



République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abbès Laghrou de Khenchela

Faculté des Sciences et Technologie

Département des Sciences de la Matière

Mémoire

présenté par

Farsi Thara et Laiche Souhila

pour obtenir le Diplôme de Master Académique en Physique

Filière: Science de la Matière

Option: Physique des Matériaux

Thème

Effet de lentille gravitationnelle fort à l'échelle cosmologique

Soutenu le: / /2020

devant le jury composé de:

Président	A. Bouroucha	MAA	Université Abbès Laghrou de Khenchela
Rapporteur	M. Guenouche	MCB	Université Abbès Laghrou de Khenchela
Examineur	Z. Hemame	MAA	Université Abbès Laghrou de Khenchela

Année universitaire: 2020/2021

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu pour l'aide qu'Il nous a apporté afin de réaliser ce travail de recherche.

Nous tenons également à exprimer nos vifs remerciement, notre reconnaissance et profonde gratitude envers M. Guenouche Mourad, notre encadreur, d'avoir accepté de diriger ce travail et pour ses conseils qui ont été très pertinents.

Nous remercions finalement les membres de jury, M. Bouroucha Azzeddine et M. Hemame Zoubir, d'avoir accepté d'évaluer la qualité du travail.

Table des matières

Introduction	3
1 Solution de Schwarzschild-de Sitter (ou de Kottler)	6
1.1 Métrique de Schwarzschild-de Sitter	6
1.2 Equations de la géodésique dans l'espace-temps de Schwarzschild-de Sitter .	10
1.3 Géométrie de l'espace-temps de Schwarzschild-de Sitter	11
2 Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	14
2.1 Principe cosmologique d'homogénéité et d'isotropie	14
2.2 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	15
2.3 Equation différentielle de Friedmann	16
2.4 Propagation des photons dans l'Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	20
3 Modèle d'Einstein-Straus à courbure spatiale nulle (cas plat $k = 0$)	23
3.1 Raccordement de la solution de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker avec la solution de Schwarzschild-de Sitter	24
3.2 Intégration de l'équation différentielle de Friedmann	30
3.3 Intégration des géodésiques de lumière	31

3.3.1	Détermination des distances géodésiques Terre-lentille χ_L , Terre-source χ_S et lentille-source $\chi_{L,S}$	33
3.3.2	Géodésiques de lumière entre la Terre et la sphère de Schücking . . .	36
3.3.3	Géodésiques de lumière à l'intérieur la sphère de Schücking	45
3.3.4	Géodésiques de la lumière entre la source et la sphère de Schücking .	51
3.4	Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112	57
3.4.1	Discussion des résultats numériques	61
Conclusion		63
A Tenseur métrique de Schwarzschild-de Sitter		66
B Tenseur métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker		68
C Distance d'approche minimale r_P		70

Introduction

La théorie de la relativité générale proposée par Albert Einstein en 1915 a été testée avec succès en comparant ses prédictions aux preuves expérimentales. La mesure de la déflexion de la lumière près du Soleil lors de l'éclipse de 1919 en est le premier test expérimental [1]. Cette déflexion induit un temps de retard résultant d'un trajet plus long par rapport à celui qu'effectue la lumière en l'absence du soleil. Ce temps de retard est dénommé “effet Shapiro” en l'honneur de celui qui l'a découvert en 1964 [2] et mesuré en 1968 [3]. Ces deux phénomènes sont des conséquences d'un effet de lentille gravitationnelle qui est aujourd'hui considérée comme un outil de base afin d'explorer l'Univers à petite et à grande échelle.

L'effet de lentille gravitationnelle à l'échelle cosmologique fait l'objet de ce mémoire de Master. On étudiera, la déflexion de la lumière et le temps de retard que produisent les amas de galaxies sur la lumière provenant des objets lointains dans le cadre d'une solution exacte des équations d'Einstein de la gravitation connue sous le nom d'Einstein-Straus, en présence d'une constante cosmologique positive et en l'absence d'une courbure spatiale (espace plat $k = 0$) [4, 5, 6]. Ensuite, on confrontera les résultats obtenus aux données observationnelles. L'étude de cet effet Le choix de la solution d'Einstein-Straus est essentiellement justifié par le fait qu'il tient compte à la fois de l'expansion de l'Univers à l'échelle galactique et du fait que les petites échelles, telles que les échelles planétaires, ne soient pas affectées par la dite expansion. Ce modèle résulte du raccordement de la métrique dynamique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) à l'extérieur d'une vacuole (ou sphère de Schücking) avec la métrique statique de Schwarzschild-de Sitter (SdS) [7] à

l'intérieur de celle-ci.

Cet intérêt est aussi motivé par la question de savoir si la constante cosmologique modifie ou non la déflexion de la lumière. L'avis général que l'angle de déviation est indépendant de la constante cosmologique, était fondée sur l'argument qu'elle disparaît de l'équation du mouvement orbital [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. En 2007, Rindler et Ishak ont remis en cause cette question en soulignant que la métrique elle-même doit aussi être prise en compte [15]. Ce point de vue n'a pas été unanimement partagé. Il s'en est suivi une large controverse. On répondra à cette question dans le cadre d'un modèle cosmologique plus réaliste, celui d'Einstein-Straus.

Le manuscrit de ce mémoire comprend une introduction, trois chapitres, une conclusion, trois annexes et une bibliographie. Dans le chapitre un, on commencera par dériver la métrique de SdS dont on fera usage pour extraire les équations du mouvement des photons et étudier la géométrie de l'espace-temps. Le chapitre deux sera consacré à un précis sur le modèle cosmologique de FLRW. On donnera la métrique de FLRW qui résulte du principe cosmologique d'homogénéité et d'isotropie et on rappellera quelques éléments indispensables pour la suite du travail et qui font partie du modèle standard de cosmologie Λ CDM (Λ : constante cosmologique, CDM : cold dark matter (matière noire froide)) comme l'équation de Friedmann ainsi que le décalage spectral. Dans le dernier chapitre, on commence par raccorder les métriques de FLRW plat et de SdS sur la sphère de Schücking pour construire la métrique d'Einstein-Straus plat. Comme ce sont les conditions finales sur Terre qui sont données, on intégrera à reculons et partiellement les géodésiques de la lumière, dans les différentes régions d'espace-temps, de la Terre jusqu'à la sphère de Schücking, à l'intérieur de la sphère de Schücking puis de la sphère de Schücking jusqu'à la source. Pour ce faire, on mettra en œuvre la méthode d'intégration des équations différentielles sans recours à la géométrie d'Euclide déjà adopté par les auteurs de [16]. En l'occurrence, cette méthode est plus générale et a permis de réaliser le même travail permet dans le cas d'une courbure spatiale positive (espace sphérique $k = +1$) [17]. On terminera

ce chapitre par une application au système de lentille-quasar SDSS J1004+4112 avec la prise des mesures observationnelles les plus récentes des paramètres cosmologiques.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale avec quelques perspectives, deux annexes contenant des détails calculatoires en plus d'une bibliographie.

Chapitre 1

Solution de Schwarzschild-de Sitter (ou de Kottler)

En novembre 1915, Albert Einstein a publié ses équations de la relativité générale décrivant le champ gravitationnel comme résultat de la courbure de l'espace-temps créée par la distribution de masse. En décembre 1915, peu de temps après l'avènement de la relativité générale, Karl Schwarzschild a réussi à résoudre ces équations dans le vide sous l'hypothèse d'un espace-temps statique à symétrie sphérique [18]. Cette solution est appelée ainsi solution de Schwarzschild.

La métrique Schwarzschild-de Sitter est la métrique de Schwarzschild en présence de la constante cosmologique. L'appellation métrique de Kottler [7] est également employée pour désigner la même métrique qui se réduit à celle de de Sitter [19] dans le cas d'une masse nulle.

1.1 Métrique de Schwarzschild-de Sitter

On commence par dériver la métrique de Schwarzschild-de Sitter à partir de la forme standard la plus générale de la métrique statique à symétrie sphérique. Celle-ci s'écrit en

coordonnées sphériques (r, θ, φ) comme

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (1.1)$$

dans un système d'unités où la vitesse de la lumière c est égale à l'unité, avec

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (1.2)$$

On en tire les composantes non nulles et indépendantes du temps du tenseur métrique par identification avec la forme

$$ds^2 = -g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (1.3)$$

$$g_{tt} = -B(r), \quad g_{rr} = A(r), \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta. \quad (1.4)$$

Maintenant les fonctions radiales $A(r)$ et $B(r)$ s'obtiennent par application des équations d'Einstein qui, en présence de la constante cosmologique Λ , s'écrivent comme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (1.5)$$

où G est la constante universelle de la gravitation de Newton, R est le scalaire de Ricci obtenu par contraction du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ est le tenseur énergie-impulsion. Dans le vide, c'est-à-dire, à l'extérieur de la source, le tenseur énergie-impulsion est évidemment nul, ce qui réduit les équations d'Einstein (1.5) à

$$R_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.6)$$

Si on compare ce résultat avec la métrique de Minkowski ($\Lambda = 0$) pour laquelle on a $R_{\mu\nu} = 0$, on déduit que l'espace-temps n'est plus asymptotiquement plat (à l'infini) pour une

constante cosmologique non nulle. Le tenseur de Ricci est donné par

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}. \quad (1.7)$$

où $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ est le symbole de Christoffel qui s'exprime en termes du tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ (voir Annexe A). Les équations d'Einstein obtenues (1.6), tous calculs faits, s'écrivent explicitement comme

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -\frac{1}{2A(r)} \frac{d^2 B(r)}{dr^2} + \frac{1}{4A(r)} \frac{dB(r)}{dr} \left(\frac{1}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr} + \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right) - \frac{1}{rA(r)} \frac{dB(r)}{dr} \\ &= \Lambda B(r), \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{1}{2B(r)} \frac{d^2 B(r)}{dr^2} - \frac{1}{4B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \left(\frac{1}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr} + \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right) - \frac{1}{rA(r)} \frac{dA(r)}{dr} \\ &= -\Lambda A(r), \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left(\frac{1}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr} - \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right) - 1 \\ &= -\Lambda r^2, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} R_{\varphi\varphi} &= \left[\frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left(\frac{1}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr} - \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right) - 1 \right] \sin^2 \theta \\ &= -\Lambda r^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (1.11)$$

Les composantes $\theta\theta$ et $\varphi\varphi$ des équations d'Einstein sont identiques en raison de la symétrie sphérique. Une combinaison appropriée des composantes tt et rr des équations d'Einstein, (1.8) et (1.9), donne

$$\frac{R_{tt}}{B(r)} + \frac{R_{rr}}{A(r)} = -\frac{1}{rA(r)} \left(\frac{1}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr} + \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \right) = \Lambda - \Lambda = 0, \quad (1.12)$$

qui s'intègre facilement en

$$A(r)B(r) = K, \quad (1.13)$$

avec K une constante d'intégration à déterminer. En utilisant (1.12) et (1.13), l'équation (1.10) se simplifie alors à

$$\frac{d}{dr}[rB(r)] = K(1 - \Lambda r^2). \quad (1.14)$$

D'où, par intégration,

$$B(r) = K \left(1 - \frac{K'}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right), \quad (1.15)$$

où K' est une deuxième constante d'intégration à déterminer. Maintenant pour déterminer les constantes K et K' , on procède à deux approximations. La première est obtenue lorsque la distance radiale r du centre de la distribution de masse est suffisamment petite. Dans ce cas, la composante $B(r)$ peut être approximée par

$$B(r) \simeq K \left(1 - \frac{K'}{r} \right). \quad (1.16)$$

La seconde approximation consiste à prendre la limite d'un champ faible statique créé par une distribution de masse non relativiste, auquel cas on a affaire à la relation (on peut se référer à [20])

$$g_{tt} \simeq -[1 + 2\phi(r)], \quad (1.17)$$

où $\phi(r)$ est le potentiel gravitationnel de Newton qui, pour r suffisamment petit, est donné par

$$\phi = -\frac{GM}{r}. \quad (1.18)$$

En comparant à (1.17), il s'ensuit que

$$K = 1, \quad K' = 2GM. \quad (1.19)$$

Ainsi, la métrique de Schwarzschild-de Sitter prend la forme

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2. \quad (1.20)$$

Il est facile de constater que la métrique de Schwarzschild-de Sitter, outre la présence d'une singularité physique (singularité nue) en $r = 0$, présente deux singularités de coordonnées. La première est connue sous le nom de singularité de Schwarzschild en $r = 2GM$ (rayon de Schwarzschild), pour r suffisamment petit, et la seconde est connue sous le nom de singularité de de Sitter en $r = \sqrt{3/\Lambda}$, pour r suffisamment grand.

Bien que les mesures observationnelles actuelles indiquent des valeurs relativement faibles pour la constante cosmologique, de l'ordre de 10^{-52} m^{-2} [21], les travaux de Rindler et Ishak ont montré théoriquement que ce paramètre cosmologique a un effet sur la déviation de la lumière à proximité d'un corps massif [15]. Dans ce qui suit, on va intégrer les équations de la géodésique dans l'espace-temps de Schwarzschild-de Sitter.

1.2 Equations de la géodésique dans l'espace-temps de Schwarzschild-de Sitter

En relativité générale, le mouvement géodésique dans l'espace-temps est régi par les équations

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0, \quad (1.21)$$

où le point en-dessus désigne la dérivée première par rapport à un nouveau paramètre affine p , $\dot{} = d/dp$, autre que s (l'intervalle d'espace-temps pour une géodésiques de genre lumière (photon) est nul $ds^2 = 0$). Grâce à la propriété de symétrie sphérique (invariance par rotation), le mouvement s'effectue sur un plan, qu'on peut prendre comme le plan

équatorial $\theta = \pi/2$. La métrique de Schwarzschild-de Sitter se réduit alors à

$$ds^2 = B(r)dt^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2. \quad (1.22)$$

En faisant usage des expressions des symboles de Christoffel (A.4), les équations de la géodésique (1.21) s'écrivent alors

$$\ddot{t} + \frac{1}{B(r)} \frac{dB(r)}{dr} \dot{t}\dot{r} = 0, \quad (1.23)$$

$$\ddot{r} + \frac{1}{2}B(r)\frac{dB(r)}{dr}\dot{t}^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{B(r)}\frac{dB(r)}{dr}\dot{r}^2 - rB(r)\dot{\varphi}^2 = 0, \quad (1.24)$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0. \quad (1.25)$$

Il est à noter que ces équations ne sont autres que les équations obtenues par application des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (1.26)$$

où $\mathcal{L}$ est le lagrangien défini par

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dp} \right)^2 = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (1.27)$$

1.3 Géométrie de l'espace-temps de Schwarzschild-de Sitter

Considérons un espace euclidien à trois dimensions en coordonnées cylindriques. L'élément de ligne au carré dl^2 s'écrit comme

$$dl^2 = dz^2 + dr^2 + r^2d\varphi^2. \quad (1.28)$$

Considérons maintenant une surface à deux dimensions à symétrie cylindrique $z = z(r)$ plongée dans l'espace euclidien à trois dimensions. L'élément de ligne dl^2 s'écrit alors

$$dl^2 = \left[\left(\frac{dz}{dr} \right)^2 + 1 \right] dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.29)$$

Compte tenu de (1.20), la métrique spatiale de Schwarzschild-de Sitter pour un mouvement restreint dans le plan équatorial, $\theta = \pi/2$, se simplifie en

$$dl^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.30)$$

Au voisinage de la distribution de masse, c'est-à-dire, dans le cas $\Lambda r^2 \ll GM/r$, dl^2 est approximé par la métrique spatiale de Schwarzschild

$$dl^2 \simeq \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.31)$$

En comparant à (1.29), on obtient

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{2GM}{r - 2GM}}. \quad (1.32)$$

Cette dernière équation s'intègre, pour donner

$$z(r)^2 = 8GM(r - 2GM). \quad (1.33)$$

C'est l'équation d'un paraboloïde de Flamm. Loin de la distribution de masse, c'est-à-dire, dans le cas $GM/r \ll \Lambda r^2$, la métrique spatiale (1.30) est approximée par la métrique spatiale de de Sitter

$$dl^2 = \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (1.34)$$

En comparant à (1.29), on en déduit que

$$dz = \pm dr \sqrt{\frac{\Lambda r^2}{3 - \Lambda r^2}}, \quad (1.35)$$

qui s'intègre en pour donner

$$z^2 + r^2 = \frac{3}{\Lambda}, \quad (1.36)$$

grâce à un changement de variable approprié. C'est l'équation d'une sphère de rayon $\sqrt{3/\Lambda}$.

