
Université Abess Laghrour Khenchela



جامعة عباس لغرور خنشلة
Faculté de sciences et technologie
كلية العلوم والتكنولوجيا
Département de génie mécanique
قسم الهندسة الميكانيكية



Mémoire

de fin d'études Pour l'obtention du diplôme
MASTER (LMD)

Spécialité : Génie Mécanique
Option : Construction Mécanique

Thème

**Détermination numérique de la réponse statique
des structures 3D dans le domaine non linéaire
par la méthode des éléments finis**

Réalisé par :

- Meftah Bilel
- Zouaoui Salim

Dirigé par : Dr. Chitour Morad

Membres de jury

- Dr.
- Dr.

Année universitaire : 2021-2022



Merci

Remerciement

Nous commençons par remercier الله qui nous a donné la volonté, la santé, le courage et surtout la patience pour pouvoir produire ce modeste travail et faire face à toutes les contraintes qui se sont posées au cours de son élaboration.

Il nous agréable, d'exprimer ma gratitude à tous qui ont contribué de près ou loin à ma formation et enfin à la réalisation de cet humble travail.

Nos vifs remerciements à nos promoteurs

Mr Chitour , Mr Massaoudi, Mr Aboudi , Mr Mansouri, Mr Berkia, Mr Himeur Nabil.....etc)

Notre reconnaissance à tous les enseignants du département de génie mécanique qui ont contribué à notre formation en nous inculquant leur savoir.

Enfin, nous tiens à remercier tous mes collègues, amies et proches à l'université Abess laghrour Khenchela qui m'ont soutenu et aidé de manière directe ou indirecte.

Bilel & Salim...

Dédicace

Que ce travail témoigne de mes respects :

A chère maman et défunts grands-pères, Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études. Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux.

Je prie le bon Dieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi.

A la famille Meftah. Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me porter et mes cousins.

A ceux qui m'ont éclairé le chemin de la sagesse et m'ont offert tout ce qui est cher et comble le cœur dans la vie avec une immense générosité et une tendre affection

A tous mes professeurs : Leur générosité et leur soutien m'oblige de leurs témoigner mon profond respect et ma loyale considération. A tous mes amis et mes collègues sur tout : Nedjar Fares, Nedjar Nadjib, Benyaza Marouan, Hafsaoui Noureddine, Mohamed hadj Ait Athman, Saci Farid, Bouras Nedjmeddine, Saghraoui Anis, Mena Nadjib, Hamidi Abdelhamid... Etc

Ils vont trouver ici le témoignage d'une fidélité et d'une amitié infinie.

Meftah Bilal. . .

Dédicace

Que ce travail témoigne de mes respects :

A mes parents : Grâce à leurs tendres encouragements et leurs grands sacrifices, ils ont pu créer le climat affectueux et propice à la poursuite de mes études. Aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération et mes profonds sentiments envers eux,

Je prie le bon Dieu de les bénir, de veiller sur eux, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi.

A la famille Zouaoui. Ils vont trouver ici l'expression de mes sentiments de respect et de reconnaissance pour le soutien qu'ils n'ont cessé de me porter.

A tous mes professeurs : Leur générosité et leur soutien m'oblige de leurs témoigner mon profond respect et ma loyale considération. A tous mes amis et mes collègues.

Ils vont trouver ici le témoignage d'une fidélité et d'une amitié infinie.

Zouaoui Salim...

Résumé

L'objectif de ce travail est la Modélisation des structures 3D en élasto-plasticité utilisant l'Abaqus sous l'action d'un trajet de chargement donné, utilisant la méthode des éléments finis 3D (hexaédriques H8 et H20 et tétraédriques T4 et T10) sous le code du calcul Abaqus. On considère dans cette simulation numérique non linéaire (l'élasto-plasticité), l'influence des paramètres suivants : conditions aux limites, épaisseur et le type d'élément ainsi que le type d'intégration numérique, le critère de plasticité et la méthode de résolution sur la propagation de la plasticité dans les structures 3D

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تحديد العددي للاستجابة الثابتة للهياكل ثلاثية الابعاد في المجال الغير خطي (المرنة) تحت تأثير مسار تحميل معين, باستخدام طريقة العناصر المحددة ثلاثية الابعاد (سداسي السطوح H8 و H20 ورباعي السطوح T4 و T10) تحت رمز حساب الاباكوس, في هذه المحاكاة العددية غير الخطية (اللدنة المرنة), فإننا نعتبر تأثير المعاملات التالية: الظروف الحدودية و سمك ونوع العنصر, وكذلك نوع التكامل العددي, ومعيار اللدونة و طريقة الحلول بشأن انتشار اللدونة ثلاثية الابعاد

Sommaire

Remerciements.....	
Dédicace.....	
Résumé.....	i
Sommaire	
Liste des Figures.....	ii
Nomenclature	iv
Introduction générale.....	01

Chapitre I : Théorie d'élasto-plasticité

1. Introduction.....	02
2. Domaines d'élasticité.....	02
3. Domaine plastique.....	04
3.1. Modélisation du comportement élasto-plastique.....	04
4. Théorie incrémentale de plasticité uniaxiale.....	05
4.1. Essai de traction.....	05
4.2. Critère d'épuisement.....	05
4.3. Règle d'écrouissage.....	06
4.3.1. Ecrouissage isotrope.....	06
4.3.2. Ecrouissage cinématique.....	07
4.3.3. Ecrouissage mixte.....	08
4.4. Règle d'écoulement.....	09
5. Théorie incrémentale de plasticité multiaxiale.....	10
5.1. Hypothèses de base.....	10
6. Différents critères élasto-plastiques.....	13
6.1 Critère de Tresca.....	13
6.2 Critère de Von-Mises.....	14
6.3 Critère de Mohr-Coulomb.....	15
6.4 Critère de Drucker et Prage.....	16
7. Méthodes de résolution des systèmes non linéaires.....	17
7.1 Méthodes incrémentales.....	19

7.2 Méthode incrémentale itérative.....	19
7.2.1 Méthode de Newton-Raphson (Rigidité tangente).....	20
7.2.2 Méthode de Newton-Raphson modifiée.....	21

Chapitre II. Méthode des éléments finis

1. Introduction.....	24
2. Les propriétés d'un élément fini.....	24
2.1. Attributs d'un élément fini.....	24
3. Caractéristiques d'un élément fini.....	25
4. Théorèmes de l'énergie.....	25
4.1. Notations.....	25
4.2. Les relations de compatibilité.....	26
4.3. Lois de Hooke.....	26
4.4. Conditions aux limites.....	26
5. Théorèmes énergétiques en élasticité.....	27
5.1. Principe de travaux virtuels.....	27
5.2. Théorème de l'énergie potentielle totale.....	28
5.3. Application au principe des travaux virtuels.....	28
6. Éléments finis volumiques.....	30
6.1. Introduction.....	30
6.2. Présentation de l'élément fini hexaédrique (H8).....	31
6.2.1 Déplacement.....	32
6.2.2 Approximation de la géométrie.....	33
6.2.3 Dédution de la matrice [B].....	34
6.2.4 Matrice de la rigidité.....	35
7. Présentation des éléments isoparamétriques utilisés.....	36
7.1. Élément à 8 nœuds Hex8.....	36
7.2. Élément à 20 nœuds Hex20.....	36
7.3. Élément à 4 nœuds T4.....	39
7.4. Élément à 10 nœuds T10.....	39

Chapitre III. Exemples Numériques

1. Introduction.....	48
1.1. Système d'unités dans le code de calcul ABAQUS.....	48
1.2. Organisation de l'interface ABAQUS CAE.....	48
1.3. Les Modules.....	49
1.4. Les éléments dans ABAQUS.....	51
1.5. Les différents fichiers pour la simulation sous ABAQUS.....	51
1.5.1. Fichier d'entrée (Input file).....	51
1.5.2. Fichier de résultats (output file).....	51
1.6. Autres fichiers créés par Abaqus lors de la simulation.....	51
2. Comparaison numérique en analyse non linaires.....	51
3. Déflexion d'une poutre encastree.....	51
3.1. Comparaison entre les éléments volumiques.....	52
3.2. Comparaison entre les critères de Von-Mises et Tresca.....	53
4. plaque trouée soumise à un champ de traction.....	54
4.1. Comparaison entre les éléments volumiques.....	55
4.2. Comparaison entre les critères de Von-Mises et Tresca.....	55
5. Déflexion d'une poutre de forme rectangulaire trouée.....	56
5.1. Comparaison entre les éléments volumiques.....	57
5.2. Comparaison entre les critères de Von-Mises et Tresca.....	58
Conclusion Générale.....	59
Bibliographie.....	60

Liste des figures

Chapitre I : Théorie d'élasto-plasticité

Figure (I.1) : Courbe $\sigma_{11} = f(s_{11})$ dans un essai de traction	02
Figure (I.2) : Expérience de traction simple pour un matériau écrouissable	03
Figure (I.3) : Matériau élastique parfaitement plastique (Acier Doux)	03
Figure (I.4) : Modélisation du comportement élasto-plastique	04
Figure (I.5) : Essai de traction	05
Figure (I.6.a) : Ecrouissage isotope	06
Figure (I.6.b) : Limite élastique actuelle en fonction de ϵ^P	06
Figure (I.7) : Ecrouissage cinématique	07
Figure (I.8) : Ecrouissage mixte	08
Figure (I.9) : Surface de charge	11
Figure (I.10) : domaine élastique Cas de charge et décharge	12
Figure (I.11) : Représentation du critère de Tresca (a) dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ et (b) Section duprisme par le plan $\pi: \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$	13
Figure (I.12) : Représentation du critère de Von-Mises dans l'espace $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$	14
Figure (I.13) : Critère de Mohr-Coulomb	15
Figure (I.14) : Critère de Drucker et Prager dans l'espace $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	16
Figure (I.15) : Méthode de Newton-Raphson	17
Figure (I.16) : Méthode de Newton-Raphson modifiée	18

Chapitre II. Méthode des éléments finis

Figure(II.1) : Éléments de volume (Solides 3D)	25
Figure (II.2) : Élément fini tridimensionnel rapporté au système de coordonnées globales	25
Figure (II.3) : Élément fini tridimensionnel rapporté au système de coordonnées naturelles	26
Figure (II.4) : Élément H8	29
Figure (II.5) : Élément H20	30
Figure (II.6) : Élément T4	31
Figure (II.7) : Élément T10	32

Chapitre III. Exemples Numériques

Figure (III.1) : Organisation d'ABAQUS	49
---	----

Figure(III.2) : Réalisation de la mise en données d'un problème	49
Figure(III.3) : Quelque élément dans Abaqus	50
Figure (III.4) : Les types d'intégrations et le nombre de nœuds	50
Figure (III .5) : Charpente console Type H	52
Figure (III .6) : Déplacement de la structure avec différents des éléments volumiques	53
Figure (III .7) : Les résultats obtenus de différents éléments volumiques	53
Figure (III .8) : Contrainte de la structure avec élément volumique C3D8R	54
Figure (III.9) : Plaque trouée	54
Figure (III .10) : Déplacement de la structure avec différents des éléments volumiques	55
Figure (III .12) : Contrainte de la structure avec élément volumique C3D10	56
Figure (III.13) : Poutre charpente type H trouée	56
Figure (III .14) : Déplacement de la structure avec différents des éléments volumiques	57
Figure (III .15) : Les résultats obtenus de différents éléments volumiques.	57
Figure (III .16) : Contrainte de la structure avec élément volumique C3D8R	58

Nomenclature

\int	Intégrale.
U	Vecteur des déplacements
ν	Coefficient de Poisson
λ, μ	Coefficients de Lamé
ε	Vecteur des déformations
σ	Vecteur des contraintes
E	Module d'élasticité (de Young)
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
δu_{ij}	Déplacement virtuel
U	Energie de déformation
V	Energie potentielle totale
D	Matrice constitutive du matériau (matrice des coefficients élastiques)
E^{ep}	Module élasto-plastique tangent uniaxial
$\sigma_0 ; \sigma_y$	Limite élastique initiale uniaxiale
ε^p	Déformation plastique
ε^{ep}	Déformation élasto-plastique
H	Paramètre plastique (d'écrouissage)
D^{ep}	Matrice élasto-plastique
K_t	Matrice de rigidité tangente
${}^m\{U\}$	Déplacement à l'incrément m
${}^m\{\sigma\}$	Contrainte à l'incrément m
${}^m\{\varepsilon\}$	Déformation à l'incrément m
${}^m\{F\}$	Charge à l'incrément m
${}^m\{R\}$	Réaction à l'incrément m
$\frac{\delta}{\delta x}$	Dérivée partielle par rapport à x .
$[]$	Matrice.
$\{ \}$	Vecteur colonne.
$[]^T$	Matrice transposée.
$[]^{-1}$	Matrice inverse.
$\{f^s\}$	Forces de surface.
$\{f^v\}$	Forces de volume.

