

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

Centre universitaire Khenchela  
**Institut Science et Technologie**  
**ÉCOLE DOCTORALE**

PHYSIQUE ET CHIMIE DE LA MATIÈRE CONDENSÉE

N° d'ordre :

Série :

**MÉMOIRE**

Présenté pour l'obtention du diplôme de  
**Magister**

*Par*

*Daas Amara*

**THEME**

*Calcul du coefficient de viscosité  
dans les conducteurs*

Soutenu le : 12/11/2011  
devant le jury

Président du jury :	NOURREDINE BENALI-CHERIF	Professeur (C.U. Khenchela)
Directeur de Mémoire :	K. BENDIB-KALACHE	Professeur (U.S.T.H.B)
Examineur :	ABDERREZEG BENDIB	Professeur (U.S.T.H.B)
Examineur :	ABDECHARIF BOUMAZA	Professeur (C.U. Khenchela)

Année universitaire : 2010/2011

## Remerciements

*Je tiens à remercier en premier lieu DIEU le tout puissant de m'avoir donné la bonne foi et le courage, pour la réalisation de ce modeste travail ainsi que mes parents.*

*Tout d'abord, j'exprime ma profonde gratitude à Mme K. BENDIB-KALACHE Professeur à U.S.T.H.B, pour avoir dirigé et suivi ce travail de près et d'une manière continue. Sa disponibilité,.*

*Je remercie très sincèrement Mr : N. BENALI-CHERIF Professeur à C.U. Khenchela qui m'a fait le plaisir de présider ce jury, ainsi qu'à Mr : A.BENDIB Professeur U.S.T.H.B, Mr : A.BOUMAZA Professeur à C.U. Khenchela, pour l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de mon manuscrit en acceptant d'être mes examinateurs.*

*Je tiens également à remercier ma femme, pour m'avoir toujours soutenu dans ce que j'entreprendais, mon adorable enfant, Adem Abdelmouaz.  
Bien sûr je n'oublie pas mes amis qui m'ont encouragé et supporté, en particulier M. Falek, Z.Hemame, F. Lakmin,*

*Enfin, j'adresse un grand merci à tout le monde et à toutes les personnes que j'aurais pu oublier.*

*Amara.*

# **SOMMAIRE**

## SOMMAIRE

Introduction générale.....	03
----------------------------	----

### CHAPITRE I

#### PROPRIETES DE TRANSPORT DANS LES PLASMAS DEGENERES.

I. Introduction.....	08
II. Le milieu plasma.....	08
II. 1 Première classification : .....	09
II. 1.a. degré d'ionisation .....	09
II. 1.b. Effets quantiques .....	10
II.2 Deuxième classification : paramètre de couplage.....	12
II.3 Les différents régimes... ..	14
III Equation de Boltzmann.....	17
III. 1 Equation de Boltzmann dans l'approximation classique.....	17
III. 2.Passage à la limite semi-classique.....	20
III.2.1.Système à l'équilibre thermodynamique:	
fonction de distribution de Fermi- Dirac.....	21
III. 2.2 Système hors équilibre : équation de Boltzmann semi-classique.....	23
IV. Equations fluides et coefficients de transport.....	25
VI. Etude bibliographique sur le transport dans les plasmas dégénérés.....	29
Résultat de Lee et More.....	29
VII. Conclusion.....	34

### CHAPITRE II :

#### RESOLUTION DE L'EQUATION DE BOLTZMANN ET CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSPORT

I. Introduction.....	35
II. Modèle cinétique.....	35
II. 1 approximation d'un plasma non magnétisé .....	37

---

II.2 Approximation quasi-statique.....	37
II. 3 Approximation linéaire.....	37
<i>i)</i> plasma non perturbé.....	38
<i>ii)</i> plasma perturbé.....	38
II. 4 Modélisation des opérateurs de collision.....	39
II. 2 a Opérateur de collision électron-électron.....	39
II 2 b Opérateur de collision électron-ion.....	40
III. Résolution de l'équation de Boltzmann.....	43
III.1. Projection sur la base des polynômes de Legendre.....	43
III.2. Calcul des opérateurs de projections associés à l'opérateur de BGK.....	46
III.3. Calcul de la fonction de la distribution perturbée.....	50
IV. Calcul des coefficients de transport .....	54
IV. 1. Coefficients de transport dans l'approximation locale.....	57
IV. 2. Coefficients de transport non locaux .....	66
V. Conclusion.....	68
<b>Conclusion générale</b> .....	69
<b>Références</b> .....	71

# **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE

L'objet de cette thèse est d'établir est double. Il s'agit d'établir un modèle d'équations fluides pour décrire des plasmas denses. Plus précisément, il s'agit de calculer les relations de fermeture non locales des trois équations fluides d'ordre le plus bas qui décrivent la conservation du nombre de particules, de l'impulsion et de l'énergie

La physique des plasmas traite la dynamique de systèmes à  $N$ -particules chargées interagissant entre elles à travers des forces électromagnétiques. A ces débuts, la physique des plasmas a concerné l'étude des gaz dans les tubes à décharge. Par la suite, elle a fait l'objet de recherches intenses sur les plans expérimental et théorique, à cause des applications potentielles de la fusion nucléaire aussi bien à des fins militaires (bombe à hydrogène) que civiles (production de l'énergie par la fusion thermonucléaire contrôlée). En parallèle, la physique des plasmas a connu un essor considérable en astrophysique, ce qui n'est pas surprenant, lorsqu'on sait que 90% de la matière visible de l'univers est à l'état plasma. Nous pouvons citer la présence de plasmas sur la surface du soleil, dans la magnétosphère terrestre et dans l'espace interplanétaire et interstellaire.

A ces débuts, la physique des plasmas traitait des milieux caractérisés par des faibles densités et des hautes températures dans lesquels les effets quantiques sont inexistantes. Le domaine de la physique des plasmas quantiques auquel, nous nous intéressons dans ce travail, a connu un nouvel essor avec les récents développements technologiques [1], particulièrement dans la miniaturisation des semi-conducteurs et les structures nanométriques. En effet, ces dernières années il y a eu des progrès importants dans la manipulation des nanostructures métalliques (clusters métalliques, les nanoparticules, les films métalliques minces) constitués d'un nombre d'atomes très faible typiquement de l'ordre de  $10^5$ , [2, 3]. Dans de tels objets, l'effet de l'agencement régulier du réseau ionique est négligeable sur la dynamique des électrons de conduction. Dans ce cas, les propriétés dynamiques de ces électrons sont régis principalement par les effets plasmas et les effets quantiques. En outre, le développement des lasers à impulsion ultra-court délivrant des impulsions de durée de l'ordre de la femtoseconde ont permis de sonder la dynamiques des électrons dans les nanostructures métalliques sur des échelles de temps typiques où les phénomènes de transport ont lieu. Les nanostructures

métalliques constituent donc un cadre idéal pour étudier les propriétés dynamiques des plasmas quantiques.

Par ailleurs, les récents développements des lasers à impulsions-ultra-intenses pouvant délivrer des intensités de l'ordre de  $10^{20} W/cm^2$ , dédiés entre autre à la fusion par confinement inertiel ont permis de concevoir un nouveau schéma de réalisation de la fusion [4], appelé allumage rapide. Dans ces expériences, des situations physiques variées sont rencontrées faisant intervenir une gamme de température et de densité vaste : du plasma cinétique chaud dans la zone d'ablation au plasma dense et chaud lors de la phase d'allumage, en passant par le solide lors de la phase de compression. Le schéma de l'allumage rapide fait appel à plusieurs aspects de la physique des plasmas dont celui de l'étude du transport de l'énergie dans de la matière dense et chaude notamment lors de la phase d'allumage. De façon générale, l'étude des phénomènes de transport dans le cadre de la fusion thermonucléaire revêt un caractère crucial pour la faisabilité de la fusion nucléaire.

En astrophysique, les plasmas quantiques sont répandus dans de nombreux milieux tels que les naines blanches et les étoiles à neutrons où les densités sont dix ordres de grandeur plus importants que la densité du solide [5]. En raison de ces grandes densités, une naine blanche peut être aussi chaude que les plasmas de fusion, où les températures sont de l'ordre de  $10^8 K$ . On montre cependant, que les effets quantiques restent prédominants.

Pour évaluer les effets quantiques dans les plasmas, on introduit la longueur d'onde de de Broglie  $\lambda_B$ , des particules chargées définie par  $\lambda_B = \hbar/mv$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$ ,  $m$  et  $v$  sont respectivement la masse et la vitesse des particules. La longueur d'onde de de Broglie représente typiquement l'extension spatiale de la fonction d'onde des particules, plus celle-ci est importante plus les effets quantiques sont importants. De la définition de  $\lambda_B$ , Il est clair que le comportement quantique sera atteint plus facilement pour les électrons que pour les ions en raison de la différence de masse importante entre l'espèce électronique et l'espèce ionique. En effet, dans pratiquement toutes les situations physiques, même les plus extrêmes, la dynamique des ions est toujours classique et seuls les électrons doivent être traités par la théorie quantique.



Il est bien connu, que la description dynamique d'un plasma à partir de la théorie fluide présente des avantages considérables en comparaison avec la théorie cinétique. Les équations hydrodynamiques permettent d'étudier de nombreux phénomènes physiques sans faire appel à la complexité des équations cinétiques. Cette simplification provient notamment du nombre de degré de liberté qui est de 4,  $(t, \vec{r})$  pour les équations macroscopiques et de 7  $(t, \vec{r}, \vec{p})$  pour les équations cinétiques où  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}$  et  $t$  sont respectivement les vecteurs position et impulsion et la variable temps. En physique des plasmas notamment, les équations hydrodynamiques de Braginskii [6] ont été utilisées avec succès pour décrire aussi bien les plasmas créés en laboratoire que les plasmas astrophysiques. Cependant, ces équations sont valables seulement pour décrire des plasmas classiques et proches de l'équilibre thermodynamique. Dans les structures nanométriques le libre parcours moyen électronique des électrons responsables du transport (de l'énergie thermique et de l'impulsion) n'est plus très petit par rapport aux dimensions du système physique étudié. Il résulte alors que le transport devient non local. Par ailleurs, on montre aussi, que dans les plasmas quantiques, pour des fortes densités, les collisions deviennent moins importantes. Il est nécessaire par conséquent de développer des modèles fluides au-delà de l'approximation collisionnelle pour décrire les plasmas quantiques.

Dans ce travail, nous avons établi un modèle d'équations hydrodynamiques dans l'approximation faiblement non locale pour décrire des plasmas de dégénérescence arbitraire, à partir de la théorie semi-classique. L'approche semi-classique est basée sur l'équation de Boltzmann semi-classique où l'évolution de la trajectoire des électrons est décrite par la dynamique Newtonienne (mouvement classique des particules) et par des taux de diffusion quantiques.

Nous avons calculé des relations de fermeture non locales pour les équations fluides perturbées par rapport à un équilibre global. Ces relations de fermeture correspondent aux coefficients de transport que sont le flux de chaleur généralisé, le tenseur des contraintes généralisés, les termes d'échanges d'impulsion et d'énergie exprimés par rapport aux grandeurs hydrodynamiques fondamentales, *i.e.*, la densité, la température et la vitesse moyenne des particules.

Le calcul de ces coefficients de transport qui sont des moments de la fonction de distribution des particules, nécessite la résolution de l'équation de Boltzmann semi-classique. La méthode de résolution est basée sur le développement de la fonction de distribution sur les polynômes orthogonaux afin de séparer dans l'espace des impulsions sa partie angulaire de sa partie qui dépend seulement du module de l'impulsion. Les propriétés conservatives des opérateurs de collisions ont été assurées grâce à l'utilisation des opérateurs de projection.

Les coefficients de transport ont été établis analytiquement dans l'espace de Fourier ( $x \leftrightarrow k$ ) sous une forme non explicite, en fonction d'intégrales qui contiennent la fonction de Fermi-Dirac. Nous avons calculé tous les coefficients de transport en fonction de deux paramètres pertinents que sont

- ❖ Le paramètre de dégénérescence  $\frac{\mu_0}{T_0}$  où  $\mu_0$  est le potentiel chimique et  $T_0$  est la température exprimée en unité énergie (notation utilisée dans toute la thèse).
- ❖ Le paramètre de collision  $k\lambda$  où  $\lambda$  le libre parcours moyen et  $k^{-1} = L$  est la longueur caractéristique du système

Cette thèse est structurée en deux chapitres :

Le premier chapitre est consacré dans une première partie à la présentation du milieu plasma, en mettant l'accent sur les différents types de plasmas qui existent dans la nature et cela afin de mieux situer le cadre du travail effectué dans cette thèse. Dans une seconde partie, l'équation de Boltzmann ainsi que les équations fluides qui en découlent sont largement présentées. Enfin, une dernière partie est dédiée à une revue bibliographique sur les phénomènes de transport des plasmas dégénérés.

Le chapitre II porte sur la résolution de l'équation de Boltzmann semi-classique dans l'approximation diffusive. Toutes les étapes de calculs sont explicitement présentées. En particulier, la procédure qui utilise le développement sur les polynômes de Legendre, le calcul des opérateurs de projection qui assurent les propriétés d'invariance de l'opérateur de collision. Ce chapitre est dédié au calcul des coefficients de transport qui représentent l'objectif de cette thèse. Ces grandeurs physiques ont été calculées analytiquement en fonction d'intégrales qui dépendent de la fonction de distribution de Fermi-Dirac. Une application numérique de nos résultats pour l'aluminium est également présentée.

Enfin on résume les principaux résultats de cette thèse ainsi que les perspectives dans une conclusion générale.

# **CHAPITRE I**

## **PROPRIETES DE TRANSPORT DANS LES PLASMAS DEGENERES.**

## PROPRIETES DE TRANSPORT DANS LES PLASMAS DEGENERES.

### I. Introduction :

Ce chapitre est consacré à la présentation des propriétés de transport dans les plasmas dégénérés. Dans une première partie, afin de situer le contexte de notre travail, nous présentons succinctement les différents plasmas rencontrés dans les divers domaines de la physique. La seconde partie est consacrée à l'équation de Boltzmann et aux équations hydrodynamiques dont elles découlent directement. Enfin, nous avons présenté un résultat de la littérature portant sur les coefficients de transport dans les plasmas dégénérés que nous considérons le plus représentatif et le plus proche par rapport à notre étude.

### II. Le milieu plasma

Un plasma peut être défini comme un gaz quasi-neutre contenant des particules chargées (ions et électrons) et éventuellement des particules neutres et présentant un comportement collectif. Dans cette définition, deux propriétés importantes du plasma sont à retenir : la quasi-neutralité de charge et le comportement collectif.

Grosso-modo, un plasma quasi-neutre est tel qu'il y a localement autant de charges positives que de charges négatives. Plus précisément, on peut définir une longueur  $\lambda_{De}$ , caractéristique microscopique (appelée longueur de Debye) telle que dans une sphère de rayon  $\lambda_{De}$ , le nombre d'électrons est approximativement égal à  $Z$  fois le nombre d'ions, où  $Z$  est la charge d'un ion. Pour des distances, supérieures à la longueur de Debye, le plasma est quasi-neutre.

Le comportement collectif du plasma correspond au fait qu'une particule donnée est toujours en interaction avec l'ensemble des autres particules (et pas seulement avec les particules les plus proches) Ce comportement est essentiellement dû au caractère longue portée de la force d'interaction coulombienne.

Le terme plasma recouvre en fait des systèmes physiques très variés suivant la densité de particules et la température des particules.

## II. 1 Première classification

### II. 1. a Degré d'ionisation

Comme nous l'avons noté dans la définition, un plasma peut contenir aussi bien des particules chargées que des particules neutres. On définit alors le degré d'ionisation du plasma par le rapport

$$\alpha = \frac{n_i}{n_p + n_i} \quad (\text{I.1})$$

où  $n_p$  est la densité des atomes neutres et  $n_i$  celui des particules ionisées. En pratique, ce rapport varie entre de très grandes limites :  $\alpha = 10^{-10}$  à  $\alpha = 1$ . Il est alors d'usage de classer les plasmas en deux catégories :

- Les plasmas faiblement ionisés, pour des valeurs de  $\alpha < 10^{-4}$ . Dans ces plasmas la fréquence des collisions  $\nu_{pe}$  entre les neutres et les électrons est supérieure aux fréquences de collisions électron-électron  $\nu_{ee}$  et électron-ion  $\nu_{ei}$  ;  $\nu_{pe} > (\nu_{ee}, \nu_{ei})$ . Ce sont alors les collisions binaires entre un électron (ou un ion) et une molécule qui déterminent la dynamique des particules chargées.
- Les plasmas fortement ionisés, pour des valeurs de  $\alpha > 10^{-4}$ . Le plasma est totalement ionisé lorsque  $\alpha = 1$ . Ces plasmas sont au contraire caractérisés par des fréquences  $\nu_{pe} \ll \nu_{ee}, \nu_{ei}$ . On montre alors, que ce sont les interactions coulombiennes qui déterminent essentiellement la dynamique du plasma.

