, L]$  et  $[0, T]$

comme suit

$t_n = n\tau$  est le point de grille de la discrétisation de temps sur l'intervalle  $[0, T]$

avec

$$0 \leq t_n \leq T, \quad n = 0, \dots, M, \quad \tau = \frac{T}{M}, \quad t_M = T$$

et  $\Delta t = \tau > 0$  est le pas de temps.

$x_j = jh$  est le point de grille de la discrétisation spatiale  $[0, L]$

avec

$$0 \leq x_j \leq L, \quad j = 0, \dots, k, \quad h = \frac{L}{K}, \quad x_K = L$$

et  $\Delta x = h > 0$  est le pas de l'espace.

soient aussi  $u = u(x, t) = u(kh, n\tau) = u_k^n$

ou

$$u_0^n = u(0, n\tau), \quad u_1^n = u(h, n\tau), \dots, \quad u_{k-j}^n = u((k-j)h, n\tau), \dots, \quad u_j^n = u(jh, n\tau)$$

et

$$d_j = d(x_j), \quad \psi_j = \psi(x_j), \quad f_j = f(x_j, t).$$

Maintenant, on approche EDFs (1), en utilisant une approximation explicite de différence



finie.

Par l'utilisation de schéma avant aux différence finie d'ordre 1 de  $u'_{k,n}$

$$u'_{k,n} = \frac{\partial u_k^n}{\partial t} = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau}$$

et par l'utilisation de schéma relatif à Caputo  $L_2$

$$\frac{\partial^\alpha u_k^n}{\partial x^\alpha} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} [u_{k-j-1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j+1}^n] \cdot [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}]$$

en substituant en (1) au point  $(j, n)$ , alors

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = \frac{d_k h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} [u_{k-j-1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j+1}^n] \cdot [(j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha}] + f_k^n \quad (6)$$

on peut écrire l'équation (6) par

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= b_k \sum_{j=0}^{k-1} [u_{k-j-1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j+1}^n] + u_k^n + \tau f_k^n \\ &= b_k u_{k+1}^n + (1 - 2b_k)u_k^n + b_k u_{k-1}^n + b_k \sum_{j=1}^{k-1} g_j [u_{k-j-1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j+1}^n] + \tau f_k^n \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$b_k = \frac{\tau d_k}{h^\alpha \Gamma(3-\alpha)}, \quad g_k = (k+1)^{2-\alpha} - k^{2-\alpha}$$

pour  $k = 1$

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} &= b_1 u_2^n + (1 - 2b_1)u_1^n + b_1 u_0^n = b_1 u_2^n + (1 - 2b_1)u_1^n + b_1 u_1^n + \tau f_1^n \\ &= (1 - b_1)u_1^n + b_1 u_2^n + \tau f_1^n \end{aligned}$$

pour  $k = 2$

$$\begin{aligned} u_2^{n+1} &= b_2 u_3^n + (1 - 2b_2)u_2^n + b_2 u_1^n + b_2 [g_1 (u_2^n - 2u_1^n + u_0^n)] + \tau f_2^n \\ &= b_2 (1 - g_1) + (1 - b_2 (2 - g_1))u_2^n + b_3 u_3^n + \tau f_2^n. \end{aligned}$$

.

.

.

pour  $k - 1$

$$\begin{aligned}
u_{k-1}^{n+1} &= b_{k-1}u_k^n + (1 - 2b_{k-1})u_{k-1}^n + b_{k-1}u_{k-2}^n + b_{k-1} \sum_{j=1}^{k-2} g_j [u_{k-j-2}^n - 2u_{k-j-1}^n + u_{k-j}^n] + \tau f_{k-1}^n \\
&= b_{k-1}(u_{k-2}^n - u_{k-1}^n) + u_{k-1}^n + b_{k-1} \sum_{j=1}^{k-2} g_j [u_{k-j-2}^n - 2u_{k-j-1}^n + u_{k-j}^n], \text{ car } : u_k^n = u_{k-1}^n + \tau f_{k-1}^n \\
&= u_{k-1}^n [1 - b_{k-1}(1 - g_1)] + b_{k-1} [u_{k-2}^n (g_2 - 2g_1) + u_{k-3}^n (g_1 - 2g_2 + g_3) + u_{k-4}^n (g_2 - 2g_3 + g_4) \\
&\quad + \dots + u_3^n (g_{k-5} - 2g_{k-4} + g_{k-3}) + u_2^n (g_{k-4} - 2g_{k-3} + g_{k-2}) + u_1^n (g_{k-3} - g_{k-2})] + \tau f_{k-1}^n
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
u_{k-1}^{n+1} &= u_{k-1}^n (1 - b_{k-1}(1 - g_1)) + u_{k-2}^n (b_{k-1}(g_2 - 2g_1)) + u_{k-3}^n (b_{k-1}(g_1 - 2g_2 + g_3)) + \dots \\
&\quad + u_3^n (b_{k-1}(g_{k-5} - 2g_{k-4} + g_{k-3}) + u_2^n (b_{k-1}(g_{k-4} - 2g_{k-3} + g_{k-2}) + u_1^n (b_{k-1}(g_{k-3} - g_{k-2}))) + \tau f_{k-1}^n
\end{aligned}$$