{F} Forces concentrée.
H8, H20 Eléments hexaédriques 8,20 nœuds
T4, T10 Eléments tétraédriques 4,10 nœuds
 ζ, η, ξ Coordonnées isoparamétriques
MEF Méthodes des éléments finis

Introduction générale

Modélisation des structures complexes pose pour l'ingénieur à faire des hypothèses simplificatrices, en tentant parfois d'analyser d'un coup la structure entière, grâce à la méthode des éléments finis (MEF) ; Cette dernière découpe la structure en composants élémentaires dont l'ensemble est calculé en une fois. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre effectivement ces équations. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaire ou non linéaire, définis dans un domaine matériel quelconque à une deux ou trois dimension.

De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur. Pour étudier ou montrer des performances solides de l'élément fini ou des moyens efficaces de résoudre les problèmes des modèles non linéaires. La plupart des solutions sont des solutions numériques dans le cas de matérielle solides 3D. Dans ce contexte, des cas tests sont évalués pour l'analyse non linéaire matérielle des solides 3D utilisant le code éléments finis ABAQUS.

Cette étude a abouti à la rédaction de ce manuscrit que nous avons décidé de scinder en trois chapitres, précédés par une introduction générale et clôturés par une conclusion générale. Après avoir établi, dans le premier chapitre, une description générale Théorie d'élastoplasticité.

Ensuite, nous présentons dans le deuxième chapitre le principe général de la méthode des éléments finis, nous présenterons une synthèse de la formulation des éléments finis volumiques. Nous établissons les équations gouvernantes du problème de grands déplacements en utilisant la formulation lagrangienne totale associée à la méthode de résolution de Newton-Raphson. Le troisième chapitre sera l'occasion de présenter les résultats des simulations numériques obtenus avec les modèles éléments finis volumiques hexaédriques à 8 nœuds et à 20 nœuds C3D8 et C3D20 et tétraédriques 4 nœuds et à 10 nœuds C3D4 et C3D10 présentés dans ABAQUS

Chapitre I :
Théorie
d'élasto-
plasticité

Chapitre I . Théorie d'élasto-plasticité

1. Introduction ^[10]

Si on fait une expérience de traction sur un matériau, on constate que, tant que les efforts de traction ne dépassent pas une certaine limite, la relation contrainte déformation reste linéaire. Cependant au-delà du seuil, on constate que la linéarité et la mémoire de la configuration initiale sont perdues : le matériau a une loi de comportement différente.

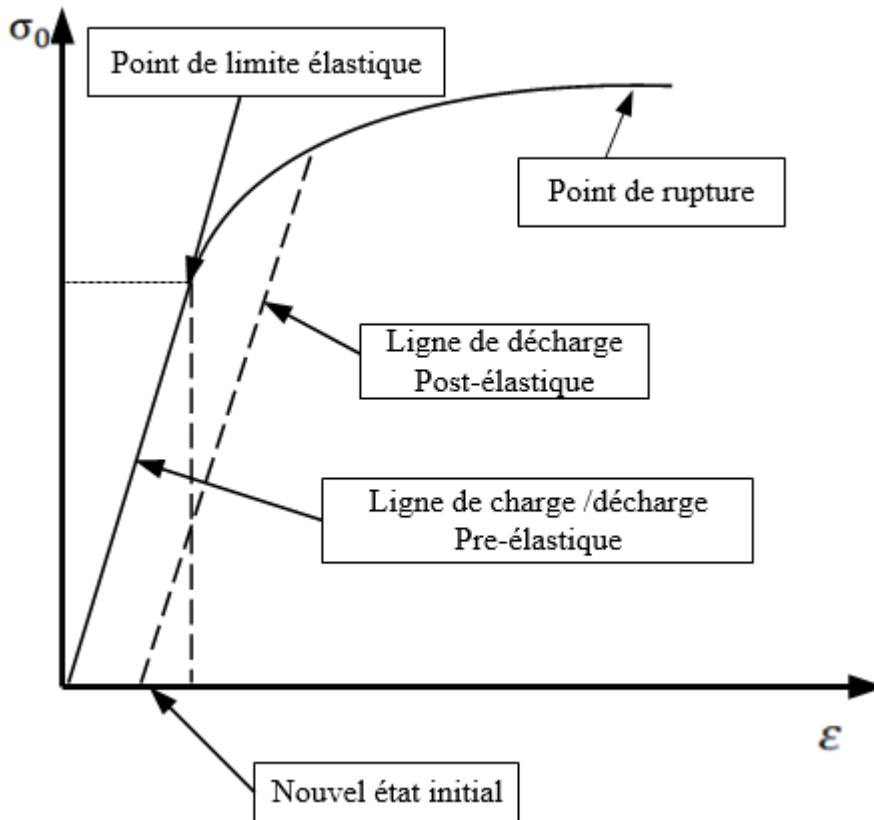


Figure I.1: Courbe $\sigma_{11} = f(\epsilon_{11})$ dans un essai de traction ^[10]

La courbe de la figure (I.1) montre l'allure du comportement d'un matériau dans un essai de traction sur une éprouvette, dans un plan déformation-contrainte.

2. Domaines d'élasticité ^[2]

L'expérience est effectuée à vitesse de déformation fixée. On constate l'existence d'un seuil pour la contrainte, soit σ , à partir duquel le comportement du matériau devient irréversible, l'éprouvette ayant été chargée au-delà de A jusqu'en B, on effectue une décharge : celle-ci suit sur le diagramme le chemin BC et non le trajet BAO. En particulier, on note qu'après décharge totale, il reste une déformation de l'éprouvette représentée par OC sur la

figure (I.2) cette déformation permanente est la déformation plastique. On procède alors à une nouvelle charge : tant que la contrainte reste inférieure à σ_B celle-ci s'effectue en suivant le trajet CB identique, au sens de parcours près, à celui décrit lors de la décharge ; Le comportement demeure réversible tout au long de CB. Quand σ dépasse σ_B , le point figuratif suit la courbe de première charge au-delà de B, c'est-à-dire la courbe représentant la traction sans décharge. Ainsi lors de la nouvelle charge effectuée à partir de C, σ_B apparaît comme le nouveau seuil en traction.

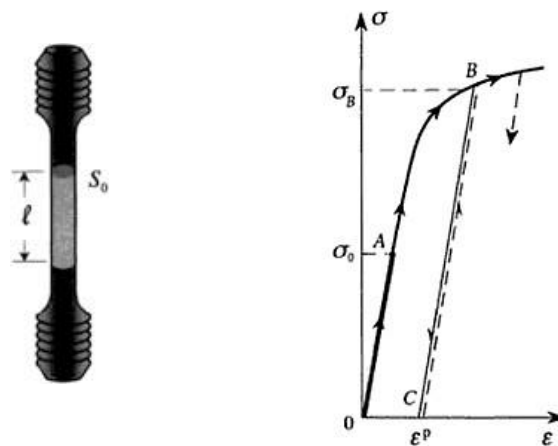


Figure 1.2: Expérience de traction simple pour un matériau écrouissable^[2]

Le phénomène observé à la figure (I.2), où la limite actuelle d'élasticité σ_B effectivement une fonction de ϵ^P , correspond au cas du matériau dit écrouissable, on précise même dans certains cas « matériau à écrouissage positif » pour traduire le fait que le seuil de plasticité est une fonction croissante de ϵ^P . Ce phénomène, quoique le plus répandu n'est pas général pour le comportement plastique. Ainsi la figure (I.3) représente le diagramme relevé dans le cas de l'expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette d'acier doux : on constate que celui-ci présente un palier pour des déformations (palier plastique illimité) et l'on dit que le matériau correspondant est élastique et parfaitement plastique.

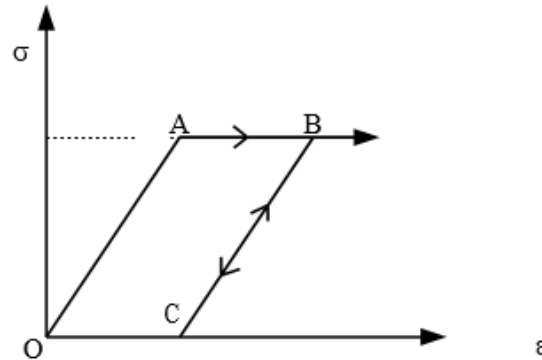


Figure I.3: Matériau élastique parfaitement plastique (Acier Doux) ^[2]

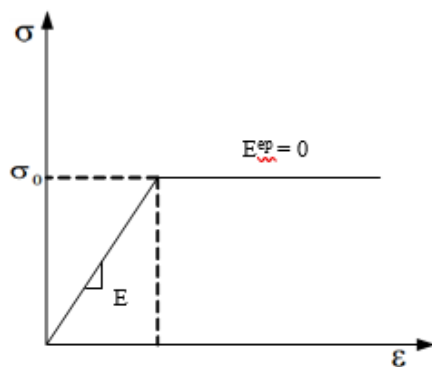
3. Domaine plastique ^[2]

La plasticité des matériaux est caractérisée par l'apparition des déformations élastiques et des déformations irréversibles, qui se manifestent lorsque la contrainte atteint un certain seuil. L'essai classique de traction sur une éprouvette d'un matériau ayant un comportement élasto- plastique avec écrouissage (Figure (I.2)) permet de mettre en évidence la non-linéarité et le phénomène d'irréversibilité caractérisant le comportement plastique. L'effet du temps est supposé négligeable. La déformation totale est la somme des déformations élastique et plastique. Le point A est appelé le seuil de plasticité initial.

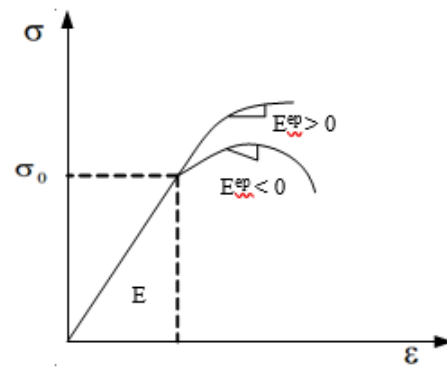
Lors d'une recharge CB, la plastification réapparaît à partir du point de décharge B, qui définit le seuil de plasticité actuel.