Dans les plasmas complètement ionisés, c'est-à-dire constitués exclusivement d'ions de différentes charges et d'électrons, il y a lieu de distinguer les deux types d'interaction : d'une part les interactions à courte portée (collisions binaires entre particules), typiquement inférieures à la longueur de Debye  $\lambda_{De}$ , et d'autres part les interactions à longue portée (de type coulombienne), supérieures à la longueur  $\lambda_{De}$ . La longueur de Debye représente la longueur d'écran d'une charge par toutes les autres charges du plasma.

### II. 1. b Effets quantiques

La classification des plasmas en fonction du degré d'ionisation peut être affinée en tenant compte des effets quantiques. Pour cela, on introduit la distance interparticulaire  $r_0$  définie par la condition

$$\frac{4}{3} \pi n r_0^3 = 1 \quad (\text{I.2})$$

où  $n$  est la densité ionique. La condition (I.2) signifie que l'on considère en moyenne qu'un seul ion est contenu dans une sphère de rayon  $r_0$ . Par ailleurs, on définit également le rayon de Bohr  $a_0$  correspondant au rayon classique de l'électron dans l'état fondamental de l'atome d'hydrogène :

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{m_e e^2} = 0.53 \text{ \AA} \quad (\text{I.3})$$

où  $h$  est la constante de Planck,  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide  $m_e$  et  $e$  sont respectivement la masse et la charge élémentaire. Pour des valeurs de densité importantes, la distance interparticulaire  $r_0$  peut être très petite devant le rayon de Bohr  $a_0$ ;  $r_0 \ll a_0$ , et par conséquent, la description en termes d'atomes isolés n'est plus valable dans la mesure où il y a recouvrement des nuages électroniques associés à chaque ion. Les électrons sont dans un état dégénéré et nous sommes en présence d'un plasma dense dégénéré. Par contre si,  $r_0 \gg a_0$ , les électrons se recombinent avec un ion, et le plasma devient partiellement ionisé.

On peut par ailleurs retrouver la nature quantique ou classique des électrons, en considérant la longueur d'onde thermique de De Broglie pour les électrons,

$$\lambda_{the} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m_e T}}, \quad (\text{I.4})$$

où  $T$  est la température des électrons en unité énergie. La longueur thermique de De Broglie,  $\lambda_{the}$  représente approximativement la taille caractéristique de l'électron. Elle est déduite du principe d'incertitude d'Heisenberg, pour un électron d'énergie moyenne  $\frac{3}{2}k_B T$ . Par conséquent, lorsque  $\lambda_{the} \gg r_{0e}$ , où  $r_{0e} = r_0 Z^{1/3}$  est le rayon d'une sphère contenant en moyenne un électron, les électrons sont essentiellement quantiques. Si par contre,  $\lambda_{the} \ll r_{0e}$ , les électrons sont alors classiques. En d'autres termes, en introduisant la température de Fermi :

$$T_F = \frac{h^2 (3\pi^2 n_e)^{2/3}}{8\pi^2 m_e} \quad (I.5)$$

(où  $n_e$  est la densité électronique), et en définissant le rapport

$$\chi = \frac{T_F}{T} = \frac{1}{2} (3\pi^2)^{2/3} (n_e \lambda_{the}^3)^{2/3} \quad (I.6)$$

les électrons sont classiques si la condition  $\chi \ll 1$  est vérifiée. Les effets quantiques deviennent important pour,  $\chi \geq 1$ .

A titre d'exemple nous donnons ci-dessous, le tableau des valeurs typiques des densités de particules chargées et des températures des plasmas rencontrés dans divers domaines de la physique.



Nature du plasma	Densité ( $m^{-3}$ )	Température (K)
<b>Plasmas faiblement ionisés</b>		
Ionosphère (couche F), altitude 250 km	$10^{12}$	$10^3$
Décharge gazeuse –courant faible	$10^{17}$	$10^4$
Décharge gazeuse –courant fort	$10^{21}$	$10^5$
<b>Plasmas fortement ionisés</b>		
Espaces interstellaires	$10^6$	$10^4$
Plasma thermonucléaire (« fusion lente »)	$10^{22}$	$10^8$
Couronne des plasmas implorés par laser (« fusion rapide »)	$10^{27}$	$10^7$
<b>Plasmas denses</b>		
Electrons dans les métaux	$10^{29}$	$3 \cdot 10^2$
Cœur des plasmas implorés par laser	$10^{31}$	$10^7$
Intérieur des étoiles	$10^{33}$	$10^7$
Intérieur des naines blanches	$10^{38}$	$10^7$

## II.2 Deuxième classification : paramètre de couplage

Il est d'usage de distinguer les plasmas par la valeur de l'énergie cinétique totale des particules du plasma,  $E_c$  et celle de leurs énergie potentielle,  $E_p$ . Pour des raisons de simplicité, nous nous intéresserons aux plasmas complètement ionisés. On classe alors les plasmas en deux catégories :

- Les plasmas cinétiques, pour lesquels  $E_c \gg E_p$ .
- Les plasmas corrélés, pour lesquels  $E_c \leq E_p$ .

Certaines propriétés des plasmas cinétiques sont proches des gaz dilués (en particulier l'équation d'état), tandis que les propriétés des plasmas corrélés sont proches des liquides voir des solides. La séparation entre les plasmas cinétiques et les plasmas corrélés est déterminé par le paramètre de couplage classique,  $\Gamma$  défini par le rapport

$$\Gamma = \frac{E_p}{E_c}. \quad (I.7)$$

Le paramètre  $\Gamma$ , pour les plasmas classiques, est calculé en prenant l'énergie potentielle

$$E_p = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}, \text{ d'un ion dans le potentiel de son plus proche voisin distant alors } r_0, \text{ et}$$

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T, \text{ son énergie cinétique moyenne égale à l'énergie thermique. L'expression (I.7)}$$

s'écrit alors

$$\Gamma_c = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 T} \sim \frac{e^2 n^{1/3}}{\epsilon_0 T}. \quad (I.8)$$

Le domaine des plasmas cinétiques correspond à  $\Gamma_c \ll 1$ . Dans ce cas, les effets collectifs (interactions longues portées) sont prédominants devant les collisions binaires (interactions à court rayon d'action). On parle alors de plasma non collisionnel. Par ailleurs, le domaine des plasmas corrélés correspond à  $\Gamma_c > 1$ . Les collisions binaires ne peuvent plus être négligées. Le plasma est alors collisionnel ou fortement couplé. Notons enfin, à partir de (I.8) que les plasmas classiques sont non collisionnels pour les faibles densités et les hautes températures.

Par ailleurs en introduisant la longueur de Debye,  $\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k_B T}{n_e e^2} \right)^{1/2}$ , le paramètre de couplage  $\Gamma_c$  s'écrit comme

$$\Gamma_c = \left( \frac{1}{n_e \lambda_D} \right)^{2/3}. \quad (I.9)$$

Les plasmas cinétiques sont caractérisés par un grand nombre de particules dans la sphère de rayon de Debye.

Pour les plasmas quantiques, le paramètre de couplage  $\Gamma$  est calculé en gardant la même valeur de l'énergie potentielle  $E_p$  que dans le cas classique, cependant l'énergie

cinétique  $E_C$  est donnée par l'énergie de Fermi,  $E_c = E_F$ , où  $E_F = T_F$ . En utilisant ces hypothèses, il en résulte le paramètre de couplage quantique

$$\Gamma_Q = 8 \left( \frac{\pi}{3} \right)^{2/3} \frac{e^2 m_e}{h^2 \epsilon_0 n_e^{1/3}} \quad (\text{I.10})$$

Le domaine des plasmas cinétiques est aussi défini pour un paramètre de couplage  $\Gamma_Q \ll 1$ . Il apparaît de l'équation (I.10), que les plasmas quantiques sont non collisionnels pour des fortes densités contrairement aux plasmas classiques (voir Eq. (I.8)). Cela s'explique à partir du principe d'exclusion de Pauli. En effet, le principe d'exclusion de Pauli stipule que deux fermions (ici, deux électrons) ne peuvent occuper un même état quantique. Dans un gaz de fermions, tous les niveaux bas d'énergie sont occupés. Si on rajoute des particules au système, ces derniers vont occuper des niveaux d'énergie plus élevés. Par conséquent, en augmentant, la densité du gaz, on augmente l'énergie cinétique des particules, qui en vertu de la relation (I.10) réduit la valeur de  $\Gamma_Q$ .

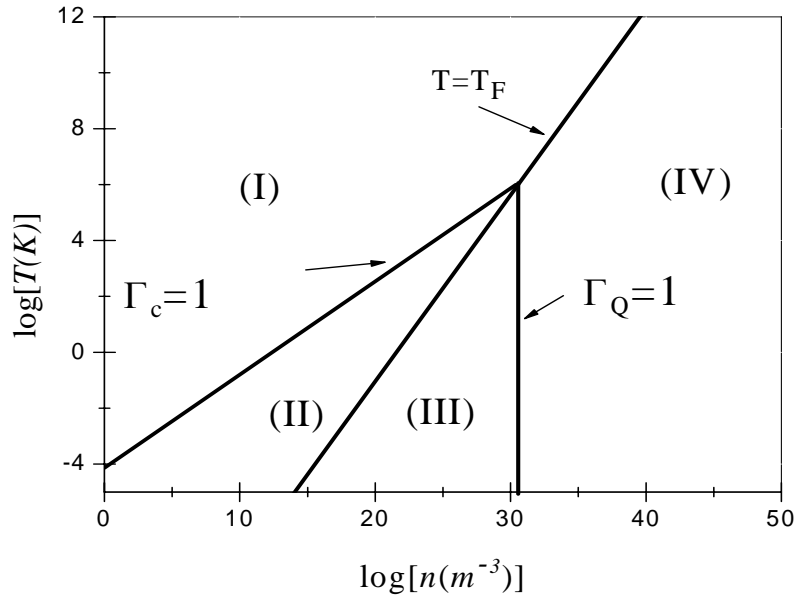
### II.3 Les différents régimes

Pour les plasmas complètement ionisés, nous venons de définir trois paramètres adimensionnels qui déterminent d'une part la nature classique ou quantique des plasmas et d'autre part leur régime de collision.

- $\chi = \frac{T_F}{T}$  : classique /quantique
- $\Gamma_c$  : corrélé (collisionnel)/non corrélé (non collisionnel) : plasma classique
- $\Gamma_Q$  : corrélé (collisionnel)/non corrélé (non collisionnel) : plasma quantique.

Ces paramètres sont des fonctions de la densité et de la température. Nous donnons sur la figure 1, le diagramme  $(\log n, \log T)$  où nous avons fait apparaître les différents régimes des plasmas. Les droites d'équations  $\chi = 1$ ,  $\Gamma_c = 1$  et  $\Gamma_Q = 1$  définissent respectivement, les

limites entre les plasmas classiques et quantiques, les plasmas classiques collisionnels et non collisionnels et entre les plasmas quantiques collisionnels et non collisionnels. Nous distinguons alors quatre régions. Deux régions, l'une classique, au dessus de la droite  $T = T_F$ , l'autre quantique. Chaque région (classique ou quantique) est alors subdivisée en région collisionnelle ou non collisionnelle. Les équations de Vlasov [7] et de Wigner [8] sont utilisées respectivement pour décrire les plasmas classiques non collisionnels et les plasmas quantiques non collisionnels. Les modèles cinétiques collisionnels basés sur les équations de Boltzmann et de Fokker-Planck [8] sont utilisés pour décrire les plasmas classiques. Les plasmas quantiques collisionnels peuvent être décrits à partir de l'équation de Boltzmann semi-classique [8]



**Figure 1** : Diagramme de classification des plasmas dans le plan  $\log[T(K)] - \log[n(m^{-3})]$ .

La région (I) correspond aux plasmas classiques tels que les plasmas de décharges, dans les tokamaks et l'ionosphère. La région (II) correspond aux plasmas cinétiques décrits par l'équation de Boltzmann classique [8]. La région (III) correspond aux plasmas quantiques tels que ceux rencontrés dans Jupiter et les métaux et ils peuvent être décrits par l'équation de Boltzmann semi-classique. La région (IV) correspond aux plasmas quantiques rencontrés dans les naines blanches par exemple. Ils sont décrits par l'équation de Wigner quantique [8].

### III Equation de Boltzmann

#### III. 1 Equation de Boltzmann dans l'approximation classique

Le formalisme basé sur la théorie cinétique est probablement celui qui est le plus utilisé dans la littérature pour décrire les propriétés de transport dans les gaz neutres, les plasmas et les semi-conducteurs. Il fait appel à la physique statistique hors équilibre pour décrire un système constitué d'un très grand nombre de particules. L'évolution d'un tel système se rattache aux divers mouvements des particules qui sont déterminés aussi bien par leurs interactions mutuelles qu'avec le milieu extérieur. Du fait du grand nombre de particules, son analyse théorique repose donc sur une approche statistique en termes de fonction de distribution.

Par souci de clarté, on présente dans ce paragraphe le formalisme dans l'approximation classique. On fera ensuite les modifications pour prendre en compte les effets quantiques dans le cadre de la théorie semi-classique.

L'équation de départ est l'équation de Liouville qui décrit l'évolution de la fonction de distribution N-particules  $f_N(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N, t)$  dans l'espace des phases  $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N)$  au cours du temps

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \vec{p}_i} = 0. \quad (\text{I.11})$$

Cela suppose que les particules remplissent tout l'espace des phases (hypothèse d'ergodicité). Cette équation décrit de façon exacte le comportement du gaz de particules mais vu sa forme très complexe, elle n'est pas tractable aussi bien analytiquement que numériquement. Il est nécessaire de la simplifier considérablement pour obtenir une équation utilisable. Pour cela, cette équation est intégrée successivement sur les variables  $d\vec{r}_N d\vec{p}_N, d\vec{r}_{N-1} d\vec{p}_{N-1}, \dots, d\vec{r}_2 d\vec{p}_2$ , générant ainsi un système d'équations couplées appelé hiérarchie BBGKY (pour Bogoliubov, Born, Green, Kirkwood et Yvon). A un ordre  $p$  quelconque l'équation obtenue relie la fonction de distribution  $f_p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_p, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_p, t)$  d'ordre  $p$  à la fonction de distribution  $f_{p-1}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{p-1}, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{p-1}, t)$  d'ordre  $p-1$ . L'équation la plus simple est la dernière équation de la

hiérarchie qui contient la fonction de distribution une-particule et la fonction de distribution deux-particules et qui s'écrit comme

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} - \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = \int d\vec{p}_2 d\vec{r}_2 \frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \vec{p}_1} \quad (\text{I.12})$$

où  $\psi$  est l'énergie potentielle due à une source externe et  $\phi_{1,2}$  est l'énergie potentielle d'interaction entre la particule 1 et la particule 2 (énergie potentielle self-consistante). En utilisant le développement de Mayer

$$f_2(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, t) = f_1(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t) f_1(\vec{r}_2, \vec{p}_2, t) + g(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2, t) \quad (\text{I.13})$$

où  $g$  est la fonction de corrélation de paire, l'équation (I.12) prend la forme

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} - \left( \frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial \vec{r}_1} + \frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}_1} \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = \int d\vec{p}_2 d\vec{r}_2 \frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{p}_1} \quad (\text{I.14})$$

Dans un milieu chargé on pose

$$-\frac{\partial(\psi + \phi_{1,2})}{\partial \vec{r}_1} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{I.15})$$

où  $q$  est la charge de la particule et,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  sont les champs électriques et magnétiques respectivement. Ces champs prennent compte aussi bien des champs créés par des sources externes que des champs créés par les particules. L'équation (I.14) devient

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}_1} + q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{p}_1} = \int d\vec{p}_2 d\vec{r}_2 \frac{\partial \phi_{1,2}}{\partial \vec{r}_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial \vec{p}_1} \quad (\text{I.16})$$

Cette équation est une équation cinétique qui nécessite une relation de fermeture qui consiste à exprimer la fonction de corrélation de paire  $g$  en fonction de la fonction de distribution une-particule  $f_1$ . Pour des systèmes faiblement corrélés le membre de droite est remplacé par

l'opérateur de collision de Boltzmann. En posant  $f_1 = f(\vec{r}, \vec{p})$  (appelée dorénavant fonction de distribution), elle s'écrit formellement

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = C(f) \quad (\text{I.17})$$

où le membre de droite qui tient compte des collisions de l'espèce de particule considérée avec les autres espèces de particules, est l'opérateur de Boltzmann défini dans le cas classique par

$$C(f) = \int d\vec{v}_2 \sigma d\Omega |\vec{v}_2 - \vec{v}_1| [f(\vec{v}'_2) f(\vec{v}'_1) - f(\vec{v}_2) f(\vec{v}_1)] \quad (\text{I.18})$$

où  $(\vec{v}'_1, \vec{v}'_2)$  sont les vitesses des deux particules avant la collision et  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ , leur vitesses après la collision,  $\sigma$  est la section efficace de collision et  $d\Omega$  est l'élément d'angle solide à travers lequel diffuse la particule de vitesse  $\vec{v}_2$  après la collision, l'autre particule jouant le rôle de particule cible.