Chapitre 2

Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La cosmologie s'intéresse à l'étude de l'Univers dans son ensemble et les phénomènes physiques qui s'y déroulent, liés à l'évolution des grandes structures à l'instar des galaxies et des amas de galaxies, ainsi que les modèles qui en permettent la description.

2.1 Principe cosmologique d'homogénéité et d'isotropie

La plupart des modèles utilisés en cosmologie font l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope.

Précisons la signification de l'homogénéité et de l'isotropie. Par homogénéité, on entend que tous les points de l'espace jouent le même rôle. Autrement dit, il n'existe pas de point privilégié. Par isotropie, on entend que toutes les directions autour de tout point de l'espace sont équivalentes. On peut montrer qu'en vérité l'isotropie ainsi définie (isotropie autour de chaque point) entraîne l'homogénéité.

On dit des modèles qui font l'hypothèse d'un espace homogène et isotrope qu'ils satisfont au principe cosmologique.

2.2 Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Le principe cosmologique implique de fortes contraintes sur la métrique d'espace-temps. On peut montrer qu'il existe un système de coordonnées, dites coordonnées comobiles, de telle manière que les dix composantes indépendantes du tenseur métrique se réduisent à une seule fonction de t (t désignant la coordonnée temporelle) $a(t)$, appelée facteur d'échelle, avec un paramètre discret. Plus précisément, on peut toujours pour un Univers satisfaisant au principe cosmologique, faire le choix d'un système de coordonnées (t, r, θ, φ) de telle manière que le carré de l'intervalle d'espace-temps ds^2 prenne la forme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.1)$$

où

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.2)$$

avec l'indice discret k pouvant prendre les valeurs $+1$, 0 et -1 , qui correspondent respectivement à une sphère, à un espace euclidien et à une pseudo-sphère, tous à trois dimensions.

Si on fait le choix d'une nouvelle coordonnée comobile χ liée à r via

$$r = \Sigma(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & k = +1 \\ \chi & k = 0 \\ \sinh \chi & k = -1 \end{cases}, \quad (2.3)$$

alors l'élément de ligne (2.1) peut être réécrit comme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + \Sigma(\chi)^2 d\Omega^2]. \quad (2.4)$$

2.3 Equation différentielle de Friedmann

La seule fonction inconnue dans (2.1) ou (2.4) est le facteur d'échelle $a(t)$, qui peut être déterminé par application des équations d'Einstein qui s'écrivent, dans un système d'unité où $8\pi G$ égal à l'unité, comme

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

en l'absence de la constante cosmologique Λ , et

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

en présence de la constante cosmologique Λ . Les équations d'Einstein (2.5) et (2.6) peuvent être respectivement réécrites comme

$$R_{\mu\nu} = - \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda \right), \quad (2.7)$$

et

$$R_{\mu\nu} = - \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda \right) - \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Ceci nous amène au calcul du tenseur de Ricci et du scalaire de courbure, lesquels requièrent à leur tour le calcul des symboles de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ qui s'expriment en fonction du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et du tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ (voir Annexe B).

A partir de (2.1), on peut tirer les composantes du tenseur métrique dans le système de coordonnées (t, r, θ, φ)

$$g_{tt} = -1, \quad g_{rr} = \frac{a^2}{1 - kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2 r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.9)$$

et du tenseur métrique inverse, qui sont ici immédiates, vu que le tenseur métrique est

diagonal

$$g^{tt} = -1, \quad g^{rr} = \frac{1 - kr^2}{a^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2 r^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta}. \quad (2.10)$$

Le calcul des symboles de Christoffel donne pour les composantes non nulles

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= \frac{1}{1 - kr^2} a \frac{da}{dt}, & \Gamma_{\theta\theta}^t &= a \frac{da}{dt} r^2, & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= a \frac{da}{dt} r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{tr}^r &= \Gamma_{rt}^r = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{t\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta t}^\theta = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi t}^\varphi = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta, \end{aligned} \quad (2.11)$$

où l'indice t désigne la dérivation par rapport au temps. En utilisant l'expression du tenseur de Ricci (1.7), on obtient

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{3}{a} \frac{d^2 a}{dt^2}, & R_{rr} &= -\frac{1}{1 - kr^2} \left[aa_{tt} + 2 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + 2k \right], \\ R_{\theta\theta} &= -r^2 \left[a \frac{d^2 a}{dt^2} + 2 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + 2k \right], & R_{\varphi\varphi} &= -r^2 \sin^2 \theta \left[a \frac{d^2 a}{dt^2} + 2 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + 2k \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

Le scalaire de courbure R se calcule par contraction du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

ce qui donne, en utilisant les expressions des composantes (2.12) du tenseur de Ricci,

$$R = -\frac{6}{a^2} \left[a \frac{d^2 a}{dt^2} + \left(\frac{da}{dt} \right)^2 + k \right]. \quad (2.14)$$

Pour écrire les équations d'Einstein, on a également besoin d'une forme pour le tenseur énergie-impulsion. On modélise généralement l'Univers par un fluide parfait dont les molécules sont les galaxies ou les amas de galaxies. La forme générale du tenseur énergie-

impulsion $T_{\mu\nu}$ d'un fluide parfait avec densité ρ et pression p est donnée par

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

où U_μ désigne la 4-vitesse du fluide. Vu qu'on travaille dans un système de coordonnées comobiles, seule la composante temporelle de U_μ est non nulle

$$U_\mu(U_t, 0, 0, 0). \quad (2.16)$$

Comme

$$U_\mu U^\mu = -1, \quad (2.17)$$

et vu que le tenseur métrique est diagonal avec $g^{tt} = -1$, on a

$$U_t^2 = 1. \quad (2.18)$$

Comme U_t est obligatoirement positif, on a

$$U_t = 1. \quad (2.19)$$

Il est à remarquer que nous obtenons deux équations indépendantes qui correspondent aux composantes tt et rr du tenseur de Ricci, et qui s'écrivent respectivement comme

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 - \frac{1}{3}(\rho + \Lambda)a^2 = -k, \quad (2.20)$$

et

$$2a\frac{d^2a}{dt^2} + \left(\frac{da}{dt}\right)^2 + (p - \Lambda)a^2 = -k. \quad (2.21)$$

Du fait de l'isotropie de l'espace, (2.8) produit la même équation (2.21) pour $\mu = \nu = \theta$ et pour $\mu = \nu = \varphi$. Ces équations ont été obtenues par Friedmann en 1922 dans le cas d'une

pression nulle $p = 0$ [22], puis généralisées pour une pression non nulle par Lemaître en 1927 [23]. En prenant la différence des deux équations (2.20) et (2.21) on obtient

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.22)$$

Cette équation nous permet de voir que pour Λ négligeable, dans un univers à contenu matériel, c'est-à-dire tel que $\rho + 3p > 0$, l'expansion est décélérée. Il reste à résoudre le problème de la dépendance de la pression en la densité. Pour cela, il nous faut encore une équation d'état $p = p(\rho)$, ce qui suppose une forme particulière de matière dominant l'Univers, autrement dit, la connaissance des diverses formes possibles d'énergie dans l'Univers. En prenant une combinaison linéaire particulière des équations (2.20) et (2.21) (les équations (2.20) et (2.21) sont multipliées respectivement par -3 et 1), on obtient

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{k}{a^2} + \frac{1}{2}(\rho + p) = 0. \quad (2.23)$$

La dérivation de (2.20) par rapport au temps nous donne

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{6}{a} \frac{da}{dt} \left[\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 - \frac{k}{a^2} \right]. \quad (2.24)$$

En combinant (1.12) et (2.24), on obtient l'équation de conservation

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt}(\rho + p) = 0. \quad (2.25)$$

C'est bel et bien le résultat que donne la composante temporelle de l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion,

$$D_\nu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\nu\rho} T^{\mu\rho} = 0. \quad (2.26)$$

L'équation (2.25) est équivalente à

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}a^3 = 0. \quad (2.27)$$

On s'intéresse à l'Univers actuel qui est dominé par la matière noire froide non relativiste (cold dark matter ou CDM en abrégé) auquel cas la pression est négligeable devant la densité, $p \ll \rho$. L'équation (2.27) mène alors à

$$\rho \propto \frac{1}{a^3}. \quad (2.28)$$

2.4 Propagation des photons dans l'Univers de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Ici, nous considérons les trajectoires des photons qui voyagent de galaxies lointaines vers nous, à l'origine. Ce problème est particulièrement simple car on doit seulement imposer $ds^2 = 0$. Considérons un photon émis à $(t, \chi, \theta, \varphi)$ puis détecté à l'origine $(t_0, \chi_0 = 0, \theta_0, \varphi_0)$ sur Terre. Ceci implique que $t_0 > t$. Prenons le cas d'un chemin radial, ce qui signifie que $\theta = \theta_0$ et $\varphi = \varphi_0$. L'équation (2.4) se réduit alors à

$$0 = ds^2 = dt^2 - a(t)^2 d\chi^2, \quad (2.29)$$

ce qui donne

$$\frac{d\chi}{dt} = \pm \frac{1}{a(t)}. \quad (2.30)$$

Comme le photon se rapproche du détecteur, $d\chi$ est forcément négatif et on doit choisir parmi les deux possibilités (2.30) celle avec un signe moins. Donc,

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{1}{a(t)}. \quad (2.31)$$

En intégrant (2.31), on obtient

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.32)$$

où $\chi(t)$ représente la distance géodésique du photon entre le point d'émission et l'origine sur Terre. Si on est en possession de l'expression de $a(t)$, on peut alors évaluer $\chi(t)$ pour un instant donné t . Pour des galaxies émettrice et réceptrice suffisamment proches de telle manière qu'on puisse négliger la variation de $a(t)$ entre l'instant d'émission et l'instant de réception du photon, (2.32) se simplifie en

$$a_0\chi = t_0 - t, \quad (2.33)$$

qui dit simplement que le temps de vol est égal à la distance parcourue par un photon, dans un système d'unités où la vitesse de la lumière c est égale à l'unité.

La relation (2.32) permet également d'accéder au décalage spectral. Considérons un premier photon émis à l'instant t par une galaxie ou un amas de galaxie et reçu sur Terre à l'instant t_0 . Considérons un deuxième photon émis à l'instant $t + 1/\nu$ où ν est la fréquence du rayonnement à l'émission. Ce deuxième photon sera reçu sur Terre à un instant $t_0 + 1/\nu_0$ avec ν_0 la fréquence à la réception. Comme la distance géodésique est la même pour les deux photons, nous avons

$$\chi(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+1/\nu}^{t_0+1/\nu_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t+1/\nu}^t \frac{dt}{a(t)} + \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0+1/\nu_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.34)$$

En négligeant la variation de $a(t)$ sur les intervalles $(t, t + 1/\nu)$ et $(t_0, t_0 + 1/\nu_0)$, on obtient

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a_0}{a}, \quad (2.35)$$

ou, comme les fréquences et les longueurs d'onde sont inversement proportionnelles,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}. \quad (2.36)$$

Le décalage spectral z est défini comme

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda}. \quad (2.37)$$

D'où,

$$1 + z = \frac{a_0}{a}. \quad (2.38)$$

Si $z > 0$, on parle de décalage spectral vers le rouge ou redshift et si $z < 0$, on parle de décalage spectral vers le bleu ou blueshift.

Pour obtenir χ en fonction du décalage spectral z , on fait le changement de variables

$$dt = \frac{da}{f(a)}, \quad (2.39)$$

dans (2.32). On obtient alors

$$\chi(z) = \int_{\frac{a_0}{1+z}}^{a_0} \frac{da}{af(a)}, \quad (2.40)$$

où $f(a)$ est donné par l'équation de Friedmann (2.20). Cette expression (2.40) est très utile car c'est le décalage spectral d'une galaxie qui est mesuré par l'observation et non pas l'instant d'émission du photon.

Chapitre 3

Modèle d'Einstein-Straus à courbure spatiale nulle (cas plat $k = 0$)

La motivation qui a conduit Einstein et Straus à proposer ce modèle cosmologique qui porte leurs noms, était d'expliquer pourquoi le phénomène très connu d'expansion de l'Univers à grand échelle n'affecte pas les petites échelles telles que les systèmes planétaires. Dans leur travail qui date de l'année 1945 [4], ils ont montré qu'il est possible de combiner analytiquement et géométriquement la métrique statique de Schwarzschild avec la métrique non statique de FLRW sur une sphère ou une vacuole. Cette sphère porte le nom Schücking qui a déterminé la métrique représentative de ce modèle en 1954 mais en l'absence de la constante cosmologique [5]. Le travail de Schücking a ensuite été élargi par les italiens Balbinot, Bergamini et Comastri pour tenir compte de la présence d'une constante cosmologique [6]. Dans ce modèle, les galaxies ou les amas de galaxies (lentille) seront représentés par une condensation de matière à symétrie sphérique placée au centre d'une sphère vide régie par la solution de Schwarzschild-de Sitter et plongée dans un fluide

parfait décrit par la métrique de FLRW.

Le modèle d'Einstein-Straus permet de s'affranchir des hypothèses utilisées par Rindler et Ishak [15, 24]. On permet à l'observateur et à la source de se déplacer par rapport à la lentille et les masses des autres amas de galaxies sont incluses sous forme d'une poussière isotrope et homogène. La métrique d'Einstein-Straus est une solution des équations d'Einstein qui raccorde la solution de Schwarzschild-de Sitter à l'intérieur du rayon de Schücking [5] avec la solution de FLRW à l'extérieur.

On va s'intéresser dans ce chapitre au modèle d'Einstein-Straus en présence d'une constante cosmologique mais en considérant une courbure spatiale nulle, $k = 0$, pour la métrique de FLRW. Commençons par raccorder les métriques de FLRW et de SdS sur la sphère de Schücking via le calcul du Jacobien de la transformation des coordonnées de Friedmann aux coordonnées de Schwarzschild, en suivant le travail de Schücker [25].

3.1 Raccordement de la solution de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker avec la solution de Schwarzschild-de Sitter

Réappelons t T pour exprimer la métrique de SdS (1.20) en coordonnées (T, r, θ, φ) comme

$$ds^2 = B(r)dT^2 - B(r)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2, \quad (3.1)$$

qui s'applique à l'intérieur d'une vacuole (sphère de Schücking) de rayon $r_{\text{Schü}}(T)$ centrée autour d'une distribution de masse M à symétrie sphérique (la lentille) avec

$$r \leq r_{\text{Schü}}. \quad (3.2)$$

La métrique de FLRW en coordonnées comobiles $(t, \chi, \theta, \varphi)$ (2.4) s'écrit dans un espace euclidien (espace plat $k = 0$) comme

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2(d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2), \quad (3.3)$$

qui décrit la géométrie de l'espace-temps à l'extérieur de la vacuole,

$$\chi \geq \chi_{\text{Schü}}, \quad (3.4)$$

où le facteur d'échelle $a(t)$ est déterminé par intégration numérique de l'équation de Friedmann (2.20)

$$\frac{da}{dt} = f(a), \quad f(a) = \sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2}, \quad (3.5)$$

où $a(t)$ est une fonction croissante au cours du temps (expansion de l'Univers) avec A une constante définie à partir de (2.28) comme

$$3A = \rho a^3, \quad (3.6)$$

pour un univers dominé par la matière non relativiste avec ρ la densité de poussière.

On raccorde la métrique de SdS (3.1) à la métrique de Friedmann (3.3) sur le rayon constant de Schücking,

$$r_{\text{Schü}}(T) = a(t)\chi_{\text{Schü}}. \quad (3.7)$$

La masse M s'exprime en termes du rayon de Schücking, compte tenu de (3.6) et (3.7), comme

$$M := \frac{4}{3}\pi r_{\text{Schü}}^3 \rho = 4\pi A \chi_{\text{Schü}}^3, \quad (3.8)$$

ce qui donne

$$\chi_{\text{Schü}} = \left(\frac{M}{4\pi A} \right)^{1/3}. \quad (3.9)$$

Donc, on a sur la sphère de Schücking

$$B_{\text{Schü}} := B(r_{\text{Schü}}) = 1 - \left(\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3} a^2 \right) \chi_{\text{Schü}}^2 = 1 - f(a)^2 \chi_{\text{Schü}}^2. \quad (3.10)$$

Pour raccorder les deux solutions, on va passer des coordonnées de FLRW (t, χ) et de SdS (T, r) au nouveau système de coordonnées (b, r) .