3.1. Modélisation du comportement élasto-plastique ^{[2] [20] [1]}

Le comportement réel est modélisé soit par la courbe élasto-plastique parfaite (sans effet Baushinger, figure (I.4.a)), soit par celle avec écrouissage (linéaire ou non) et donc un module élasto-plastique tangent E linéaire ou non (figure (I.4.b)). Ce dernier cas est plus général : Donc si $E^{ep} = 0$ c'est le cas de l'élasto-plasticité parfaite, si $E^{ep} > 0$ c'est le durcissement (écrouissage positif) et si $E^{ep} < 0$ c'est l'adoucissement (écrouissage négatif).



a. Elasto-plasticité parfaite



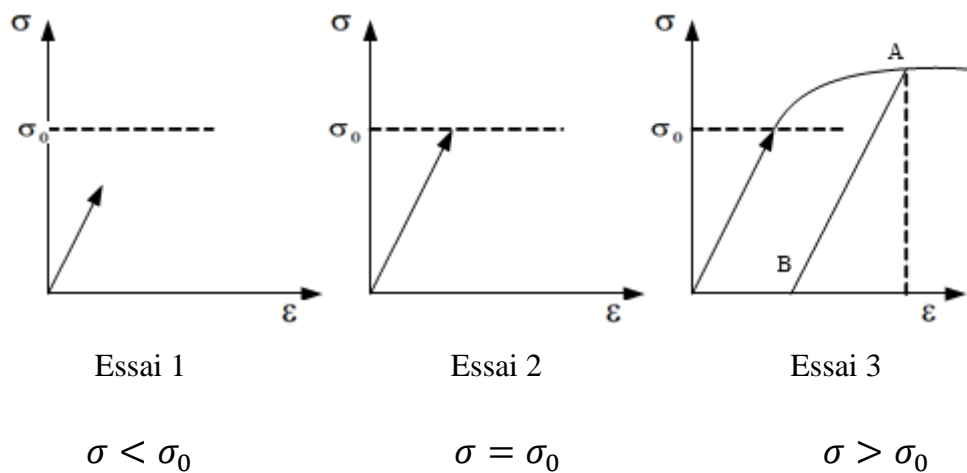
b. Elasto-plasticité avec écrouissage

Figure I.4: Modélisation du comportement élasto-plastique^[2]

4. Théorie incrémentale de plasticité uniaxiale

4.1. Essai de traction ^[24]

Intéressons-nous à l'aspect phénoménologique de l'essai dans le cadre de l'élasto-plasticité classique (quasi-statique, petites déformations, température constante). Considérons une éprouvette de traction, cette éprouvette est soumise à un effort de traction. Considérons les graphes (σ, ε) obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation appliqué lors du chargement nous obtenons les allures suivantes :

**Figure I.5** Essai de traction

Essai 1 $\sigma < \sigma_0$:

On est dans le domaine élastique, le comportement du matériau est réversible.

Nous considérons par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique et linéaire.

Essai 2 $\sigma = \sigma_0$:

Cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité (σ_0), seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle, elle correspond à un pourcentage de déformation permanente.

Essai 3 $\sigma > \sigma_0$:

La décharge à partir du point A (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. En B (charge nulle) il ne reste que la déformation plastique ou déformation permanent ε^P .

4.2. Critère d'épuisement

Le critère d'épuisement dans le cas uniaxiale (traction simple) est atteint quand la Contrainte $|\sigma|$ atteint σ_0 .

Donc on peut écrire :

$$|\sigma| - \sigma_0 = F(\sigma - \sigma_0) = 0 \quad (\text{I.1})$$

Où σ_0 : la limite élastique initiale.

σ : la contrainte courante

4.3. Règle d'écrouissage

Cette règle doit donner la limite élastique actuelle σ_B et décrire l'effet Bauschinger.

Différentes idées ont été proposées pour donner l'évolution du seuil qui regroupent :

- L'écrouissage isotrope
- L'écrouissage cinématique
- L'écrouissage mixte (isotrope et cinématique)

4.3.1 Ecrouissage isotrope

L'hypothèse de l'écrouissage isotrope est une expansion uniforme du domaine élastique, c'est-à-dire une modification du seuil du patin avec les déformations plastiques. Prenons un matériau avec des limites élastiques en compression et traction identique avant toute histoire de sollicitation. Appliquons maintenant au matériau une traction qui le porte dans le domaine Plastique.

On a vu que la limite élastique en traction se trouve augmentée. Si on décharge, la limite élastique a changé de la même valeur, on est en présence d'un écrouissage isotrope schématisé par la figure (I.6.a).

D'autre terme si on décharge et on inverse le chargement à partir du point B, l'écoulement plastique dans l'autre sens commencera à la contrainte $-\sigma_B$. Donc il y a une symétrie par rapport à l'axe $\sigma =$ (point O), cela s'exprime par :

$$F(\sigma - \sigma_B) = |\sigma| - \sigma_B = 0 \quad (\text{I.2})$$

Où σ_B est la limite élastique actuelle (dépend de la déformation plastique ε^P (Figure (I.6.b)).

$$\sigma_B = \sigma_0 + \int |H \cdot d\varepsilon^P| \quad (\text{I.3})$$

Avec :

H: caractéristique du matériau qu'on détermine expérimentalement (module d'écroutissage).

Remarque

- il se peut que la limite élastique soit plus faible en compression qu'en extension, Nous n'avons plus un écroutissage isotrope, c'est ce qu'on appelle l'effet Bauschinger.
- Si H est constant donc: $\sigma_B = \sigma_0 + H \cdot \varepsilon^P$
- En élasto-plasticité parfaite $H = 0$ donc $\sigma_B = \sigma_0$

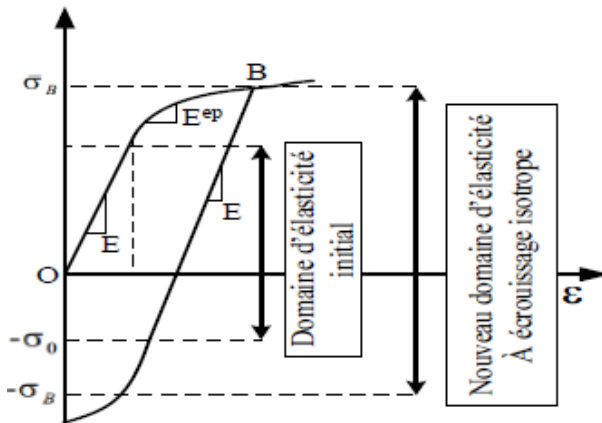


Figure I.6.a: Ecroutissage isotope^[1]

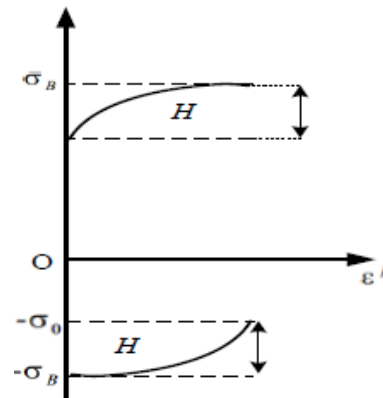


Figure I.6.b: Limite élastique actuelle en fonction de ε^P ^[1]

4.3.2. Ecroutissage cinématique^{[21] ; [20]}

L'écroutissage cinématique modifie la position du domaine élastique mais pas l'amplitude du domaine élastique ($2\sigma_0$), schématisé par la figure (I.7.a). Cela signifie que le segment entre les points limite garde la même dimension mais subit une translation et son centre se déplace d'une distance (contrainte) α , figures (I.7.b/c). Ceci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_0) = F(\sigma, -\alpha, \sigma_0) = F(\bar{\sigma}, \sigma_0) = |\bar{\sigma}| - \sigma_0 = 0 \tag{I.4}$$

Où α : est l'ordonnée du centre du segment α

$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha$: est appelée contrainte réduite.

Suivant la règle de Melan-Prager, on a un écrouissage cinématique linéaire. L'ordonnée α peut être déterminée comme suit :

$$d\alpha = c \cdot d\varepsilon^P \text{ Donc } \int c \cdot d\varepsilon^P \tag{I.5}$$

Avec c : est une caractéristique du matériau égale à H si l'écrouissage est purement cinématique, figure (I.7.c).

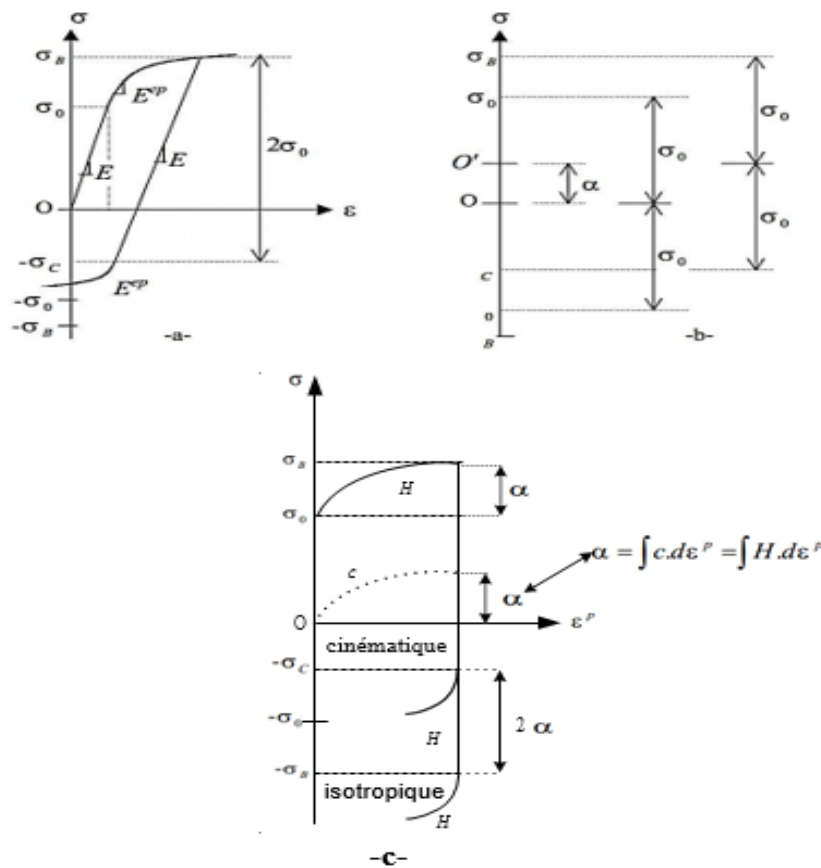


Figure I.7: Ecrouissage cinématique^[1]

4.3.3. Ecrouissage mixte^{[21] [20]}

La combinaison d'un écrouissage cinématique et isotrope permet de reproduire certaines caractéristiques rhéologiques importante des matériaux, en particulier l'effet Bauschinger. La figure (I.8) montre un chargement et déchargement obtenus en combinant ces deux effets.

L'expansion du domaine élastique est traduite par $\Delta\sigma_0$ qu'il est nécessaire de déterminer expérimentalement sur chargement cyclique.

Il est possible de définir : $P = \frac{\Delta\sigma_0}{\varepsilon^P}$ qui définit l'évolution du domaine élastique.