L'équation de Boltzmann (I.17) joue un rôle central pour décrire les propriétés de transport dans les plasmas hors équilibre thermodynamique. Initialement, l'équation de Boltzmann a été établie pour décrire la cinétique des gaz neutres. Elle repose sur l'hypothèse du chaos moléculaire. Cette hypothèse signifie que dans un gaz, une particule effectuant une collision ne transporte pas d'information sur les collisions effectuées auparavant. La mémoire des corrélations dynamiques dues aux collisions précédentes est perdue avant qu'une nouvelle collision ne se produise. A cela, une deuxième hypothèse sur les collisions est considérée, qui consiste à ne tenir compte que des collisions binaires.

L'équation de Boltzmann n'est pas invariante par renversement du temps. Si on change la variable temporelle  $t$  par  $-t$  dans l'équation (I.17), il faut changer simultanément le signe des vitesses. Le premier membre change alors de signe, tandis que le terme de collision n'est pas modifié. Cela implique que la dynamique décrite par l'équation de Boltzmann est irréversible. Notons aussi, que l'équation de Boltzmann décrit une évolution statistique du système dans laquelle les collisions sont prises en compte et que la dynamique à deux particules intervient dans une quantité de nature statistique qu'est la section efficace de collision.



### III. 2 Passage à la limite semi-classique

On va dans une première étape, présenter la notion de fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  dans l'approximation quantique. Dans les plasmas quantiques, les électrons sont des fermions qui doivent être décrits rigoureusement par la mécanique quantique. Il est nécessaire de modifier l'équation (I.17) pour qu'elle soit valable dans un régime semi-classique. Dans ce modèle un électron est repéré par sa position  $\vec{r}$  et son impulsion  $\vec{p}$ . Le mouvement entre deux collisions d'un électron soumis à des champs électrique et magnétique,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  est régi par les équations classiques du mouvement

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \\ \frac{d\vec{p}}{dt} = q[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)] \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Pour décrire les propriétés microscopiques des électrons, on introduit la fonction de distribution une-particule des électrons. Etant donnée la forme des équations (I.17), il convient d'utiliser la fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  qui outre la position  $\vec{r}$  et le temps  $t$ , a pour argument le vecteur impulsion  $\vec{p}$ . La quantité  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)d\vec{r}d\vec{p}$  représente alors le nombre moyen d'électrons qui, à l'instant  $t$ , ont une position dans un élément de volume  $d\vec{r}$  centré en  $\vec{r}$  et un vecteur impulsion dans un élément de volume  $d\vec{p}$  centré en  $\vec{p}$ . La densité locale des électrons

$$n(\vec{r}, t) = \frac{2}{h^3} \int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{p}. \quad (\text{I.20})$$

Dans l'expression (I.20) le facteur 2 prend en compte les deux orientations de spin et  $h^3$  représente le volume d'une cellule de l'espace des phases ( $d\vec{r}d\vec{p}$ ).

### III.2.1 Système à l'équilibre thermodynamique : fonction de distribution de Fermi-Dirac

A l'équilibre thermodynamique, les électrons dans un plasma quantique obéissent à la statistique de Fermi-Dirac. Pour un système constitué d'un nombre fixe de  $N$  électrons, confinés dans un volume  $V$ , la fonction de distribution de Fermi-Dirac donne la probabilité d'occupation d'un niveau d'énergie  $\varepsilon$ , par un électron en fonction de la température  $T$  du système ; elle s'écrit

$$f_{FD}(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right)} \quad (\text{I.21})$$

où  $\mu$  représente le potentiel chimique. Le potentiel chimique est ajusté de manière à ce que le nombre de particules corresponde au nombre total d'électrons du système défini par;

$$n(\mu) = \frac{N}{V} = \frac{2}{h^3} \int f_{FD} d\vec{p}. \quad (\text{I.22})$$

La fonction de Fermi-Dirac rend compte du principe d'exclusion de Pauli qui rappelle que chaque niveau d'énergie peut être occupé au plus par deux fermions. De plus si deux électrons occupent le même niveau d'énergie, ils ont leurs spins nécessairement antiparallèles.

Les variations de la fonction  $f_{FD}(\varepsilon)$  en fonction de  $\varepsilon$  ont une allure caractéristique à partir de laquelle on retrouve les résultats qualitatifs relatifs aux fermions :

$$\begin{aligned} \text{➤ } T = 0K, \quad & f_{FD}(\varepsilon) \rightarrow 1 && \text{pour } \varepsilon < \mu \\ & f_{FD}(\varepsilon) \rightarrow 0 && \text{pour } \varepsilon > \mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f_{FD}(\mu) = 1/2 \quad \forall T \\
 \text{➤ Pour } T \neq 0K, & \quad f_{FD}(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{pour } \varepsilon \gg \mu . \\
 & \quad f_{FD}(\varepsilon) \rightarrow 1 \quad \text{pour } \varepsilon \ll \mu .
 \end{aligned}$$

A  $T = 0K$ , pour des états dont l'énergie  $\varepsilon$  est inférieure au potentiel chimique  $\mu$ , la probabilité d'occupation d'un niveau vaut 1. Cela signifie que tous les niveaux d'énergie,  $\varepsilon < \mu$ , sont remplis. Pour des états, d'énergie supérieures à  $\mu$ ,  $f_{FD} = 0$ . Cela signifie que tous les niveaux, d'énergie  $\varepsilon > \mu$ , sont vides. A  $T = 0K$ , le potentiel chimique  $\mu$ , est l'énergie telle que tous les niveaux d'énergie  $\varepsilon < \mu$  sont occupés tandis que tous les niveaux d'énergie  $\varepsilon > \mu$  sont vides. Le potentiel chimique est dans ce cas appelé énergie ou niveau de Fermi, noté  $\varepsilon_F$ , et qui correspond au niveau d'énergie maximum occupé par les électrons.

A  $T \neq 0K$ , la fonction  $f_{FD}(\varepsilon)$  garde la même allure, cependant elle ne présente pas de discontinuité au voisinage  $\mu$ . La transition des valeurs de  $\varepsilon$  voisines de 1 à la valeur 0 s'effectue sur un intervalle d'énergie de l'ordre de  $2k_B T$ . La transition est d'autant plus brutale que la température est basse.

Lorsque le potentiel chimique est négatif et  $|\mu| \gg k_B T$  la fonction de Fermi-Dirac tend vers une Maxwellienne, c'est à dire vers la limite classique,

$$f_{FD}(\varepsilon) = \left[ 1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) \right]^{-1} \approx \exp\left(\frac{-\varepsilon + \mu}{k_B T}\right) = \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) \exp\left(\frac{-\varepsilon}{k_B T}\right). \quad (\text{I.23})$$

Lorsque le potentiel chimique est proche de zéro les effets de dégénérescence ne sont plus négligeables et dans la limite  $\mu_c \gg k_B T$  le système est fortement dégénéré.

### III. 2.2 Système hors équilibre : équation de Boltzmann semi-classique

L'application de l'équation de Boltzmann aux électrons des plasmas quantiques est basée sur le modèle semi-classique où les électrons sont des fermions décrits par une fonction de distribution  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  régit par l'équation (I.17) qui s'écrit pour les électrons

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = C(f) \quad (\text{I.24})$$

où  $\vec{v}$  et  $\vec{p}$  obéissent aux équations (I.19).  $C(f)$  décrit la variation de  $f$  sous l'effet des collisions. Il décrit, l'interaction à courte portée entre particules du plasma, c'est-à-dire les collisions électron-électron, électron-ion et électron-neutres. Dans le modèle semi-classique l'opérateur de collision de Boltzmann doit être modifié pour tenir compte des effets quantiques, notamment du principe d'exclusion de Pauli. En outre, la modification de cet opérateur passe par le calcul de la section efficace de collision entre les particules considérées. Pour tenir compte des effets quantiques, l'opérateur de collision de Boltzmann (I.18) doit être remplacé par [9]

$$C(f) = \int d\vec{v}_2 d\Omega \sigma(|\vec{v}'_1 - \vec{v}'_2|) \left[ f(\vec{v}'_1) f(\vec{v}'_2) \left( 1 - \frac{f(\vec{v}_1) h^3}{m_1^3 \beta_1} \right) \left( 1 - \frac{f(\vec{v}_2) h^3}{m_2^3 \beta_2} \right) - f(\vec{v}_1) f(\vec{v}_2) \left( 1 - \frac{f(\vec{v}'_1) h^3}{m_1^3 \beta_1} \right) \left( 1 - \frac{f(\vec{v}'_2) h^3}{m_2^3 \beta_2} \right) \right] \quad (\text{I.25})$$

où  $m_1$ ,  $\beta_1$  et  $m_2$ ,  $\beta_2$  sont respectivement les masses et les poids statistiques des particules 1 et 2 qui rentrent en collisions. Rappelons ici, que le poids statistique des électrons est égale à 2. Par ailleurs, on montre que [9] lorsque le système est à l'équilibre thermodynamique, c'est-à-dire lorsque  $C(f) = 0$ , la fonction de distribution celle de Fermi-Dirac (équation (I.21)).

L'opérateur de collision de Boltzmann aussi bien dans le cas classique (I.18) ou dans le cas dégénéré (I.25) est un opérateur intégro-différentiel non linéaire. Sa forme mathématique est donc relativement complexe. Il est d'usage pour permettre de résoudre l'équation de Boltzmann, tout en retenant les propriétés physique de base, d'opérer des

simplifications sur l'opérateur de Boltzmann. L'une des formes relativement simple utilisée dans la littérature est l'opérateur BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) :

$$C(f) = -\nu(f - f_{FD}) \quad (\text{I.26})$$

où  $\nu$  est la fréquence de collision qui dépend dans le cas général de la vitesse relative entre les particules effectuant une collision. Dans ce travail, nous avons par souci de simplicité, utilisé la forme de l'opérateur BGK [10]. Derrière cette approximation se trouve l'idée fondamentale qui consiste à décrire les processus de collision comme un phénomène de relaxation vers une fonction de distribution d'équilibre  $f_{FD}$ .

Les propriétés de base des opérateurs de collision sont leurs propriétés conservatives qui correspondent à la conservation du nombre de particules, de la quantité de mouvement et de l'énergie données respectivement par les relations suivantes

$$\int C_{ab}(f) d\vec{v}' = 0 \quad (\text{I.27})$$

$$\int m_a \vec{v}' C_{aa}(f) d\vec{v}' = 0 \quad (\text{I.28})$$

et

$$\int \frac{m_a v'^2}{2} C_{aa}(f) d\vec{v}' = 0 \quad (\text{I.29})$$

où les indices  $a$  et  $b$ , représentent l'espèce de particules et  $\vec{v}'$  est la vitesse aléatoire des particules. La relation (I.27) signifie que lors d'une collision entre deux particules de même espèce, il n'y a pas de création (ou d'annihilation) de particules, tandis que les relations (I.28) et (I.29) expriment le fait qu'il n'y a pas de création d'impulsion et d'énergie lors de collision entre particules de même espèce. On dit alors que les collisions entre particules de même espèce sont élastiques.

Le membre de gauche de l'équation (I.24) décrit l'évolution dans le temps de la fonction de distribution  $f$  dans l'espace des phases  $(\vec{r}, \vec{v})$ . Le terme  $\frac{\partial f}{\partial t}$  exprime la

dépendance explicite de  $f$  par rapport au temps (effets non stationnaires), le terme  $\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$  exprime l'influence des phénomènes de diffusion (terme de transport) tandis que le terme  $e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}}$  traduit l'action des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Ces derniers sont dus aux charges d'espace du plasma (champs auto-consistants) ainsi qu'à des sources externes.

Rappelons ici, que dans les plasmas ionisés, l'interaction entre deux particules chargées est coulombienne. En raison de la portée infinie de la force de Coulomb, il y a lieu de distinguer deux régions:

-La région des collisions située typiquement à des distances inférieures à la longueur d'écran de Debye  $\lambda_{De}$ . Dans cette zone, les particules subissent des déviations et des échanges d'énergie suites à des collisions de types binaires.

-La région des interactions collectives supérieures à la longueur de Debye. Dans cette zone naissent des champs électrique et magnétique à la suite de la séparation de charges et à des courants circulant dans le plasma. Toutes les particules sont en interaction simultanée, donnant ainsi lieu à un comportement collectif du plasma. La longueur de Debye dans les plasmas représente la longueur d'écran d'une charge par toutes les autres charges du plasma.

Les deux premiers termes du membre de gauche de l'équation (I.24) décrivent l'advection tandis que le troisième terme décrit les interactions lointaines supérieures à la longueur de Debye  $\lambda_{De}$ . Le membre de droite de l'équation (I.24) rend compte des collisions entre particules à des distances inférieures à la longueur de Debye  $\lambda_{Ds}$ .

#### IV. Equations fluides et coefficients de transport

Les équations fluides nettement plus simples que les équations cinétiques sont particulièrement importantes en physique. En effet, elles permettent de décrire un très grand nombre de phénomènes physiques avec une grande précision sans recourir au traitement cinétique beaucoup plus lourd à utiliser pour les équations cinétiques.

Le système d'équations fluides est en effet, plus simple d'un point de vue mathématique que l'équation cinétique dont il découle. On passe d'une description microscopique à une description macroscopique du système étudié, soit de l'espace à 7-dimensions,  $(\vec{r}, \vec{v}, t)$  à l'espace à 4-dimensions,  $(\vec{r}, t)$ . Les équations fluides qui sont des

moments de l'équation cinétique, sont obtenues en intégrant l'équation (I.24) dans l'espace des vitesses en ayant au préalable multiplié cette dernière par les variables microscopiques  $(\vec{v})^n$  où  $n \geq 0$  est un nombre entier. La structure mathématique de l'équation cinétique fait que l'équation d'évolution macroscopique de tout moment d'ordre  $n$ ,  $M_n$ , génère les moments  $M_{n-1}$  et  $M_{n+1}$ . Ceci est engendré par le deuxième terme (terme de transport) dans le membre de gauche de l'équation cinétique (I.24). Il résulte alors naturellement une hiérarchie infinie d'équations fluides, puisque toute équation fluide d'ordre  $n$  s'exprime par rapport au moment d'ordre  $n+1$ , etc... Cette hiérarchie infinie d'équations est par conséquent complètement équivalente à l'équation cinétique (I.24). Pour des considérations mathématiques évidentes, afin de décrire un système physique, il est nécessaire d'opérer une troncature de cette hiérarchie. La troncature la plus simple, utilisée systématiquement pour décrire des systèmes physiques, est celle qui consiste à considérer les trois premières équations fluides d'ordre le plus bas ( $n=0-2$ ).

En intégrant, l'équation (I.24) sur l'espace des vitesses et en utilisant l'équation (I.27), nous obtenons

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n V_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{I.30})$$

où

$$n(\vec{r}, t) = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{p}, \quad (\text{I.31})$$

est la densité de particules et où la vitesse moyenne des particules est donnée par,

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}, \quad (\text{I.32})$$

L'équation (I.30) est appelée équation de continuité. Elle décrit la conservation du nombre de particules en l'absence de termes de création et d'annihilation de particules.

La deuxième équation hydrodynamique fondamentale est obtenue en intégrant l'équation (I.24) dans l'espace des vitesses après l'avoir multipliée par l'impulsion microscopique  $m_e \vec{v}$  et en utilisant l'équation (I.28),

$$\frac{\partial V_j}{\partial t} + V_i \frac{\partial V_j}{\partial x_i} - \frac{e}{m_e n} (E_j + \delta_{jkl} V_k B_l) + \frac{1}{nm_e} \frac{\partial P}{\partial x_j} + \frac{1}{nm_e} \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_i} = \frac{R_i}{m_e n} \quad (\text{I.33})$$

où  $\delta_{jkl}$  est le tenseur antisymétrique,

$$P = nT, \quad (\text{I.34})$$

est la pression cinétique isotrope et

$$T(\vec{r}, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{3} (\vec{v} - \vec{V})^2 f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}} \quad (\text{I.35})$$

est la température (énergie moyenne des particules en ne tenant pas compte du mouvement du fluide) représentée en unité énergie.

La troisième équation fluide correspond à l'équation qui traduit la conservation de l'énergie. Elle est obtenue en multipliant l'équation (I.24) par l'énergie cinétique microscopique  $\frac{mV^2}{2}$ , en l'intégrant dans l'espace des vitesses et en utilisant l'équation (I.29),

$$\frac{3}{2} \frac{\partial nT}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{3}{2} nTV_i \right) + nT \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + \Pi_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = Q \quad (\text{I.36})$$



Le système d'équations (I.30), (I.33) et (I.36) nécessite pour qu'il soit auto-consistant que l'on exprime les relations de fermeture  $\Pi_{ij}$ ,  $q_i$ ,  $R_i$  et  $Q$  en fonction des moments d'ordre plus bas que sont les variables hydrodynamiques,  $n(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  et  $T(\vec{r}, t)$ .