équation (7) avec les conditions aux limites ( $u_0^n = u_1^n, u_{k-1}^n = u_k^n$ ) donne le système linéaire suivant

$$U^{n+1} = AU^n + B \quad (8)$$

on pose

$$U^{n+1} = (u_1^{n+1}, \dots, u_{k-1}^{n+1})^T, \quad U^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{k-1}^n)^T, \quad B = (\tau f_1^n, \dots, \tau f_{k-1}^n)^T$$

et  $A = (a_{ij})_{k-1 \times k-1}$  est une matrice carrée définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ si } j \geq i + 2 \\ b_i & , \text{ si } j = i + 1 \\ 1 - b_i(2 - g_1) & , \text{ si } j = i = 2, 3, \dots, k - 2 \\ b_i(1 - 2g_1 + g_2) & , \text{ si } j = i - 1 \\ b_i(g_{i-j-1} - 2g_{i-j} + g_{i-j+1}) & , \text{ si } j \leq i - 2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{et } \begin{cases} a_{11} = 1 - b_1, \quad a_{21} = b_2(1 - g_1), \quad a_{k-1, k-1} = 1 - b_{k-1}(1 - g_1) \\ a_{i1} = b_i(g_{i-2} - g_{i-1}), \quad \text{pour } 3 \leq i \leq k - 1 \end{cases}$$

avec

$$i = 1 \dots k - 1, \quad j = 1 \dots k - 1$$

i.e

$$A = \begin{pmatrix} 1 - b_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2(1 - g_1) & 1 - b_2(2 - g_1) & b_2 & \dots & 0 \\ b_3(g_1 - g_2) & b_3(1 - 2g_1 + g_2) & 1 - b_3(2 - g_1) & \dots & 0 \\ b_4(g_2 - g_3) & b_4(g_1 - 2g_2 + g_3) & b_4(1 - 2g_1 + g_2) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b_{k-1}(g_{k-3} - g_{k-2}) & b_{k-1}(g_{k-4} - 2g_{k-3} + g_{k-2}) & b_{k-1}(g_{k-5} - 2g_{k-4} + g_{k-3}) & \dots & 1 - b_{k-1}(2 - g_1) \end{pmatrix}$$

### 3.4.2 Analyse de stabilité de AEDF

**Lemme 3.4.1** Soient  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\rho(A)$  est le rayon spectrale de la matrice  $A$ , alors pour tout nombre positive  $\varepsilon$ , il existe une norme  $\|\cdot\|_m$  de la matrice  $A$ , tel que  $\|A\|_m \leq \rho(A) + \varepsilon$ .

**Preuve** voir ([23])

□

**Lemme 3.4.2** Le schéma de différence finie explicite (6) pour (1)–(3) est conditionnellement stable.

**Preuve**

Soit  $\lambda$  une valeur propre de la matrice  $A$  au système linéaire d'équation (8) de sorte que  $Ax = \lambda x$  pour une vecteur non nuls  $x$ .

Choisissez  $i$  de telle sorte que

$$|x_i| = \max |x_j|, \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

alors

$$\sum_{j=1}^{k-1} a_{ij} x_j = \lambda x_i$$

et donc

$$\lambda = a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^{k-1} a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \quad (11)$$

en substituant la valeur de  $a_{ij}$  en (11), on obtient

1) Pour  $i = 1$

d'une part, on a

$$\lambda = 1 - b_1 + b_1 \frac{x_2}{x_1} \leq 1$$

car

$$\frac{x_2}{x_1} \leq 1 \implies -1 + \frac{x_2}{x_1} \leq 0 \implies b_1(-1 + \frac{x_2}{x_1}) \leq 0 \implies 1 - b_1 + b_1 \frac{x_2}{x_1} \leq 1.$$

D'ou

$$\lambda \leq 1$$

d'autre part, on a

$$\lambda = 1 - b_1 + b_1 \frac{x_2}{x_1} \geq 1 - 2b_1$$

car

$$\frac{x_2}{x_1} \geq -1 \implies -1 + \frac{x_2}{x_1} \geq -2 \implies b_1(-1 + \frac{x_2}{x_1}) \geq -2b_1 \implies 1 + b_1(-1 + \frac{x_2}{x_1}) \geq 1 - 2b_1.$$

D'ou

$$\lambda \geq 1 - 2b_1$$

si  $b_1 \leq 1$ ,  $\lambda \geq 1$ , alors on déduit que

$$|\lambda| \leq 1$$

2) Pour  $2 \leq i \leq k - 2$

si  $i = 2$

$$\begin{aligned} \lambda &= a_{22} + \sum_{j=1, j \neq i}^{k-1} a_{2j} \frac{x_j}{x_2} \\ &= 1 - b_2(2 - g_1) + [b_2(1 - g_1) \frac{x_1}{x_2} + b_3 \frac{x_3}{x_2}] \end{aligned}$$

.