Donc on peut dire que le segment de charge subit une expansion et une translation en même temps, ceci s'exprime par :

$$F(\sigma, \alpha, \sigma_B) = F(\sigma, -\alpha, \sigma_B) = F(\bar{\sigma}, \sigma_B) = |\bar{\sigma}| - \sigma_B = 0 \quad (I.6)$$

Avec :
$$\bar{\sigma} = \sigma - \alpha \quad (I.7)$$

$$\alpha = (1 - M) \int c. d\varepsilon^P \quad (I.8)$$

Et
$$\sigma_B = \sigma_0 + M \left| \int H. d\varepsilon^P \right| \quad (I.9)$$

Où M : est le coefficient de mixité tel que $0 \leq M \leq 1$ dans ce cas les modules d'écroutissement cinématique et isotrope sont différents ($c \neq H$).

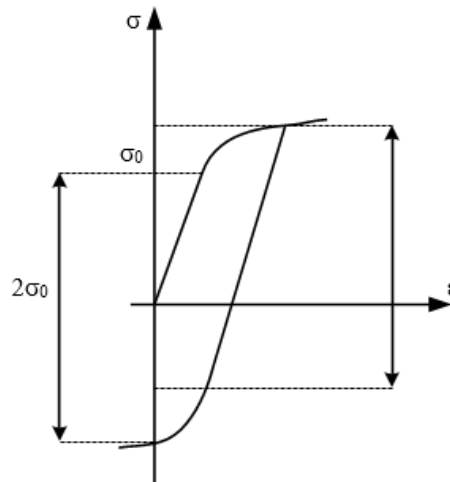


Figure I.8: Ecroutissage mixte

4.4. Règle d'écoulement ^{[2] [21] [20]}

Il est clair que dès que la limite d'élasticité initiale a été franchie, au cours de l'histoire de charge du matériau, l'apparition des déformations permanentes fait qu'il n'y a plus, comme en élasticité, correspondance biunivoque entre σ et ε : la donnée de σ ne suffit plus

à définir ε . En revanche, si l'on connaît non seulement la contrainte actuelle σ mais tout le trajet de charge suivi pour l'atteindre à partir de l'état initial naturel, alors la donnée d'une variation de contrainte $d\sigma$ suffit à déterminer la variation correspondante de la déformation. On dit que la loi de comportement est de type incrémental. $d\varepsilon$

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^P \quad (\text{I.10})$$

L'incrément des contraintes $d\sigma$ est dû aux déformations élastiques et donc :

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon^e \quad (\text{I.11})$$

Donc le module d'élasticité est défini dans chaque état (σ, ε) par: $E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e}$

Dans le cas où le point de charge serait à la limite d'élasticité actuelle on définit le « module élasto-plasticité tangent » par la relation :

$$E^{eP} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e} \quad \text{donc : } d\sigma = E^{eP} \cdot d\varepsilon^e \quad (\text{I.12})$$

Et le module d'écrouissage du matériau étant :

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^P} \quad \text{donc : } d\sigma = H \cdot d\varepsilon^P \quad (\text{I.13})$$

On a alors la relation évidente :

$$\frac{1}{E^{eP}} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H} \quad (\text{I.14})$$

La relation (I.12) est appelée règle d'écoulement plastique.

5. Théorie incrémentale de plasticité multiaxiale

5.1. Hypothèses de base^[21] [13]

a. Sur les déformations

Les déformations étant admises petites, on peut les décomposer additivement en une partie élastique (e) et l'autre plastique (p), la partie élastique étant liée aux contraintes par la loi de Hooke-Cauchy.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^P \quad \text{Avec : } d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^e d\varepsilon_{kl}^e \quad (\text{I.15})$$

Où $d\varepsilon_{ij}^e$ et ε_{ij}^P sont respectivement l'accroissement des déformations élastiques et plastiques. De plus, les déformations plastiques sont supposées incompressibles : $\varepsilon_{mm}^P = 0$

b. Sur l'existence de surface de plasticité

L'état de contrainte peut se présenter par un point dans l'espace à neuf dimensions des

contraintes, l'origine en est l'état non contraint de la configuration initiale du corps, et, en son voisinage, existe une zone où un accroissement des contraintes $d\sigma_{ij}$ ne produit qu'un accroissement élastique des déformations $d\varepsilon_{ij}^e = 0$

La frontière de cette zone est la surface de plasticité ou d'écoulement initial, dont on suppose qu'elle existe. Elle se représente par l'équation :

$$F_0(\sigma_{ij}) = 0 \quad (\text{I.16})$$

Un état de contrainte situé à l'intérieur de celle-ci caractérise un état élastique $d\varepsilon_{ij}^e = 0$ tandis qu'un point situé sur cette surface définit un état élasto-plastique. Enfin, un point situé à l'extérieur de cette surface est impossible à atteindre.

Lorsque l'écrouissage se produit cette surface (de plasticité) change au fur et à mesure que les déformations plastiques progressent; l'expression mathématique de ces surfaces de plasticité successives s'appelle la fonction de charge, elle définit des régions successives dans lesquelles les points représentent des états élastiques et sur la frontière desquelles les points peuvent conduire à des états plastiques; enfin, elle dépend de l'état de contrainte atteint σ_{ij} ; de l'histoire des déformations plastiques ε_{ij}^P ; et de l'écrouissage par l'intermédiaire d'un paramètre k . En résumé:

$$F_0(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^P, K) = 0 \quad (\text{I.17})$$

Cette équation existe, et est telle que (Figure (I.9)).

$F < 0$: Etat élastique, $d\sigma_{ij}$ provoque $d\varepsilon_{ij}^P$ seulement, (c'est l'intérieur de la surface).

$F = 0$: Etat plastique, σ_{ij} peut provoquer ε_{ij}^P , (les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagné de déformations plastiques).

$F > 0$: Etat inadmissible (sans signification).

Lorsque le point représentatif de l'état des contraintes atteint la surface de charge $F=0$, deux cas de comportement élasto-plastique sont possibles :

- a- La surface de charge n'évolue pas (modèle élasto-plastique parfait) et l'expression de la surface de charge ne contient pas de paramètres d'écrouissages.
- b- La surface de charge s'évolue au cours du chargement (modèle élasto-plastique avec écrouissage).

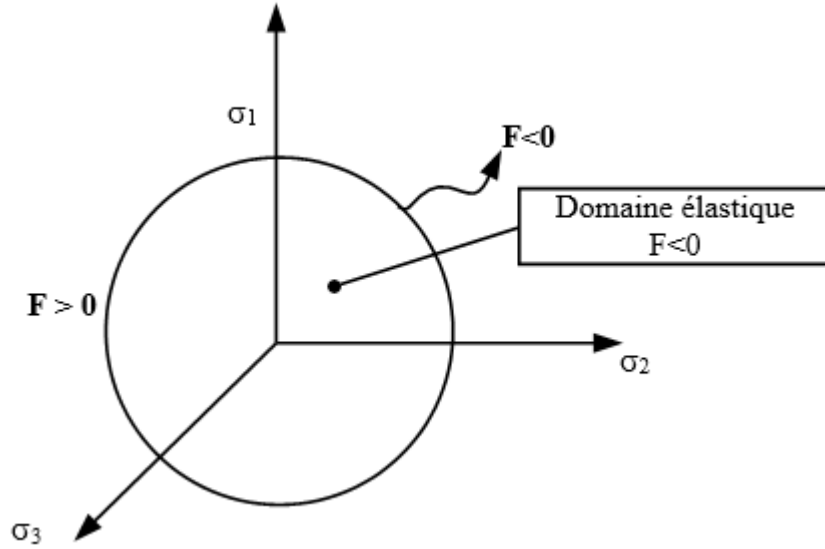


Figure I.9: Surface de charge

La valeur particulière $F = 0$ constitue la condition de plasticité à partir de laquelle on peut définir trois cas de chargement différents, pour un accroissement de sollicitation donné; soit la dF variation correspondante de la fonction de charge :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^P} d\varepsilon_{ij}^P + \frac{\partial F}{\partial K} dK \quad (\text{I.18})$$

- a) Si $\partial F = F + \partial F < 0$; et l'état atteint est élastique; donc $\partial \varepsilon_{ij}^P = 0$, $\partial K = 0$ et on a un processus de déchargement élastique

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \quad (\text{I.19})$$

C'est le cas de décharge et l'incrément de contrainte est dirigé vers l'intérieur du domaine élastique actuel, (Figure (I.10.b))

- b) Si $dF = 0$ et $d\varepsilon_{ij}^P = 0$ donc $dK = 0$; Ce processus qui passe d'un état plastique à un autre sans variation des incréments des déformations plastiques est appelé chargement neutre.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \quad (\text{I.20})$$

- c) Si $dF > 0$ et $d\varepsilon_{ij}^P \neq 0$; ce processus fait passer d'un état plastique à un autre et s'appelle chargement, on a pour ce cas :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \quad (\text{I.21})$$

C'est le cas de chargement et l'incrément de contrainte est dirigé vers l'extérieur du domaine élastique actuel, (Figure (I.10.a))

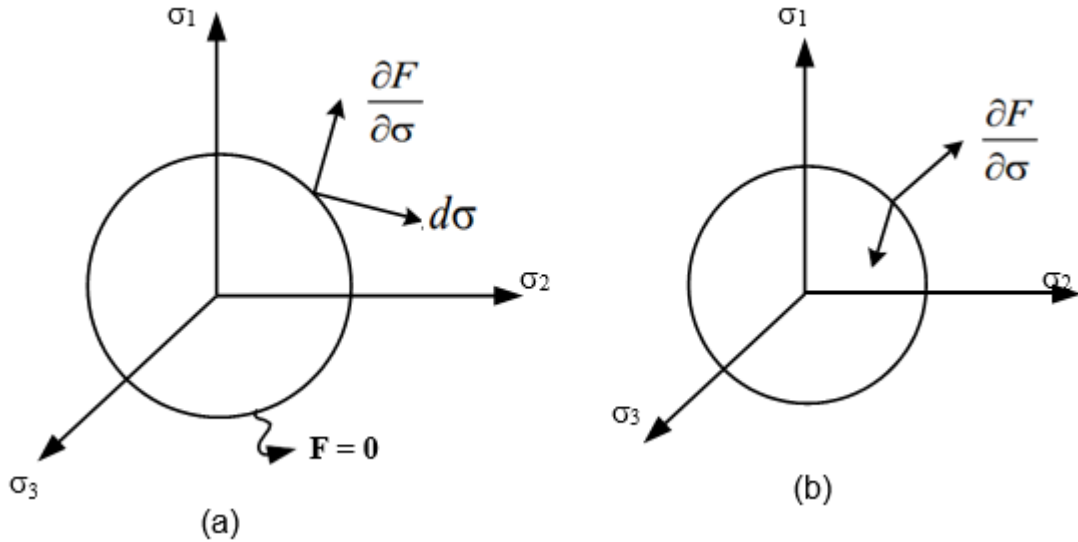


Figure I.10: domaine élastique Cas de charge et décharge

6. Différents critères élasto-plastiques ^{[13] [4] [5]}

On appelle critère de plasticité, une loi définit explicitement la forme de la surface de plasticité. Les critères de plasticité ont été initialement développés pour les métaux et ont ensuite été utilisés pour les sols, notamment en tant que critères de rupture.

6.1. Critère de Tresca

Après avoir effectué des essais sur le plomb, Tresca (1864) conclut que la plastification se produit lorsque la contrainte de cisaillement atteint une valeur limite.

On peut écrire donc :

$$F = \sigma_3 - \sigma_1 - 2k \quad (\text{I.22})$$

Où : $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Si les contraintes principales sont σ_1, σ_2 et σ_3 , ou $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, alors la plastification commence quand :

$$\sigma_3 - \sigma_1 = Y(k) \quad (\text{I.23})$$

Où : Y : un paramètre matériel déterminé expérimentalement.