Dans le cas général le tenseur des contraintes et le flux de chaleur qui résultent de l'écart par rapport à la symétrie sphérique de la fonction de distribution sont définis respectivement par

$$\Pi_{ij}(\vec{r}, t) = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} m \left[ (v_i - V_i)(v_j - V_j) - \frac{(\vec{v} - \vec{V})^2}{3} \delta_{ij} \right] f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{p} \quad (\text{I.37})$$

et

$$q_i = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m (\vec{v} - \vec{V})^2 (v_i - V_i) f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{p}, \quad (\text{I.38})$$

où  $\delta_{ij}$  est le tenseur unité. Par ailleurs les termes responsables du transfert d'impulsion et d'énergie lors des processus collisionnels, s'écrivent respectivement sous la forme

$$R_i = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} m v_i C(f) d\vec{p} \quad (\text{I.39})$$

et

$$Q = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m v^2 C(f) d\vec{p} \quad (\text{I.40})$$

Notons que dans la littérature les approches les plus utilisées pour tronquer la hiérarchie infinie d'équations fluides ne sont pas basées comme décrit ci-dessus sur les trois équations fluides d'ordre le plus bas. Elles sont en fait basées sur les méthodes de Chapman-Enskog [9] et de Grad [11] et sur des méthodes de troncature liées au principe d'entropie. Plus précisément, Il s'agit de construire un système d'équations couplées qui décrit plusieurs moments fluides. La troncature la plus connue est celle des 13 moments. Tous les résultats

rapportés en fait sont basés sur un développement asymptotique de la fonction de distribution où ses moments par rapport à un état d'équilibre représenté par la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann (cas non dégénéré) ou de Fermi-Dirac (cas dégénéré).

## VI. Etude bibliographique sur le transport dans les plasmas dégénérés.

L'étude des phénomènes de transport dans les plasmas dégénérés a fait l'objet de nombreux travaux rapportés dans la littérature (voir par exemple l'article de revue de Potekhin et ses collaborateurs [12]).

### Résultat de Lee et More

Dans ce paragraphe, nous limitons l'étude bibliographique au résultat de Lee et More de la référence [13]. Nous avons ciblé cette référence dans la mesure où les résultats établis dans cette thèse améliorent ceux de cette référence. Les auteurs établissent un ensemble de coefficients de transport pour décrire un plasma dense et collisionnel à partir de l'équation de Boltzmann-semi-classique dans l'approximation du temps de relaxation. Dans une première partie, leur étude porte sur un plasma non magnétisé. Elle sera ensuite généralisée aux plasmas magnétisés par la prise en compte d'un champ magnétique constant. Nous ne rapporterons pas dans ce manuscrit, les résultats avec champ magnétique dans la mesure où dans notre travail les plasmas considérés sont non magnétisés.

Lee et More considèrent un plasma dégénéré non magnétisé où la fonction de distribution électronique  $f$  obéit à l'équation de Boltzmann suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = -\frac{f - f_0}{\tau_c} \quad (\text{I.41})$$

où  $f_0$  est la fonction de Fermi-Dirac locale qui dépendent de la température électronique  $T_e$  et de la densité électronique  $n_e$ ,  $\tau_c$  est le temps de relaxation des électrons calculé en tenant compte des collisions électron-ion et électron-neutre. Il en résulte alors,

$$\frac{1}{\tau_c(\mathbf{v})} = \frac{1}{\tau_{ei}(\mathbf{v})} + \frac{1}{\tau_{en}(\mathbf{v})} \quad (\text{I.42})$$

où  $\tau_{ei} = 1/n_i v \sigma_{ei}$  et  $\tau_{en} = 1/n_n v \sigma_{en}$  sont respectivement les temps de relaxation électron-ion et électron-neutre ; où  $n_i$  et  $n_n$  sont respectivement les densités des ions et des neutres,  $\sigma_{ei}$  et  $\sigma_{en}$  sont respectivement les sections efficaces de collisions électron-ion et électron-neutre. Notons aussi, qu'à cause de la forme de l'opérateur de collision de type Krook [10], l'équation (I.41) est appelée équation de Boltzmann dans l'approximation du temps de relaxation [10]. Dans la référence [13], les auteurs étudient le transport électronique dans l'approximation stationnaire. Dans ce cas, cela revient à poser  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  dans l'équation (I.41)

qui se réécrit comme

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = - \frac{f - f_0}{\tau_c} \quad (\text{I.43})$$

ou encore

$$f = f_0 - \tau_c \left( \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} \vec{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \right). \quad (\text{I.44})$$

L'équation (I.44) est résolue par la méthode perturbative en considérant un champ électrique de faible amplitude et des gradients de température et de densité faibles. Il s'en suit à la première itération :

$$f = f_0 - \tau_c \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \vec{v} \cdot \left( -e \vec{E} - \frac{\varepsilon - \mu}{T_e} \nabla T_e - \nabla \mu \right). \quad (\text{I.45})$$

En utilisant les définitions de la référence [6], ils adoptent la forme suivante de l'expression du flux de chaleur

$$\vec{q}_G = \vec{q} + \frac{1}{e} \left( \frac{\mu}{T_e} - \frac{\partial \mu}{\partial T_e} \right) \vec{j} \quad (\text{I.46})$$

où  $\vec{q}$  est défini par l'équation (I.38) et  $\vec{j}$  est la densité de courant électrique définie par :

$$\vec{j} = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} -e\vec{v}f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{p}. \quad (\text{I.47})$$

Par ailleurs, à partir de l'équation (I.45),  $\vec{j}$  et  $\vec{q}_G$  deviennent des fonctions linéaires du champ électrique  $\vec{E}$  et du gradient de température  $\nabla T_e$  :

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} - S\nabla T_e) \quad (\text{I.48})$$

$$\vec{q}_G = T_e S \vec{j} \sigma - K_T \nabla T_e \quad (\text{I.49})$$

où  $\sigma$  est la conductivité électrique,  $K_T$  est la conductivité thermique et  $S$  le coefficient thermoélectrique. Ces coefficients s'obtiennent en substituant l'expression (I.45) dans (I.48) et (I.49). Il en résulte alors,

$$\sigma = e^2 K_0 \quad (\text{I.50})$$

$$K_T = (1/T)(K_2 - K_1^2 / K_0) \quad (\text{I.51})$$

et

$$S = \frac{1}{e} \left( \frac{\mu}{T_e} - \frac{\partial \mu}{\partial T_e} \right) - \frac{K_1}{e T_e K_0} \quad (\text{I.52})$$

où  $K_n = -\int \tau_c \frac{v^2}{3} \varepsilon^n \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{2d\vec{p}}{h^3}$ . La conductivité électrique  $\sigma$  est la contribution à la densité de courant  $\vec{j}$  du champ électrique  $\vec{E}$  lorsque  $\nabla T_e = 0$ , tandis que la conductivité thermique  $K_T$  est la contribution au flux de chaleur  $\vec{q}_G$  du gradient de température  $\nabla T_e$  dans le cas où  $\vec{j} = 0$ . Le rapport,  $L = K_T / \sigma T_e$ , est appelé le nombre de Lorentz.

Le calcul des coefficients de transport  $\sigma$ ,  $K_T$  et  $S$  nécessite la détermination de la section efficace de diffusion  $\sigma_{ei}$ . Plusieurs modèles de calcul de  $\sigma_{ei}$ , sont proposés dans la littérature [14]. Nous pouvons citer à titre d'exemple, la méthode des déphasages [15] qui est

basée sur une résolution numérique de l'équation de Schrödinger pour des potentiels de Thomas-Fermi. Dans la référence [13], le calcul a été effectué en prenant comme modèle, la section efficace de diffusion coulombienne [10]:

$$\sigma_{ei} = \frac{(Z^*)^2 e^4 Ln\Lambda}{(4\pi\epsilon_0)^2 m_e^2 v^4} \quad (I.53)$$

où  $Z^*$  est l'état d'ionisation et  $Ln\Lambda$  le logarithme de Coulomb. Les effets quantiques sont pris en considération dans le calcul du logarithme de Coulomb à travers un choix adéquat des paramètres de coupure. Nous ne donnons pas ici les détails des calculs. Ils seront exposés dans le chapitre II de ce manuscrit. Le choix de ce modèle est motivé par le fait qu'il conduit à des expressions des coefficients de transport pratiques dans leur utilisation. De plus, leurs résultats sont en bon accord avec ceux obtenus par des résolutions numériques de l'équation de Schrödinger. En utilisant, l'expression (I.52), pour la section efficace de diffusion, il en résulte les coefficients de transport suivants :

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e} \tau A^\alpha \left( \frac{\mu}{T_e} \right) \quad (I.54)$$

$$K_T = \frac{n_e T}{m_e} \tau A^\beta \left( \frac{\mu}{T_e} \right) \quad (I.55)$$

$$S = \frac{1}{e} \tau A^\gamma \left( \frac{\mu}{T_e} \right) \quad (I.56)$$

où  $\tau = \frac{3\sqrt{m_e} T^{3/2}}{2\sqrt{2} (Z^*)^2 n_i e^4 Ln\Lambda} (1 + \exp(-\mu/T_e)) F_{1/2}$  est le temps de relaxation moyen et où  $F_n$

représente l'intégrale de Fermi-Dirac définie par :

$$F_n(\mu/T) = \int_0^\infty \frac{y^n dy}{1 + \exp(y - \mu/T_e)}. \quad (I.57)$$

Les coefficients  $A^\alpha$ ,  $A^\beta$  et  $A^\gamma$  sont des fonctions des intégrales de Fermi-Dirac

$$A^\alpha \left( \frac{\mu}{T_e} \right) = \frac{3}{4} \frac{F_2}{(1 + \exp(-\mu/T_e))(F_{1/2})^2}, \quad (\text{I.58})$$

$$A^\beta \left( \frac{\mu}{T_e} \right) = \frac{20}{9} \frac{F_4 [1 - 16F_3^2 / F_4 F_2]}{(1 + \exp(-\mu/T_e)) F_{1/2}^2} \quad (\text{I.59})$$

et

$$A^\gamma \left( \frac{\mu}{T_e} \right) = \frac{5}{3} \frac{F_{3/2}}{F_{1/2}} - \frac{4}{3} \frac{F_3}{F_2}. \quad (\text{I.60})$$

Notons ici, que ces coefficients peuvent être calculés analytiquement aussi bien dans la limite non dégénérée que dans la limite complètement dégénérée. Dans la limite non dégénérée correspondant à  $\frac{\mu}{T_e} \rightarrow -\infty$ , les expressions (I.58)-(I.60) s'écrivent

$$A^\alpha = 32/3\pi, \quad (\text{I.61})$$

$$A^\beta = 128/3\pi, \quad (\text{I.62})$$

$$A^\gamma = 1,5, \quad (\text{I.63})$$

Et dans la limite complètement dégénérée, correspondant à  $\frac{\mu}{T_e} \rightarrow +\infty$ , elles sont données par

$$A^\alpha = 1, \quad (\text{I.64})$$

$$A^\beta = \pi^2/3, \quad (\text{I.65})$$

$$A^\gamma = 1. \quad (\text{I.66})$$

Pour une dégénérescence arbitraire des électrons, les coefficients  $A^\alpha$ ,  $A^\beta$  et  $A^\gamma$  doivent être calculés numériquement.

Notons ici, que dans les travaux de la référence [13], les effets liés à la vitesse moyenne du fluide électronique et les effets de viscosité ont été négligés dans l'étude des phénomènes de transport.

De plus les résultats de la référence [13] ont été établis pour des plasmas de dégénérescence arbitraire mais fortement collisionnels. Il en a résulté des grandeurs de transport locales. Cependant, on montre (voir équation (I.10)), que dans les plasmas quantiques pour les fortes densités les processus collectifs deviennent prédominants par rapport aux processus collisionnels. Les plasmas quantiques et denses sont peu collisionnels. Il est donc nécessaire d'étudier le transport au-delà de la limite collisionnelle.

Le travail rapporté dans cette thèse est précisément de calculer le coefficient de viscosité et d'évaluer les premières contributions non locales aux coefficients de transport.

## **VII. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté succinctement les différents types de plasmas rencontrés dans divers domaines de la physique ainsi que les paramètres physiques pertinents qui permettent de les caractériser.

L'équation de Boltzmann qui constitue l'équation de base de notre travail a été présentée. Nous avons exposé sa détermination dans le cas classique à partir de l'équation de Liouville. Le passage à la limite semi-classique a également été rapporté.

Un paragraphe a été dédié aux équations hydrodynamiques. Ce qui nous a permis d'introduire les coefficients de transport qui constituent l'objectif de cette thèse.

L'étude bibliographique a été centrée principalement sur un résultat de la littérature concernant les coefficients de transport dans les plasmas collisionnels et de dégénérescence arbitraire.

# CHAPITRE II

RESOLUTION DE L'EQUATION DE

BOLTZMANN

ET

CALCUL DES COEFFICIENTS DE

TRANSPORT



# RESOLUTION DE L'EQUATION DE BOLTZMANN ET CALCUL DES COEFFICIENTS DE TRANSPORT

## I. Introduction

Ce chapitre est consacré d'une part à la résolution de l'équation de Boltzmann semi-classique et d'autre part au calcul des coefficients de transport dans les plasmas de dégénérescence arbitraire.

Dans une première partie, nous présentons le modèle cinétique que nous utilisons en précisant son domaine de validité.

Nous résolvons ensuite, l'équation de Boltzmann semi-classique dans l'approximation du temps de relaxation à l'aide des polynômes orthogonaux et en prenant soin de considérer les propriétés d'invariance collisionnelle des opérateurs de collisions.

Nous déduisons ensuite, dans une première étape les coefficients de transport dans l'approximation locale. Dans une deuxième étape, nous avons calculé, la première contribution non locale aux des coefficients de transport.

Enfin, nous résumons nos résultats dans une brève conclusion.

### I. Modèle cinétique

Dans l'étude des phénomènes de transport dans les gaz et les plasmas, il est pratique d'exprimer les équations cinétiques en fonction de la vitesse aléatoire  $\vec{v}'$  au lieu de la vitesse liée au laboratoire,  $\vec{v}$ . En effet, ce changement de variable est particulièrement adapté pour calculer les coefficients de transport qui sont définis en fonction de la vitesse aléatoire des particules. De plus, cette transformation permet de mettre en évidence les effets liés au mouvement du fluide. Nous allons, par conséquent appliquer ce changement de variable à l'équation de Boltzmann présentée dans le chapitre I [Eq. (I.24)]. Cette équation prend dans ce cas la forme suivante

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{d\vec{v}'}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}'} = C(f). \quad (\text{II.1})$$

En mécanique classique la relation entre la vitesse aléatoire  $\vec{v}'$  et la vitesse liée au repère du laboratoire est donnée par la transformation de Galilée :

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}. \quad (\text{II.2})$$

Par ailleurs, l'accélération au plasma d'un électron soumis aux champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  est donnée par

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (\text{II.3})$$

et dans le repère lié au fluide, en utilisant l'équation (II.2), elle s'écrit

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - (\vec{v} + \vec{V}) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}}. \quad (\text{II.4})$$

Les transformations du champ électromagnétique lors d'un changement de repère sont données à partir de la théorie de la relativité [16]. Elles s'expriment dans la limite classique où  $V \ll c$ ,  $c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide,

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}, \quad (\text{II.5})$$

où  $\vec{E}'$  et  $\vec{B}'$  sont les champs électrique et magnétique exprimés dans le repère lié au fluide. Des équations (II.2)-(II.5), l'équation cinétique (II.1) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{V} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} - \frac{e}{m_e} (\vec{E}' + \vec{v} \times \vec{B}') \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}'} - \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{v} + \vec{V}) \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}'} = C(f) \quad (\text{II.6})$$

Pour des raisons de simplicité, dans l'équation (II.6), nous avons omis la notation 'prime' pour la vitesse. Dans la suite de notre travail  $\vec{v}$  représente la vitesse des électrons dans le repère lié au plasma. Nous venons d'établir l'équation de Boltzmann en fonction de la vitesse aléatoire  $\vec{v}$ . Ce changement de variable a fait apparaître de nouveaux termes qui dépendent de la vitesse moyenne  $\vec{V}$  du plasma, liés au mouvement résultant du plasma.

Nous allons à présent préciser le domaine de validité de notre modèle.

## **II. 1 approximation d'un plasma non magnétisé**

Elle consiste à négliger les champs magnétiques dus à des sources externes et à des courants électriques dans le plasma qui peuvent générer des champs magnétiques intenses. Cette approximation ne peut se justifier que si la fréquence cyclotron des électrons due à la présence d'un champ magnétique quasi-statique dans le plasma est faible devant la fréquence de collision.

### **II.2 Approximation quasi-statique**

Cette approximation signifie que le temps de relaxation des grandeurs hydrodynamiques est plus grand que le temps moyen entre deux collisions. Concrètement cela revient à négliger dans l'équation (II.6), les termes temporels  $\left( \sim \frac{\partial}{\partial t} \right)$  devant le terme collisionnel  $C(f) \sim \nu$ , où  $\nu$  représente la fréquence de collision.