.

.

si  $i = k - 2$

$$\begin{aligned}\lambda &= a_{k-2,k-2} + \sum_{j=1, j \neq i}^{k-3} a_{k-2,j} \frac{x_j}{x_{k-2}} \\ &= 1 - b_{k-2}(2 - g_1) + [b_{k-2}(g_{k-4} - 2g_{k-3} + g_{k-2}) \frac{x_1}{x_{k-2}} + b_{k-2}(g_{k-5} - 2g_{k-4} + g_{k-3}) \frac{x_2}{x_{k-2}} + \dots + b_{k-2}].\end{aligned}$$

Donc

$$\lambda = 1 - b_i(2 - g_1) + b_i \frac{x_{i+1}}{x_i} + b_i \sum_{j=1}^{i-1} (g_{i-j-1} - 2g_{i-j} + g_{i-j+1}) \frac{x_j}{x_i} + b_i (g_{i-2} - g_{i-1}) \frac{x_1}{x_i} \quad (12)$$

on note que

pour  $j = 1, 2, \dots, i - 1$ ,  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ , on a  $g_i > g_{i+1} > 0$ ,  $g_{i-j-1} - 2g_{i-j} + g_{i-j+1} > 0$

alors

$$\sum_{j=1}^{i-1} (g_{i-j-1} - 2g_{i-j} + g_{i-j+1}) \frac{x_j}{x_i} = \left\{ \begin{array}{l} (g_{i-3} - 2g_{i-2} + g_{i-1}) \frac{x_2}{x_i} \\ + \\ (g_{i-4} - 2g_{i-3} + g_{i-2}) \frac{x_3}{x_i} \\ + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + \\ (g_0 - 2g_1 + g_2) \frac{x_{i-1}}{x_i} \end{array} \right.$$

alors

$$\sum_{j=1}^{i-1} (g_{i-j-1} - 2g_{i-j} + g_{i-j+1}) \frac{x_j}{x_i} = (g_{i-1} - g_{i-2}) \frac{x_2}{x_i} + g_0 \frac{x_{i-1}}{x_i} - g_1 \frac{x_{i-1}}{x_i}$$

et comme

$$\frac{x_j}{x_i} \leq 1$$

alors

$$\sum_{j=1}^{i-1} (g_{i-j-1} - 2g_{i-j} + g_{i-j+1}) \frac{x_j}{x_i} \leq g_{i-1} - g_{i-2} + g_0 - g_1.$$

Puisque  $b_i$  sont des nombres réels non négatifs de l'équations (12), on peut obtenir d'une part

$$\lambda \leq 1 - b_i(2 - g_1) + b_i + b_i(g_{i-1} - g_{i-2} + g_0 - g_1) + b_i(g_{i-1} - g_{i-2}) = 1$$

car

$$\lambda \leq 1 + b_i(-2 + g_1 + 1 + g_{i-1} - g_{i-2} + g_0 - g_1 - g_{i-1} + g_{i-2}) = 1 + b_i(-1 + g_0) = 1 + 0 = 1$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \lambda &\geq 1 - b_i(2 - g_1) - b_i - b_i(g_{i-1} - g_{i-2} + g_0 - g_1) - b_i(g_{i-1} - g_{i-2}) \\ &\geq 1 - b_i(3 + g_0 - 2g_1), \text{ car : } g_0 = 1 \\ &\geq 1 - 2b_i(2 - g_1) \end{aligned}$$

d'ou

$$\lambda \geq 1 - 2b_i(2 - g_1)$$

si  $b_i(2 - g_1) \leq 1$ ,  $\lambda \geq -1$ , alors on déduit que

$$|\lambda| \leq 1$$

3) Pour  $i = k - 1$

$$\lambda = 1 - b_{k-1}(1 - g_1) + b_{k-1} \sum_{j=2}^{i-1} (g_{i-j-1} - 2g_{i-j} + g_{i-j+1}) \frac{x_j}{x_i} + b_{k-1}(g_{i-2} - g_{i-1}) \frac{x_1}{x_i} \quad (13)$$