K : paramètre d'écrouissage

Le seuil de la valeur de Y est habituellement la contrainte qui est déterminé de l'essai de traction simple (unidimensionnel) Pour la condition première plastification, on a :

$$\text{Max} \left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} \right] = \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (\text{I.24})$$

σ_y : Est la contrainte d'épuisement initiale en traction simple.

En fonction des invariants, le critère s'exprime par :

$$F(J, \theta) = 2\sqrt{J_2} \cos \theta - \sigma_y = 0 \quad (\text{I.25})$$

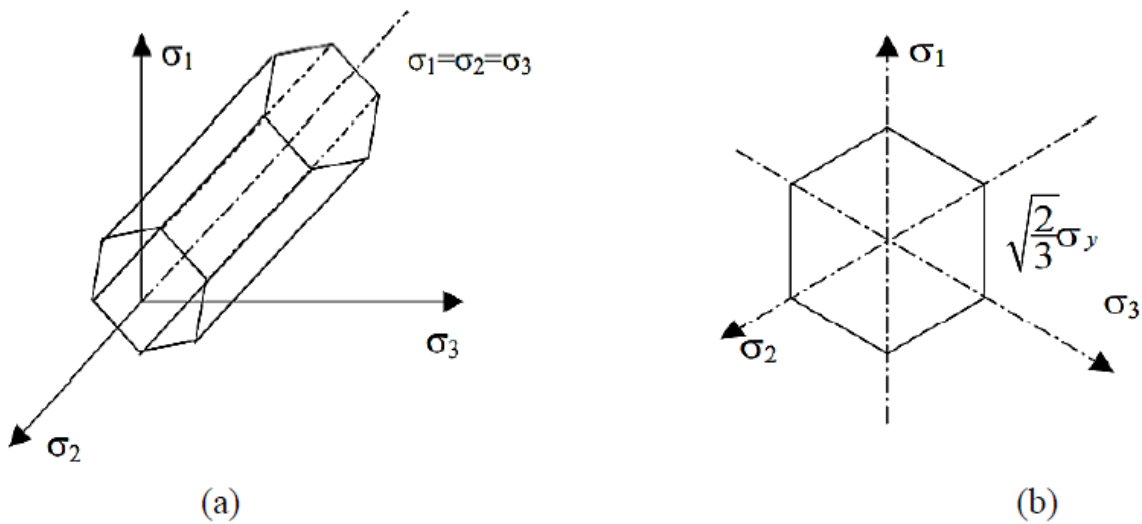


Figure I.11: Représentation du critère de Tresca (a) dans l'espace σ_1, σ_2 et σ_3 et (b) Section du prisme par le plan $\pi \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ ^[5]

6.2. Critère de Von-Mises

En 1913, le professeur autrichien Von-Mises a proposé de substituer au prisme hexagonal de Tresca le cylindre qui lui est circonscrit, afin d'obtenir un critère que s'exprime par une seule équation.

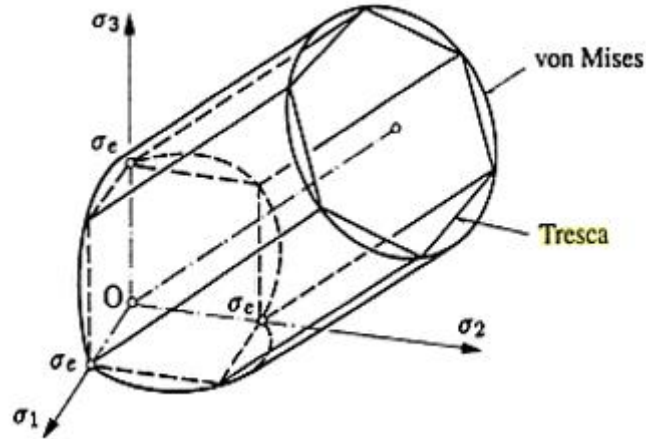


Figure I.12: prisme hexagonale de Tresca et cylindre de Von-Mises^[16]

L'équation de ce cylindre est (Figure (I.12))

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_e^2 \quad (\text{I.26})$$

En faisant apparaître une contrainte de comparaison σ^* , le critère de plastification de Von Mises s'écrit, à la plastification,

$$\sigma^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_e \quad (\text{I.27})$$

Dans ce critère, la contrainte principale intermédiaire joue donc un rôle, ce qui n'était pas le cas dans le critère de Tresca. Des recherches expérimentales précises ont effectivement mis en valeur son importance dans l'apparition des premières déformations plastiques et ont confirmé après coup la validité du critère de Von Mises.

6.3. Critère de Mohr-Coulomb

Coulomb proposa en [1773] le premier critère de plasticité en mécanique des sols (applicable aux problèmes de roches et de sols), et ce critère est encore maintenant très couramment utilisé. Ce critère est une généralisation de celui de Tresca sauf que la contrainte critique de cisaillement n'est plus constante mais dépend de la contrainte normale.

$$|\tau| = c - \sigma_n \cdot \tan(\phi) \quad (\text{I.28})$$

Ou : $|\tau|$: La magnitude de la contrainte de cisaillement

σ_n : La contrainte normale

c : La cohésion

ϕ : L'angle interne de frottement

Si les contraintes principales sont σ_1, σ_2 et σ_3 où $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ le critère de Mohr-Coulomb peut être écrit comme suit :

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = 2c \cos \phi - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi \quad (\text{I.29})$$

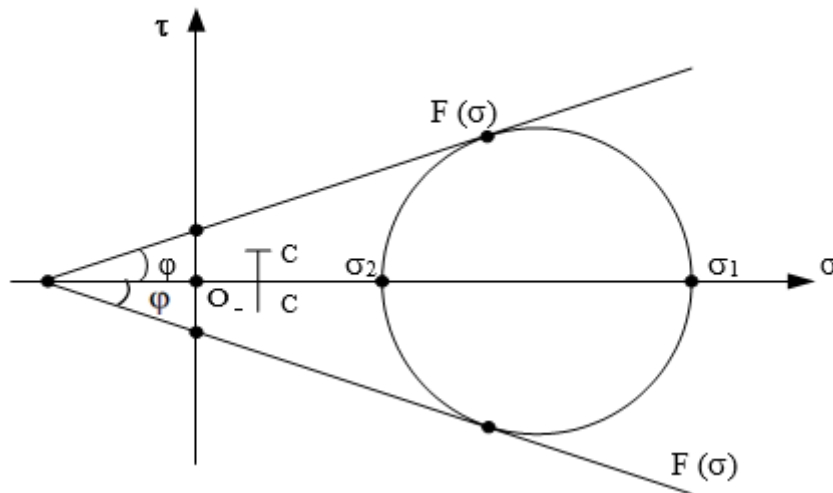


Figure I.13: Critère de Mohr-Coulomb^[13].

6.4. Critère de Drucker et Prager

Drucker et Prager [1952] ont présenté un critère qui prend en compte le premier invariant du tenseur des contraintes I_1 et le deuxième invariant du tenseur déviateur des contraintes (J_2), ce critère est une extension de celui de Von-Mises et de celui de Mohr-Coulomb. Sa fonction de charge est donnée par l'expression :

$$F(I_1 - J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2 - k} \quad (\text{I.30})$$

α et k définissent en fonction de la cohésion c et de l'angle de frottement interne ϕ

L'équation (I.30) représente graphiquement un cône circulaire :

- ❖ Pour coïncider le cercle de Drucker-Prager avec les sommets extérieurs de l'hexagone de Mohr-Coulomb à chaque section, on a :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad \text{Et} \quad k = \frac{6c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (\text{I.31})$$

- ❖ Pour faire coïncider avec les sommets intérieurs, on aura :

$$\alpha = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad \text{Et} \quad k = \frac{6c \cdot \cos \phi}{\sqrt{3}(3 + \sin \phi)} \quad (\text{I.32})$$

La surface représentative du critère dans l'espace σ_1, σ_2 et σ_3 est un cône dont le sommet se trouve sur l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Figure (I.14)

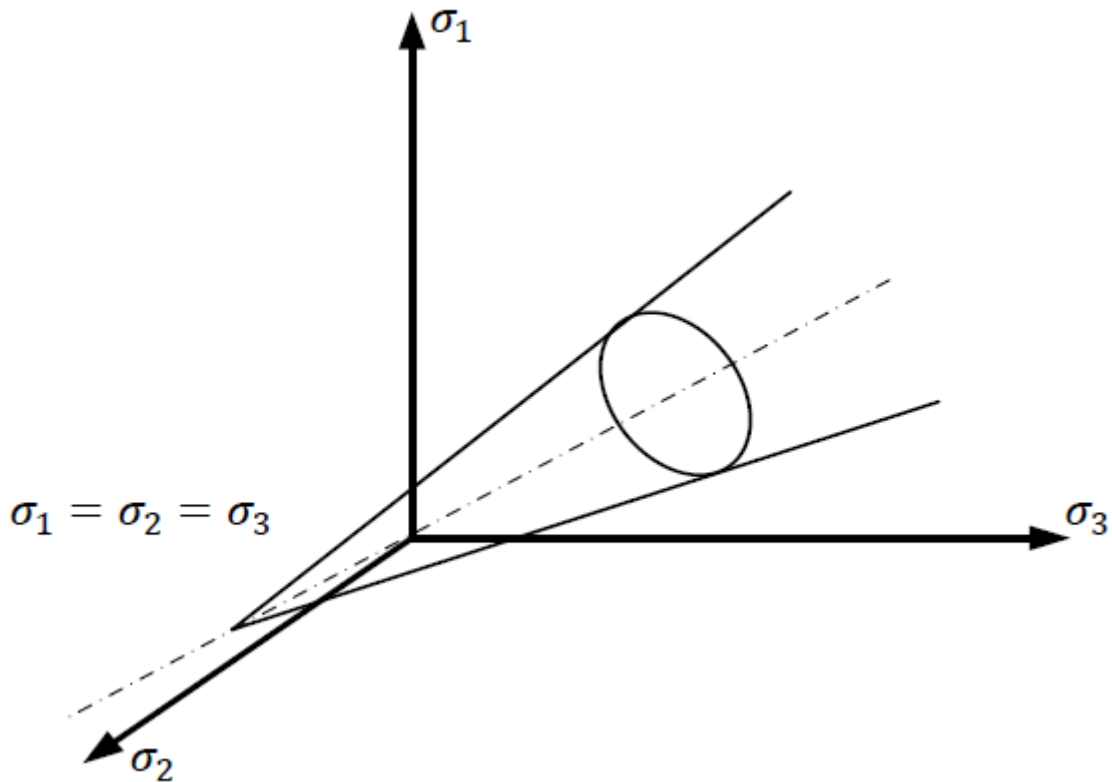


Figure I.14: Critère de Drucker et Prager dans l'espace σ_1, σ_2 et σ_3 ^[5]

7. Méthodes de résolution des systèmes non linéaires^[14]

Il n'existe pas de méthode directe de résolution des systèmes non linéaires. Ces derniers, sont toujours solutionnés par linéarisations successives tout en essayant de satisfaire les conditions non linéaires à une certaine précision.

Un problème structurel non linéaire doit vérifier les lois de la mécanique des milieux continus qui sont :

- Equilibre.
- Compatibilité.
- Lois constitutives.

Dans la méthode des éléments finis, une des trois conditions est automatiquement vérifiée (compatibilité dans la formulation en déplacements et équilibre dans la formulation en contraintes). Il suffit donc de vérifier les lois constitutives tout en préservant l'équilibre de la structure (ou compatibilité des déplacements). Il existe plusieurs méthodes numériques de résolution de problèmes non linéaires. Elles sont dans leur quasi-totalité basées sur un même principe qui est

A partir d'une approximation initiale des déplacements (éventuellement nulle), on calcule les contraintes selon le modèle constitutif. Ces contraintes sont équivalentes à un système de forces nodales internes $\{F_i\}$ devant équilibrer les forces nodales extérieures $\{F\}$.

Généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée « forces résiduelles » ou simplement « résidus »

$$\Delta F = F - F_i \quad (I.33)$$

Ces résidus doivent être éliminés afin d'assurer l'équilibre.

En général, pour un niveau de charge donné, un certain nombre d'itérations linéaires est nécessaire pour réduire les forces résiduelles à un certain degré de précision fixé.

La qualité des résultats finaux dépend des différents paramètres numériques associés à la méthode utilisée, par exemple :

- Dimension de l'incrément ;
- Procédé d'itération ;
- Précision requise ;
- Critère de convergence, etc.

Les nombreuses méthodes non linéaires existantes peuvent être groupées en trois classes :

- Incrementales ;

- Itératives ;
- Mixtes.

7.1. Méthodes incrémentales :

Le chargement est subdivisé en plusieurs incréments pas forcément égaux. Durant chaque incrément, les déplacements sont obtenus par la résolution d'un système linéaire : $[K]\{U\}=\{F\}$ ou $[K]$ est déduite des résultats de l'incrément précédent, auquel sont ajoutés les déplacements cumulés précédemment. Le procédé est répété jusqu'à chargement final (Figure 1.15)

Il n'y a aucune itération pour restaurer l'équilibre, l'inconvénient majeur réside dans le cumul des erreurs et dans l'impossibilité de prévoir la taille minimale des incréments pour satisfaire une tolérance fixée.

Une des variantes de la technique est la méthode médiane de Runge_Kutta ou la matrice de rigidité K est évaluée au milieu de l'incrément.

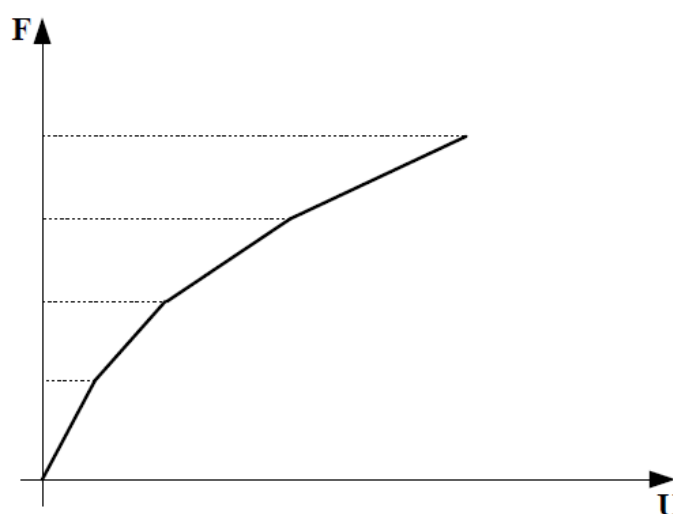


Figure I.15: Méthodes incrémentales^[4]

7.2 Méthode incrémentale itérative : ^{[6] [26] [5]}

La méthode incrémentale itérative utilise le même processus incrémental que la méthode précédant seulement, une correction de l'équilibre est introduite sur chaque incrément en utilisant un processus itératif. Cette correction peut se faire de plusieurs manières suivant le type de matrice de rigidité utilisée (initiale, tangente) définissant ainsi plusieurs méthodes incrémentales itératives dont la plus connue est celle de Newton-Raphson. Dans

l'analyse incrémental, la charge totale agissant sur une structure est appliquée incrémentalement par pas. À l'étape $m+1$, la charge peut être exprimée par :

$${}^{m+1}\{F\} = {}^m\{F\} + {}^{m+1}\{\Delta F\} \quad (\text{I.34})$$

Là où l'indice supérieur gauche m a été employé pour indiquer le m^{eme} pas incrémental.

Supposant que les solutions au m^{eme} pas ${}^m\{U\}$, ${}^m\{\sigma\}$, ${}^m\{\varepsilon\}$ sont connues, et à l'étape ($m+1$) nous avons correspondant à la charge incrémentale $\{\Delta F\}$

$${}^{m+1}\{U\} = {}^m\{U\} + \{\Delta U\} \quad (\text{I.35})$$

$${}^{m+1}\{\sigma\} = {}^m\{\sigma\} + \{\Delta \sigma\} \quad (\text{I.36})$$

$${}^{m+1}\{F\} = {}^{m+1}\{R\} \quad (\text{I.37})$$

L'équation (1.46) représente l'équilibre des forces nodales extérieures ${}^{m+1}\{F\}$ et des forces nodales internes ${}^{m+1}\{R\}$.

Mais généralement les deux systèmes de forces ne sont pas égaux et la différence entre les deux est appelée (Forces résiduelles) :

$$\Delta F = {}^{m+1}\{F\} + {}^{m+1}\{R\} \quad (\text{I.38})$$

Pour assurer l'équilibre, ces résidus doivent être minimisés.

7.2.1 Méthode de Newton-Raphson (Rigidité tangente) : [5] [7] [8]

La méthode de Newton-Raphson utilise la matrice de rigidité tangente recalculée à chaque itération pour la correction de l'équilibre, voir Figure (1.16).

Cette méthode a une convergence très rapide, mais son inconvénient principal réside dans le temps de calcul de l'actualisation de la matrice de rigidité tangente à chaque itération.

Algorithme de la méthode de Newton-Raphson : [5]

$${}^{m+1}[K]^{(i-1)}\{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} + \{R\}^{(i-1)} \quad (\text{I.39})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (\text{I.40})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (\text{I.41})$$

$${}^{m+1}[K]^{(0)} = {}^m[K] \quad (\text{I.42})$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (\text{I.43})$$

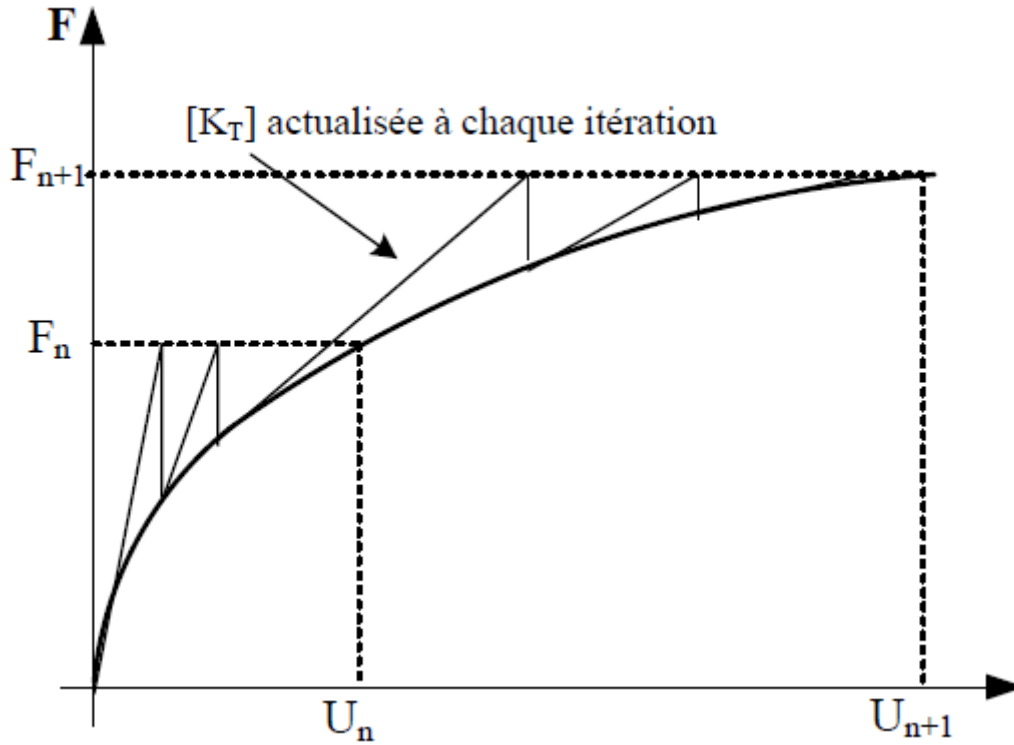


Figure I.15: Méthode de Newton-Raphson^[5]

7.2. Méthode de Newton-Raphson modifiée : ^{[5] [7] [8] [27]}

La méthode de Newton-Raphson modifiée est identique à la précédente mais, utilise la matrice de rigidité tangente recalculée au début de chaque incrément et gardée constante pour toutes les itérations pour la correction de l'équilibre, voir Figure (1.17). Cette méthode a une convergence moins rapide que la précédente, mais elle a l'avantage de garder la matrice de rigidité constante pour chaque incrément ce qui permet d'avoir un gain sensible dans le temps de calcul.

En effet, dans la méthode de résolution de Newton-Raphson modifiée, nous pouvons éviter au début le calcul systématique de la matrice de rigidité tangente, en le remplaçant par une matrice de rigidité initiale dans le but de vérifier la fiabilité des forces internes correspondant aux contraintes dans la structure. Ou bien, pour résoudre les problèmes de faible

non-linéarité ou de non-linéarité matérielle. Cependant, la lenteur de convergence liée à cette méthode peut être améliorée en la couplant avec des méthodes d'accélération de convergence de type "line- search"

Actuellement, la méthode de résolution de Newton-Raphson standard constitue la base d'algorithmes de résolutions la plus répandue pour résoudre les problèmes de structures non linéaires. Signalons tout de même qu'on reste toujours gagnant en termes de nombre d'itérations par incrément avec l'utilisation de la méthode de résolution de Newton-Raphson. Par contre le temps de calcul reste coûteux, car pour une modélisation de taille importante et des degrés de liberté élevés, à cause de l'assemblage et de l'actualisation de sa matrice de rigidité tangente à chaque incrément.

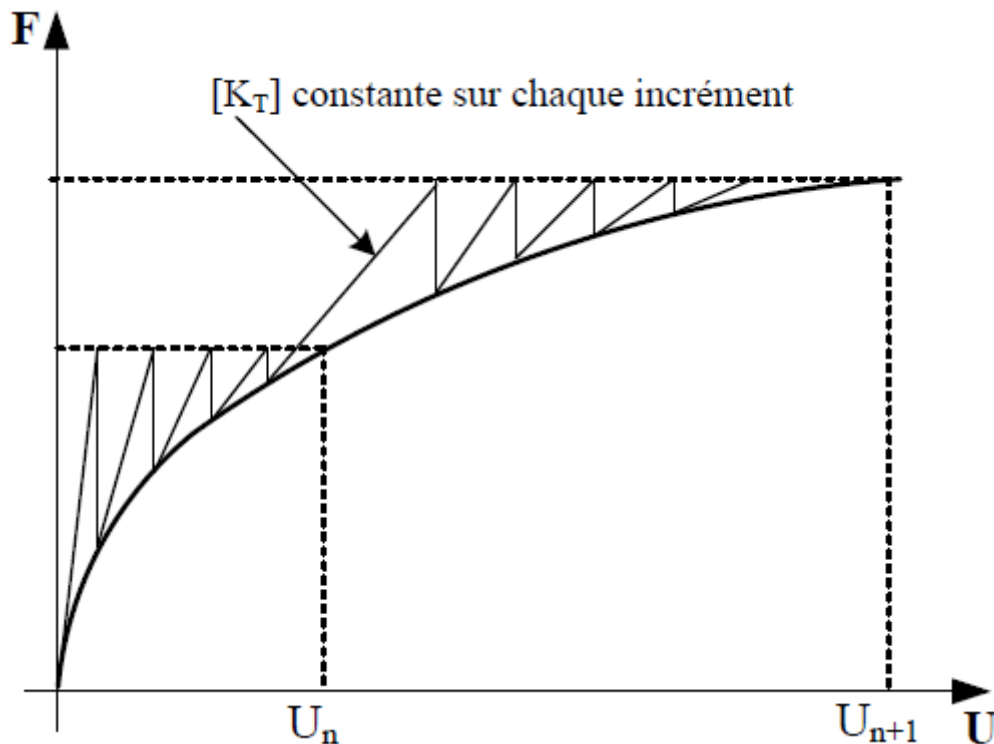


Figure I.16: Méthode de Newton-Raphson modifiée^[5]

Algorithme de la méthode de Newton-Raphson modifiée :^[5]

En remplace la matrice de rigidité tangente ${}^{m+1}[K]^{(i-1)}$ de l'équation (1.48) par ${}^n[K]$ la matrice de rigidité tangente évalué e à l'étape n de charge ($n < m + 1$).