### **III.3 Approximation linéaire**

Dans ce travail, nous nous intéressons à des champs et des grandeurs hydrodynamiques de faibles amplitudes. Cette approximation va nous permettre de linéariser les équations du problème. La principale conséquence de cette linéarisation est la simplification mathématique des équations du modèle, ce qui va donc faciliter leur résolution analytique. Les coefficients de transport vont par conséquent, s'écrire de façon linéairement indépendante par rapport aux grandeurs hydrodynamiques du plasma. D'un point de vue mathématique, l'approximation linéaire consiste à perturber le milieu à partir d'un état d'équilibre. On utilise alors pour toute

grandeur physique  $X$ , le développement  $X = X_0 + \delta X$  où  $X_0$  est la grandeur à l'équilibre et  $\delta X$  la perturbation avec la condition  $\delta X \ll X_0$ . Cette procédure permet de séparer le plasma en deux états distincts : un plasma non perturbé et un plasma perturbé.

i) *plasma non perturbé*

Cet état est défini par une densité de particules  $n_0$ , correspondant à un potentiel chimique  $\mu_0$ , une température  $T_0$  et un plasma au repos, soit une vitesse moyenne  $\vec{V}_0 = 0$ . Le plasma est supposé à l'équilibre thermodynamique global décrit par la fonction de distribution de Fermi-Dirac

$$f_{FD}(\varepsilon) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\varepsilon - \mu_0}{T_0}\right)}, \quad (\text{II.7})$$

$\varepsilon = \frac{m_e v^2}{2}$  est l'énergie totale des électrons. Dans l'expression (II.7), la température  $T_0$  est exprimée en unité énergie, unité que nous adopterons dans la suite de ce travail. Cet état d'équilibre conduit à l'ordre zéro, à des champs électrique et magnétiques nuls ( $\vec{E}_0 = 0$  et  $\vec{B}_0 = 0$ ).

ii) *plasma perturbé*

Nous supposons que le plasma perturbé est inhomogène suivant la direction  $Ox$ , et il est décrit par la fonction de distribution  $\delta f$ , le potentiel chimique  $\delta\mu$ , la température  $\delta T$ , la vitesse moyenne  $\delta\vec{V} = \delta V \vec{e}_x$  et le champ électrique  $\delta\vec{E} = \delta E \vec{e}_x$ . De plus, nous supposons que toutes les grandeurs perturbées varient comme,  $\exp(ikx)$ , où  $k$  est le nombre d'onde caractérisant l'inhomogénéité du plasma.

## II.4 Modélisation des opérateurs de collision

Dans ce paragraphe, nous allons préciser le membre de droite de l'équation (II.6), *i.e* ;  $C(f)$ . Rappelons que ce terme décrit l'évolution de la fonction de distribution sous l'effet des collisions. Notons que les processus collisionnels jouent un rôle fondamental dans l'étude de l'évolution du plasma en dehors de l'état d'équilibre. Il faut distinguer les collisions élastiques dans lesquelles il n'y a pas d'échanges d'impulsion et d'énergie entre les particules et les collisions inélastiques qui comportent au contraire de tels échanges. Ces processus ont pour effets d'assurer les transferts d'impulsion et d'énergie entre les divers constituants du plasma, ils donnent naissance aux phénomènes de transport et enfin, ils rétablissent l'état d'équilibre.

Dans ce travail, on s'intéresse à dynamique des électrons à travers l'évolution de la fonction de distribution. Les processus collisionnels mis en jeu sont les collisions électron-électron et les collisions électron-ion. Dans notre modèle, nous ne tiendront pas compte des collisions électron neutres. Rappelons aussi, que nous considérons seulement des collisions de types binaires, c'est-à-dire exclusivement entre deux particules. De plus, comme nous l'avons précisé dans le chapitre I, paragraphe III. 2, nous utiliserons la forme BGK (équation (I.26)) de l'opérateur de collision pour modéliser aussi bien les collisions électron-électron que les collisions électron-ion.

### *i) Opérateur de collision electron-electron*

Les collisions entre électrons sont des collisions élastiques. Elles ont pour rôle de thermaliser les électrons entre eux. Dans ce travail, nous modélisons ce processus par l'opérateur de relaxation BGK

$$C_{ee}(f) = -\nu_{ee} [f - f_{FD}] \quad (\text{II.8})$$

où  $\nu_{ee}$  est la fréquence de collision électron-électron que nous supposons constante. Le choix d'une fréquence de collision constante va assurer à l'opérateur  $C_{ee}$  de vérifier les propriétés conservatives (I.27)-(I.29).

*ii) Opérateur de collision électron-ion*

Les collisions électron-ion sont inélastiques. Elles vont permettre les échanges d'impulsion et d'énergie entre les électrons et les ions. En plus de faire tendre le plasma vers un état d'équilibre, elles contribuent notamment aux phénomènes de transport.

Comme pour l'opérateur de collision  $C_{ee}$ , nous modélisons l'opérateur de collision électron-ion,  $C_{ei}$  par un opérateur de relaxation de type BGK

$$C_{ei}(f) = -\nu_{ei}(v)[f - f_{FD}] \quad , \quad (\text{II.9})$$

où

$$\nu_{ei}(v) = n_i v \sigma_{ei}(v) \quad (\text{II.10})$$

est la fréquence de collision électron-ion, où  $n_i$  est la densité ionique et  $\sigma_{ei}$  est la section efficace de diffusion coulombienne électron-ion [13]

$$\sigma_{ei} = \frac{(Z^*)^2 e^4 L n \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 v^4} \quad (\text{II.11})$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide et  $Z^*$  est l'état d'ionisation ionique. Le logarithme de Coulomb est donné par

$$\ln \Lambda = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{b_{\max}^2}{b_{\min}^2} \right), \quad (\text{II.12})$$

où  $b_{\max}$  et  $b_{\min}$  sont respectivement les paramètres d'impact maximum et minimum lors de la diffusion coulombienne des électrons avec les ions. Le choix des valeurs de ces deux paramètres sera justifié en tenant compte des effets de dégénérescence des électrons, de l'effet d'écrantage de Debye et du couplage des ions.

Le paramètre d'impact maximum  $b_{\max}$  est généralement fixé par l'effet d'écran. En effet les électrons subissent des collisions coulombienne avec des ions écranté. La longueur d'écran est déterminée par la longueur d'écran de Debye  $\lambda_{DH}$  telle que,

$$\lambda_{DH}^2 = \frac{\varepsilon_0 T_e}{n_e e^2} + \frac{\varepsilon_0 T_i}{n_i (Z^* e)^2}, \quad (\text{II.13})$$

où  $T_i$  est la température des ions. La contribution des ions est négligeable pour des plasmas contenant des atomes lourds. La prise en compte des effets de dégénérescence à la longueur de Debye [17] revient à multiplier le premier terme de la relation (II.13) par le facteur  $2F_{-1/2} / F_{1/2}$ , où  $F_j$  rappelle le, représente l'intégrale de Fermi-Dirac définie par

$$F_j(\mu/T) = \int_0^\infty \frac{y^j dy}{1 + \exp(y - \mu/T)}. \quad (\text{II.14})$$

Dans la référence [18], les auteurs proposent un ajustement numérique de l'expression de  $\lambda_D$  valable de la limite classique à la limite quantique :

$$\lambda_D^2 = \frac{\varepsilon_0 (T_e^2 + T_F^2)^{1/2}}{n_e e^2} \quad (\text{II.15})$$

où  $T_F$  est la température de Fermi définie par l'équation (I.5). La précision de cet ajustement numérique est inférieure à 5%, donnant des erreurs insignifiantes dans l'expression du logarithme de Coulomb  $\ln \Lambda$ . Par ailleurs, notons que pour des densités importantes, la longueur de Debye peut être plus petite que la distance inter-atomique  $r_0$  (voir Eq. (I.2)), *i.e.* ; ( $\lambda_D < r_0$ ) Dans ce cas, les ions sont fortement couplés [19], et l'écrantage décrit par la longueur de Debye tombe en défaut. Lorsque  $\lambda_D < r_0$ , nous prendrons, , comme dans la référence [13], la longueur d'écran égale à la distance inter-atomique  $r_0$ . En résumé, des équations (I.2) et (II.15) la valeur du paramètre d'impact  $b_{\max}$  est donnée par

$$b_{\max} = \max(\lambda_D, r_0), \quad (\text{II.16})$$

où la notation « max » signifie la valeur la plus grande.

Dans l'approximation classique, le paramètre d'impact minimum  $b_{\min}$  est donné par la distance d'approche [20]  $b_0$ , calculée pour des collisions correspondant à des déviations d'angle égales à  $90^\circ$ ,

$$b_{\min} = b_0 = \frac{Z^* e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2}. \quad (\text{II.17})$$

Cependant, pour les hautes énergies, la distance d'approche classique,  $b_0$  peut être plus petite que la longueur de Broglie  $\lambda_B$ , définie par

$$\lambda_B = \frac{\hbar}{m_e v} \quad (\text{II.18})$$

Dans ce cas, en vertu du principe d'incertitude d'Heisenberg, on pose la valeur de  $b_{\min}$  égale la moitié de la longueur de Broglie,

$$b_{\min} = \frac{\lambda_B}{2} = \frac{\hbar}{2m_e v}. \quad (\text{II.19})$$

La valeur du paramètre d'impact minimum sera donc calculée à partir des équations (II.17) et (II.19) en prenant

$$b_{\min} = \max(b_0, \lambda_B / 2) \quad (\text{II.20})$$

Pour le calcul des coefficients de transport, nous évaluerons la valeur de  $b_{\min}$  pour la vitesse



$v = (\langle v^2 \rangle)^{1/2} = \sqrt{\frac{3T_e}{m_e}}$ , où le symbole  $\langle \rangle$ , signifie valeur moyenne. La valeur moyenne est

calculée pour une fonction de distribution de Maxwell (Eq. (I.23)). Dans la limite dégénérée, la vitesse thermique des électrons est exprimée en fonction de l'énergie de Fermi telle que

$$v = \sqrt{2E_F / m_e} .$$

Nous venons de présenter le modèle cinétique que nous utiliserons pour calculer les coefficients de transport. . En tenant compte des approximations utilisées, l'équation de Boltzmann (II.6) linéarisée par rapport à l'équilibre thermodynamique globale s'écrit dans l'espace de Fourier ( $x \leftrightarrow k$ ):

$$ikv_x \delta f - \frac{e}{m_e} \delta E \frac{\partial f_{FD}}{\partial v_x} = -\nu (\delta f - \delta f_{FD}) \quad (II.21)$$

où  $\nu_c = \nu_{ee} + \nu_{ei}$  est la fréquence de collision totale et  $\delta f_{FD}$  la fonction de Fermi-Dirac perturbée,

$$\delta f_{FD} = (\mu_0 - \varepsilon) \frac{\partial f_{FD}}{\partial \varepsilon} \frac{\delta T}{T_0} - \mu_0 \frac{\partial f_{FD}}{\partial \varepsilon} \frac{\delta \mu}{\mu_0} . \quad (II.22)$$

L'équation (II.21) est l'équation de base de notre modèle. Nous allons à présent procéder à sa résolution.

### III. Résolution de l'équation de Boltzmann

#### III.1. Projection sur la base des polynômes de Legendre

Dans la théorie du transport, il est d'usage de développer la fonction de distribution  $\delta f$  sur la base de polynômes orthogonaux. Ces développements permettent de calculer  $\delta f$  en distinguant sa composante isotrope des composantes anisotropes dans l'espace des impulsions. Dans ce travail, le choix de la base des polynômes de Legendre est adapté compte tenu de la symétrie cylindrique autour de l'axe  $Ox$  de  $\delta f$  correspondant à la géométrie du

problème que nous avons choisie. De plus, dans le cas unidimensionnel, les coefficients de transport s'expriment en fonction des polynômes de Legendre sous une forme relativement simple.

Les polynômes de Legendre  $P_n(\mu)$  sont définis par la relation de récurrence suivante [21] :

$$P_n(\mu) = \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n n!} \left( \frac{d}{d\mu} \right)^n (\mu^2 - 1)^n \quad (\text{II.23})$$

où  $\mu = \frac{v_x}{v}$ . Ils vérifient la relation d'orthonormalisation

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = 2\delta_{nm}$$

Nous donnons ici, à titre d'exemple, les trois premiers polynômes qui seront utilisés dans le calcul des coefficients de transport :

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \sqrt{3}\mu \quad \text{et} \quad P_2(\mu) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \left( \mu^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Le développement de la fonction de distribution  $\delta f$  sur la base des polynômes de Legendre  $P_n(\mu)$  s'écrit :

$$\delta f(\vec{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \delta f_n(v) \quad (\text{II.24})$$

où  $\delta f_n(v)$  sont les composantes de  $\delta f$  sur cette base. Notons que puisque  $P_0(\mu) = 1$ , le premier terme du développement (II.24),  $\delta f_0(v)$ , est un terme isotrope. L'anisotropie du plasma dans l'espace des vitesses est décrite par les composantes  $\delta f_n(v)$  avec  $n \geq 1$ .

En utilisant la relation de récurrence suivante [21]:

$$\mu P_n(\mu) = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} \frac{P_{n+1}(\mu)}{\sqrt{2n+3}} + \frac{n}{\sqrt{2n+1}} \frac{P_{n-1}(\mu)}{\sqrt{2n-1}}, \quad (\text{II.25})$$

la projection de l'équation (II.21) sur les trois premiers polynômes de Legendre donne :

$$ikv_t \sqrt{\frac{2}{3}} y^{1/2} \delta f_1 - \frac{2}{3} y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} ik \delta V = -v_{ee} (\delta f_0 - \delta f_{FD}) \quad (\text{II.26})$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} ikv_t y^{1/2} \delta f_0 + \frac{2}{\sqrt{15}} ikv_t y^{1/2} \delta f_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{e}{T_0} v_t y^{1/2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta E = -v_{ei}(v) \delta f_1 \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{2}{\sqrt{15}} ikv_t y^{1/2} \delta f_1 - \frac{4}{3\sqrt{5}} y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} ikv_t \frac{\delta V}{v_t} = -v_{ei}(v) \delta f_2 \quad (\text{II.28})$$

où  $v_t = \sqrt{T_0/m_e}$  et  $y = \frac{\varepsilon}{T_0}$ . Dans les équations (II.26)-(II.28), nous avons utilisé

l'approximation de Lorentz et l'approximation diffusive. L'approximation de Lorentz consiste à négliger l'opérateur de collision électron-électron devant l'opérateur de collision électron-ion. Elle est valable pour des plasmas de numéro atomique  $Z$  élevé étant donné que le rapport  $C_{ee}/C_{ei}$  est inversement proportionnel à  $Z$ . Ces plasmas se retrouvent dans de nombreuses expériences notamment dans les expériences de la fusion par confinement inertiel. Par ailleurs, l'approximation diffusive revient à négliger les anisotropies d'ordre supérieur à 3, de la fonction de distribution  $\delta f$ . Concrètement, cela consiste à poser dans le développement (II.24),  $\delta f_n = 0$  pour  $n \geq 3$ . Cette approximation est valable dans les plasmas collisionnels dans la mesure où les collisions ont pour rôle de réduire les anisotropies du plasma en faisant tendre ce dernier vers un état d'équilibre décrit par une fonction de distribution isotrope. Par conséquent, plus les collisions sont importantes plus les anisotropies du plasma sont faibles.

Notons que l'équation (II.26) correspond à la partie isotrope, et les équations (II.27) et (II.28) correspondent à la partie anisotrope tronquée au polynôme de Legendre d'ordre 2, de l'équation de Boltzmann (II.21).