Réécrivons d'abord la métrique de FLRW dans le système de coordonnées (a, χ) ,

$$ds^2 = \frac{da^2}{f(a)^2} - a^2 d\chi^2 - a^2 \chi^2 d\Omega^2. \quad (3.11)$$

On transforme le facteur $a^2 \chi^2$ devant $d\Omega^2$ en r^2 sous le changement de coordonnées $(a, \chi) \rightarrow (b, r)$,

$$a = \Phi(b, r), \quad \chi = r/\Phi(b, r), \quad (3.12)$$

avec la condition aux limites, qu'en le rayon de Schücking, l'ancienne coordonnée de temps coïncide avec la nouvelle coordonnée de temps,

$$a = b = \Phi(b, b\chi_{\text{Schü}}). \quad (3.13)$$

Dans le système de coordonnées (b, r) , la métrique de FLRW (3.11) s'écrit alors comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{bb}^F db^2 - g_{rr}^F dr^2 - 2g_{br}^F dbdr - r^2 d\Omega^2 \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right)^2 \left(\frac{1}{C_1^2} - \frac{r^2}{\Phi^2} \right) db^2 - \left[\left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{C_1^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 \right] dr^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial b} \left[\frac{r}{\Phi} \left(1 - \frac{r}{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] dbdr - r^2 d\Omega^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec

$$C_1 = f(\Phi) = \sqrt{\frac{A}{\Phi} + \frac{\Lambda}{3} \Phi^2}. \quad (3.15)$$

On veut maintenant que le terme mixte g_{br}^F soit nul (métrique diagonale), c'est-à-dire que

$g_{br}^F = 0$. Ceci se traduit par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{r}{\Phi} \frac{C_1^2}{B_1}, \quad B_1 = 1 - \left(\frac{A}{\Phi^3} + \frac{\Lambda}{3} \right) r^2. \quad (3.16)$$

La métrique de FLRW prend alors la forme

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b} \right)^2 \frac{B_1}{C_1^2} db^2 - \frac{1}{B_1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.17)$$

En dérivant (3.13) par rapport à b , on obtient en $\chi = \chi_{\text{Schü}}$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial b} \right|_{\text{Schü}} = 1 - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{\text{Schü}} \chi_{\text{Schü}} = \frac{1}{B_{\text{Schü}}}. \quad (3.18)$$

En tenant compte du fait que $g_{br}^F = 0$ et en substituant par (3.18) et (??), la métrique de FLRW (3.14) devient alors

$$ds^2 = \frac{\chi_{\text{Schü}}^2}{B_{\text{Schü}}(1 - B_{\text{Schü}})} db^2 - \frac{dr^2}{B_{\text{Schü}}} - r^2 d\Omega^2, \quad (3.19)$$

Considérons maintenant la solution de SdS (3.1) et faisons la transformation de coordonnées $(T, r) \rightarrow (b, r)$ via la fonction $\Psi(b)$

$$\frac{dT}{db} = \Psi(b). \quad (3.20)$$

La métrique de SdS s'écrit alors dans le système de coordonnées (b, r, θ, φ) comme

$$\begin{aligned} ds^2 &= -g_{bb}^K db^2 - g_{rr}^K dr^2 - r^2 d\Omega^2 \\ &= B\Psi(b)^2 db^2 - B^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Le raccordement dans ce système de coordonnées (b, r, θ, φ) des deux solutions de FLRW

et de SdS sur la sphère de Schücking se traduit par

$$g_{bb}^F|_{\text{Schü}} = g_{bb}^K|_{\text{Schü}}, \quad g_{rr}^F|_{\text{Schü}} = g_{rr}^K|_{\text{Schü}}. \quad (3.22)$$

ce qui implique alors que

$$\Psi(b) = \frac{\chi_{\text{Schü}}}{B_{\text{Schü}} C_{\text{Schü}}}, \quad (3.23)$$

où on a posé

$$C_{\text{Schü}} = \sqrt{1 - B_{\text{Schü}}}, \quad (3.24)$$

ou encore

$$C_{\text{Schü}} = f(a) \chi_{\text{Schü}} \quad (3.25)$$

Maintenant, pour calculer le Jacobien de la transformation de coordonnées $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$ et vice versa sur la sphère de Schücking, on fait un usage répété de la dérivée d'une fonction composée. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial T} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial T}, & \frac{\partial t}{\partial r} &= \frac{\partial t}{\partial a} \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \\ \frac{\partial \chi}{\partial T} &= \frac{\partial \chi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial T}, & \frac{\partial \chi}{\partial r} &= \frac{1}{\Phi} - \frac{r}{\Phi^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En faisant $\chi = \chi_{\text{Schü}}$ dans (3.26), on obtient le Jacobien de la transformation de coordonnées $(T, r) \rightarrow (t, \chi)$ sur la sphère de Schücking,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{\text{Schü}} &= 1, & \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{\text{Schü}} &= -\frac{C_{\text{Schü}}}{B_{\text{Schü}}}, \\ \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{\text{Schü}} &= -\frac{C_{\text{Schü}}}{a}, & \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{\text{Schü}} &= \frac{1}{a B_{\text{Schü}}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

ou sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{C_{\text{Schü}}}{B_{\text{Schü}}} \\ -\frac{C_{\text{Schü}}}{a} & \frac{1}{a B_{\text{Schü}}} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Le Jacobien de la transformation inverse $(t, \chi) \rightarrow (T, r)$ n'est autre que l'inverse de la matrice (3.28), dont le calcul donne

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{B_{\text{Schü}}} & a \frac{C_{\text{Schü}}}{B_{\text{Schü}}} \\ C_{\text{Schü}} & a \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

D'où,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\text{Schü}} &= \frac{1}{B_{\text{Schü}}}, & \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{\text{Schü}} &= a \frac{C_{\text{Schü}}}{B_{\text{Schü}}}, \\ \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{\text{Schü}} &= C_{\text{Schü}}, & \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{\text{Schü}} &= a. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Pour comparer la coordonnée temporelle de FLRW t , à celle de SdS T , en $\chi = \chi_{\text{Schü}}$, on considère la courbe paramétrée $T = p$, avec $r = b\chi_{\text{Schü}}$, $\theta = \pi/2$ et $\varphi = 0$. Sa 4-vitesse est

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p} &= 1, \\ \frac{\partial r}{\partial p} &= \frac{dr}{db} \frac{db}{dT} \Big|_{\text{Schü}} \frac{dT}{dp} = \chi_{\text{Schü}} \frac{1}{\Psi(b)} \cdot 1 = B_{\text{Schü}} C_{\text{Schü}}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

dans les coordonnées de SdS et

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{\text{Schü}} \frac{dT}{dp} + \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{\text{Schü}} \frac{dr}{dp} = 1 \cdot 1 - \frac{C_{\text{Schü}}}{B_{\text{Schü}}} B_{\text{Schü}} C_{\text{Schü}} = B_{\text{Schü}}, \\ \frac{d\chi}{dp} &= \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{\text{Schü}} \frac{dT}{dp} + \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{\text{Schü}} \frac{dr}{dp} = -\frac{C_{\text{Schü}}}{a_{\text{Schü}}} \cdot 1 + \frac{1}{a B_{\text{Schü}}} B_{\text{Schü}} C_{\text{Schü}} = 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

dans les coordonnées de FLRW. On en déduit la relation

$$\left. \frac{dt}{dT} \right|_{\text{Schü}} = \frac{dt}{dp} \frac{dp}{dT} = B_{\text{Schü}}, \quad (3.33)$$

qui permet de passer du temps de Friedmann au temps de Schwarzschild et inversement.

3.2 Intégration de l'équation différentielle de Friedmann

Avant d'intégrer les géodésiques de lumière, on commence par intégrer l'équation différentielle de Friedmann en vue d'obtenir une expression analytique exacte du facteur d'échelle en termes du temps cosmique $a(t)$ ainsi que de la fonction inverse du temps cosmique en termes du facteur d'échelle $t(a)$. Ce calcul intermédiaire étant facultatif puisqu'on peut alternativement procéder à une intégration numérique de l'équation de Friedmann. L'équation différentielle de Friedmann dans le cas plat ($k = 0$) est donnée par

$$\frac{da}{dt} = f(a), \quad f(a) := \sqrt{\frac{A}{a} + \frac{\Lambda}{3}a^2}, \quad (3.34)$$

On cherche d'abord l'expression du temps cosmique en termes du facteur d'échelle $t(a)$.

On a

$$dt = \frac{da}{f(a)}, \quad (3.35)$$

qui peut être réécrit, en utilisant le changement de variable

$$b = \sqrt{\frac{\Lambda}{3A}}a^3, \quad (3.36)$$

comme

$$dt = \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \frac{db}{\sqrt{1+b^2}}, \quad (3.37)$$

ce qui donne par intégration,

$$t(b) = \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \operatorname{arcsinh} b + \text{const}, \quad (3.38)$$

ou encore

$$t(a) = \frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3A}}a^3 + \text{const}. \quad (3.39)$$

Pour calculer la constante const , on utilise le fait que le facteur d'échelle prend la valeur $a_0 = a(t = t_0 = 0)$ (ou $t(a_0) = 0$). D'où alors,

$$\text{const} = -\frac{2}{\sqrt{3\Lambda}} \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{\Lambda}{3A}} a_0^3. \quad (3.40)$$

On en tire finalement l'expression du facteur d'échelle en termes du temps cosmique,

$$a(t) = \left(\frac{3A}{\Lambda}\right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} t - \text{const}' \right), \quad (3.41)$$

où const' est une nouvelle constante définie par

$$\text{const}' = \frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} \text{const}. \quad (3.42)$$

3.3 Intégration des géodésiques de lumière

Comme le montre le dessin illustratif sur la Fig. 3-1, on va s'intéresser à une situation de deux photons (ou deux rayons de lumière) émis par une source S aux instants t_S et t'_S et empruntent des trajectoires différentes de type FLRW avant d'arriver à l'entrée de la sphère de Schücking du côté de la source aux instants $t'_{\text{SchüS}}$ et $t_{\text{SchüS}}$ qui peuvent être convertis aux instants $T_{\text{SchüS}}$ et $T'_{\text{SchüS}}$ de type SdS grâce à la relation de raccordement entre le temps de FLRW et celui de SdS déjà établie auparavant (3.33). Puis, ces deux photons pénètrent dans la sphère de Schücking, décrite par la métrique de SdS, pour arriver à la sortie de celle-ci du côté de la Terre aux instants $T'_{\text{SchüE}}$ and $T_{\text{SchüE}}$ (qui peuvent être à leur tour convertis aux instants $t'_{\text{SchüE}}$ et $t_{\text{SchüE}}$ de type FLRW grâce à la même relation qui relie le temps de FLRW à celui de SdS) après avoir subi l'effet de la gravitation (ou en termes relativiste l'effet de la courbure de l'espace-temps) à proximité d'un amas de galaxies jouant le rôle d'une lentille gravitationnelle L. Ensuite, les photons continuent leurs chemins dans la géométrie de FLRW pour arriver finalement sur Terre aux instants

t_E et t'_E sous des angles bien connus α et α' .

Prenons la position de la lentille comme origine et choisissons le système de coordonnées sphériques de telle manière que la Terre soit caractérisée par $(\chi = \chi_L, \varphi = \pi)$ et la source par $(\chi = \chi_{L,S}, \varphi = -\varphi_S)$. La Terre aussi bien que la source font partie de la trajectoire du photon (respectivement points de départ et d'arrivée) et sont par conséquent également contenues dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$.

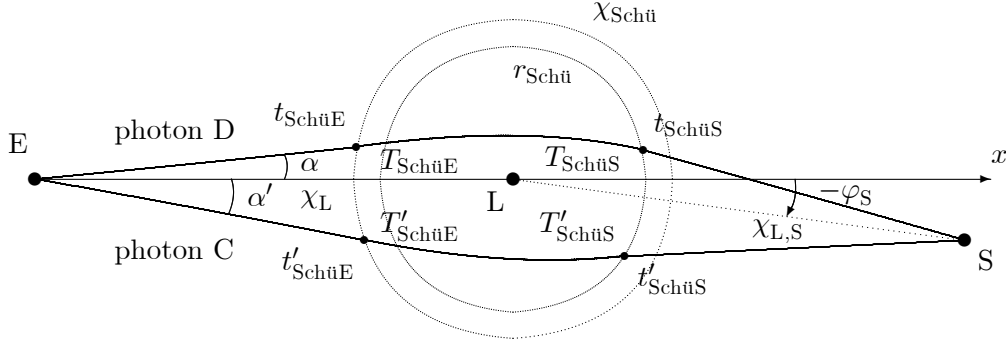


Fig. 3-1 Deux rayons lumineux déviés sous l'effet de la gravitation à l'intérieur de la sphère de Schücking.

Etant donné que ce sont les conditions finales sur Terre qui sont connues, on intégrera les équations du mouvement à reculons, de la Terre jusqu'à la sphère de Schücking, puis à l'intérieur de la sphère de Schücking et enfin de la sphère de Schücking jusqu'à la source. Ce calcul a pour objectif de déterminer les instants auxquels les deux photons quittent la sphère de Schücking, $t'_{SchüE}$ and $t_{SchüE}$, les instants auxquels ils pénètrent dans la sphère de Schücking, $t'_{SchüS}$ and $t_{SchüS}$, et finalement leurs instants d'émission par la source, t_S et t'_S . Lors de ce calcul, on aura également besoin de déterminer l'angle de déflexion φ_S .

On souhaite également synchroniser l'arrivée des deux photons sur Terre à l'instant zéro, c'est à dire $t_E = t'_E = 0$, afin de faciliter davantage les calculs où l'on définit $a_0 := a(t = 0)$ comme le facteur d'échelle actuel sur Terre. Cela veut dire que le temps de retard de l'un des photon par rapport à l'autre se réduit simplement à la différence entre les instants

d'émission en la source. On définit alors cette différence par

$$\Delta t := t'_S - t_S. \quad (3.43)$$

Mais, avant d'expliciter la démarche à suivre pour le calcul de la déflexion de la lumière et du temps de retard, on cherche d'abord à déterminer les distances géodésiques qui séparent la Terre, la lentille et la source..

3.3.1 Détermination des distances géodésiques Terre-lentille χ_L , Terre-source χ_S et lentille-source $\chi_{L,S}$

La méthode consiste simplement à prendre un photon imaginaire caractérisé par $ds^2 = 0$ qui parcourt un chemin radial (correspondant à des variations angulaires polaire et azimutale nulles $d\theta = d\varphi = 0$) de la lentille (et de la source) jusqu'à la Terre dans la géométrie de FLRW et faire usage de la formule du redshift permettant de relier le facteur d'échelle a au décalage spectral z (redshift) (2.38),

$$z + 1 = \frac{a_0}{a}, \quad (3.44)$$

sachant que a_0 est la valeur du facteur d'échelle à l'instant d'arrivée du photon sur Terre auquel on peut attribuer la valeur $t = 0$. Pour réaliser ce calcul, on peut faire recours à diverses méthodes : Chercher une relation entre χ et le temps cosmique t , $\chi(t)$ (2.32), entre χ et le facteur d'échelle a , $\chi(a)$, ou entre χ et le redshift z , $\chi(z)$ (2.40). Donc, La métrique de FLRW pour un photon se réduit à (2.31),

$$d\chi = -\frac{dt}{a(t)}, \quad (3.45)$$

où le choix du signe moins “ $-$ ” assure que les distances géodésiques diminuent au fur et mesure que le photon se rapproche de la Terre, autrement dit, la distance géodésique χ

diminue au cours du temps. En remplaçant $a(t)$ par son expression (3.41), on obtient

$$\chi(t) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3A}} \int_t^0 \frac{dt'}{\sinh^{2/3} \left(\frac{\sqrt{3\Lambda}}{2} t' - \text{const}' \right)}, \quad (3.46)$$

où on a pris l'origine des distances sur Terre, c'est-à-dire que $\chi(t=0) = 0$. Il est à noter que l'intégrale peut se faire analytiquement pour donner une fonction hypergéométrique. Maintenant, les distances géodésiques χ_L et χ_S correspondent respectivement aux instants d'émission des photons par la lentille et la source notés par t_L^0 et t_S^0 ,

$$\chi_L := \chi(t_L^0), \quad \chi_S := \chi(t_S^0). \quad (3.47)$$

Ces instants se calculent via l'expression du temps cosmique (3.39) et la formule du redshift (3.44) comme suit,

$$t_L^0 := t(a_L), \quad a_L := \frac{a_0}{z_L + 1}, \quad (3.48)$$

$$t_S^0 := t(a_S), \quad a_S := \frac{a_0}{z_S + 1}. \quad (3.49)$$

Donc, la donnée des valeurs numériques des redshifts en la lentille et en la source, z_L et z_S , permet de calculer les distances géodésiques χ_L et χ_S .