Si ${}^n[K]$ est évaluée seulement au début de la première étape de charge donc la matrice élastique initiale ${}^n[K] = [K]_0$ est employée pour toutes les étapes de charge : Souvent, la

matrice de rigidité et évaluer au début de chaque pas de la charge ou pour le $m + 1$ pas, la matrice de rigidité utilisée est :

$${}^n[K] = {}^{m+1}[K]^{(0)} = {}^m[K] \quad (\text{I.44})$$

Donc l'algorithme est :

$${}^n[K]\{\Delta U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{F\} - \{R\}^{(i-1)} \quad (\text{I.45})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(i)} = {}^{m+1}\{U\}^{(i-1)} - \{\Delta U\}^{(i)} \quad (\text{I.46})$$

$${}^{m+1}\{U\}^{(0)} = {}^m\{U\} \quad (\text{I.47})$$

$${}^{m+1}\{F\}^{(0)} = {}^m\{F\} \quad (\text{I.48})$$

Tel que $i = 1, 2, 3, \dots$

Chapitre II :
Méthode des
éléments finis

Chapitre II. Méthode des éléments finis

1. Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique de résolution, approchée des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques de l'ingénierie.

D'une façon générale, la résolution par la MEF inclut les étapes suivantes :

- Obtention de la formulation du problème
- Réalisation d'un maillage, correspondant à la discrétisation du domaine 'étude en Éléments (triangles, tétraèdres, hexaèdres. . .) sur lesquels les Champs sont écrits en Termes d'un nombre fini de degrés de liberté et de fonctions de base à repère local.
- Calcul des matrices élémentaires qui, après assemblage, génèrent un système matriciel.
- Résolution du système algébrique pour l'obtention d'une solution approchée du Problème.

2. Les propriétés d'un élément fini: ^[19]

Le découpage en éléments finis permet d'isoler un élément fini pour l'étudier tout en établissant les caractéristiques.

2.1. Attributs d'un élément fini:

L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- **Géométrie** : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangulaire ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.
- **Matériau** : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (Loi de Hooke isotrope ...etc.).
- **Nœuds** : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres ; ils occupent les sommets, les milieux des arêtes et faces etc.
- **Degrés de liberté** : la fonction d'approximation (en général le champ de déplacements ou champ de potentiels) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

- **Forces nodales** : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température etc.).

Ces paramètres d'identification permettent de construire les deux caractéristiques clés d'un Élément fini qui sont sa matrice de rigidité et son vecteur de force.

3. Caractéristiques d'un élément fini:

Le signalement précédent permet de construire les deux Caractéristiques d'un élément fini qui sont:

- ❖ Sa matrice de rigidité K
- ❖ Son vecteur force F

Elles interviennent dans l'équation d'équilibre de l'élément fini, en relation forces et déplacement.

$$F = K U \quad (\text{II.1})$$

4. Théorèmes de l'énergie :

4.1. Notations : ^[15]

La résolution d'un problème de structure consiste à étudier trois champs vectoriels ainsi que Leur relation.

- Le champ de déplacement

$$u(x) = \begin{cases} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

- Le champ des déformations

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

- Le champ des contraintes

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

- Relation déplacement-déformation

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{II.5})$$

Dans le cas de la théorie linéaire de l'élasticité (les déplacements et les déformations sont petits, donc le produit $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ devient négligeable), on aura

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.6})$$

4.2. Les relations de compatibilité : [15], [9], [28]

Les déplacements de l'ensemble de la structure ou de chacun de ses éléments doivent être compatibles, en d'autres termes les déplacements des extrémités des éléments qui sont connectés à un même doivent être identiques.

On peut encore dire que si on effectue une section sur un élément, les déplacements d'élément à gauche et à droite de cette section doivent être égaux.

Le premier problème est celui de la compatibilité des déformations, le seconde celui de l'intégration d'un champ de déplacement

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ji}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{II.7})$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_j^2} \right) \quad (\text{II.8})$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} \quad (\text{II.9})$$

Cette équation (II.9) générale permet d'exprimer les équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

4.3. Lois de Hooke:

Le comportement de la structure doit satisfaire à la loi de HOOKE qui décrit le rapport entre la charge et la déformation des matériaux.

Dans toute l'étude qui suit, on considérait que la déformation est proportionnelle à la charge, ce qui se traduit par l'équation (II.1).

4.4. Conditions aux limites:

Les conditions aux limites exigent que les conditions d'équilibre et de compatibilité en chacune des limites de la structure soient satisfaites

5. Théorèmes énergétiques en élasticité: ^{[15], [12]}

Pour effectuer un calcul de structure, il est nécessaire de connaître :

- L'expression des équations d'équilibre et les efforts appliqués.
- Les conditions aux limites.
- La loi de comportement.

Les différentes formulations énergétiques permettent de faire une synthèse de ces trois éléments constitutifs d'un problème de structure, et ainsi d'obtenir une formulation plus compacte et donc facile à discrétiser. Ce sont ces formulations qui sont à la base des méthodes par éléments finis.

5.1. Principe de travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre sous l'action de forces de volume et des forces de surfaces f_i et pour tous champs de déplacements virtuels cinématiquement admissible (δu_i)

$$\int_{sf} f_i \delta u_i ds + \int_V b_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{ij} dV \quad (\text{II.10})$$

Cette relation est l'expression générale du principe des travaux virtuels pour un corps solide déformable.

On peut la mettre sous la forme courante si l'on effectue les hypothèses suivantes : H1 : Petits déplacements et déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.11})$$

H2 : Existence d'un potentiel de déformation tel que :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (\text{II.12})$$

Donc :

$$\delta U = \int_V W dV = \int_{sf} f_i \delta u_i ds + \int_V b_i \delta u_i dV \quad (\text{II.13})$$

L'accroissement virtuel de l'énergie de déformation ($U = \int_V W dV$) est égal à la somme des travaux virtuels des forces de volume et de surface dans tout accroissement virtuel cinématique admissible du champ des déplacements.

5.2. Théorème de l'énergie potentielle totale : ^[15]

Le principe des déplacements virtuels et du minimum d'énergie potentielle totale jouent un rôle important dans les méthodes de calcul des structures élastiques. Les déplacements cinématiquement admissibles pour un état d'équilibre stable, qui satisfont les conditions d'équilibre, sont ceux qui minimisent l'énergie potentielle et réciproquement. Soit la première variation de l'énergie potentielle totale :

$$\delta U = \int_V W dV = \int_{S_f} f_i \delta u_i ds + \int_V b_i \delta u_i dV \quad (\text{II.14})$$

De plus, on a :

$$\delta \int_V W dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV \quad (\text{II.15})$$

D'où en applique le théorème de Gauss et on obtient donc finalement :

$$\delta U = \int_V (\delta_{ij,j} + f_i) \delta u_i dV + \int_S (\sigma_{ij} n_j - b_i) \delta u_i ds \quad (\text{II.16})$$

La stationnarité de V implique que :

$$\delta U = 0 + 0 \quad \forall \delta u_i \neq 0$$

Donc les conditions d'équilibre dans V et sur S_f constituent les conditions d'extremum de l'énergie potentielle totale pour toute variation cinématiquement admissible des déplacements.

5.3. Application au principe des travaux virtuels :

Pour un corps solide en équilibre, et pour tous champs de déplacements virtuels cinématiquement admissible et satisfaisant les conditions aux limites de déplacement le travail virtuel interne totale de déformation doit être égale au travail virtuel des forces extérieures.

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{f^v\} dV + \int_{S_f} \delta \{u^s\}^T \{f^s\} ds + \sum_i \delta \{u^s\}^T \{F^i\} \quad (\text{II.17})$$

i: points soumis à des forces concentrées.

$\{f^s\}$: Forces de surface.

$\{f^v\}$: Forces de volume.

$\{F\}$: Forces concentrée.

$\{u\}$ Et $\{u^s\}$ Sont les déplacements correspondant aux forces $\{f^s\}$ et $\{f^v\}$.

L'énergie potentielle totale est stationnaire de plus pour un équilibre stable elle est minimum :

$$\Pi = U + V \quad (\text{II.18})$$

U: Energie de déformation interne

V : Potentiel des forces appliquées (opposé du travail des forces extérieures).

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \delta\{u\}^T \{f^v\} dV - \int_{sf} \{u^s\}^T \{f^s\} ds - \sum_i \delta\{u_i\}^T \{F_i\} \quad (\text{II.19})$$

a. Interpolation de déplacement :

Elle permet d'exprimer le déplacement en tout point de l'élément en fonction du déplacement des nœuds.

$$\{u\} = [N_e] \{u_e\} \quad (\text{II.20})$$

b. Interpolation de la déformation :

Les déformations de l'élément « e » sont obtenues par différentiation des déplacements :

$$\{u\} = [N_e] \{u_e\} \quad (\text{II.21})$$

Donc :

$$\{\varepsilon_e\} = [B_e] \{u_e\} \quad (\text{II.22})$$

Avec : $[B_e] = [L][N_e]$

Où $[L]$: Matrice Laplacienne.

c. Interpolation de la contrainte :

Les contraintes sont liées aux déformations par la relation :

$$\{\sigma_e\} = [D] \{\varepsilon_e\} + \{\sigma_0^e\} \quad (\text{II.23})$$

Où : les contraintes initiales.

$[D]$: matrice d'élasticité.

d. Matrice de rigidité élémentaire :

D'après le théorème des travaux virtuels on a :

$$W_{int} = W_{ext}$$

Donc :

$$\int_{V_e} \{\varepsilon_e\}^T \{\sigma_e\} dV = \{\tilde{u}_e\}^T + \{F_e\} \quad (\text{II.24})$$

$$\int_{V_e} ([B_e]\{u_e\})^T ([B_e]\{u_e\}[D]) dV = \{\tilde{u}_e\}^T \{F_e\} \quad (\text{II.25})$$

$$\{\tilde{u}_e\}^T \left[\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \right] \{u_e\} = \{\tilde{u}_e\} \{F_e\} \quad (\text{II.26})$$

$$\left[\int_{V_e} [B_e]^T [D] [B_e] dV \right] \{u_e\} = \{F_e\} \quad (\text{II.27})$$

$\{\tilde{u}_e\}$: Déplacement virtuel.