### III. 2 Calcul des opérateurs de projection associés à l'opérateur BGK

L'équation isotrope (II.26) doit être complétée par les équations qui décrivent les propriétés conservatives [(Eqs. (I.27) et (I.29))], de l'opérateur de collision  $C_{ee}(\delta f)$ , qui s'écrivent pour l'opérateur (II.8) comme

$$\int v_{ee} (\delta f_{FD} - \delta f) \frac{2}{h^3} d\bar{p} = 0 \quad (\text{II.29})$$

et

$$\int \frac{mv^2}{2} v_{ee} (\delta f_{FD} - \delta f) \frac{2}{h^3} d\bar{p} = 0 \quad (\text{II.30})$$

Rappelons ici, que la première propriété [Eq. (II.29)] traduit la conservation du nombre de particules alors que la deuxième propriété [Eq. (II.30)] traduit la conservation de l'énergie cinétique. Ces propriétés de conservation imposent à la fonction de distribution  $\delta f$  d'avoir la même densité et la température la fonction de distribution de Fermi-Dirac perturbée  $\delta f_{FD}$ . Nous pouvons injecter ces deux conditions dans l'équation isotrope (II.26) en introduisant les opérateurs de projection  $P$  et  $Q$  suivant la procédure développée dans la référence [22]. Ces opérateurs de projection sont définis par les relations suivantes :

$$P[C(\delta f)] = 0 \quad (\text{II.31})$$

$$P + Q = 1 \quad (\text{II.32})$$

et

$$PQ = 0 \quad (\text{II.33})$$

On considère que les projecteurs  $P$  et  $Q$  annulent toute fonction anisotrope, *i.e* ;

$$P[P_n(\mu)] = 0 \quad (\text{II.34})$$

Par conséquent, appliqués à l'équation (II.21), ils n'agissent que sur sa partie isotrope. L'équation (II.31) s'écrit explicitement comme :

$$P[C(\delta f)] = P[v(\delta f_{MBJ} - \delta f_0)] = 0 \quad (\text{II.35})$$

Par ailleurs, la conservation du nombre de particules [Eq. (II.29)] et de l'énergie cinétique [Eq. (II.30)] s'expriment respectivement comme :

$$\delta M_0^{1/2} = \delta M_{FD}^{1/2} \quad (\text{II.36})$$

$$\delta M_0^{3/2} = \delta M_{FD}^{3/2} \quad (\text{II.37})$$

où les moments  $\delta M_n^i$  sont définis par :

$$\delta M_n^i = \int_0^\infty y^i \delta f_n dy \quad (\text{II.38})$$

et où les moments  $\delta M_{FD}^{1/2}$  et  $\delta M_{FD}^{3/2}$  sont définis par la fonction de distribution de Fermi-Dirac perturbée. Leur calcul explicite donne :

$$\delta M_{FD}^{1/2} = \frac{1}{2T_0} \left( \delta\mu - \mu_0 \frac{\delta T}{T_0} \right) F_{-1/2} + \frac{3}{2} \frac{\delta T}{T_0} F_{1/2} \quad (\text{II.39})$$

$$\delta M_{FD}^{3/2} = \frac{3}{2T_0} \left( \delta\mu - \mu_0 \frac{\delta T}{T_0} \right) F_{1/2} + \frac{5}{2} \frac{\delta T}{T_0} F_{3/2} \quad (\text{II.40})$$

Dans une première étape, on développe la fonction  $P(\delta f_0)$  par rapport aux deux vecteurs propres sur lesquels est construite la Fermi-Dirac perturbée, *i.e* ;  $\frac{\partial f_{FD}}{\partial y}$  et  $y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y}$ , soit :

$$P(\delta f_0) = A_1(\delta f_0) \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} + A_2(\delta f_0) y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \quad (\text{II.41})$$

Les fonctions  $A_1$  et  $A_2$  sont ensuite, à leur tour, développées par rapport aux moments hydrodynamiques  $\delta M_{FD}^{1/2}$  et  $\delta M_{FD}^{3/2}$  :

$$A_1(\delta f_0) = a_1 \delta M_0^{1/2} + a_2 \delta M_0^{3/2} \quad (\text{II.42})$$

$$A_2(\delta f_0) = a_3 \delta M_0^{1/2} + a_4 \delta M_0^{3/2} \quad (\text{II.43})$$

où les coefficients  $a_n$  sont des constantes qui restent à déterminer. Pour cela nous utilisons la propriété des projecteurs :

$$P^2(\delta f_0) = P(\delta f_0) \quad (\text{II.44})$$

qui résulte de façon évidente des équations (II.32) et (II.33). A partir des équations (II.41)-(II.44), il résulte:

$$\begin{aligned} & -\frac{a_1}{2} (A_1 F_{-1/2} + 3A_2 F_{1/2}) \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} - \frac{a_2}{2} (3A_1 F_{1/2} + 5A_2 F_{3/2}) \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \\ & -\frac{a_3}{2} (A_1 F_{-1/2} + 3A_2 F_{1/2}) y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} - \frac{a_4}{2} (3A_1 F_{1/2} + 5A_2 F_{3/2}) y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} = \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

$$A_1 \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} + A_2 y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y}$$

Par identification terme à terme, nous obtenons aisément les équations suivantes:

$$a_1 F_{-1/2} + 3a_2 F_{1/2} = -2 \quad (\text{II.46})$$

$$3a_1 F_{1/2} + 5a_2 F_{3/2} = 0 \quad (\text{II.47})$$

$$a_3 F_{-1/2} + 3a_4 F_{1/2} = 0 \quad (\text{II.48})$$

$$3a_3 F_{1/2} + 5a_4 F_{3/2} = -2 \quad (\text{II.49})$$

dont la solution est:

$$a_1 = - \frac{10 F_{3/2}}{5 F_{-1/2} F_{3/2} - 9 F_{1/2}^2} \quad (\text{II.50})$$

$$a_2 = \frac{6 F_{1/2}}{5 F_{-1/2} F_{3/2} - 9 F_{1/2}^2} \quad (\text{II.51})$$

$$a_3 = \frac{6 F_{1/2}}{5 F_{-1/2} F_{3/2} - 9 F_{1/2}^2} \quad (\text{II.52})$$

$$a_4 = - \frac{2 F_{-1/2}}{5 F_{-1/2} F_{3/2} - 9 F_{1/2}^2} \quad (\text{II.53})$$

Enfin, en définitive l'expression de l'opérateur de projection  $P$  est donnée par:

$$P(\delta f_0) = - \frac{1}{5 F_{-1/2} F_{3/2} - 9 F_{1/2}^2} \left( -10 F_{3/2} \delta M_0^{1/2} + 6 F_{1/2} \delta M_0^{3/2} \right) \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} + \frac{1}{5 F_{-1/2} F_{3/2} - 9 F_{1/2}^2} \left( 6 F_{1/2} \delta M_0^{1/2} - 2 F_{-1/2} \delta M_0^{3/2} \right) y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \quad (\text{II.54})$$

Notons qu'à partir de l'équation (II.54), nous pouvons montrer aisément que la condition (II.31) est bien vérifiée, c'est à dire que  $P(\delta f_0) = \delta f_{FD}$ .

En multipliant l'équation (II.26) par l'opérateur  $Q = 1 - P$ , nous obtenons après quelques manipulations mathématiques

$$\sqrt{\frac{2}{3}} i k v_t y^{1/2} \delta f_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} i k v_t \frac{-10 F_{3/2} \delta M_1^1 + 6 F_{1/2} \delta M_1^2}{5 F_{-1/2} F_{3/2} - 9 F_{1/2}^2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} - \sqrt{\frac{2}{3}} i k v_t \frac{6 F_{1/2} \delta M_1^1 - 2 F_{-1/2} \delta M_1^2}{5 F_{-1/2} F_{3/2} - 9 F_{1/2}^2} y \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} = -v_{ee} (\delta f_0 - \delta f_{FD}) \quad (\text{II.55})$$

Le système d'équations (II.27), (II.28) et (II.55) sont les équations de base de notre modèle cinétique. Sa résolution permet de calculer les composantes  $\delta f_0$ ,  $\delta f_1$  et  $\delta f_2$  en fonction des potentiels thermodynamiques  $\delta\mu$  et  $\delta T$ , de la vitesse fluide  $\delta V$  et du champ électrique  $\delta E$ . Le calcul de ces trois composantes est suffisant pour la détermination des coefficients de transport aux quels nous nous intéressons dans ce travail. Nous allons donc à présent résoudre le système d'équations (II.27), (II.28) et (II.55).

### III.3. Calcul de la fonction de la distribution perturbée

La première étape du calcul consiste à utiliser le développement asymptotique de Chapman-Enskog [9] pour la fonction  $\delta f$ , qui s'écrit comme suit :

$$\delta f = \delta f^{(0)} + K_n \delta f^{(1)} + K_n^2 \delta f^{(2)} + \dots + K_n^\alpha \delta f^{(\alpha)}. \quad (\text{II.56})$$

où  $K_n$ , est le nombre de Knudsen, défini par le rapport entre le libre parcours moyen  $\lambda$  et une longueur caractéristique,  $L \sim \frac{1}{k}$ , du système. Le nombre de Knudsen est un paramètre d'échelle supposé très petit devant un,  $K_n \ll 1$ . Le développement (II.56) est valable lorsque le plasma est supposé faiblement inhomogène. Cette approximation est associée au libre parcours moyen  $\lambda$ . En effet, elle suppose que les particules du plasma entrent en collision avec plusieurs autres particules avant de « sentir » les effets du gradient caractérisé par la longueur  $L$ . En d'autres termes, les processus collisionnels sont dominants par rapport aux effets de l'inhomogénéité du plasma.

Dans le développement (II.56), l'ordre  $\delta f^{(0)}$  représente la fonction de distribution homogène. Chaque puissance dans le paramètre formel  $K_n$  signifie un ordre donné dans les gradients. Dans notre modèle, il est défini par

$$K_n^\alpha = (k\lambda_{ee})^\alpha \sim (k\lambda_{ei})^\alpha, \quad (\text{II.57})$$



où  $\lambda_{ee}$  et  $\lambda_{ei}$  sont respectivement le libre parcours moyen électron-électron et électron-ion. Par voie de conséquence, à leur tour, les composantes  $\delta f_n$  de la fonction de distribution sont développées par rapport au rapport au paramètre d'échelle  $K_n$ ,

$$\delta f_n = \delta f_n^{(0)} + K_n \delta f_n^{(1)} + K_n^2 \delta f_n^{(2)} + \dots + K_n^\alpha \delta f_n^{(\alpha)} \quad (\text{II.58})$$

Le développement (II.58) va nous permettre de résoudre les équations (II.27), (II.28) et (II.55) par itération, en considérant les termes du même ordre de grandeur par rapport aux gradients du système. La première contribution non locale aux coefficients de transport, qui ne soit pas nulle nécessite dans le développement (II.58) d'aller jusqu'à l'ordre 2.

Dans une première étape de calcul, nous réécrivons les équations (II.27), (II.28) et (II.55) comme

$$\delta f_0 = \delta f_{FD} - \sqrt{\frac{2}{3}} ik \lambda_{ee} y^{1/2} \delta f_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} ik \lambda_{ee} \frac{-10F_{3/2} + 6yF_{1/2}}{5F_{-1/2}F_{3/2} - 9F_{1/2}^2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta M_1^1 + \quad (\text{II.59})$$

$$\sqrt{\frac{2}{3}} ik \lambda_{ee} \frac{6F_{1/2} - 2yF_{-1/2}}{5F_{-1/2}F_{3/2} - 9F_{1/2}^2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta M_1^2$$

$$\delta f_1 = -\frac{4}{\sqrt{3}} ik \lambda_{ei} y^2 \delta f_0 - \frac{8}{\sqrt{15}} ik \lambda_{ei} y^2 \delta f_2 + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{e\lambda_{ei}}{T_0} y^2 \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta E \quad (\text{II.60})$$

et

$$\delta f_2 = -\frac{8}{\sqrt{15}} ik \lambda_{ei} y^2 \delta f_1 + \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} ik \lambda_{ei} y^{5/2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \frac{\delta V}{v_t} \quad (\text{II.61})$$

où nous avons posé,  $\lambda_{ee} = \frac{v_t}{v_{ee}}$  et  $\lambda_{ei} = \frac{v_t}{v_{ei}(v_t)}$ .

*i) L'ordre zéro*

En considérant les termes d'ordre zéro dans les équations (II.59)-(II.61), il en résulte :

$$\delta f_0^{(0)} = \delta f_{FD} \quad (\text{II.62})$$

et

$$\delta f_1^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad \delta f_2^{(0)} = 0. \quad (\text{II.63})$$

Il apparaît qu'à l'ordre zéro la fonction de distribution  $\delta f$  est isotrope et elle est égale à la Fermi-Dirac perturbée,  $\delta f = \delta f_{FD}$ .

*ii) L'ordre 1*

Des équations (II.59)-(II.61), en gardant les termes d'ordre 1 et en utilisant les équations (II.62) et (II.63), nous déduisons les composantes  $\delta f_0^{(1)}$ ,  $\delta f_1^{(1)}$  et  $\delta f_2^{(1)}$  de la fonction isotrope, de la première et la seconde anisotropie respectivement,

$$\delta f_0^{(1)} = 0 \quad (\text{II.64})$$

$$\delta f_1^{(1)} = -\frac{4}{\sqrt{3}} ik \lambda_{ei} y^2 \delta f_{FD} + \left[ \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{e \lambda_{ei}}{T_0} y^2 \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta E \right]^{(1)} \quad (\text{II.65})$$

$$\delta f_2^{(1)} = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{5}} ik \lambda_{ei} y^{5/2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \frac{\delta V}{v_t}. \quad (\text{II.66})$$

*iii) L'ordre 2*

A l'ordre 2, nous obtenons en utilisant les résultats précédents,

$$\begin{aligned} \delta f_0^{(2)} = & \frac{4\sqrt{2}}{3} ik\lambda_{ee} y^{1/2} \left[ -ik\lambda_{ei} y^2 \delta f_{FD} + \left( \frac{e\lambda_{ei}}{T_0} y^2 \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta E \right)^{(1)} \right] \\ & + \sqrt{\frac{2}{3}} ik\lambda_{ee} \frac{-10F_{3/2} + 6yF_{1/2}}{5F_{-1/2}F_{3/2} - 9F_{1/2}^2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta M_1^{1,(1)} + \sqrt{\frac{2}{3}} ik\lambda_{ee} \frac{6F_{1/2} - 2yF_{-1/2}}{5F_{-1/2}F_{3/2} - 9F_{1/2}^2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta M_1^{2,(1)} \end{aligned} \quad (\text{II.67})$$

$$\delta f_1^{(2)} = \frac{64\sqrt{2}}{15\sqrt{3}} (k\lambda_{ei})^2 y^{9/2} \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \frac{\delta V}{v_t} + \frac{4}{\sqrt{3}} \left[ \frac{e\lambda_{ei}}{T_0} y^2 \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta E \right]^{(2)} \quad (\text{II.68})$$

$$\delta f_2^{(2)} = -\frac{32}{3\sqrt{5}} (k\lambda_{ei})^2 y^4 \delta f_{FD} - \frac{32}{3\sqrt{5}} \left[ ik\lambda_{ei} \frac{e\lambda_{ei}}{T_0} y^4 \frac{\partial f_{FD}}{\partial y} \delta E \right]^{(2)}. \quad (\text{II.69})$$

Nous venons de calculer à partir du développement de Chapman-Enskog jusqu'à l'ordre 2, les composantes  $\delta f_0$ ,  $\delta f_1$  et  $\delta f_2$  de la fonction de distribution  $\delta f$  dans l'approximation diffusive en fonction des termes de sources correspondant au potentiel chimique,  $\delta\mu$  à la température  $\delta T$ , à la vitesse  $\delta V$  et au champ électrique  $\delta E$ . Ces résultats vont nous permettre de calculer les coefficients de transport.

#### IV. Calcul des coefficients de transport

Dans ce paragraphe, nous allons calculer les coefficients de transport généralisés dans des plasmas collisionnels et de dégénérescence arbitraire, en utilisant l'expression de la fonction de distribution établie au paragraphe précédent. Ces coefficients vont nous permettre d'établir un système complet d'équations hydrodynamiques de l'approximation des forces thermodynamiques d'intensité relativement faible.

Dans les plasmas où les mécanismes collisionnels sont importants, les coefficients de transport qui interviennent dans les trois premières équations hydrodynamiques (I.30), (I.33) et (I.36) sont le flux de chaleur généralisé, le tenseur des contraintes généralisé, et les moments responsables du transfert d'impulsion et d'énergie entre particules d'espèces différentes.

Vu la géométrie du problème qui présente une symétrie cylindrique où la fonction  $\delta f = \delta f(v, v_x)$ , les composantes non nulles des coefficients de transport (I.37)-(I.40) sont :

$$\delta q_x = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m v^2 v_x \delta f(\vec{r}, \vec{v}) d\vec{p}, \quad (\text{II.70})$$

$$\delta \Pi_{xx}(\vec{r}, t) = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} m \left[ v_x^2 - \frac{v^2}{3} \right] \delta f(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{p} \quad (\text{II.71})$$

$$\delta R_x = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} m v_x C_{ei}(\delta f) d\vec{p} \quad (\text{II.72})$$

et

$$\delta Q = \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} m v^2 C_{ei}(\delta f) d\vec{p} \quad (\text{II.73})$$

Ces coefficients peuvent être écrits de façon pratique par rapport aux composantes de la fonction de distribution développée sur la base des polynômes de Legendre. Cette écriture permet d'exprimer ces coefficients en fonction de la variable énergie normalisée,  $y = \frac{\mathcal{E}}{T_0}$ . En

développant l'intégrale sur la variable  $y$  et  $\mu$ , et en utilisant le développement (II.24) de la fonction  $\delta f$  sur la base des polynômes de Legendre, les expressions (II.70)-(II.72) deviennent

$$\delta q_x = \frac{8\pi}{h^3} m_e^4 v_t^6 \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^{+\infty} y^2 dy \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \delta f_n(y), \quad (\text{II.74})$$

$$\delta \Pi_{xx} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{h^3} m_e^4 v_t^5 \int_{-1}^1 \left( \mu^2 - \frac{1}{3} \right) d\mu \int_0^{+\infty} y^{3/2} dy \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \delta f_n(y) \quad (\text{II.75})$$

$$\delta R_x = -\frac{4\pi}{\sqrt{2}h^3} v_{ei}(v_t) m_e^2 v_t^4 \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^{+\infty} y^{-1/2} dy \left( \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \delta f_n(y) - \delta f_{FD} \right). \quad (\text{II.76})$$

En outre, en utilisant la propriété d'orthonormalisation des polynômes de Legendre nous déduisons :

$$\delta q_x = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{T_0 v_t}{F_{1/2}} n_0 \delta M_1^2, \quad (\text{II.77})$$

$$\delta \Pi_{xx} = \frac{4}{3\sqrt{5}} \frac{n_0}{F_{1/2}} T_0 \delta M_2^{3/2} \quad (\text{II.78})$$

$$\delta R_x = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{m_e n_0 v_t}{F_{1/2}} v_{ei}(v_t) \delta M_1^{-1/2} \quad (\text{II.79})$$

où nous avons utilisé la relation suivante

$$n_0 = \frac{2}{h^3} \int f_{FD} d\vec{p} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{h^3} m_e^3 v_t^3 F_{1/2} \quad (\text{II.80})$$

et où nous rappelons aussi que les moments  $\delta M_n$  sont définis par l'équation (II.38). Notons juste que les flux sont générés par la composante de la première anisotropie et que le tenseur de contraintes est issu de la composante de la seconde anisotropie.