On peut également déterminer ces distances géodésiques en déterminant une relation en χ et a . En vertu de l'équation de Friedmann (3.35), on peut intégrer par rapport à a . On a, en introduisant $f(a)$ dans (3.45),

$$d\chi = -\frac{da}{af(a)}, \quad (3.50)$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\chi(a) = \int_a^{a_0} \frac{da'}{a'f(a')}. \quad (3.51)$$

Par conséquent les distances géodésiques χ_L et χ_S correspondent aux

$$\chi_L := \chi(a_L), \quad \chi_S := \chi(a_S), \quad (3.52)$$

où a_L et a_S sont donnés par (3.48) et (3.49).

Une troisième méthode consiste à relier directement χ au redshift z en faisant usage de la formule du redshift. L'expression (3.51) devient alors

$$\chi(z) = \int_{\frac{a_0}{z+1}}^{a_0} \frac{da}{af(a)}, \quad (3.53)$$

ou encore, en utilisant (3.44),

$$\chi(z) = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\frac{A}{a_0}(z'+1)^3 + \frac{\Lambda}{3}a_0^2}}. \quad (3.54)$$

Donc, les distances géodésiques χ_L et χ_S sont données respectivement par

$$\chi_L := \chi(z_L), \quad \chi_S := \chi(z_S). \quad (3.55)$$

En l'occurrence, l'intégration analytique de (3.51) et de (3.54) conduit à une intégrale elliptique de première espèce.

Finalement, la distance géodésique entre la lentille et la source, notée par $\chi_{L,S}$, se déduit approximativement en prenant la différence entre χ_S et χ_L ,

$$\chi_{L,S} \simeq \chi_S - \chi_L, \quad (3.56)$$

en raison du fait que, dans le cas auquel on va appliquer nos résultats, l'angle d'inclinaison $-\varphi_S$ (angle de déflexion) de la source par rapport à ligne de visée Terre-lentille est très petit, de l'ordre de quelques secondes d'arc ($\sim 10^{-5}$). Cela signifie que la Terre, la lentille

et la source sont quasiment alignées.

3.3.2 Géodésiques de lumière entre la Terre et la sphère de Schücking

On aura seulement affaire à deux équations de la géodésique qui sont (voir Annexe B)

$$\ddot{t} + a \frac{da}{dt} (\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2) = 0, \quad (3.57)$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \left(\frac{da}{dt} \frac{\dot{t}}{a} + \frac{\dot{\chi}}{\chi} \right) \dot{\varphi} = 0. \quad (3.58)$$

On commence par le chemin du photon “ α ”. Pour intégrer les deux équations différentielles, on doit d’abord déterminer les deux composantes de la 4-vitesse $\dot{t}_E$ et $\dot{\varphi}_E$ à l’instant d’arrivée du photon “ α ” sur Terre $t = 0$ en $p = 0$. Donc,

$$\dot{t}_E := dt/dp|_E = 1. \quad (3.59)$$

Pour calculer $\dot{\varphi}_E$ ($\dot{\varphi} = d\varphi/dp$), on fait usage de la définition de l’angle physique α qui coïncide avec l’angle de coordonnée $\arctan(\chi_L |d\varphi/d\chi|_E)$,

$$\alpha := \arctan \left(\chi_L \left| \frac{d\varphi}{d\chi} \right|_E \right). \quad (3.60)$$

Ceci d’une part. D’autre part, la métrique de FLRW dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$ se réduit pour une géodésique de genre lumière ($ds^2 = 0$) à

$$0 = dt^2 - a(t)^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\varphi^2), \quad (3.61)$$

ce qui donne, en divisant par $d\varphi^2$,

$$\frac{d\chi^2}{d\varphi^2} = \frac{1}{a(t)^2} \frac{dt^2}{d\varphi^2} - \chi^2. \quad (3.62)$$

ou encore

$$\left. \frac{d\varphi^2}{d\chi^2} \right|_{\text{E}} = \frac{1}{\frac{1}{a_0^2} \left. \frac{dt^2}{d\varphi^2} \right|_{\text{E}} - \chi_{\text{L}}^2}, \quad (3.63)$$

en la position de la Terre. En prenant le carré de (3.60) et en substituant par (3.63), on trouve

$$\left. \frac{dt^2}{d\varphi^2} \right|_{\text{E}} = a_0^2 \chi_{\text{L}}^2 \left(\frac{1}{\tan^2 \alpha} + 1 \right) = \frac{a_0^2 \chi_{\text{L}}^2}{\sin^2 \alpha}. \quad (3.64)$$

On en tire l'expression de $\dot{\varphi}_{\text{E}}$ en divisant dt et $d\varphi$ par dp ,

$$\dot{\varphi}_{\text{E}}^2 = \frac{t_{\text{E}}^2 \sin^2 \alpha}{a_0^2 \chi_{\text{L}}^2}, \quad (3.65)$$

ou encore

$$\dot{\varphi}_{\text{E}} = + \frac{\sin \alpha}{a_0 \chi_{\text{L}}}, \quad (3.66)$$

où on a remplacé par (3.59) et retenu le signe plus “+” car pour le photon “ α ” l’angle azimutal φ augmente au cours du temps.

En divisant (3.61) par dp^2 , on obtient

$$\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{\dot{t}^2}{a(t)^2}. \quad (3.67)$$

L’équation de la géodésique (3.57) devient en remplaçant par (3.67) dans l’équation (??), sachant que $da/dt = \dot{a}/\dot{t}$, on obtient

$$\frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (3.68)$$

qui est équivalente à

$$\frac{d}{dp} \ln(\dot{t}a) = 0, \quad (3.69)$$

qui s’intègre par

$$\dot{t}a = C^{te},$$

où C^{te} est une constante qui se détermine par application de la condition finale sur Terre qu'en $t = 0$ ($p = 0$), on $a(0) =: a_0$ et $\dot{t}(0) =: \dot{t}_E$. Donc, compte tenu de (3.59),

$$C^{te} = a_0. \quad (3.70)$$

Alors

$$\dot{t} = \frac{a_0}{a(t)}. \quad (3.71)$$

Maintenant, en réécrivant da/dt comme $\dot{a}/\dot{t}$ dans (3.58) pour éliminer $\dot{t}$, on arrive à

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\chi}}{\chi} \right) = 0, \quad (3.72)$$

qui est équivalente à

$$\frac{d}{dp} \ln(\dot{\varphi} a^2 \chi^2) = 0, \quad (3.73)$$

qui s'intègre par

$$\dot{\varphi} a^2 \chi^2 = C^{tel}, \quad (3.74)$$

où C^{tel} est une deuxième constante qui se détermine par application de la condition finale sur Terre qu'en $t = 0$ ($p = 0$), on $\dot{\varphi}(0) =: \dot{\varphi}_E$ et $a(0) =: a_0$ et $\chi(0) = \chi_L$. Donc, compte tenu de (3.66),

$$C^{tel} = a_0 \chi_P, \quad (3.75)$$

où on a défini

$$\chi_P = \chi_L \sin \alpha. \quad (3.76)$$

Alors

$$\dot{\varphi} = \frac{a_0 \chi_P}{a^2 \chi^2}. \quad (3.77)$$

Pour établir une relation entre φ et χ , il suffit d'éliminer le facteur d'échelle $a(t)$. Pour

cela, on fait usage de l'équation (3.67) afin de tirer une expression pour a . On trouve

$$a^2 = \frac{a_0}{\sqrt{\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2}}. \quad (3.78)$$

où on a remplacé $\dot{t}$ par son expression (3.71). En remplaçant a^2 dans (3.77), il vient que

$$d\varphi = + \frac{\chi_P}{\chi^2} \frac{d\chi}{\sqrt{1 - \chi_P^2/\chi^2}}, \quad (3.79)$$

où on a retenu le signe plus “+” du fait que φ et χ sont positivement proportionnels pour le photon “ α ”. L'équation (3.79) est équivalente à

$$d\varphi = - \frac{d(\chi_P/\chi)}{\sqrt{1 - (\chi_P/\chi)^2}}, \quad (3.80)$$

qui s'intègre par, en tenant compte des conditions finales, pour donner

$$\varphi = - \arcsin \frac{\chi_P}{\chi} + C^{te''}, \quad (3.81)$$

où $C^{te''}$ est une troisième constante qui se détermine par application de la condition finale sur Terre qu'en $t = 0$ ($p = 0$), on a

$$\chi(0) =: \chi_L, \quad \varphi(0) = \pi. \quad (3.82)$$

Donc, compte tenu de (3.76),

$$C^{te''} = \pi + \alpha. \quad (3.83)$$

Alors,

$$\varphi = \pi - \arcsin \frac{\chi_P}{\chi} + \alpha. \quad (3.84)$$

Donc, le photon “ α ” sort de la sphère de Schücking avec un angle azimutal correspondant

au rayon de Schücking $\chi_{\text{Schü}}$ donné par

$$\varphi_{\text{SchüE}} = \pi - \arcsin \frac{\chi_{\text{P}}}{\chi_{\text{Schü}}} + \alpha. \quad (3.85)$$

Le même raisonnement que pour le chemin du photon “ α ” donne pour le chemin du photon “ α' ” les deux composantes de la 4-vitesse sur Terre

$$t'_{\text{E}} = 1, \quad \dot{\varphi}'_{\text{E}} = -\frac{\sin \alpha'}{a_0 \chi_{\text{L}}}, \quad (3.86)$$

compte tenu des conditions finales sur Terre en $t = 0$ ($p = 0$),

$$\chi(0) =: \chi_{\text{L}}, \quad \varphi(0) = -\pi. \quad (3.87)$$

Il s'ensuit que l'intégration des deux équations de la géodésique (3.57) et (3.58) donne

$$t = \frac{a_0}{a}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{a_0 \chi'_{\text{P}}}{a^2 \chi^2}, \quad \varphi = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_{\text{P}}}{\chi} - \alpha', \quad (3.88)$$

avec χ'_{P} défini par

$$\chi'_{\text{P}} := \chi_{\text{L}} \sin \alpha'. \quad (3.89)$$

De même, le photon “ α' ” sort de la sphère de Schücking avec un angle azimutal correspondant au rayon de Schücking $\chi_{\text{Schü}}$ donné par

$$\varphi'_{\text{SchüE}} = -\pi + \arcsin \frac{\chi'_{\text{P}}}{\chi_{\text{Schü}}} - \alpha'. \quad (3.90)$$

Détermination des temps $t_{\text{SchüE}}$ et $t'_{\text{SchüE}}$ Il y a trois méthodes de détermination des temps $t_{\text{SchüE}}$ et $t'_{\text{SchüE}}$. Les deux premières méthodes sont basées sur l'intégration des équations différentielles sans faire appel à des éléments de la géométrie d'Euclide qui correspondent à espace plat. Donc, ces deux méthodes sont exhaustives et valables dans le cas d'un Univers non plat, sphérique ou pseudo sphérique. La première méthode consiste à

relier le temps à l'angle azimutal φ , $t(\varphi)$, qui permet d'en déduire le temps $t_{\text{SchüE}}$ correspondant à $\varphi_{\text{SchüE}}$ dont on sait maintenant calculer sa valeur via l'expression (3.84) ($t'_{\text{SchüE}}$ correspondant à $\varphi'_{\text{SchüE}}$ (3.90)). La deuxième méthode consiste à établir la relation entre le temps et la coordonnée comobile χ . Dans ce cas, les temps $t_{\text{SchüE}}$ et $t'_{\text{SchüE}}$ correspondent au rayon constant de Schücking $\chi_{\text{Schü}}$. La troisième méthode repose sur l'usage de certaines propriétés de la géométrie euclidienne.

Méthode 1

On commence par la trajectoire du haut. On a d'après (3.84)

$$\chi = \frac{\chi_P}{\sin(\varphi - \alpha)}. \quad (3.91)$$

Il s'ensuit que

$$d\chi = -\chi_P \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\sin^2(\varphi - \alpha)} d\varphi. \quad (3.92)$$

En remplaçant (3.91) et (3.92) dans (3.61), on obtient

$$\left(\frac{dt}{a}\right)^2 = \chi_P^2 \frac{d\varphi^2}{\sin^4(\varphi - \alpha)}. \quad (3.93)$$

D'où

$$\frac{dt}{a(t)} = +\chi_P \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \alpha)}, \quad (3.94)$$

où le signe “+” traduit le fait que pour la trajectoire du haut φ augmente au cours du temps. emps. Par intégration, on trouve

$$\int_{t_{\text{SchüE}}}^0 \frac{dt}{a(t)} = \chi_P \int_{\varphi_{\text{SchüE}}}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \alpha)} \quad (3.95)$$

$$= -\chi_P \cot(\varphi - \alpha) \Big|_{\varphi_{\text{SchüE}}}^{\pi} \quad (3.96)$$

$$= \chi_P [\cot \alpha + \cot(\varphi_{\text{SchüE}} - \alpha)], \quad (3.97)$$

avec $\varphi_{\text{SchüE}}$ donné par (3.85). Cette équation peut nous fournir le temps $t_{\text{SchüE}}$ par inté-

gration numérique du membre de gauche.

Méthode 2

En remplaçant $d\varphi$ par son expression (3.79) dans (3.61), on arrive à

$$\left(\frac{dt}{a(t)}\right)^2 = \frac{\chi^2 d\chi^2}{\chi^2 - \chi_P^2}, \quad (3.98)$$

ou encore

$$\frac{dt}{a(t)} = + \frac{\chi d\chi}{\sqrt{\chi^2 - \chi_P^2}}, \quad (3.99)$$

car la coordonné χ croît avec le temps. On obtient, en intégrant,

$$\begin{aligned} \int_{t_{\text{SchüE}}}^0 \frac{dt}{a(t)} &= \int_{\chi_{\text{Schü}}}^{\chi_L} \frac{\chi d\chi}{\sqrt{\chi^2 - \chi_P^2}} \\ &= \left. \sqrt{\chi^2 - \chi_P^2} \right|_{\chi_{\text{Schü}}}^{\chi_L} \\ &= \sqrt{\chi_L^2 - \chi_P^2} - \sqrt{\chi_{\text{Schü}}^2 - \chi_P^2}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

C'est le même résultat qu'on aurait obtenu en remplaçant dans (3.96) α par (3.76) et $\varphi_{\text{SchüE}}$ par (3.85).

Méthode 3

En utilisant certaines propriétés de la géométrie d'Euclide valables dans le cas d'un espace plat, on peut facilement montrer que la distance entre le point de sortie de la sphère de Schücking et la Terre s'écrit en termes de χ_L , $\chi_{\text{Schü}}$ et $\varphi_{\text{SchüE}}$ comme

$$\chi_{\text{E,SchüE}} := \chi(t_{\text{SchüE}}) = \sqrt{\chi_L^2 + \chi_{\text{Schü}}^2 + 2 \chi_L \chi_{\text{Schü}} \cos \varphi_{\text{SchüE}}}, \quad (3.101)$$

ou

$$\chi_{\text{E,SchüE}} = \frac{\sin(\pi - \varphi_{\text{SchüE}})}{\sin \alpha} \chi_{\text{Schü}} \quad (3.102)$$

Ensuite, on déduit $t_{\text{SchüE}}$ par résolution numérique de l'équation radiale (3.45),

$$\int_{t_{\text{SchüE}}}^0 \frac{dt}{a(t)} = - \int_{\chi_{\text{E,SchüE}}}^0 d\chi \quad (3.103)$$

$$= \chi_{\text{E,SchüE}}. \quad (3.104)$$

Pour le chemin du bas, on se limite à donner l'équation permettant le calcul de $t'_{\text{SchüE}}$ par la méthode 2 et qui s'obtient en procédant de la même façon que pour le photon du haut.