et comme

$$\sum_{j=2}^{i-1} (g_{i-j-1} - 2g_{i-j} + g_{i-j+1}) \frac{x_j}{x_i} \leq g_{i-1} - g_{i-2} + g_0 - g_1$$

alors, d'une part

$$\lambda \leq 1 - b_{k-1}(1 - g_1) + b_{k-1}(g_{i-1} - g_{i-2} + g_0 - g_1) + b_{k-1}(g_{i-2} - g_{i-1}) = 1$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\lambda &\geq 1 - b_{k-1}(1 - g_1) - b_{k-1}(g_{i-1} - g_{i-2} + g_0 - g_1) - b_{k-1}(g_{i-2} - g_{i-1}) \\
&\geq 1 - b_{k-1}(1 - g_1 + g_{i-1} - g_{i-2} + g_0 - g_1 - g_{i-1} + g_{i-2}) \\
&\geq 1 - b_{k-1}(2 - 2g_1) \geq 1 - 2b_{k-1}(1 - g_1)
\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda \geq 1 - 2b_{k-1}(1 - g_1)$$

par la combinaison de 1, 2 et 3, on a que

si  $\max_{2 \leq i \leq k-2} b_i, b_i(2 - g_1), b_{k-1}(1 - g_1) \leq 1$ . Le rayon spectrale  $\rho(A)$  de la marice satisfie  $\rho(A) \leq 1$ .

Et d'après le lemme 1

Si  $\max_{2 \leq i \leq k-2} b_i, b_i(2 - g_1), b_{k-1}(1 - g_1) \leq 1$ , il existe  $\varepsilon \geq 0, \varepsilon \leq C\tau$ , tel que

$$\|A\|_m \leq \rho(A) + C\tau \leq 1 + \mathcal{O}(\tau)$$

Par conséquent (6) est conditionnlllement stable . □

## Analyse de convergence de AEDF

**Lemme 3.4.3** *Soit*

$$\overline{{}_0^c D_x^\alpha u(x, t)} = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3 - \alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j [u_{k-j+1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j-1}^n]$$

*une fonction suffisamment régulière , alors*

$${}_0^c D_x^\alpha u(x, t) = \overline{{}_0^c D_x^\alpha u(x, t)} + \mathcal{O}(h).$$

### Preuve

Par la formule de schéma centré aux différence finie, on a

$$u_{k-j}^n = \frac{u_{k-j+1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j-1}^n}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\begin{aligned}
\overline{{}_0^c D_x^\alpha u(x, t)} &= \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j [(u_{k-j+1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j-1}^n) \cdot \frac{h^2}{h^2}] \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \left[ \frac{\partial^2 u(x-jh, t)}{\partial z^2} + \mathcal{O}(h^2) \right] \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \frac{\partial^2 u(x-jh, t)}{\partial z^2} + \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \frac{\partial^2 u(x-jh, t)}{\partial z^2} + \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} [(j+1)^{2-\alpha} + j^{2-\alpha}] \mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \frac{\partial^2 u(x-jh, t)}{\partial z^2} + \frac{h^{2-\alpha} k^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \frac{\partial^2 u(x-jh, t)}{\partial z^2} + \frac{x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \frac{\partial^2 u(x-jh, t)}{\partial z^2} + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

par le théorème de la valeur moyenne intégrale, on a

$$\begin{aligned}
{}_0^c D_x^\alpha u(x, t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{jh}^{(j+1)h} z^{1-\alpha} \frac{\partial^2 u(x-jh, t)}{\partial z^2} dz \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{h^{2-\alpha}}{2-\alpha} \cdot \frac{\partial u(x-(j+1)h, t) - \partial u(x-jh, t)}{h} dz \\
&= \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \frac{\partial^2 u(x-\xi_j, t)}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

tel que  $\xi_j \in [jh, (j+1)h]$ , en combinant les deux formules ci-dessus, on obtient



$$\begin{aligned}
|\overline{{}_0^c D_x^\alpha u(x, t)} - {}_0^c D_x^\alpha u(x, t)| &= \left| \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \left[ \frac{\partial^2 u(x-jh, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u(x-\xi_j, t)}{\partial z^2} \right] + \mathcal{O}(h^2) \right|. \\
&= \left| \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j \cdot \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^2) \right|. \\
&= \left| \frac{h^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} [(j+1)^{2-\alpha} + j^{2-\alpha}] \cdot \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^2) \right|. \\
&= \left| \frac{h^{2-\alpha} k^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^2) \right|. \\
&= \mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \mathcal{O}(h)
\end{aligned}$$

□

### Erreur de troncature

On appelle erreur de troncature locale, l'erreur commise lorsqu'on effectue un seul pas de temps du schéma.