Par ailleurs, en notant que l'opérateur de collision  $C_{ei}$  est anisotrope, il en résulte que le terme de production d'énergie  $\delta Q$  (Eq. (II.73)) est nul, i.e ;  $\delta Q = 0$ .

Les moments, donnés par les équations (II.77)-(II.79) peuvent être écrits dans l'espace de Fourier, par rapport aux forces thermodynamiques que sont le gradient de température  $ik\delta T$  et le gradient du potentiel chimique  $ik\delta\mu$ , de la vitesse  $\delta V$  et du champ électrique  $\delta E$ . Il va en résulter des expressions du flux de chaleur et du tenseur des contraintes qui se présentent sous la forme :

$$\delta q_x = -n_0 T_0 v_t L_{21} \frac{ik\delta\tilde{\mu}}{|k|T_0} + n_0 T_0 v_t L_{22} \frac{ik\delta T}{|k|T_0} - n_0 T_0 v_t L_{23} \frac{\delta V}{v_t} \quad (\text{II.81})$$

$$\delta \Pi_{xx} = -n_0 T_0 L_{31} \frac{\delta\tilde{\mu}}{T_0} - n_0 T_0 L_{32} \frac{\delta T}{T_0} - n_0 T_0 L_{33} \frac{ik\delta V}{|k|v_t} \quad (\text{II.82})$$

$$\delta R_x = -n_0 m v_t v_{ei} L_{41} \frac{ik\delta\tilde{\mu}}{|k|T_0} + n_0 m v_t v_{ei} L_{42} \frac{ik\delta T}{|k|T_0} - n_0 m v_t v_{ei} L_{43} \frac{\delta V}{v_t} \quad (\text{II.83})$$

où  $ik\delta\tilde{\mu} = ik\delta\mu + e\delta E$  est le potentiel chimique généralisé qui inclut le champ électrique et les coefficients  $L_{ij}$  sont des coefficients de transport linéaires et adimensionnels. En outre, en utilisant la condition que la moyenne statistique de la vitesse aléatoire des électrons est nulle, il résulte la condition

$$\delta M_1^1 = 0. \quad (\text{II.84})$$

qui s'écrit explicitement comme :

$$\langle v_x \rangle = v_t L_{11} \frac{ik \delta \tilde{\mu}}{|k| T_0} + v_t L_{12} \frac{ik}{|k|} \left( \frac{\delta T}{T_0} \right) + v_t L_{13} \frac{ik}{|k|} \frac{\delta V}{v_t} = 0 \quad (\text{II.85})$$

Cette condition va permettre d'écrire les coefficients de transport seulement par rapport aux variables hydrodynamiques  $\delta T$  et  $\delta V$ .

#### IV. 1. Coefficients de transport dans l'approximation locale

Le développement (II.58) de la fonction de distribution va permettre aussi aux grandeurs du transport  $\delta q_x$ ,  $\delta \Pi_{xx}$  et  $\delta R_x$  d'être développées par rapport au paramètre d'échelle  $K_n$ . Il en résulte alors

$$\delta q_x = K_n \delta q_x^{(1)} + K_n^2 \delta q_x^{(2)} + \dots \quad (\text{II.86})$$

$$\delta \Pi_{xx} = K_n \delta \Pi_{xx}^{(1)} + K_n^2 \delta \Pi_{xx}^{(2)} + \dots \quad (\text{II.87})$$

$$\delta R_x = K_n \delta R_x^{(1)} + K_n^2 \delta R_x^{(2)} + \dots \quad (\text{II.88})$$

En considérant la fonction de distribution à l'ordre le plus bas par rapport au paramètre d'échelle  $K_n$ , *i.e.*;  $K_n \sim (k \lambda_{ei})$ , nous calculons la première contribution non nulle des grandeurs du transport. Pour cela, nous injectons dans les équations (II.78)-(II.80) les expressions de  $\delta f_1^{(1)}$  et de  $\delta f_2^{(1)}$  données respectivement par les équations (II.65) et (II.66) et nous utilisons la condition (II.85). Après quelques étapes de calcul, nous obtenons les coefficients de transport dans l'approximation locale

$$\delta q_x^{(1)}(k) = -K_T^{(1)} \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right) \frac{n_0 T_0}{m_e v_{ei}(v_t)} ik \delta T \quad (\text{II.89})$$

$$\delta \Pi_{xx}^{(1)} = -\eta_V^{(1)} \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right) \frac{T_0 n_0}{v_{ei}(v_t)} ik \delta V \quad (\text{II.90})$$

$$\delta R_x^{(1)} = -\beta_T^{(1)} \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right) n_0 ik \delta T \quad (\text{II.91})$$

où  $K_T^{(1)}$ ,  $\eta_V^{(1)}$  et  $\beta_T^{(1)}$  sont les coefficients de transport adimensionnels. Leurs expressions explicites sont données par

$$K_T^{(1)} \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right) = \frac{40}{3\sqrt{2}} \frac{F_4}{F_{1/2}} \left( 1 - \frac{16(F_3)^2}{15F_2F_4} \right) \quad (\text{II.92})$$

$$\eta_V^{(1)} \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right) = \frac{256}{45\sqrt{2}} \frac{F_3}{F_{1/2}}, \quad (\text{II.93})$$

et

$$\beta_T^{(1)} \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right) = \left( \frac{5}{3} \frac{F_{3/2}}{F_{1/2}} - \frac{4}{3} \frac{F_3}{F_2} \right). \quad (\text{II.94})$$

Les équations (II.89) et (II.90) correspondent respectivement au flux de chaleur thermique et à la viscosité. Ils décrivent le transport de l'énergie thermique et de l'impulsion dans des systèmes inhomogènes. Par ailleurs, les coefficients  $K_T^{(1)}$ ,  $\eta_V^{(1)}$  et  $\beta_T^{(1)}$  sont des grandeurs locales. Elles ne dépendent pas de la variable d'espace  $k$ , dans l'espace de Fourier. Elles sont



des fonctions du paramètre de dégénérescence,  $\frac{\mu_0}{T_0}$ , contenu à l'intérieur des intégrales de Fermi  $F_j$  (voir Eq. (II.14)).

Etudions à présent le rôle des effets de dégénérescence sur les coefficients de transport. Les comportements asymptotiques non dégénéré et complètement dégénéré peuvent être calculés à partir des équations (II.92)-(II.94) en posant respectivement  $\mu_0/T_0 \rightarrow -\infty$  et  $\mu_0/T_0 \rightarrow +\infty$ .

i) limite non dégénérée (classique) :  $\mu_0/T_0 \rightarrow -\infty$ .

Dans ce cas les intégrales de Fermi  $F_j$  deviennent :

$$F_j\left(\frac{\mu_0}{T_0}\right) = \exp\left(\frac{\mu_0}{T_0}\right) \int_0^{\infty} y^n \exp(-y) dy = \exp\left(\frac{\mu_0}{T_0}\right) \Gamma(n+1) \quad (\text{II.95})$$

où  $\Gamma$  est la fonction d'Euler. En utilisant la relation (II.95), et en posant  $\frac{\mu_0}{T_0} \rightarrow -\infty$  dans les équations (II.92)-(II.94), Il en résulte alors,

$$K_T^{(1)} = \frac{128}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{II.96})$$

$$\eta_V^{(1)} = \frac{1024}{15\sqrt{2\pi}}, \quad (\text{II.97})$$

et

$$\beta_T^{(1)} = -\frac{3}{2}. \quad (\text{II.98})$$

Ces résultats (II.96)-(II.98) sont les résultats classiques intensivement utilisés en physique des plasmas classiques. Ils ont été établis pour la première fois par Spitzer et Härm dans la référence [23].

ii) limite dégénérée ( $\mu_0/T_0 \rightarrow \infty$ ).

Dans la limite dégénérée, les intégrales de Fermi sont calculées à partir des développements asymptotiques des intégrales de Sommerfeld [24] :

$$F(\nu) = \int_0^\infty \frac{\varphi(y)}{\exp(y-\nu)+1} dy = \left[ h(\nu) + \frac{\pi^2}{6} \frac{\partial^2 h(\nu)}{\partial \nu^2} + \dots \right] \text{ pour } \nu \rightarrow \infty, \quad (\text{II.99})$$

où  $h(y)$  est la primitive de la fonction  $\varphi(y)$ . En utilisant le résultat (II.99) pour évaluer les intégrales de Fermi  $F_j$ , les équations (II.92)-(II.94) deviennent dans la limite ( $\mu_0/T_0 \rightarrow \infty$ ) :

$$K_T^{(1)} = \sqrt{2}\pi^2 \quad (\text{II.100})$$

et

$$\eta_V^{(1)} = \frac{16\sqrt{2}}{15} \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right)^{-5/2}, \quad (\text{II.101})$$

$$\beta_T^{(1)} = -\frac{3\pi^2}{8} \left( \frac{\mu_0}{T_0} \right)^{-1}. \quad (\text{II.102})$$

Pour une dégénérescence arbitraire, en examinant les expressions (II.92)-(II.94), Il est exclu d'envisager une solution analytique explicite. Par conséquent seule l'approche numérique est possible. Nous avons évalué les coefficients de transport numériquement en calculant les intégrales de Fermi  $F_j$  contenues dans les expressions  $K_T^{(1)}$ ,  $\eta_V^{(1)}$  et  $\beta_T^{(1)}$ . Le calcul de ces intégrales a été effectué à l'aide de la méthode standard de Simpson. Nous donnons ci-dessous dans les figures (2) et (3) la conductivité thermique  $K_T = K_T^{(1)} \frac{n_0 T_0}{m_e v_{ei}(v_t)}$  et le

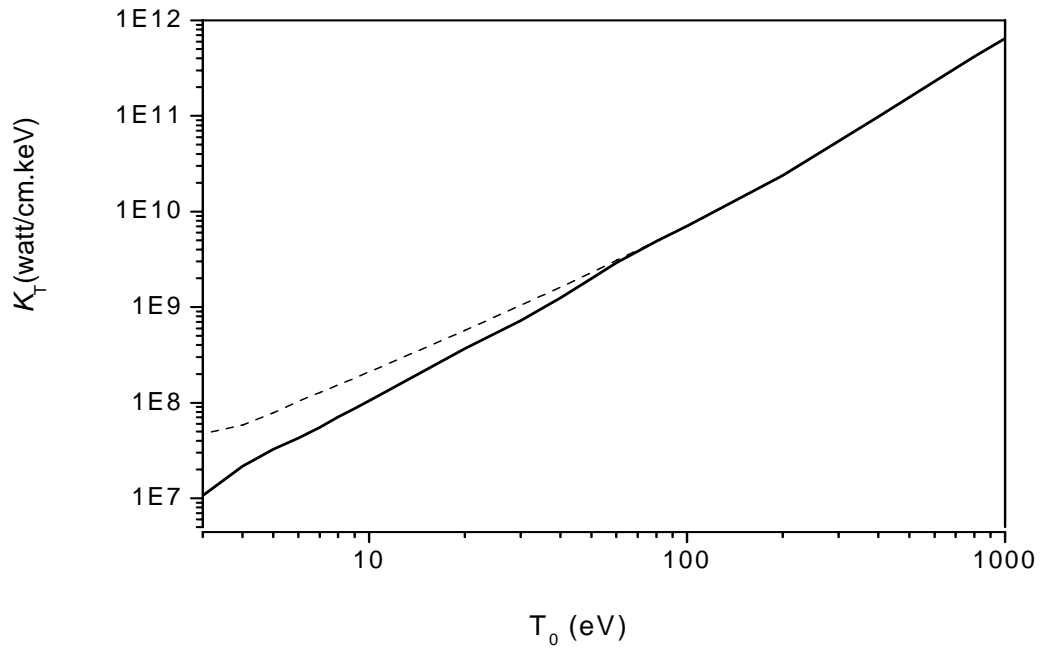
coefficient de viscosité  $\eta_V = \eta_V^{(1)} \frac{T_0 n_0}{v_{ei}(v_t)}$  en fonction de la température électronique  $T_0$  dans le

cas de l'aluminium. Le choix de l'aluminium est dicté par le fait que ce matériau est utilisé

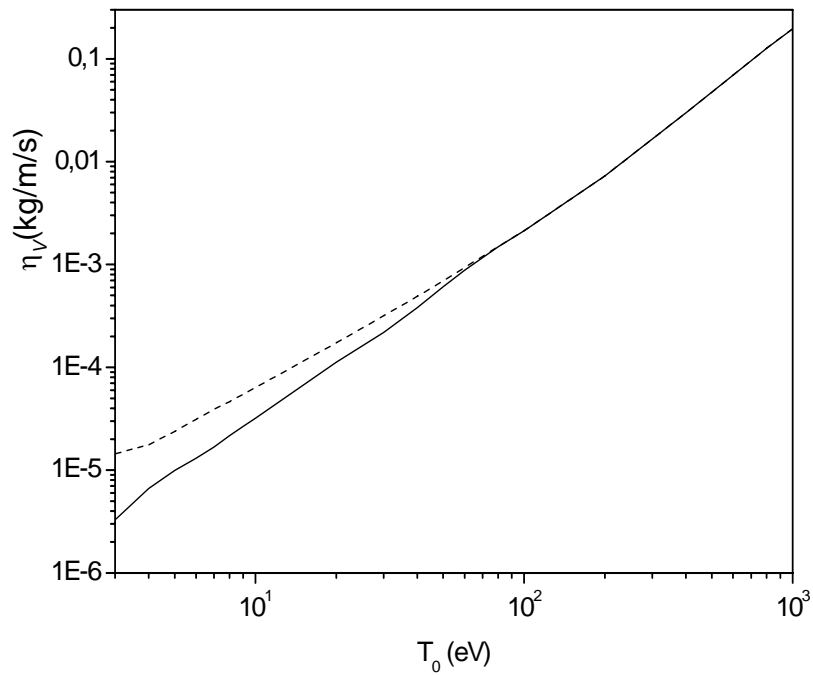
souvent dans les applications des coefficients de transport par plusieurs auteurs dans la littérature, dont notamment Lee and More dans la référence [13]. Pour faire ces calculs numériques nous avons opéré de la façon suivante :

*i)* La dépendance de l'état d'ionisation  $Z^*$  de l'aluminium en fonction de la température a été déduite par comparaison de la conductivité thermique calculé dans ce travail avec celle établie dans la référence [13]. Ce résultat est représenté sur la figure 4, où l'on peut noter que l'état d'ionisation augmente de façon monotone comme il se doit en fonction de la température, jusqu'à la valeur limite correspondant à  $Z^* = 13$ . Ce résultat a été établi par des codes numériques en utilisant la physique atomique des plasmas chauds. Ces modèles utilisent la mécanique quantique pour décrire les atomes et la physique des plasmas pour décrire les effets collectifs entre les atomes. Ces résultats sont tabulés dans des bases de données telles que les tables SESAME.

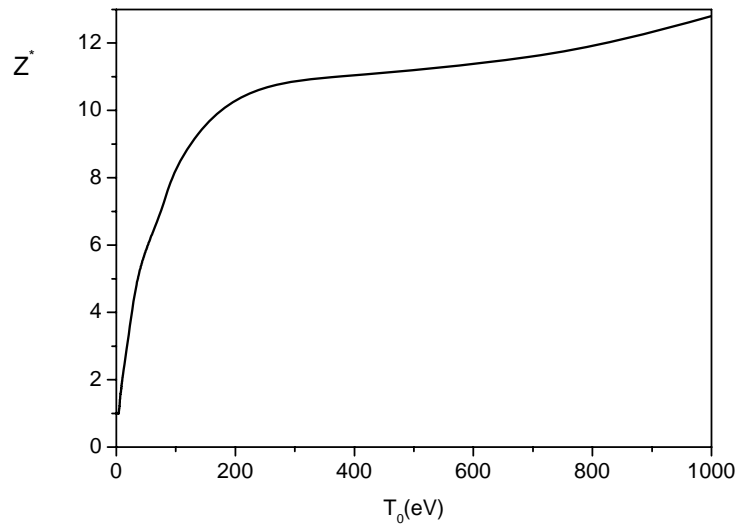
*ii)* Comme noté plus haut (paragraphe II.4), nous avons tenu compte des effets de dégénérescence qui deviennent significatifs pour les basses températures et du principe d'incertitude d'Heisenberg, lorsque le paramètre d'impact minimum,  $b_{\min}$  atteint la limite quantique. De plus en suivant, le modèle de Lee et More nous avons imposé au logarithme de Coulomb,  $\ln \Lambda$  d'être supérieur ou égale à 2, *i.e.* ;  $\ln \Lambda \geq 2$ . Cette condition a été établie à l'aide de simulation numérique [13].