Le résultat est similaire à (3.100),

$$\int_{t'_{\text{SchüE}}}^0 \frac{dt}{a(t)} = \sqrt{\chi_{\text{L}}^2 - \chi_{\text{P}}'^2} - \sqrt{\chi_{\text{Schü}}^2 - \chi_{\text{P}}'^2}. \quad (3.105)$$

Les 4-vitesses des deux photons en $t_{\text{SchüE}}$ et $t'_{\text{SchüE}}$, en coordonnées de FLRW, compte tenu de (3.71), (3.77), (3.79) et (3.88), sont données par

$$\dot{t}_{\text{SchüE}} = \frac{a_0}{a_{\text{SchüE}}}, \quad \dot{\chi}_{\text{SchüE}} = \frac{a_0}{a_{\text{SchüE}}^2} \sqrt{1 - \frac{\chi_{\text{P}}^2}{\chi_{\text{Schü}}^2}}, \quad \dot{\varphi}_{\text{SchüE}} = \frac{a_0 \chi_{\text{P}}}{r_{\text{SchüE}}^2}, \quad (3.106)$$

pour le photon du haut et

$$\dot{t}'_{\text{SchüE}} = \frac{a_0}{a'_{\text{SchüE}}}, \quad \dot{\chi}'_{\text{SchüE}} = \frac{a_0}{a_{\text{SchüE}}'^2} \sqrt{1 - \frac{\chi_{\text{P}}'^2}{\chi_{\text{Schü}}^2}}, \quad \dot{\varphi}'_{\text{SchüE}} = -\frac{a_0 \chi_{\text{P}}'}{r_{\text{SchüE}}'^2}, \quad (3.107)$$

pour le photon du bas, avec $a_{\text{SchüE}} := a(t_{\text{SchüE}})$ et $a'_{\text{SchüE}} := a(t'_{\text{SchüE}})$ calculés à partir de (3.41) et $r_{\text{SchüE}} := a_{\text{SchüE}} \chi_{\text{Schü}}$ et $r'_{\text{SchüE}} := a'_{\text{SchüE}} \chi_{\text{Schü}}$ définis par la condition de raccordement (3.7). Le calcul des 4-vitesses en coordonnées de SdS se fait via le Jacobien

de la transformation inverse (3.30) comme suit :

$$\dot{T}_{\text{SchüE}} = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\text{SchüE}} \dot{t}_{\text{SchüE}} + \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|_{\text{SchüE}} \dot{\chi}_{\text{SchüE}} \quad (3.108)$$

$$= \frac{a_0}{a_{\text{SchüE}} B_{\text{SchüE}}} \left(1 + C_{\text{SchüE}} \sqrt{1 - \frac{\chi_{\text{P}}^2}{\chi_{\text{Schü}}^2}} \right), \quad (3.109)$$

$$\dot{r}_{\text{SchüE}} = \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{\text{SchüE}} \dot{t}_{\text{SchüE}} + \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|_{\text{SchüE}} \dot{\chi}_{\text{SchüE}} \quad (3.110)$$

$$= \frac{a_0}{a_{\text{SchüE}}} \left(C_{\text{SchüE}} + \sqrt{1 - \frac{\chi_{\text{P}}^2}{\chi_{\text{Schü}}^2}} \right), \quad (3.111)$$

pour le photon du haut et

$$\dot{T}'_{\text{SchüE}} = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|'_{\text{SchüE}} \dot{t}'_{\text{SchüE}} + \left. \frac{\partial T}{\partial \chi} \right|'_{\text{SchüE}} \dot{\chi}'_{\text{SchüE}} \quad (3.112)$$

$$= \frac{a_0}{a'_{\text{SchüE}} B'_{\text{SchüE}}} \left(1 + C'_{\text{SchüE}} \sqrt{1 - \frac{\chi_{\text{P}}'^2}{\chi_{\text{Schü}}'^2}} \right), \quad (3.113)$$

$$\dot{r}'_{\text{SchüE}} = \left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|'_{\text{SchüE}} \dot{t}'_{\text{SchüE}} + \left. \frac{\partial r}{\partial \chi} \right|'_{\text{SchüE}} \dot{\chi}'_{\text{SchüE}} \quad (3.114)$$

$$= \frac{a_0}{a'_{\text{SchüE}}} \left(C'_{\text{SchüE}} + \sqrt{1 - \frac{\chi_{\text{P}}'^2}{\chi_{\text{Schü}}'^2}} \right), \quad (3.115)$$

pour le photon du bas, avec $C_{\text{SchüE}} := C_{\text{Schü}}(t_{\text{SchüE}}) = \sqrt{1 - B_{\text{SchüE}}}$, $C'_{\text{SchüE}} := C_{\text{Schü}}(t'_{\text{SchüE}}) = \sqrt{1 - B'_{\text{SchüE}}}$ (3.24), $B_{\text{SchüE}} = B_{\text{Schü}}(t_{\text{SchüE}})$ et $B'_{\text{SchüE}} = B_{\text{Schü}}(t'_{\text{SchüE}})$.

On définit γ_{K} et γ'_{K} comme les plus petits angles de coordonnée entre la direction des photon “ α ” et “ α' ” et leurs directions dirigées vers la lentille aux points de sortie de la sphère de Schücking. On obtient

$$\gamma_{\text{K}} := \arctan \left| r_{\text{SchüE}} \frac{\dot{\varphi}_{\text{SchüE}}}{\dot{r}_{\text{SchüE}}} \right| = \arctan \left[\frac{\chi_{\text{P}}}{\chi_{\text{Schü}}} \left(C_{\text{SchüE}} + \sqrt{1 - \frac{\chi_{\text{P}}^2}{\chi_{\text{Schü}}^2}} \right)^{-1} \right], \quad (3.116)$$

pour le photon “ α ” et

$$\gamma'_K := \arctan \left| r'_{\text{SchüE}} \frac{\dot{\varphi}'_{\text{SchüE}}}{\dot{r}'_{\text{SchüE}}} \right| = \arctan \left[\frac{\chi'_P}{\chi_{\text{Schü}}} \left(C'_{\text{SchüE}} + \sqrt{1 - \frac{\chi_P'^2}{\chi_{\text{Schü}}^2}} \right)^{-1} \right], \quad (3.117)$$

pour le photon “ α ”.

3.3.3 Géodésiques de lumière à l’intérieur la sphère de Schücking

Ici, on se penche sur l’intégration des équations de la géodésique de type SdS. Pour des géodésique de genre lumière, on aura seulement besoin d’intégrer les deux équations de la géodésique (1.23) et (1.23) dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$,

$$\ddot{T} + B(r)^{-1} \frac{dB(r)}{dr} \dot{T} \dot{r} = 0, \quad (3.118)$$

$$\ddot{\varphi} + 2r^{-1} \dot{r} \dot{\varphi} = 0, \quad (3.119)$$

En divisant (3.118) par $\dot{T}$ et (3.119) par $\dot{\varphi}$ et en tenant compte du fait que $dB(r)/dr = \dot{B}(r)/\dot{r}$, on arrive à

$$\frac{\ddot{T}}{\dot{T}} + \frac{\dot{B}(r)}{B(r)} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dp} \ln[\dot{T}B(r)] = 0, \quad (3.120)$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2\frac{\dot{r}}{r} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dp} \ln(r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (3.121)$$

Par intégration, chacune des équations (3.120) et (3.121) donne une constante du mouvement ; l’une des deux constantes, celle résultant de l’intégration de (3.120), pourrait être absorbée dans une redéfinition du paramètre affine p . Redéfinissons p de telle manière que la solution de (3.120) soit

$$\dot{T} = \frac{1}{B(r)}. \quad (3.122)$$

L'équation (3.121) s'intègre pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{r^2}, \quad (3.123)$$

où J est une deuxième constante du mouvement jouant le rôle d'un moment angulaire par unité de masse. En divisant la métrique de SdS pour un photon ($ds^2 = 0$) par dp^2 , on obtient

$$0 = B(r)\dot{t}^2 - B(r)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad (3.124)$$

qui devient, en substituant $\dot{t}$ et $\dot{\varphi}$ par leurs expressions respectives (3.122) et (3.123), une équation purement radiale,

$$\dot{r}^2 + J^2 \frac{B(r)}{r^2} = 1. \quad (3.125)$$

On en tire alors

$$\dot{r} = \pm \sqrt{1 - J^2 \frac{B(r)}{r^2}}. \quad (3.126)$$

Maintenant, par élimination du paramètre affine entre $\dot{r}$ et $\dot{\varphi}$, il vient que

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm r \sqrt{\frac{r^2}{J^2} - B(r)}, \quad (3.127)$$

qui doit s'annuler au péri-lentille, la distance d'approche minimale par rapport à la lentille, notée r_P ,

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{r=r_P} = 0,$$

ce qui permet d'avoir une expression pour J ,

$$J = \frac{r_P}{\sqrt{B(r_P)}}. \quad (3.128)$$

On peut montrer que ce péri-lens peut être approximé par (voir Annexe C)

$$r_P \simeq r_{\text{SchüE}} \sin \gamma_K - GM, \quad (3.129)$$

qui s'obtient en développant le petit angle de coordonnée γ_K (3.116) au premier ordre en le rapport du rayon de Schwarzschild au péri-lens $2GM/r_P$ ($\simeq 10^{-5}$), en utilisant les expressions (3.126) et (3.123) pour $\dot{r}$ et de $\dot{\varphi}$ respectivement. En injectant l'expression de J (3.128) dans l'équation (3.127), on obtient l'équation orbitale

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{u(r)}, \quad u(r) = r \sqrt{\frac{r^2}{r_P^2} - 1} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}, \quad (3.130)$$

dans laquelle la constante cosmologique disparaît accidentellement. De la même manière, en faisant maintenant usage des expressions de $\dot{T}$ et $\dot{r}$, on obtient une expression pour dT/dr ,

$$\frac{dT}{dr} = \frac{\dot{T}}{\dot{r}} = \pm \frac{1}{v(r)}, \quad v(r) = \frac{B(r)}{\sqrt{B(r_P)}} \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r^2}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r} + \frac{r}{r + r_P} \right)}. \quad (3.131)$$

On calcule maintenant les temps $t_{SchüS}$ et $t'_{SchüS}$ aux points d'entrée dans la sphère de Schücking en prenant en considération les conditions finales aux points de sortie de la sphère de Schücking qui sont devenues entièrement déterminées.

Le temps de trajet du photon α à l'intérieur de la vacuole, du point d'entrée au point de sortie, peut être obtenu en utilisant l'équation (3.131) où l'intégrale du membre de droite peut être divisée en deux intégrales, étant donné que r décroît au cours du temps de $r_{SchüS}$ à r_P alors qu'il croît de r_P à $r_{SchüE}$,

$$\int_{T_{SchüS}}^{T_{SchüE}} dT = \pm \int_{r_{SchüS}}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v(r)} \Leftrightarrow T_{SchüE} - T_{SchüS} = \int_{r_P}^{r_{SchüE}} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r_{SchüS}} \frac{dr}{v(r)}, \quad (3.132)$$

avec $r_{SchüE} := r(t_{SchüE}) = a(t_{SchüE})\chi_{Schü}$ et $r_{SchüS} := r(t_{SchüS}) = a(t_{SchüS})\chi_{Schü}$.

Une autre expression pour ce temps de trajet peut être obtenue en utilisant la relation entre le temps de SdS et celui de FLRW (Ref),

$$T_{SchüE} - T_{SchüS} = \int_{t_{SchüS}}^{t_{SchüE}} \frac{dt}{B_{Schü}(t)}. \quad (3.133)$$

Il s'ensuit de (3.132) et (3.133) que

$$\int_{r_P}^{r(t_{\text{SchüE}})} \frac{dr}{v(r)} + \int_{r_P}^{r(t_{\text{SchüS}})} \frac{dr}{v(r)} = \int_{t_{\text{SchüS}}}^{t_{\text{SchüE}}} \frac{dt}{B_{\text{Schü}}(t)}, \quad (3.134)$$

ce qui nous permet d'obtenir $t_{\text{SchüS}}$ par intégration numérique.

Le même raisonnement que pour le chemin du haut donne pour le chemin du bas

$$\int_{r'_P}^{r(t'_{\text{SchüE}})} \frac{dr}{v'(r)} + \int_{r_P}^{r(t'_{\text{SchüS}})} \frac{dr}{v'(r)} = \int_{t'_{\text{SchüS}}}^{t'_{\text{SchüE}}} \frac{dt}{B_{\text{Schü}}(t)}, \quad (3.135)$$

où la fonction $v'(r)$ est définie par une expression analogue à (3.131) à condition que r_P soit remplacé par r'_P , qui est donné par une expression approchée analogue à (3.129),

$$r'_P \simeq r'_{\text{SchüE}} \sin \gamma'_K - GM, \quad (3.136)$$

avec $r'_{\text{SchüE}} := r(t'_{\text{SchüE}}) = a(t'_{\text{SchüE}})\chi_{\text{Schü}}$ et $r'_{\text{SchüS}} := r(t'_{\text{SchüS}}) = a(t'_{\text{SchüS}})\chi_{\text{Schü}}$.

L'équation (3.130) peut être utilisée pour déterminer l'angle que fait le photon “ α ” du point d'entrée dans la vacuole au point de sortie de celle-ci. En effet, l'intégrale du membre de droite de (3.130) peut se décomposer en deux intégrales, sachant que $d\varphi/dr$ est positif sur le trajet de r_P à $r_{\text{SchüE}}$ et est négatif de $r_{\text{SchüS}}$ à r_P ,

$$\int_{\varphi_{\text{SchüS}}}^{\varphi_{\text{SchüE}}} d\varphi = \pm \int_{r_{\text{SchüS}}}^{r_{\text{SchüE}}} \frac{dr}{u(r)} \Leftrightarrow \varphi_{\text{SchüE}} - \varphi_{\text{SchüS}} = \int_{r_P}^{r_{\text{SchüE}}} \frac{dr}{u(r)} + \int_{r_P}^{r_{\text{SchüS}}} \frac{dr}{u(r)}. \quad (3.137)$$

L'expression précédente s'intègre facilement, en faisant usage des intégrales suivantes

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \arcsin z, \quad (3.138)$$

$$\int \frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} = -\sqrt{1-z^2}, \quad (3.139)$$

$$\int \frac{dz}{(z+1)\sqrt{1-z^2}} = -\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}, \quad (3.140)$$

pour donner au premier ordre en le rayon de Schwarzschild au péri-lens $2GM/r_P$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{SchüE}} - \varphi_{\text{SchüS}} \simeq & \pi - \arcsin \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}} - \arcsin \frac{r_P}{r_{\text{SchüS}}} + \frac{GM}{r_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2}} + \right. \\ & \left. \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüS}}^2}} + \sqrt{\frac{r_{\text{SchüE}} - r_P}{r_{\text{SchüE}} + r_P}} + \sqrt{\frac{r_{\text{SchüS}} - r_P}{r_{\text{SchüS}} + r_P}} \right), \end{aligned} \quad (3.141)$$

où $\varphi_{\text{SchüE}}$ est donné par (3.85). De même, on obtient pour la trajectoire du bas, sachant que $d\varphi/dr$ est négatif sur le trajet de r'_P à $r'_{\text{SchüE}}$ et est positif de $r'_{\text{SchüS}}$ à r'_P ,

$$\begin{aligned} \varphi'_{\text{SchüS}} - \varphi'_{\text{SchüE}} \simeq & \pi - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{\text{SchüE}}} - \arcsin \frac{r'_P}{r'_{\text{SchüS}}} + \frac{GM}{r'_P} \left(\sqrt{1 - \frac{r'^2_P}{r'^2_{\text{SchüE}}}} + \right. \\ & \left. \sqrt{1 - \frac{r'^2_P}{r'^2_{\text{SchüS}}}} + \sqrt{\frac{r'_{\text{SchüE}} - r'_P}{r'_{\text{SchüE}} + r'_P}} + \sqrt{\frac{r'_{\text{SchüS}} - r'_P}{r'_{\text{SchüS}} + r'_P}} \right), \end{aligned} \quad (3.142)$$