**Remarque 3.4.1** *Le schéma de différence finie explicite (6) a un erreur de troncature locale  $e_r = \mathcal{O}(\tau + h)$*

**Théorème 3.4.1** *Si  $\max_{2 \leq i \leq k-2} b_i, b_i(2-g_1), b_{k-1}(1-g_1) \leq 1$ . Le schéma de différence finie explicite (6) pour EFDS (1) – (3) est convergent, et l'ordre de convergence est  $\mathcal{O}(\tau + h)$ .*

### Preuve

aux points de maillage  $(x_k, t_n)$ ,  $y_k^n = u_k^n - e_k^n$ , la substitution en (6) conduit à

$$\begin{aligned}
\frac{(u_k^{n+1} - e_k^{n+1}) - (u_k^n - e_k^n)}{\tau} &= \frac{d_k h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j [(u_{k-j+1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j-1}^n) \\
&\quad - (e_{k-j+1}^n - 2e_{k-j}^n + e_{k-j-1}^n)] \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} - \frac{e_k^{n+1} - e_k^n}{\tau} = \frac{d_k h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j [(u_{k-j+1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j-1}^n) - (e_{k-j+1}^n - 2e_{k-j}^n + e_{k-j-1}^n)]$$

en utilisant le théorème de Taylor

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = u_k^{n'} + \mathcal{O}(\tau) = \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_k^n + \mathcal{O}(\tau) - \frac{e_k^{n+1} - e_k^n}{\tau} \quad (16)$$

$$= d_k \left[ \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + \mathcal{O}(\tau) \right] - \frac{d_k h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j (e_{k-j+1}^n - 2e_{k-j}^n + e_{k-j-1}^n) \quad (17)$$

en utilisant le lemme (3), on obtient

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_k^n - d_k \left[ \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right] - \frac{e_k^{n+1} - e_k^n}{\tau} = -\frac{d_k h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j (e_{k-j+1}^n - 2e_{k-j}^n + e_{k-j-1}^n) + \mathcal{O}(h + \tau)$$

alors, on a

$$\frac{e_k^{n+1} - e_k^n}{\tau} = \frac{d_k h^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sum_{j=0}^{k-1} g_j (e_{k-j+1}^n - 2e_{k-j}^n + e_{k-j-1}^n) + \mathcal{O}(h + \tau) \quad (18)$$

en utilisant les conditions initiales  $e_k^0 = 0$ ,  $e_0^{n+1} = e_1^{n+1}$ ,  $e_{k-1}^{n+1} = e_k^{n+1}$ .

On peut écrire l'équation (16) par la forme matricielle

$$E_{n+1} = AE_n + M, E_0 = 0 \quad (19)$$

tel que

$$E_n = (e_1^n, e_2^n, \dots, e_{k-1}^n)^T \text{ et } M = (\tau(\mathcal{O}(h + \tau))(1, 1, \dots, 1)^T)$$

$$E_{n+1} = AE_n + M$$

.

.

.

$$= (A^n + A^{n-1} + \dots A^2 + A + I)M$$

donc, on obtient

$$E_{n+1} = (A^n + A^{n-1} + \dots + A^2 + A + I)M \quad (20)$$

donc

$$\|E_{n+1}\|_\infty \leq (\|A^n\|_\infty + \|A^{n-1}\|_\infty + \dots + \|A^2\|_\infty + \|A\|_\infty + \|I\|_\infty) \|M\|_\infty$$

aussi

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq k-1} \sum_{j=1}^{k-1} |a_{ij}| \\ &= \max |1 - b_1| + b_1, \max_{2 \leq i \leq k-1} [|1 - b_i(2 - g_1)| + b_i(2 - g_1)], |1 - b_{k-1}(1 - g_1)| + b_{k-1}(1 - g_1). \end{aligned}$$

si  $\max_{2 \leq i \leq k-2} b_1, b_i(2 - g_1), b_{k-1}(1 - g_1) \leq 1$ , alors

$$\|A\|_\infty \leq 1$$

puis on peut obtenir

$$\|E_{n+1}\|_\infty \leq (n+1)\tau |\mathcal{O}(h + \tau)|$$

par conséquent, quand  $\tau \rightarrow 0, h \rightarrow 0$ , on a

$$|e_k^{n+1}| \rightarrow 0$$

ce qui prouve que

$y$  converge vers  $u$  comme  $\tau$  et  $h$  tend vers zéro, si  $\max_{2 \leq i \leq k-2} b_1, b_i(2 - g_1), b_{k-1}(1 - g_1) \leq 1$

□

### 3.4.3 Exemple d'application

On considère l'équation de diffusion fractionnaire spatiale (EDFS) avec conditions aux bord de type Neumann

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = d(x) \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} + f(x, t), & 0 < x < 1, t \geq 0, 1 \leq \alpha < 2 \\ u(x, 0) = x^2(2x - 3), & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 0, & t \in [0, T] \end{cases}$$

$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha}$  est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  de Caputo.