**Figure 2** conductivité thermique  $K_T$  en fonction de la température  $T_0$  pour une densité ionique  $n_i = 4,79 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ . La courbe en trait plein représente les résultats établis dans ce travail. La courbe en pointillée représente les résultats de Spiter et Härm.



**Figure 3** coefficient de viscosité  $\eta_v$  en fonction de la température  $T_0$  pour une densité ionique  $n_i = 4,79 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ . La courbe en trait plein représente les résultats établis dans ce travail. La courbe en pointillée représente les résultats de Spiter et Härm.



**Figure 4 :** Etat d'ionisation  $Z^*$  de l'aluminium en fonction de la température électronique  $T_0$ .

Nous pouvons observer sur les figures (2) et (3) que pour des températures relativement importantes ( $T_0 \gg T_F$ ), les résultats classiques (non dégénérés) de Spitzer et Härm coïncident comme il se doit avec les résultats numériques établis dans ce travail. En revanche, pour des températures relativement plus faibles, nos calculs montrent que les résultats de Spitzer et Härm surestiment la conductivité thermique et le coefficient de viscosité. Ceci s'explique par la dépendance du logarithme de Coulomb,  $\ln \Lambda$ , par rapport à la température  $T_0$ . Dans ce cas, comme les coefficients de transport  $K_T$  et  $\eta_V$  sont inversement proportionnels à la fréquence de collision électron-ion,  $\nu_{ei}$ , ils sont par conséquent inversement proportionnels à  $\ln \Lambda$ .

Dans le cas classique, lorsque la température diminue, les équations (II.13) et (II.17) montrent respectivement que le paramètre d'impact maximum,  $b_{\max}$  diminue et que le paramètre d'impact minimum  $b_{\min}$  augmente. Ce comportement implique donc d'après l'équation (II.12) que  $\ln \Lambda$  diminue lorsque la température diminue. A basse température, le logarithme de Coulomb l'emporte sur les facteurs qui dépendent de la température dans les équations (II.89) et (II.90). Il résulte alors que ces deux coefficients ont tendance à saturer voire augmenter pour les très faibles températures.

En revanche dans le cas où l'on tient compte de la dégénérescence et du couplage,  $b_{\max}$  dans l'équation (II.15) a tendance à saturer vers une valeurs limite définie par la température de Fermi  $T_F$ . De plus ce paramètre est également limité par la distance inter-atomique comme le montre l'équation (II.16). D'un autre côté  $b_{\min}$  doit par définition être toujours inférieur à  $b_{\max}$ . Enfin nous avons admis que le logarithme de Coulomb est toujours supérieur ou égal à deux. Ceci conduit donc à une diminution monotone des coefficients de transport lorsque la température décroît dans le cas non classique.

## IV. 2. Coefficients de transport non locaux

Les coefficients de transport non locaux se calculent en considérant le développement (II.56) de la fonction de distribution  $\delta f$  jusqu'à l'ordre deux par rapport au nombre de Knudsen. En substituant, l'expression (II.68) de  $\delta f_1^{(2)}$  et l'expression (II.69) de  $\delta f_2^{(2)}$ , dans les équations (II.78)-(II.80) et nous utilisons la condition (II.86), nous déduisons après quelques manipulations mathématiques,

$$\delta q_x^{(2)}(k) = \alpha_V^{(2)} \left( k, \frac{\mu_0}{T_0} \right) n_0 T_0 \delta V \quad (\text{II.103})$$

$$\delta \Pi_{xx}^{(2)} = \alpha_T^{(2)} \left( k, \frac{\mu_0}{T_0} \right) n_0 \delta T \quad (\text{II.104})$$

$$\delta R_x^{(2)} = \beta_V m_e n_0 v_{ei} (v_t) \delta V \quad (\text{II.105})$$

où les coefficients  $\alpha_V^{(2)}$ ,  $\alpha_T^{(2)}$  et  $\beta_V^{(2)}$  s'expriment dans l'espace de Fourier comme :

$$\alpha_V^{(2)} = \alpha_T^{(2)} = -\frac{832}{45} \frac{F_{11/2}}{F_{1/2}} \left[ 1 - \frac{44}{39} \frac{F_3}{F_2} \frac{F_{9/2}}{F_{11/2}} \right] (k \lambda_{ei})^2 \quad (\text{II.106})$$

$$\beta_V^{(2)} = \frac{124}{45} \sqrt{2} \frac{F_3}{F_{1/2}} \left( 1 - \frac{11}{4} \frac{F_{9/2}}{F_2} \frac{F_{1/2}}{F_3} \right) (k \lambda_{ei})^2 \quad (\text{II.107})$$

L'équation (II.103) correspond au flux de chaleur convectif. Ce terme, proportionnel à  $\delta V$  rend compte de la convection de l'énergie par la vitesse fluide. L'équation (II.104) donne la composante du tenseur des contraintes proportionnelle à la température  $\delta T$ . Ce terme traduit l'anisotropie de température du système due à l'inhomogénéité. Notons que les coefficients  $\alpha_V^{(2)}$ ,  $\alpha_T^{(2)}$  et  $\beta_V^{(2)}$  dépendent du nombre d'onde  $k$ , ce qui se traduit dans l'espace



réel par un effet de délocalisation spatiale. Par ailleurs, nous notons que la symétrie d'Onsager est bien vérifiée entre le coefficient du flux de chaleur convectif,  $\alpha_V^{(2)}$  et le coefficient de l'anisotropie de température  $\alpha_T^{(2)}$ , *i.e.* ;  $\alpha_V^{(2)} = \alpha_T^{(2)}$ . Ce qui corrobore en partie la validité de nos résultats.

Nous allons à présent étudier la contribution des effets non locaux aux coefficients de transport dans les équations hydrodynamiques. Plus précisément, nous nous intéressons à la contribution du coefficient d'anisotropie de température dans l'équation de la conservation de l'impulsion (I.33). Nous considérons, les mêmes hypothèses que celles utilisées pour le modèle cinétique : un plasma non magnétisé, une inhomogénéité du plasma suivant l'axe  $Ox$ , la direction de la vitesse moyenne  $\delta\vec{V}$  et la polarisation du champ électrique  $\delta\vec{E}$  suivant l'axe  $Ox$ , *i.e.* ;  $\delta\vec{V} = \delta V \vec{e}_x$   $\delta\vec{E} = \delta E \vec{e}_x$ . Dans ces conditions, la forme linéarisée de l'équation (I.33) dans l'espace de Fourier ( $\omega \leftrightarrow t, k$ ) s'écrit :

$$-i\omega n_0 m \delta V = -T_0 ik \delta n - n_0 ik \delta T - ik \delta \Pi_{xx} - n_0 e \delta E + \delta R_x. \quad (\text{II.108})$$

En substituant, l'équation (II.104) dans l'équation (II.108), nous obtenons

$$-i\omega n_0 m \delta V = -T_0 ik \delta n - n_0 ik \delta T - \alpha_T^{(2)} n_0 ik \delta T - n_0 e \delta E + \delta R_x. \quad (\text{II.109})$$

De l'équation (II.109), il apparaît clairement que le terme d'anisotropie de température  $\alpha_T^{(2)} n_0 ik \delta T$  est similaire au terme de pression  $n_0 ik \delta T$ . Le calcul du coefficient  $\alpha_T^{(2)}$  pour une valeur typique de  $k\lambda_{ei} = 10^{-2}$  et les mêmes paramètres physiques que ceux utilisés dans le paragraphe IV.1, donne pour des valeurs de  $\alpha_T^{(2)} \sim 0,23$  et cela quelque soit la valeur de la température  $T_0$ . A la lumière de ces résultats, nous pouvons conclure que la contribution non locale des coefficients de transport dans les équations hydrodynamiques est relativement faible et cela quel que soit la dégénérescence des électrons.

## V Conclusion

Dans ce chapitre un modèle cinétique pour décrire les plasmas de dégénérescence arbitraire basé sur l'équation de Boltzmann semi-classique est présenté. Ce modèle prend en compte les mécanismes collisionnels électron-électron et électron-ion modélisés par des opérateurs de relaxation de type Krook. L'approximation 1D dans l'espace réel ainsi que l'approximation de forces thermodynamiques de faible magnitude ont été considérées.

L'équation de Boltzmann a été résolue analytiquement dans l'approximation diffusive en utilisant le développement de Chapman-Enskog de la fonction de distribution. La fonction de distribution stationnaire a été calculée jusqu'à l'ordre deux dans l'espace de Fourier, à l'aide des polynômes orthogonaux de Legendre.

Les coefficients de transport correspondant au flux de chaleur, au tenseur des contraintes et au terme d'échange d'impulsion électron-ion lors des collisions ont été calculés en fonction du paramètre  $\mu_0/T_0$ . Nous avons amélioré les résultats de la littérature d'une part par le calcul du coefficient de viscosité et d'autre part par la prise en compte de la première contribution non locale en  $(k\lambda_{ei})$  aux coefficients de transport.

# **CONCLUSION GENERALE**

## CONCLUSION GENERALE

Au terme de ce travail, nous pouvons considérer que l'objectif que nous nous sommes fixé est largement atteint. Cet objectif était principalement le calcul du coefficient de viscosité dans les plasmas de dégénérescence arbitraire en utilisant le formalisme de la théorie cinétique.

Par ailleurs, un système d'équations hydrodynamiques généralisées pour décrire les phénomènes de transport électronique dans les plasmas dégénérés a été établi. Pour cela des relations de fermeture correspondant aux coefficients de transport sont calculées en fonction des potentiels thermodynamiques, que sont le gradient du potentiel chimique, le gradient de température et la vitesse moyenne.

Ces coefficients de transport (conductivité thermique, coefficient de viscosité,) et les taux d'échange d'impulsion électron-ion sont calculés analytiquement en résolvant l'équation de Boltzmann semi-classique dans l'approximation des forces thermodynamiques de faible magnitude et l'approximation diffusive. Les mécanismes de collisionnels des électrons dans le plasma sont pris en compte à travers les interactions électron-électron et électron-ion qui constituent les mécanismes collisionnels dominants. Ces mécanismes ont été modélisés par des opérateurs de relaxation de type Krook.

La méthode analytique utilisée est basée sur le développement de la fonction de distribution sur la base des polynômes de Legendre. Les composantes de la fonction de distribution sur la base des polynômes de Legendre sont prises en considération jusqu'à la deuxième anisotropie. Les propriétés d'invariance des opérateurs de collision sont assurées à l'aide des opérateurs de projection.

Les coefficients de transport sont calculés dans l'espace de Fourier en fonction d'intégrales dont l'intégrand dépend de la fonction de distribution de Fermi-Dirac. Les coefficients obtenus vérifient de façon self-consistante la symétrie d'Onsager, ce qui corrobore la fiabilité des résultats obtenus. Par ailleurs, nous retrouvons les résultats de la littérature concernant la conductivité thermique, obtenus dans l'approximation locale.

Ce travail ouvre la voie à quelques perspectives de recherche dans ce domaine de la théorie du transport dans les structures nanométriques.

- i) La prise en compte d'un champ magnétique à l'ordre zéro permet de sonder les effets du champ magnétique sur le transport. En particulier d'autres coefficients de transport peuvent être calculés dont notamment ceux de Nernst et Righi-Leduc.
  
- ii) L'établissement des coefficients de transport quel que soit le régime de collision et de dégénérescence.

# **REFERENCES**

## REFERENCES

- [1] G. Manfredi, Fields Inst. Commun. **46**, 263 (2005).
- [2] F. Calvayrac, P. G. Reinhard, E. Sursaud and C. Ullrich, Phys. Rev. **337**, 493 (2000).
- [3] J. Y. Bigot, V. Halt. J. C. Merle and A. Daunois, Chem. Phys. **251**, 181 (2000).
- [4] M. Tabak et al., Phys. Plasmas **1**, 1626 (1994).
- [5] I. Baraffe, A. Heger, and S. E. Woosley, Astrophys. J. **615**, 378 (2004).
- [6] S. I. Braginskii, "Transport processes in a plasma," in *Review of Plasma Physics*, edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1965), Vol. 1, p. 205.
- [7] Weinert
- [7] A. A. Vlasov, J. Phys. **9**, 25 (1945).
- [8] R.L. Libboff, *Kinetic theory: Classical, Quantum and Relativistic Descriptions* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1990)).
- [9] S. Chapman and T. G. Cowling, *Mathematical Theory of Non-Uniform Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 1961).
- [10] N. A. Krall and A. W. Trivelpiece, *Principle of Plasma Physics* (McGraw-Hill, New York, 1973).
- [11] H. Grad, The Physics of Fluids **6**, 147 (1963).
- [12] A.Y. Potekhin, D. A. Baiko, P. Haensel, and D. G. Yakovlev, Astron. Astrophys. **346**, 345 (1999).
- [13] Y. T. Lee and R. M. More, Phys. Fluids **27**, 1273 (1984).
- [14] R. Redmer, Phys. Rev. E **59**, 1073 (1999).
- [15] J. L. Delcroix et A. Bers, *Physique des Plasmas*, (InterEditions/ CNRS Editions, Paris, 1998).
- [16] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, London, 1962).
- [17] E.E. Salpeter, Aust. J. Phys. **7**, 377 (1954).
- [18] H. Brysk, P. M. Campbell and P. Hammerling, Plasma Physics **17**, 473 (1975).
- [19] S. R. Brown and M. G. Haines, J. Plasma Physics **58**, 577 (1997).

- [20] F.F Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Plenum Press, New York second edition 1984).
- [21] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, (Dover, New York 1970).
- [22] K. Bendib, A. Bendib, *Phys. Plasmas* **6**, 1500 (1999).
- [23] L. Spitzer , Jr. and R. Härm, *Phys.Rev.***89**,977 (1953).
- [24] I. S. Gradshteyn et I. M. Rysbik, *Table of Integrals, Series and Products* (Academic Press, Sixth Edition 2000).



## Résumé

Un modèle cinétique pour décrire les propriétés de transport dans les plasmas de dégénérescence arbitraire basé sur l'équation de Boltzmann semi-classique a été établi. Dans ce modèle, les mécanismes de collisionnels sont pris en compte à travers les interactions électron-électron et électron-ion et sont décrits par des opérateurs de relaxation de type Krook. L'équation de Boltzmann a été résolue analytiquement dans l'approximation diffusives et à l'aide des polynômes orthogonaux de Legendre.

Les coefficients de transport correspondant au flux de chaleur généralisé et au tenseur des contraintes généralisé ont été établis analytiquement dans l'espace de Fourier, en fonction d'intégrales qui contiennent la fonction de Fermi-Dirac

### **Mots Clés :**

Plasma dense, équation de Boltzmann, coefficients de transport, viscosité.

## Abstract

A kinetic model to describe transport properties in plasmas with arbitrary degeneracy, based on the semi-classical Boltzmann equation is established. In this model, the collisional mechanisms are taken into account through the electron-electron and the electron-ion interactions and they are described by the Krook operators. The Boltzmann equation is solved analytically in the diffusive approximation with the use of the Legendre orthogonal polynomials.

The transport coefficients corresponding to the generalized heat flux and the generalized stress tensor have been analytically established in the Fourier space, in terms of integrals containing the Fermi-Dirac function.

### **Keywords :**

Dense plasmas, Boltzmann equation transport coefficient, viscosity.

## ملخص

تم إنشاء نموذج حركي لوصف خصائص النقل في البلازما المتوالدة عشوائيا , معتمدا في ذلك على معادلة بولتزمان نصف الكلاسيكية. في هذا النموذج آليات التصادم أخذت بعين الاعتبار التصادمات إلكترون-إلكترون و إلكترون-إيون , الموصوفة بمعاملات الاسترخاء من نوع كروك. معادلات بولتزمان تم حلها تحليليا بالتقريب الانتشاري معتمدا على كثير الحدود المتعامد ليجوندر. وقد تم إيجاد معاملات النقل المتعلقة بالتدفق الحراري المعمم ومحدد الإجهاد المعمم تحليليا في فضاء فوري بدلالة التكاملات التي تحتوي على دالة فرمي ديراك.

### **الكلمات المفتاحية :**

بلازما الكثيفة ، معادلة بولتزمان ، معاملات النقل ، اللزوجة .