La 4-vitesse au point d'entrée du photon “ α ” dans la sphère de Schücking est définie en coordonnées de SdS, d'après (3.122), (3.126) et (3.123), comme

$$\dot{T}_{\text{SchüS}} = \frac{1}{B_{\text{SchüS}}}, \quad \dot{r}_{\text{SchüS}} = -\sqrt{1 - \frac{r_P^2 B_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}}^2 B(r_P)}}, \quad \dot{\varphi}_{\text{SchüS}} = \frac{r_P}{r_{\text{SchüS}}^2 \sqrt{B(r_P)}}, \quad (3.143)$$

où on a retenu le signe moins pour la vitesse radiale $\dot{r}_{\text{SchüS}}$, puisque dans cette région r diminue au cours du temps lorsque le photon “ α ” se rapproche de la lentille et le signe plus pour la vitesse angulaire $\dot{\varphi}_{\text{SchüS}}$ puisque l'angle φ croît avec le temps. Pour le photon du bas, on a

$$\dot{T}'_{\text{SchüS}} = \frac{1}{B'_{\text{SchüS}}}, \quad \dot{r}'_{\text{SchüS}} = -\sqrt{1 - \frac{r'^2_P B'_{\text{SchüS}}}{r'^2_{\text{SchüS}} B(r'_P)}}, \quad \dot{\varphi}'_{\text{SchüS}} = -\frac{r'_P}{r'^2_{\text{SchüS}} \sqrt{B(r'_P)}}, \quad (3.144)$$

où on a maintenant retenu le signe moins pour la vitesse angulaire $\dot{\varphi}'_{\text{SchüS}}$ puisque l'angle φ diminue au cours du temps. En utilisant le Jacobien (3.27), les 4-vitesses des deux photons

en $t_{\text{SchüS}}$ et $t'_{\text{SchüS}}$ s'écrivent en coordonnées de FLRW comme

$$\begin{aligned} \dot{t}_{\text{SchüS}} &= \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|_{\text{SchüS}} \dot{T}_{\text{SchüS}} + \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{\text{SchüS}} \dot{r}_{\text{SchüS}} \\ &= \frac{1}{B_{\text{SchüS}}} \left(1 + C_{\text{SchüS}} \sqrt{1 - \frac{r_{\text{P}}^2 B_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}}^2 B(r_{\text{P}})}} \right), \end{aligned} \quad (3.145)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_{\text{SchüS}} &= \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|_{\text{SchüS}} \dot{T}_{\text{SchüS}} + \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|_{\text{SchüS}} \dot{r}_{\text{SchüS}} \\ &= \frac{-1}{a_{\text{SchüS}} B_{\text{SchüS}}} \left(C_{\text{SchüS}} + \sqrt{1 - \frac{r_{\text{P}}^2 B_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}}^2 B(r_{\text{P}})}} \right), \end{aligned} \quad (3.146)$$

pour le photon du haut et

$$\begin{aligned} \dot{t}'_{\text{SchüS}} &= \left. \frac{\partial t}{\partial T} \right|'_{\text{SchüS}} \dot{T}'_{\text{SchüS}} + \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|'_{\text{SchüS}} \dot{r}'_{\text{SchüS}} \\ &= \frac{1}{B'_{\text{SchüS}}} \left(1 + C'_{\text{SchüS}} \sqrt{1 - \frac{r_{\text{P}}'^2 B'_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}}'^2 B(r'_{\text{P}})}} \right), \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} \dot{\chi}'_{\text{SchüS}} &= \left. \frac{\partial \chi}{\partial T} \right|'_{\text{SchüS}} \dot{T}'_{\text{SchüS}} + \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right|'_{\text{SchüS}} \dot{r}'_{\text{SchüS}} \\ &= \frac{-1}{a'_{\text{SchüS}} B'_{\text{SchüS}}} \left(C'_{\text{SchüS}} + \sqrt{1 - \frac{r_{\text{P}}'^2 B'_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}}'^2 B(r'_{\text{P}})}} \right), \end{aligned} \quad (3.148)$$

On définit aux points d'entrée dans la sphère de Schücking les angles γ_{F} et γ'_{F} comme les plus petits angles physiques entre les directions des photons “ α ” et “ α' ” et leurs directions dirigées vers la lentille. On a alors

$$\gamma_{\text{F}} := \arctan \left| \chi_{\text{Schü}} \frac{\dot{\varphi}_{\text{SchüS}}}{\dot{\chi}_{\text{SchüS}}} \right| = \arctan \left[\frac{r_{\text{P}} B_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}} \sqrt{B(r_{\text{P}})}} \left(C_{\text{SchüS}} + \sqrt{1 - \frac{r_{\text{P}}^2 B_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}}^2 B(r_{\text{P}})}} \right)^{-1} \right], \quad (3.149)$$

pour le photon du haut et

$$\gamma'_F := \arctan \left| \chi_{\text{Schü}} \frac{\dot{\varphi}'_{\text{SchüS}}}{\dot{\chi}'_{\text{SchüS}}} \right| = \arctan \left[\frac{r'_P B'_{\text{SchüS}}}{r'_{\text{SchüS}} \sqrt{B(r'_P)}} \left(C'_{\text{SchüS}} + \sqrt{1 - \frac{r'^2_P B'_{\text{SchüS}}}{r'^2_{\text{SchüS}} B(r'_P)}} \right)^{-1} \right], \quad (3.150)$$

pour le photon du bas.

3.3.4 Géodésiques de la lumière entre la source et la sphère de Schücking

Ici, on s'intéresse à la région sphère de Schücking-source qui a la même géométrie que la région Terre-sphère de Schücking. Donc, on va suivre la même procédure que précédemment dans la sous-sous-section (3.3.2). On commence par déterminer l'angle de déflexion φ_S sans utiliser des propriétés de la géométrie d'Euclide (espace plat). Cette technique de calcul est valable même pour les modèles non plats. On intègre de façon analogue à la partie Terre-sphère de Schücking les deux équations de la géodésique (3.57) et (3.58), entre la sphère de Schücking et la source, avec les conditions finales au point d'entrée dans la sphère de Schücking,

$$\begin{aligned} t &= t_{\text{SchüS}}, & \chi &= \chi_{\text{Schü}}, & \varphi &= \varphi_{\text{SchüS}}, \\ \dot{t} &= \dot{t}_{\text{SchüS}}, & & & \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}_{\text{SchüS}}, \end{aligned} \quad (3.151)$$

où le temps $t_{\text{SchüS}}$ s'obtient par intégration numérique de l'équation (3.134), $\dot{t}_{\text{SchüS}}$, $\varphi_{\text{SchüS}}$ et $\dot{\varphi}_{\text{SchüS}}$ sont donnés par (3.145), (3.141) et (3.143) respectivement. En remplaçant (3.67) dans l'équation (3.57), avec $da/dt = \dot{a}/\dot{t}$, on obtient

$$\frac{\ddot{t}}{\dot{t}} + \frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (3.152)$$

ou encore

$$\frac{d}{dp} \ln(\dot{t}a) = 0. \quad (3.153)$$

D'où, par intégration de (3.153),

$$\dot{t} = E/a, \quad (3.154)$$

avec E une constante définie par

$$E = \dot{t}_{\text{SchüS}} a_{\text{SchüS}} = \frac{a_{\text{SchüS}}}{B_{\text{SchüS}}} \left(1 + C_{\text{SchüS}} \sqrt{1 - \frac{r_{\text{P}}^2 B_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}}^2 B(r_{\text{P}})}} \right), \quad (3.155)$$

où on a tenu compte des conditions finales (3.151). L'équation (??) peut s'écrire comme

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{\chi}}{\chi} \right) = 0, \quad (3.156)$$

ou encore

$$\frac{d}{dp} \ln(\dot{\varphi} a^2 \chi^2) = 0. \quad (3.157)$$

L'équation (3.157) s'intègre, en tenant compte des conditions finales (3.151), pour donner

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{a^2 \chi^2}, \quad (3.158)$$

avec J une constante définie par

$$J = \dot{\varphi}_{\text{SchüS}} r_{\text{SchüS}}^2 = \frac{r_{\text{P}}}{\sqrt{B(r_{\text{P}})}}. \quad (3.159)$$

En remplaçant $\dot{t}$ par son expression, (3.154), dans (3.67), on trouve

$$a^2 = \frac{E}{\sqrt{\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2}}. \quad (3.160)$$

En reportant ce résultat (3.160) dans l'expression (3.158), il vient que

$$\sqrt{1 - \left(\frac{J/E}{\chi} \right)^2} \dot{\varphi} = -\frac{J/E}{\chi} \frac{\dot{\chi}}{\chi}, \quad (3.161)$$

où on a tenu compte du fait que la distance géodésique χ diminue au fur et à mesure que l'angle φ augmente. L'équation (3.161) peut s'écrire aussi comme

$$\frac{d\varphi}{dp} = \frac{\frac{d}{dp} \frac{J/E}{\chi}}{\sqrt{1 - \left(\frac{J/E}{\chi}\right)^2}}. \quad (3.162)$$

En tenant compte des conditions finales (3.151), l'équation (3.162) s'intègre en

$$\varphi = \varphi_{\text{SchüS}} + \arcsin \frac{J/E}{\chi} - \gamma, \quad (3.163)$$

avec γ une constante donnée par

$$\gamma = \arcsin \frac{J/E}{\chi_{\text{Schü}}}. \quad (3.164)$$

Par conséquent, l'angle φ_S (correspondant à la distance géodésique lentille-source $\chi_{L,S}$) est donné par l'expression

$$\varphi_S = \varphi_{\text{SchüS}} + \arcsin \frac{J/E}{\chi_{L,S}} - \gamma. \quad (3.165)$$

où $\chi_{L,S}$ est donné par (3.56).

Méthode 2 (géométrie d'Euclide)

Dans le triangle formé par la source, la lentille et le point d'entrée dans la sphère de Schücking, on a la relation

$$\frac{\sin \alpha_S}{\chi_{\text{Schü}}} = \frac{\sin(\pi - \gamma_F)}{\chi_{L,S}}, \quad (3.166)$$

où est l'angle d'émission en la source. Ceci d'une part. D'autre part, comme il est bien connu, la somme des angles d'un triangle vaut π . Il en résulte que

$$\alpha_S = \gamma_F + \varphi_S - \varphi_{\text{SchüS}}. \quad (3.167)$$

En reportant dans (3.166), on obtient une expression pour l'angle φ_S ,

$$\varphi_S = \varphi_{\text{SchüS}} + \arcsin \frac{\chi_{\text{Schü}} \sin \gamma_F}{\chi_{L,S}} - \gamma_F. \quad (3.168)$$

On peut facilement vérifier que les deux expressions de φ_S , (3.168) et (3.165), sont équivalentes. En effet,

$$\frac{J}{E} \equiv \chi_{\text{Schü}} \sin \gamma_F, \quad \gamma \equiv \gamma_F. \quad (3.169)$$

Pour intégrer la trajectoire du chemin du bas, on suit le même raisonnement que pour le chemin du haut. Seules les conditions finales diffèrent avec J remplacé par $-J'$,

$$\begin{aligned} t &= t'_{\text{SchüS}}, & \chi &= \chi_{\text{Schü}}, & \varphi &= \varphi'_{\text{SchüS}}, \\ \dot{t} &= \dot{t}'_{\text{SchüS}}, & & & \dot{\varphi} &= \dot{\varphi}'_{\text{SchüS}}. \end{aligned} \quad (3.170)$$

On trouve

$$\dot{t} = \frac{E'}{a}, \quad \dot{\varphi} = -\frac{J'}{a^2 \chi^2}, \quad \varphi = \varphi'_{\text{SchüS}} - \arcsin \frac{J'/E'}{\chi} + \gamma', \quad (3.171)$$

avec E' , J' et γ' des constantes définies par

$$\begin{aligned} E' &= \dot{t}'_{\text{SchüS}} a'_{\text{SchüS}} = \frac{a'_{\text{SchüS}}}{B'_{\text{SchüS}}} \left(1 + C'_{\text{SchüS}} \sqrt{1 - \frac{r_P'^2 B'_{\text{SchüS}}}{r_{\text{SchüS}}'^2 B(r_P')}} \right) \\ J' &= -\dot{\varphi}'_{\text{SchüS}} r_{\text{SchüS}}'^2 = \frac{r_P'}{\sqrt{B(r_P')}}, \\ \gamma' &= \arcsin \frac{J'/E'}{\chi_{\text{Schü}}}. \end{aligned} \quad (3.172)$$

D'où, l'expression de φ'_S ,

$$\varphi'_S = \varphi'_{\text{SchüS}} - \arcsin \frac{J'/E'}{\chi_{L,S}} + \gamma', \quad (3.173)$$

Les angles φ_S et φ'_S doivent être égaux du fait que les deux photons partent d'une même source. Parmi tous les paramètres intervenant dans le calcul de ces angles, l'égalité

$\varphi_S = \varphi'_S$ ne peut être assurée que pour une valeur particulière de la masse, comme on va le voir dans la dernière section. Une fois la masse correcte déterminée, nous pourrions passer au calcul du temps de retard.

Temps de retard

Dans cette partie, on cherche à calculer le temps de retard (3.43), c'est-à-dire à déterminer la différence des temps de vol des photons “ α ” et “ α' ” définie par

$$\Delta t := (t_E - t_S) - (t'_E - t'_S) = t'_S - t_S, \quad (3.174)$$

où on a tenu compte du fait que les deux photons arrivent sur Terre au même instant, $t_E = t'_E = 0$. Ceci est équivalent à déterminer les temps d'émission t_S et t'_S des deux photons “ α ” et “ α' ”. Comme précédemment, le calcul de peut être effectué par trois méthodes différentes :

Méthode 1

On détermine le temps t_S en reliant le temps à la coordonnée azimutale φ par intégration des équations différentielles sans pour autant utiliser les propriétés de la géométrie d'Euclide. De (3.163) on tire l'expression de χ ,

$$\chi = \frac{J/E}{\sin(\varphi - \gamma)}. \quad (3.175)$$

D'où, par dérivation de (3.175), l'expression

$$d\chi = -\frac{J}{E} \frac{\cos(\varphi - \gamma)}{\sin^2(\varphi - \gamma)} d\varphi. \quad (3.176)$$

En remplaçant (3.175) et (3.176) dans (3.61), on obtient

$$\frac{dt}{a} = \frac{J}{E} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \gamma)}, \quad (3.177)$$

où on a tenu compte que pour la trajectoire du haut φ augmente au cours du temps. On trouve par intégration de l'équation (3.177),

$$\begin{aligned} \int_{t_S}^{t_{\text{SchüS}}} \frac{dt}{a} &= \frac{J}{E} \int_{\varphi_S}^{\varphi_{\text{SchüS}}} \frac{d\varphi}{\sin^2(\varphi - \gamma)} \\ &= \frac{J}{E} [\cot(\varphi_S - \gamma) - \cot(\varphi_{\text{SchüS}} - \gamma)], \end{aligned} \quad (3.178)$$

qui permet de calculer la valeur de l'instant d'émission t_S du photon “ α ” par intégration numérique du membre de gauche.

Méthode 2

La troisième méthode consiste à relier le temps à la coordonnée comobile χ . Pour cela, il suffit de remplacer, sans calcul, dans (3.178) l'angle φ_S et la constante γ par leurs expressions respectives, (3.165) et (3.164). on obtient

$$\int_{t_S}^{t_{\text{SchüS}}} \frac{dt}{a} = \sqrt{\chi_{L,S}^2 - \left(\frac{J}{E}\right)^2} - \sqrt{\chi_{\text{Schü}}^2 - \left(\frac{J}{E}\right)^2}. \quad (3.179)$$

On voit bien que le résultat ressemble beaucoup à celui déjà obtenu dans la région Terre-sphère de Schücking (??) à condition que χ_L et χ_P soient respectivement remplacés par $\chi_{L,S}$ et J/E .