La solution analytique (numérique) de ce problème donne

$$u(x, t) = x^2(2x - 3)(t + 1).$$

Pour  $\alpha = 1.5$ ,  $d(x) = \frac{\sqrt{\pi x}}{2}$ ,  $k = \frac{L}{h} = 10$

en remplaçant les dérivées dans le problème, on obtient

$$u_k^{n+1} = b_k \sum_{j=0}^9 g_j [u_{k-j+1}^n - 2u_{k-j}^n + u_{k-j-1}^n] + b_k u_{k+1}^n + (1 - 2b_k)u_k^n + b_k u_{k-1}^n + \tau f(x_j, t_n)$$

tel que

$$b_k = \frac{2\tau d_k}{10^{1.5} \sqrt{\pi}}, \quad g_j = \sqrt{j+1} - \sqrt{j}.$$

Pour  $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ ,  $\Delta t = \tau = \frac{1}{100}$

les éléments de la matrice sont multiplié par  $10^{-4}$

$$A = \begin{pmatrix} 9999 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,82 & 9997,76 & 1,41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,17 & 0,85 & 9997,26 & 1,73 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,1 & 0,09 & 0,98 & 9996,83 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,07 & 0,04 & 0,10 & 1,10 & 9996,45 & 2,24 & 0 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,02 & 0,04 & 0,11 & 1,2 & 9996,11 & 2,45 & 0 & 0 \\ 0,04 & 0,01 & 0,02 & 0,05 & 0,12 & 1,3 & 9995,81 & 2,64 & 0 \\ 0,04 & 0,01 & 0,01 & 0,02 & 0,05 & 0,13 & 1,38 & 9995,51 & 2,83 \\ 0,03 & 0,01 & 0,01 & 0,02 & 0,03 & 0,05 & 0,14 & 1,47 & 9995,24 \end{pmatrix}$$

$$U^0 = (-0,028 - 0,104 - 0,216 - 0,352 - 0,5 - 0,648 - 0,784 - 0,896 - 0,972)^T$$

$$B = (0,004120, 004560, 00144 - 0,00512 - 0,015 - 0,02808 - 0,04424 - 0,06336 - 0,08532)^T$$

$$U^1 = A.U^0 + B$$

$x$	Solution ana $u^1$	Solution app $v^1$	l'erreur absolu
0,1	-0,0283	-0,0239	0,0044
0,2	-0,1050	-0,0994	0,0056
0,3	-0,2182	-0,2146	0,0036
0,4	-0,3555	-0,3571	0,0016
0,5	-0,5050	-0,5150	0,01
0,6	-0,6545	-0,6761	0,0216
0,7	-0,7918	-0,8282	0,0364
0,8	-0,9050	-0,9594	0,0544
0,9	-0,9817	-1,0570	0,0753

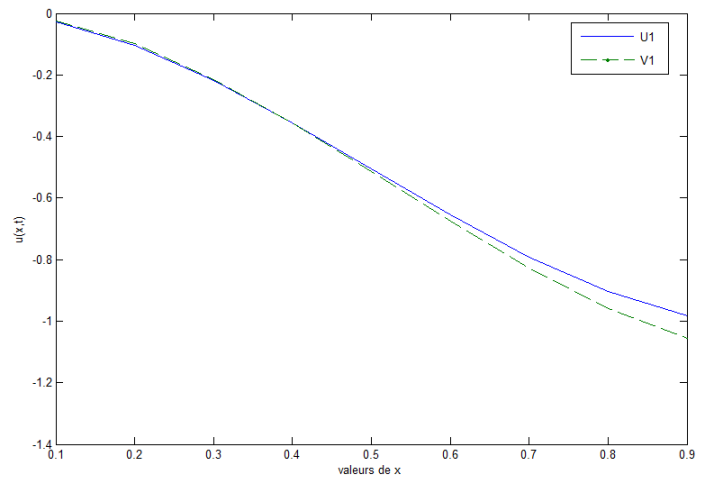


Fig 1. pour  $h = 0.1$ ;  $\tau = 0.01$

Pour  $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ ,  $\Delta t = \tau = \frac{1}{1000}$

$x$	Solution ana $u^1$	Solution app $v^1$	l'erreur absolu
0.1	-0.0280	-0.0276	0.0004
0.2	-0.1041	-0.1035	0.0006
0.3	-0.2162	-0.2159	0.0003
0.4	-0.3523	-0.3525	0.0002
0.5	-0.5005	-0.5015	0.001
0.6	-0.6486	-0.6508	0.0022
0.7	-0.7848	-0.7884	0.0036
0.8	0. - 0.8969	-0.9023	0.0054
0.9	-0.9730	-0.9805	0.0075