Méthode 3 (géométrie d'Euclide)

On peut facilement montrer que pour le photon “ α ” la distance entre le point de sortie de la sphère de Schücking et la Terre s'écrit en termes de $\chi_{L,S}$, $\chi_{\text{Schü}}$, $\varphi_{\text{SchüS}}$ et φ_S comme

$$\chi_{S,\text{SchüS}} := \chi(t_S) = \sqrt{\chi_{L,S}^2 + \chi_{\text{Schü}}^2 - 2\chi_{L,S}\chi_{\text{Schü}}\cos(\varphi_{\text{SchüS}} - \varphi_S)}, \quad (3.180)$$

ou

$$\chi_{E,\text{SchüS}} = \frac{\sin(\varphi_{\text{SchüS}} - \varphi_S)}{\sin(\gamma_F + \varphi_S - \varphi_{\text{SchüS}})} \chi_{\text{Schü}}, \quad (3.181)$$

ou encore

$$\chi_{E,\text{Sch}\ddot{u}\text{S}} = \frac{\sin(\varphi_{\text{Sch}\ddot{u}\text{S}} - \varphi_S)}{\sin(\pi - \gamma_F)} \chi_{L,S}.$$

Ensuite, on déduit t_S par résolution numérique de l'équation radiale (3.45),

$$\int_{t_S}^{t_{\text{Sch}\ddot{u}\text{S}}} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{\chi_{E,\text{Sch}\ddot{u}\text{S}}}^0 d\chi \quad (3.182)$$

$$= \chi_{E,\text{Sch}\ddot{u}\text{S}}. \quad (3.183)$$

Pour le chemin du bas, on se limite à donner l'équation permettant le calcul de t'_S par la méthode 2 et qui s'obtient en procédant de la même façon que pour le photon du haut. Le résultat est similaire à (3.179),

$$\int_{t'_S}^{t'_{\text{Sch}\ddot{u}\text{S}}} \frac{dt}{a} = \sqrt{\chi_{L,S}^2 - \left(\frac{J'}{E'}\right)^2} - \sqrt{\chi_{\text{Sch}\ddot{u}}^2 - \left(\frac{J'}{E'}\right)^2}. \quad (3.184)$$

On calcule alors la valeur de l'instant d'émission t'_S du photon " '" par intégration numérique du membre de gauche.

Finalement, on détermine le temps de retard du photon du haut par rapport au photon du bas via l'expression (3.174).

3.4 Application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112

Le système lentille-quasar SDSS J1004+4112 Fig. 3-2, sur lequel on va concrétiser nos résultats théoriques a été découvert par Inada *et al* [26]. Il s'agit d'un effet de lentille gravitationnelle fort produit par un amas de galaxies de redshift $z_L = 0.68$, (présentant une forte émission dans le domaine des rayons X du spectre électromagnétique et indiqué par une croix au cœur de l'image) et qui a donné lieu à l'apparition de cinq images identiques (même spectre électromagnétique) d'un quasar situé en arrière-plan de redshift $z_S = 1.734$ [27, 28, 29, 30]. On va considérer uniquement deux images présentant la plus grande d via-

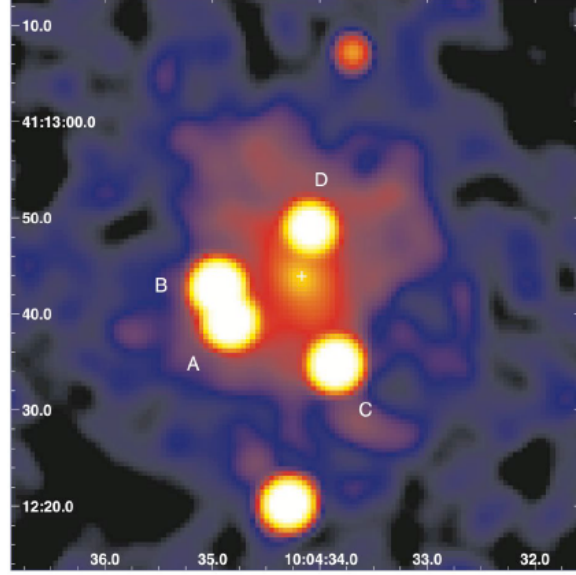


Fig. 3-2 Images multiples du quasar SDSS J1004+4112. SDSS (Sloan Digital Sky Survey).

tion, à savoir les images C et D, avec un écart de 15 secondes d'arc environ ; $\alpha = 5'' \pm 10\%$, pour l'image D et $\alpha' = 10'' \pm 10\%$ pour l'image C. Il convient de préciser que la forme de l'amas de galaxies n'est en vérité pas sphérique, comme on l'avait supposé au départ (hypothèse de symétrie sphérique), ce qui a pour conséquence l'existence des images multiples au lieu d'un anneau ou un arc lumineux.

Pour des raisons de commodité numérique, on utilisera un système d'unités très allégé où les temps sont mesurés en astrosecondes (as), les distances en astromètres (am) et les masses en astrogrammes (ag) avec

$$\begin{aligned}
 1 \text{ as} &= 4.58 \cdot 10^{17} \text{ s} = 14.52 \text{ Gyr}, \\
 1 \text{ am} &= 1.38 \cdot 10^{26} \text{ m} = 4448 \text{ Mpc}, \\
 1 \text{ ag} &= 7.35 \cdot 10^{51} \text{ kg} = 3.70 \cdot 10^{21} M_{\odot}.
 \end{aligned} \tag{3.185}$$

Dans ce système d'unités, la vitesse de la lumière c , la constante universelle de la gravitation de Newton G multipliée par 8π et la constante de Hubble H_0 sont prises toutes égales à l'unité,

$$c = 1 \text{ am as}^{-1}, \quad 8\pi G = 1 \text{ am}^3 \text{ as}^{-2} \text{ ag}^{-1}, \quad H_0 = 1 \text{ as}^{-1}. \quad (3.186)$$

La combinaison de l'équation de Friedmann (3.5) avec la loi de Hubble [31] sur l'expansion de l'Univers, exprimée en termes du facteur d'échelle, sur Terre à l'instant $t = 0$,

$$\left. \frac{da}{dt} \right|_{t=0} = H_0 a_0, \quad (3.187)$$

donne

$$A = \left(1 - \frac{\Lambda}{3}\right) a_0^3. \quad (3.188)$$

Il est à noter que le système d'unités (3.185) est défini sur la base d'une mesure expérimentale très récente de la constante de Hubble,

$$H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}, \quad (3.189)$$

obtenue par Aghanim *et al* dans le cadre du projet “Planck Collaboration” pour la mesure des paramètres cosmologiques [32]. La mesure de constante cosmologique correspondante dans le même projet est donnée par

$$\Lambda = (0.6847 \pm 0.0073) \cdot 3 \text{ am}^{-2}, \quad (3.190)$$

donc, avec une incertitude associée très petite d'environ 1%. Néanmoins, on va étendre cette incertitude à 20%, afin de permettre un effet sensible de la constante cosmologique

sur la déflexion de la lumière,

$$\Lambda = 0.6847 \cdot 3 \text{ am}^{-2} \pm 20\% \quad (3.191)$$

$$= 1.0786 \cdot 10^{-52} \text{ m}^{-2} \pm 20\%. \quad (3.192)$$

Les distances Terre-lentille χ_L et Terre-source χ_S seront calculées à partir de (3.47), (3.52) ou (3.55) et la distance lentille-source $\chi_{L,S}$ à partir de l'expression approchée (3.56).

On choisit, sans perte de généralité, la valeur $a_0 = 1 \text{ am}$ pour le facteur d'échelle actuel, puis, comme on l'a déjà dit plus haut, on cherche la masse de l'amas de galaxie M qui vérifie l'égalité $\varphi_S = \varphi'_S$ et on finit par calculer le temps de retard du photon α par rapport au photon α' . Ce calcul est répété 27 fois, suivant les valeurs maximale '+', centrale ' ± 0 ' et minimale '-' de la constante cosmologique ainsi que des angles α et α' et pour lequel on dresse trois tableaux, Tab. 3.1, Tab. 3.2 et Tab. 3.3.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13} M_\odot]$	2.29	2.08	1.87	2.08	1.89	1.70	1.87	1.70	1.53
$-\varphi_S''$	9.94	8.13	6.32	10.84	9.03	7.23	11.74	9.93	8.13
$\Delta t[\text{yr}]$	12.69	9.84	7.23	13.28	10.48	7.91	13.75	11.01	8.49

Tab. 3.1 Valeur maximale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} + 20\%$.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	-	-	-
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	-	+	± 0	-	+	± 0	-
$M[10^{13} M_\odot]$	2.32	2.11	1.89	2.11	1.91	1.72	1.89	1.72	1.55
$-\varphi_S''$	10.97	8.98	6.98	11.97	9.97	7.98	12.96	10.97	8.97
$\Delta t[\text{yr}]$	12.84	9.96	7.32	13.44	10.61	8.01	13.91	11.15	8.59

Tab. 3.2 Valeur centrale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2}$.

$\alpha \pm 10\%$	+	+	+	± 0	± 0	± 0	−	−	−
$\alpha' \pm 10\%$	+	± 0	−	+	± 0	−	+	± 0	−
$M[10^{13}M_{\odot}]$	2.29	2.08	1.88	2.08	1.89	1.70	1.88	1.70	1.53
$-\varphi_S[']$	11.63	9.51	7.40	12.68	10.57	8.46	13.74	11.63	9.51
$\Delta t[\text{yr}]$	12.70	9.86	7.24	13.29	10.50	7.92	13.77	11.03	8.50

Tab. 3.3 Valeur minimale de Λ : $\Lambda = 0.77 \cdot 3 \text{ am}^{-2} - 20\%$.

3.4.1 Discussion des résultats numériques

Les résultats consignés dans les tableaux 3.1, 3.2 et 3.3 peuvent être résumés comme suit

$$1.53 \cdot 10^{13} M_{\odot} \leq M \leq 2.32 \cdot 10^{13} M_{\odot}, \quad (3.193)$$

$$6.32'' \leq -\varphi_S \leq 13.74'', \quad (3.194)$$

$$7.23 \text{ yr} \leq \Delta t \leq 13.91 \text{ yr}. \quad (3.195)$$

Contrairement aux résultats obtenus dans le cadre du modèle de Schwarzschild-de Sitter [25, 33], si la constante cosmologique Λ augmente de 20%, l'angle de déflexion $-\varphi_S$ diminue de près de 8%. Cela n'entraîne qu'une légère variation sur la masse de l'amas de galaxies d'environ 1%. Donc, ce résultat numérique concorde bien avec l'affirmation de Rindler et Ishak selon laquelle un Λ positif atténue la déflexion de la lumière [15, 24].

En comparant toujours nos résultats avec ceux du modèle de Schwarzschild-de Sitter, les valeurs obtenues pour le temps de retard sont relativement petites mais fiables du point de vue de Fohlmeister *et al* qui ont, par l'observation, assigné une borne inférieure au temps de retard $\Delta t_{\text{CD}} > 7.7$ [30]. Il en est de même avec les valeurs de la masse qui sont presque trois fois plus petites que celle obtenue par l'observation, $M = (5.0 \pm 1.0) \cdot 10^{13} M_{\odot}$ [26, 27].

En considérant une constante cosmologique nulle et une lentille non-sphérique pour tenir compte des images A et B , Kawano et Oguri ont calculé le temps de retard entre les images C et D et obtenu $\Delta t_{\text{CD}} \lesssim 10.14 \text{ yr}$ [29]. Leur résultat est évidemment très proche

du nôtre si on prend la valeur moyenne.

Chaque tableau indique visiblement que le temps de retard est maximal ou minimal suivant que l'angle de déflexion est maximal ou minimal. Cette constatation est souhaitable du point de vue gravitationnelle vu que le phénomène de la déflexion de la lumière est toujours accompagné par celui du temps de retard. Cependant, la variation non monotone du temps de retard en fonction de la constante cosmologique, comme on le voit directement en comparant les tableaux entre eux, est due au choix de la méthode du calcul numérique direct et peut être contournée en appliquant la méthode semi analytique (méthode de calcul par différence) suivant laquelle le temps de retard devient monotone en Λ [16, 17]. Cette variation est en fait très légère et est apparemment sensible à la variation également très légère de la masse de l'amas de galaxies.

Conclusion

Dans ce mémoire de Master on a étudié l'effet de lentille gravitationnelle fort à l'échelle cosmologique à travers les phénomènes de déflexion de la lumière et du temps de retard. Pour arriver à nos fins on a utilisé la métrique la métrique dynamique d'Einstein-Straus, en présence de la constante cosmologique Λ et en l'absence de la courbure spatiale ($k = 0$). Cette métrique auquel on a donné une importance particulière fournit la description la plus réaliste du problème posé parce que, à la différence des autres métriques, elle s'applique aussi bien à grande échelle, l'échelle des grandes structures de l'univers, qu'à petite échelle, à savoir les systèmes planétaires. En outre, ce modèle d'Einstein-Straus est basé exclusivement sur l'hypothèse incontournable de sphéricité et permet, entre autres, de s'affranchir de nombre d'hypothèses adoptées dans le cadre des modèles statiques comme celui de SdS. On permet à l'observateur et à la source de se mouvoir par rapport à la lentille suivant la loi de Hubble de l'expansion de l'Univers, et les masses des autres amas sont incluses sous forme d'une poussière isotrope et homogène (principalement en matière noire froide CDM).

Dans le chapitre un, on a commencé en premier lieu par présenter la métrique de SdS qui est la métrique statique à symétrie sphérique en présence de la constante cosmologique. On a d'abord dérivé cette métrique pour déterminer les équations de la géodésique et la géométrie de l'espace-temps de SdS.

Comme la métrique d'Einstein-Straus combine deux métriques, à savoir la métrique de SdS à l'intérieur de la sphère de Schücking, centrée sur la lentille, et la métrique de FLRW

à l'extérieur, on s'est trouvé dans l'obligation de faire un détour sur la métrique de FLRW dans le chapitre deux. Cette métrique dérive du principe cosmologique qui stipule qu'il n'existe pas de direction privilégiée et que tous les points d'espace sont équivalents, c'est à dire qu'aucun point ou direction ne joue un rôle particulier. Il en résulte que la métrique se réduit à une seule fonction dépendant uniquement du temps, appelée facteur d'échelle $a(t)$ et déterminée par applications des équations d'Einstein (équation de Friedmann), et d'un indice discret k pouvant prendre trois valeurs $k = 0, 1, -1$, qui correspondent respectivement aux espaces plat (courbure spatiale nulle), sphérique (courbure spatiale positive) et pseudosphérique (courbure spatiale négative). On a également étudié la propagation des photons dans ce modèle de FLRW.

Dans le dernier chapitre, on s'est restreint à la valeur $k = 0$ pour construire la métrique d'Einstein-Straus par raccordement des métriques FLRW et SdS. Ce raccordement, permet, via le Jacobien de la transformation, d'avoir à notre disposition une relation entre les temps de FLRW t et celui de SdS T . Cela permet au photon de passer sans problème d'une région à l'autre. Ensuite, on s'est focalisé sur l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle fort causé par un amas de galaxies L sur deux photons (deux images) émis par une source S , typiquement un quasar, située en arrière-plan. Les deux photons suivent des trajectoires différentes et arrivent sur Terre E sous des angles physiques observés α et α' après avoir été courbés par la lentille à l'intérieur de la sphère de Schücking. Comme ce sont les conditions finales sur Terre qui sont données, on a intégré les géodésiques des deux photons à reculons, en synchronisant d'abord leurs arrivées sur Terre, afin de déterminer l'angle de déviation $-\varphi_S$ et les temps d'émission des deux photons t_S et t'_S pour le calcul du temps de retard $\Delta t := t'_S - t_S$. On a appelé cette méthode "méthode de calcul direct" car l'intégration des géodésiques des deux photons se fait séparément. On a accessoirement utilisé, pour tout le processus de calcul, une solution exacte de l'équation de Friedmann, à savoir le temps cosmique $t(a)$ et sa fonction inverse, le facteur d'échelle $a(t)$. Dans un premier temps, on a employé des éléments de la géométrie d'Euclide pour intégrer les

géodésiques de type FLRW plat. Dans un deuxième temps, on a facultativement employé une seconde méthode exhaustive, méthode des équations différentielles, et retrouvé des résultats strictement identiques, ce qui montre la fiabilité de la méthode. C'est de cette méthode dont on s'est servie pour effectuer le calcul de la déflexion de la lumière et du temps de retard dans le cas sphérique [17].