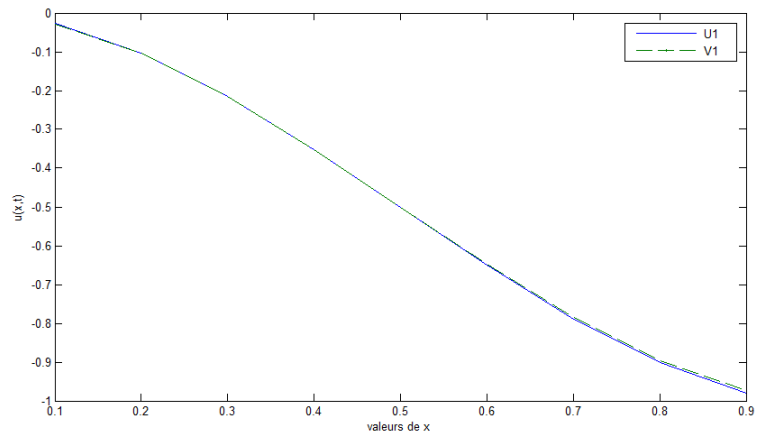


Fig 2. pour  $h = 0.1$ ;  $\tau = 0.001$

Pour  $\Delta x = h = \frac{1}{10}$ ,  $\Delta t = \tau = \frac{1}{10000}$

$x$	Solution ana $u^1$	Solution app $v^1$	l'erreur absolu
0.1	-0.028003	-0.027959	0.000044
0.2	-0.104010	-0.103954	0.000056
0.3	-0.216022	-0.215986	0.000036
0.4	-0.352035	-0.352051	0.000016
0.5	-0.500005	-0.500150	0.000001
0.6	-0.648065	-0.648281	0.000216
0.7	-0.784078	-0.784442	0.000364
0.8	-0.8969090	-0.896633	0.000276
0.9	-0.972097	-0.972850	0.000753

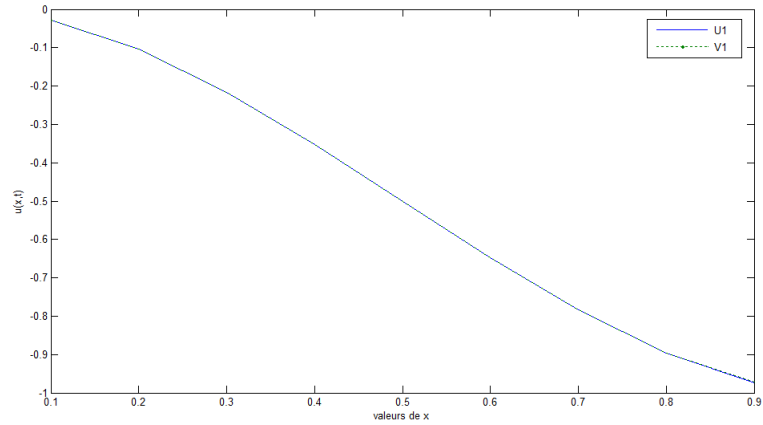


Fig 3. pour  $h = 0.1$ ;  $\tau = 0.0001$

### Comparaison entre les trois pas

$\tau = \frac{1}{100}$	$\tau = \frac{1}{1000}$	$\tau = \frac{1}{10000}$
0.0044	0.0004	0.000044
0.0056	0.0006	0.000056
0.0036	0.0003	0.000036
0.0016	0.0002	0.000016
0.0100	0.0010	0.000001
0.0216	0.0022	0.000216
0.0364	0.0036	0.000364
0.0544	0.0054	0.000276
0.0753	0.0075	0.000753

### Remarque

On voit dans les tableaux et les figures 1, 2 et 3 que la solution approchée  $v(x, t)$  tend vers la solution exacte  $u(x, t)$ , quand le pas de temps  $\tau$  prend des valeurs très proche de zéro ( $\tau = 0.01$ ,  $\tau = 0.001$ ,  $\tau = 0.0001$ ).

Dans le cas  $\tau = 0.0001$  les deux courbes de  $v$  et  $u$  sont presque identique.

# Conclusion générale

Le but de ce mémoire est de traiter numériquement un problème de diffusion fractionnaire spatiale, avec conditions aux bord de type Newmann, par la méthode de différence finies .

Après avoir présenter quelques notions de base de la théorie de calcul fractionnaire, on étudie les schémas numériques  $L_1, L_2$  relatif à la définition de Caputo.

Avec l'utilisation de ces schémas numériques obtenus par la discrétisation de problème considéré, on a obtenu un système d'équations linéaire, ou on a tirée la solution approchée.

Une étude sur un exemple d'illustration a donné des résultats très satisfaisants de point de vue que ces résultats sont conformes avec l'étude de la convergence, et la solution approchée tend vers la solution exacte de problème quand les deux pas de l'espace et le temps tend vers zéro.