On a remarqué lors de l'intégration des équation de la géodésique de type SdS que la constante cosmologique s'est éliminée de l'équation $d\varphi/dr$ et devenue identique à celle obtenue dans le cadre de la métrique de Schwarzschild. Cette disparition est en fait un simple accident de calcul, qui a été à l'origine de la croyance, longtemps répandue, que Λ n'avait pas d'influence sur le phénomène de la déflexion de la lumière. Cette croyance a été par la suite mise en cause suite aux travaux de Rindler et Ishak [15]. L'effet de Λ sur la déflexion de la lumière est soigneusement analysé lors de l'application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112 à la fin du dernier chapitre et il s'avère que la déflexion dépend de Λ . En effet, on a trouvé que l'incertitude sur la masse de l'amas de galaxies est minimisée de façon considérable (près de 1%), ce qui, à la différence du modèle de Kottler, permet d'avoir des résultats en accord avec l'affirmation de Rindler et d'Ishak selon laquelle une constante cosmologique positive atténue la déflexion de la lumière. Cependant, les valeurs estimées de la masse ne sont pas compatibles avec la masse observée. Cet écart entre la masse observée et celle qu'on a obtenue (seulement dans le chiffre et non pas dans l'ordre de grandeur) est dû essentiellement à la différence entre les modèles cosmologiques adoptée et les méthodes de calculs employées. Notre calcul fait appel à de l'analytique et du numérique et ne repose que sur les axiomes de la relativité générale d'Einstein. En l'occurrence, la plage de variation obtenue pour le temps de retard est de 7.23 yr à 13.91 yr.

Enfin, le sujet traité dans ce mémoire ouvre des perspectives intéressantes, entre autres :

1. Application des résultats à d'autres systèmes lentille-quasar.
2. Prise en compte de la solution de Schwarzschild-de Sitter intérieure dans laquelle les photons pourraient traverser la distribution de masse [34].

Annexe A

Tenseur métrique de Schwarzschild-de Sitter

Le tenseur de Ricci s'exprime en termes des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ comme

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}. \quad (\text{A.1})$$

Donc, on doit calculer au préalable les symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, qui s'écrivent en termes des dérivées premières des composantes du tenseur métrique comme

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{g^{\lambda\rho}}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right), \quad (\text{A.2})$$

où $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique inverse, qui est diagonal comme l'est le tenseur métrique,

$$g^{tt} = -1/B(r), \quad g^{rr} = 1/A(r), \quad g^{\theta\theta} = 1/r^2, \quad g^{\varphi\varphi} = 1/(r^2 \sin^2 \theta). \quad (\text{A.3})$$

On obtient alors, pour les symboles de Christoffel non nuls, les expressions suivantes

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tr}^t &= \Gamma_{rt}^t = \frac{B'(r)}{2B(r)}, & \Gamma_{tt}^r &= \frac{B'(r)}{2A(r)}, & \Gamma_{rr}^r &= \frac{A'(r)}{2A(r)}, \\
\Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{A(r)}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -\frac{r}{A(r)} \sin^2 \theta, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta.
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Les seules composantes non nulles du tenseur de Ricci sont les composantes diagonales, qui ont comme expressions

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= -\frac{B''(r)}{2A(r)} + \frac{B'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{B'(r)}{rA(r)}, \\
R_{rr} &= \frac{B''(r)}{2B(r)} - \frac{B'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - \frac{A'(r)}{rA(r)}, \\
R_{\theta\theta} &= \frac{1}{A(r)} - \frac{r}{2A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1, \\
R_{\varphi\varphi} &= R_{\theta\theta} \sin^2 \theta,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

où $' = d/dr$.

Annexe B

Tenseur métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

La métrique de FLRW en coordonnées comobiles $(t, \chi, \theta, \varphi)$ dans le cas plat ($k = 0$) est
(2.4)

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2[d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (\text{B.1})$$

On en tire les composantes diagonales non nulles du tenseur métrique en identifiant avec la forme générale $ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ (1.3),

$$g_{tt} = -1, \quad g_{\chi\chi} = a^2, \quad g_{\theta\theta} = a^2\chi^2, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2\chi^2 \sin^2\theta, \quad (\text{B.2})$$

On en déduit sans calcul les composantes inverses du tenseur métrique,

$$g^{tt} = -1, \quad g^{\chi\chi} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{a^2\chi^2}, \quad g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{a^2\chi^2 \sin^2\theta}. \quad (\text{B.3})$$

Le calcul des symboles de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ non nuls par application de (A.2), dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$ ($\sin \theta = 1$), donne

$$\begin{aligned}\Gamma_{\chi\chi}^t &= aa_t, & \Gamma_{\varphi\varphi}^t &= aa_t\chi^2, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\chi &= -\chi, \\ \Gamma_{t\chi}^\chi &= \Gamma_{\chi t}^\chi = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & \Gamma_{t\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi t}^\varphi = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, & \Gamma_{\chi\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\chi}^\varphi = \frac{1}{\chi}.\end{aligned}\tag{B.4}$$

Ainsi, les équations de la géodésique (1.21),

$$\ddot{x}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0,\tag{B.5}$$

s'écrivent comme

$$\ddot{t} + a \frac{da}{dt} (\dot{\chi}^2 + \chi^2 \dot{\varphi}^2) = 0,\tag{B.6}$$

$$\ddot{\chi} + 2 \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \dot{t} \dot{\chi} - \chi \dot{\varphi}^2 = 0,\tag{B.7}$$

$$\ddot{\varphi} + 2 \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \dot{t} + \frac{\dot{\chi}}{\chi} \right) \dot{\varphi} = 0.\tag{B.8}$$

Annexe C

Distance d'approche minimale r_P

On s'attache ici à dériver une expression approximative pour le péri-lentille r_P du chemin du haut (le même raisonnement pour le chemin du bas conduit à un résultat similaire). Dans les approximations $2GM/r_P = M/4\pi r_P \ll 1$ et $r_P/r_{\text{SchüE}} \ll 1$, on a, d'après l'expression (3.130),

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r_{\text{SchüE}}} &= \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}^2 \sqrt{1 - \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2}} \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}} + \frac{r_{\text{SchüE}}}{r_{\text{SchüE}} + r_P} \right)}} \\
 &\simeq \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2} \right) \left[1 + \frac{GM}{r_P} \left(\frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}} + \frac{1}{1 + \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}}} \right) \right] \\
 &\simeq \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2} \right) \left[1 + \frac{GM}{r_P} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}} \right) \right] \\
 &\simeq \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}^2} \left(1 + \frac{GM}{r_P} \right). \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit, en utilisant ce dernier résultat, une expression approchée de γ_K (3.116),

$$\tan \gamma_K \simeq \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}} \left(1 + \frac{GM}{r_P} \right), \tag{C.2}$$

ou encore

$$r_P \simeq r_{\text{SchüE}} \tan \gamma_K - GM. \quad (\text{C.3})$$

Transformons maintenant $\tan \gamma_{KE}$ en $\sin \gamma_{KE}$ via la relation bien connue

$$\sin^2 \gamma_K = \frac{\tan^2 \gamma_K}{1 + \tan^2 \gamma_K}, \quad (\text{C.4})$$

qui devient, en remplaçant par (C.2),

$$\begin{aligned} \sin^2 \gamma_K &\simeq \frac{\frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right)}{1 + \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right)} \\ &\simeq \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right) \left[1 - \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right)\right] \\ &\simeq \frac{r_P^2}{r_{\text{SchüE}}^2} \left(1 + \frac{2GM}{r_P}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} \sin \gamma_K &\simeq \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}} \sqrt{1 + \frac{2GM}{r_P}} \\ &\simeq \frac{r_P}{r_{\text{SchüE}}} \left(1 + \frac{GM}{r_P}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

ou encore

$$r_P \simeq r_{\text{SchüE}} \sin \gamma_K - GM. \quad (\text{C.7})$$

Bibliographie

- [1] F. W. Dyson, A. S. Eddington, C. Davidson, *A determination of the deflection of light by the sun's gravitational field, from observations made at the total eclipse of May 29, 1919*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A **220**, 291 (1920).
- [2] I. I. Shapiro, *Fourth test of general relativity*, Phys. Rev. Lett. **13**, 789 (1964).
- [3] I. I. Shapiro, et al., *Fourth test of general relativity: Preliminary results*, Phys. Rev. Lett. **21**, 266 (1968).
- [4] A. Einstein, E. G. Straus, *The influence of the expansion of space on the gravitation fields surrounding the individual star*, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945).
- [5] E. Schücking, *Das Schwarzschildsche Linienelement und die expansion des Weltalls*, Z. Phys. **137**, 595-603 (1954)
- [6] R. Balbinot, R. Bergamini, A. Comastri, *Solution of the Einstein–Straus problem with a Λ term*, Phys. Rev. D **38**, 2415-2418 (1988).
- [7] F. Kottler, *Über die physikalischen grundlagen der einsteinschen gravitationstheorie*, Ann. der Physik **361**, 401 (1918).
- [8] N. J. Islam, *The cosmological constant and classical tests of general relativity*, Phys. Lett. A **97**, 239 (1983).
- [9] W. H. C. Freire, V. B. Bezerra, J. A. S. Lima, *Cosmological constant, conical defect and classical tests of general relativity*, Gen. Rel. Grav. **33**, 1407 (2001).

- [10] K. Lake, *Bending of light and the cosmological constant*, Phys. Rev. D **65**, 087301 (2002).
- [11] A. W. Kerr, J. C. Hauck, B. Mashhoon, *Standard clocks, orbital precession and the cosmological constant*, Class. Quant. Grav. **20**, 2727 (2003).
- [12] V. Kagramanova, J. Kunz, C. Lammerzahl, *Solar system effects in Schwarzschild–de Sitter space–time*, Phys.Lett. B **634**, 465 (2006).
- [13] M. Sereno, Ph. Jetzer, *Solar and stellar system tests of the cosmological constant*, Phys. Rev. D **73**, 063004 (2006).
- [14] F. Finelli, M. Galaverni, A. Gruppuso, *Light bending as a probe of the nature of dark energy*, Phys.Rev. D **75**, 043003 (2007).
- [15] W. Rindler, M. Ishak, *Contribution of the cosmological constant to the relativistic bending of light revisited*, Phys. Rev. D **76**, 043006 (2007).
- [16] K. E. Boudjemaa, M. Guenouche, S. R. Zouzou, *Time delay in the Einstein-Straus solution*, Gen. Rel. Grav. **43**, 1707 (2011).
- [17] M. Guenouche, S. R. Zouzou, *Deflection of light and time delay in closed Einstein-Straus solution*, Phys. Rev. D **98**, 123508 (2018).
- [18] K. Schwarzschild, *Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinischen theorie*, Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech. 189 (1916).
- [19] W. de Sitter, *On the relativity of inertia: Remarks concerning Einstein’s latest hypothesis*, Kon. Ned. Akad. Wet. Proc, **19**, 1217 (1917).
- [20] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley & Sons. New York, (1972).
- [21] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys. **75**, 559 (2003).
- [22] A. Friedmann, *Über die krümmung des raumes*, Z. Phys. **10**, 377 (1922).

- [23] G. Lemaître, *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques*, Ann. Soc. Sci. Brux A **47**, 49 (1927).
- [24] M. Ishak, W. Rindler, J. Dossett, J. Moldenhauer, C. A. Allison, *A new independent limit on the cosmological constant/dark energy from the relativistic bending of light by galaxies and clusters of galaxies*, Mon. Not. R. Astron. Soc. **388**, 1279 (2008).
- [25] T. Schücker, *Strong lensing in the Einstein-Straus solution*, Gen. Rel. Grav. **41**, 1595 (2009).
- [26] N. Inada, et al., *A gravitationally lensed quasar with quadruple images separated by 14.62 arcseconds*, Nature **426**, 810 (2003).
- [27] M. Oguri, et al., *Observations and theoretical implications of the large-separation lensed quasar SDSS J1004+4112*, Astrophys. Journ. **605**, 78 (2004).
- [28] N. Ota, et al., *Chandra observations of SDSS J1004+4112: Constraints on the lensing cluster and anomalous X-ray flux ratios of the quadruply imaged quasar*, Astrophys. Journ. **647**, 215 (2006).
- [29] Y. Kawano, M. Oguri, *Time delays for the giant quadruple lensed SDSS J1004+4112: Prospects for determining the density profile of the lensing cluster*, Publ. Astron. Soc. Jap. **58**, 271 (2006).
- [30] J. Fohlmeister, C. S. Kochanek, E. E. Falco, C. W. Morgan, J. Wambsganss, *The rewards of patience: An 822 day time delay in the gravitational lens SDSS J1004+4112*, Astrophys. Journ. **676**, 761 (2008).
- [31] E. Hubble, *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [32] N. Aghanim et al., *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, Astron. Astrophys. **641**, A6 (2020).

- [33] T. Schücker, N. Zaimen, *Cosmological constant and time delay*, Astron. Astrophys. **484**, 103 (2008).
- [34] T. Schücker, *Lensing in an interior Kottler solution*, Gen. Rel. Gravi. **42**, 1991 (2010).

Strong gravitational lensing effect on cosmological scales

Abstract

The research work carried out in this Master thesis is included in the framework of general relativity and cosmology and deals with strong gravitational lensing on cosmological scales by a spherically symmetric mass distribution in the framework of the dynamic Einstein-Straus solution with a positive cosmological constant and concentrate on the case of a spatially flat Universe (null curvature constant $k = 0$). We applied a method based on integration of differential equations in order to make possible the computation of light deflection and time delay. By applying our results to the lensed quasar SDSS J1004+4112 and taking into account the most recent measurements of cosmological parameters, we provide results that could be compared with observational data. Moreover, it turns out that a positive cosmological constant attenuates the light bending in agreement with Rindler and Ishak's finding.

Key words General relativity, cosmology, light bending, time delay, cosmological parameters.

مفعول عدسة الجاذبية القوي

ملخص

الأبحاث التي أجريت في أطروحة الماجستير هذه تندرج في إطار النسبية العامة و الكوسمولوجيا و تتناول موضوع المفعول القوي لعدسة الجاذبية الناجم عن توزيع كتلي ذو تناظر كروي ضمن نموذج كوني خاص و هو النموذج الديناميكي لأينشتاين-ستروس في حالة الفضاء المسطح (ثابت انحناء معدوم $k = 0$) و هذا في وجود ثابت كوسمولوجي موجب. تم حساب انحراف الضوء و مدة التأخر في هذا النموذج باعتماد طريقة تكامل المعادلات التفاضلية ثم طبقنا النتائج على نظام معين لعدسة-كوازار يحمل اسم SDSS J1004+4112، باستعمال أحدث القياسات للثوابت الكونية. النتائج المتحصل عليها واعدة و يمكن مقارنتها مع المعطيات التجريبية المتعلقة بالمشاهدة. من جهة أخرى، هذه النتائج كذلك تتفق مع الإكتشاف الذي توصلنا إليه ريندلار و إسحاق بأن زاوية انحراف الضوء تتناقص بوجود ثابت كوسمولوجي موجب.

كلمات مفاتيح النسبية العامة، الكوسمولوجيا، انحراف الضوء، مدة التأخر، الثوابت الكونية.

Résumé

Le travail de recherche réalisé dans ce mémoire de Master s'inscrit dans le domaine de la gravitation et la cosmologie et a trait à l'étude de l'effet de lentille gravitationnelle fort à l'échelle cosmologique dû à une distribution de masse sphérique dans le cadre du modèle dynamique d'Einstein-Straus spatialement plat (constante de courbure nulle $k = 0$), en présence d'une constante cosmologique positive. Une méthode basée sur l'intégration des équations différentielles a été mise en œuvre afin de rendre possible le calcul de la déflexion de la lumière et du temps de retard. L'application au système lentille-quasar SDSS J1004+4112, avec la prise en compte des mesures les plus récentes des paramètres cosmologiques, a fourni des résultats susceptibles d'une comparaison avec les données observationnelles. En outre, il est montré qu'une constante cosmologique positive atténue la déflexion de la lumière en accord avec l'affirmation de Rindler et Ishak.

Mots clés Relativité générale, cosmologie, déflexion de la lumière, temps de retard, paramètres cosmologiques.