# Bibliographie

- [1] T.J.Anastasio ;The fractional-order dynamics of brainstem vestibule-oculumototneurons, Biol. Cybern(1994).
- [2] K.S. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. Wiley, New York ,(1993).
- [3] P. Inizan. Dynamique fractionnaire pour le chaos hamiltonien.Thèse de Doctorat, L'Observatoire de Paris, France (2010).
- [4] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava et J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, (2006)
- [5] M. Wellbee, Effecient numerical methods for fractional differential equations and their analytical Background, D. Univ Braunschweig, (2010).
- [6] G.Chen ,G.Friedman ;An RLC interconnect model based on Fourier analysis,comput.Aided Des.Inreger.Circuits Syst.(2005)
- [7] K.B. Oldham and J. Spanier. The Fractional Calculus. Academic Press ; York and London (1974).
- [8] Uchaikin, Vladimir V.Fractional Derivatives for Physicists and Engineers, Volume I Background and Theory, Springer, (2013).
- [9] Igor Podlubny, Fractional Differential Equations. Academic Press,New York,(1999).
- [10] A. Hanyga ;Fractional-order relaxation laws in non-linear viscoelasticity,Volume 19,(2007).
- [11] V.E Tarasov ; Fractional integro-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media ,Theoreical and Mathematical physics,(2009).

- [12] I. Podlubny; Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, (1999).
- [13] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic, Press, New York, 1999.
- [14] J. A. Tenreiro Machado, A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation, Fractional Calculus e4 Applied Analysis, 6, No.1, 2003, 73-80.
- [15] R. Gorenflo and F. Mainardi, Random walk models for space fractional diffusion processes, Fractional Calculus e4 Applied Analysis 1, 1998, 167-191.
- [16] F. Liu, V. Anh and I. Turner, Numerical solution of the fractional-order Advection-Dispersion Equation, The Proceeding of An International Conference on Boundary and Interior Layers-Computational and Asymptotic Methods, Perth, Australia, 2002, 159-164.
- [17] R. Gorenflo and F. Mainardi, Approximation of Levy Feller diffusion by random walk, Journal for Analysis and its Applications (ZAA), 18, 1999, 231-246.
- [18] F. Liu, V. Anh, I. Turner, Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation, Journal of Computational and Applied Mathematics 166, 2004, 209-219.
- [19] F. Liu, V. Anh, I. Turner and P. Zhuang, Numerical simulation for solute transport in fractal porous media, ANZIAM J., 45(E), 2004.
- [20] G. J. Fix and J. P. Roop, Least squares finite element solution of a fractional order two-point boundary value problem, Comput. Math. Appl., 48, 2004, 1017-1044.
- [21] I. Podlubny, Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation, Fractional Calculus e4 Applied Analysis, 5, No.4, 2002, 367-386.
- [22] B. West and V. Seshadri, Linear systems with Levy fluctuations, Physica A, 113, 1982, 203-216.
- [23] Z. Xu, K. Zhang, Q. Lu, G. Leng, Matrix Theory, Scientific publishing house, 2001.

# Résumé

L'objectif de ce mémoire est étudié numériquement un problème fractionnaire spatiale avec conditions aux bord de type Neumann, par l'utilisation de la méthode des différences finies, afin d'obtenir une solution approchée. Ce travail a nécessité une étude approfondie des définitions de la dérivation d'ordre non entier, et les différents schémas numériques de la discrétisation. Pour illustration des résultats obtenus, une application sur un exemple à montrer que cette technique est un moyen simple et efficace, de point de vue que les résultats numériques trouvés sont conforme avec l'étude théorique de la convergence.

## Abstract

The objective of this memory is numerically studied spatial fractional problem with Neumann conditions on board by using the finite difference method to obtain an approximate solution. This work required a comprehensive study of the definitions of the derivation of fractional order, and different numerical schemes for the discretization. For illustration of the results obtained, an application on an example to show that this technique is a simple and effective way to view the numerical results are consistent with the theoretical study of convergence.

## ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو الدراسة العددية لمسألة كسور مكانية ذات شروط حدية من نوع نيومان، باستخدام طريقة الفروقات المنتهية من أجل الحصول على حل تقريبي. تطلبت هذه الأعمال دراسة معمقة للتعريف الخاصة بالاشتقاق ذات المرتبة غير الصحيحة، و للمخططات العددية المختلفة للتطبيقات. من أجل توضيح النتائج التي تم الحصول عليها، تمت دراسة تطبيقية على مثال لإظهار أن هذه التقنية هي وسيلة بسيطة و فعالة، من وجهة نظر أن النتائج العددية التي تم الحصول عليها متوافقة مع الدراسة النظرية للتقارب.