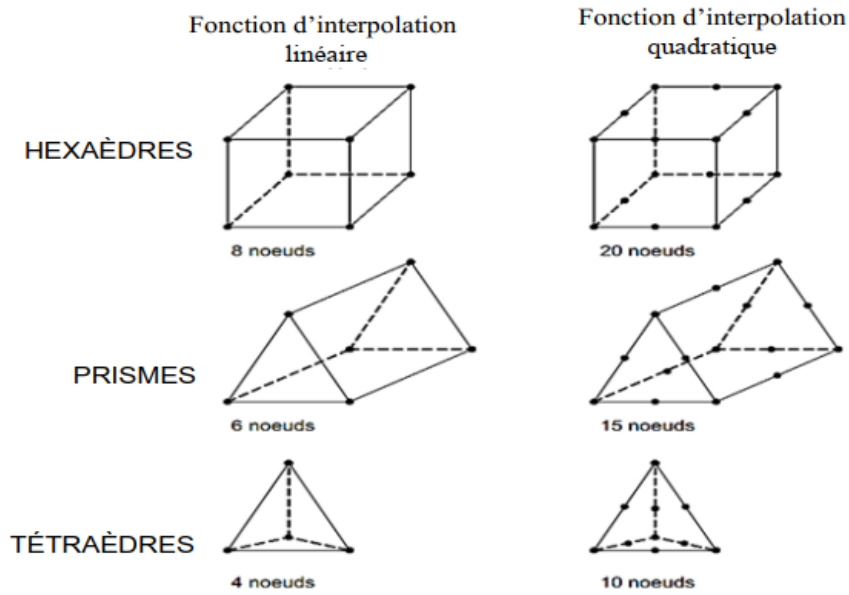
On aura finalement la matrice de rigidité élémentaire sous la forme :

$$[K_e] = [B_e]^T [D] [B_e] dV \quad (\text{II.28})$$

6.Éléments finis volumiques :

6.1. Introduction :^[17]

Un élément de volume est un élément tridimensionnel dont toutes les dimensions sont du même ordre de grandeur. On l'utilise pour la modélisation des pièces massives ou des parties massives dans une structure. Aucune hypothèse n'est faite a priori sur le champ de contrainte ni sur le champ de déformation : c'est de l'élasticité tri dimensionnelle. C'est un élément à définition volumique, dont la géométrie est explicitement décrite. C'est un élément coûteux lors de l'introduction des données, souvent plus longue et plus fastidieuse que pour les autres types d'éléments. Il est également coûteux dans la phase de résolution car, à nombre égal de degrés de liberté, les matrices sont plus peuplées et la largeur de bande ou de front est plus importante que dans le cas de problèmes à définition surfacique. Vu l'évolution des programmes de maillage automatique, la puissance des machines actuelles et la capacité des disques, l'utilisation de ce type d'éléments est néanmoins fréquente. Il en existe de plusieurs formes comme le montre la Figure (II.1): hexaèdres, prismes et tétraèdres.



Figure(II.1): Éléments de volume (Solides 3D)

6.2. Présentation de l'élément fini hexaédrique (H8) : ^[3]

L'élément pris en compte est un élément tridimensionnel figure 1.10 pour lequel est présentée la méthodologie de calcul de la matrice de rigidité.

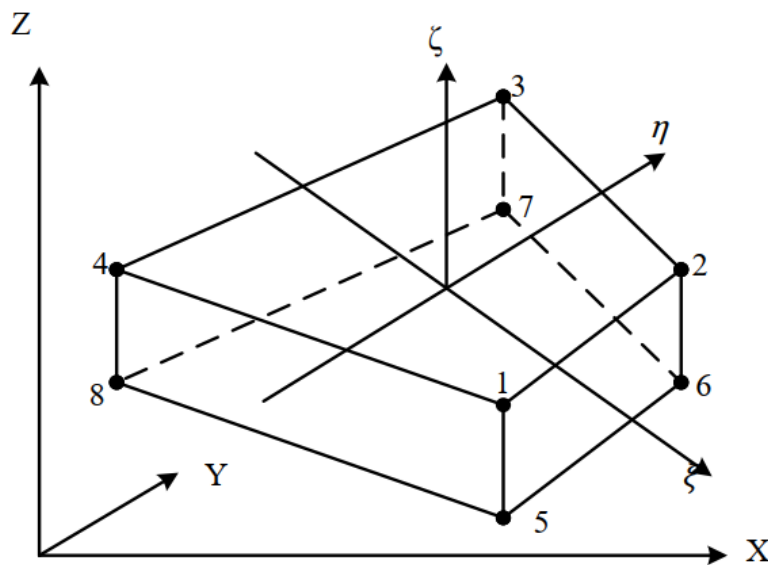


Figure (II.2) : Éléments fini tridimensionnel rapporté au système de coordonnées globales

Celui-ci a huit nœuds, trois degrés de liberté pour chaque nœud (trois translations) et rapporté au système de coordonnées naturel $O \xi \eta \zeta$, figure (II.3) Par rapport à son système naturel de coordonnées, l'élément devient un cube ayant les dimensions sur les trois directions comprises entre -1 et 1. C'est un élément isoparamétrique, donc il utilise les mêmes fonctions d'interpolation, aussi bien pour l'approximation du champ de déplacements que pour la description de sa géométrie.

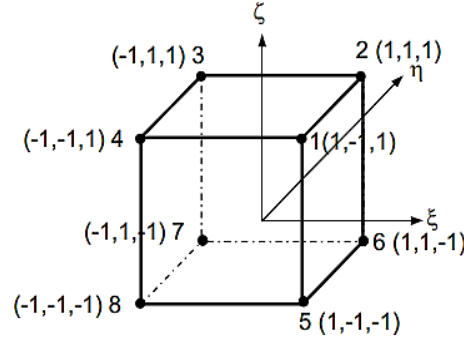


Figure (II.3): Élément fini tridimensionnel rapporté au système de coordonnées naturelles

Les fonctions de forme correspondantes seront :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\
 N_2 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\
 N_3 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\
 N_4 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\
 N_5 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
 N_6 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
 N_7 &= \frac{1}{8} (1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\
 N_8 &= \frac{1}{8} (1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)
 \end{aligned} \tag{II.29}$$

Les fonctions de forme N_i vérifient les propriétés de la MEF : elles sont nulles dans n'importe quel point exceptant le nœud i et égales à l'unité dans le nœud respectif.

6.2.1 Déplacement :

Le vecteur des déplacements nodaux pour un élément a 24 composantes et peut être écrit sous forme de :

$$\{\delta_e\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_8 \end{Bmatrix} \quad \{U_1\} = \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{zi} \end{Bmatrix} ; i = 1 \dots 8 \tag{II.30}$$

Où représente le déplacement du nœud i sur la direction de l'axe OX etc. Le vecteur des déplacements dans l'intérieur de l'élément (vecteur du champ de déplacements) est approximé à l'aide des fonctions de forme N_i , $i = 1...8$:

$$\begin{cases} U_x(x, y, z) = N_1 U_{x1} + N_2 U_{x2} + \dots + N_8 U_{x8} \\ U_y(x, y, z) = N_1 U_{y1} + N_2 U_{y2} + \dots + N_8 U_{y8} \\ U_z(x, y, z) = N_1 U_{z1} + N_2 U_{z2} + \dots + N_8 U_{z8} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Une autre forme dont la relation (1.31) peut être écrite sera:

$$\begin{cases} U_x(x, y, z) \\ U_y(x, y, z) \\ U_z(x, y, z) \end{cases} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \times \begin{cases} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{z1} \\ \vdots \\ U_{x8} \\ U_{y8} \\ U_{z8} \end{cases} \quad (\text{II.32})$$

Sous une forme condensée, la relation (1.32), s'écrit sous la forme :

$$\{\Delta\} = \begin{cases} U_x(x, y, z) \\ U_y(x, y, z) \\ U_z(x, y, z) \end{cases} = [[\phi_1][\phi_2][\phi_3] \dots [\phi_8]]\{\delta_e\} \quad (\text{II.33})$$

Où est le vecteur du champ de déplacement.

6.2.2. Approximation de la géométrie :

L'élément fini en cause est isoparamétrique, donc aussi bien sa géométrie que l'approximation des déplacements intérieurs sont obtenus à l'aide des mêmes fonctions de forme, comme il en suit :

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i; \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (\text{II.34})$$

Ou bien :

$$x = [N_1 \quad N_2 \quad N_2 \quad \dots \quad N_8] \times \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_8 \end{cases} = [N] \times \{x\} \quad (\text{II.35})$$

$$y = [N_1 \quad N_2 \quad N_2 \quad \dots \quad N_8] \times \begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_8 \end{cases} = [N] \times \{y\} \quad (\text{II.36})$$

De même, $z = [N]$. $\{Z\}$. $[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_8] =$ matrice ligne des fonctions de forme ; $\{X\}$, $\{Y\}$, $\{Z\} =$ vecteur des coordonnées nodales de l'élément.

6.2.3. Dédution de la matrice $[B]$:

Les relations entre les déplacements et les déformations relatifs sont :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} ; \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} ; \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.37})$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = [\partial] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\partial]\{\Delta\} \quad (\text{II.38})$$

En introduisant la valeur de

$$\{\Delta\} = [[\phi_1][\phi_2][\phi_3] \dots [\phi_8]]\{\delta_e\} \quad (\text{II.39})$$

On obtient

$$\{\varepsilon\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}}_B \{\delta_e\} \quad (\text{II.40})$$

Ou, sous forme condensée :

$$\{\varepsilon\} = [[B_1][B_1][B_1] \dots [B_1]]\{\delta_e\} \quad (\text{II.41})$$

6.2.4. Matrice de la rigidité :

En connaissant les matrices $[B]$ et $[H]$, on peut déterminer l'expression la matrice de rigidité pour l'élément fini en cause. Pour un élément de volume parallélépipédique, le volume élémentaire est : $dv = dx dy dz$

$$[K^e] = \int_v [B]^T \cdot [H] \cdot [B] dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot \det[J] d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{II.42})$$

L'utilisation du système naturel de coordonnées présente l'avantage qu'il permet le calcul numérique des intégrales avec une très bonne précision.

$$[H] = a \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

$$a = \frac{E}{(1 + \nu) \left(\frac{1 - 2\nu}{2} \right)}$$

7. Présentation des éléments isoparamétriques utilisés : ^[11]

7.1. Élément à 8 nœuds Hex8 :

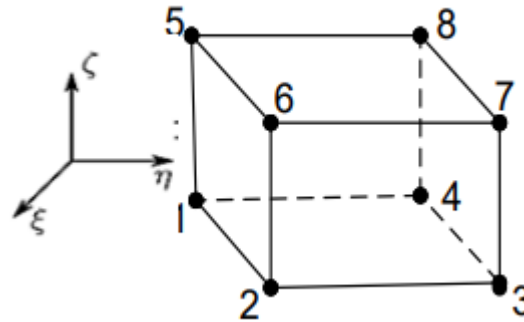


Figure (II.4): Élément H8

Le domaine de référence est le cube $(-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1, -1 \leq \zeta \leq 1)$. Cet élément comporte une variable en chacun de ses 8 nœuds. Les nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation.

$$\langle N \rangle = \langle 1 \ \xi \ \eta \ \zeta \ \xi\eta \ \eta\zeta \ \xi\zeta \ \xi\eta\zeta \rangle \quad (\text{II.44})$$

Les fonctions N sont les produits de fonctions N de l'élément linéaire à une dimension.

$\frac{1}{c} \{N\}$	$\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\}$	$\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\}$	$\frac{1}{c} \left\{ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \right\}$	c
$a_2 b_2 c_2$	$-b_2 c_2$	$-a_2 c_2$	$-a_2 b_2$	$\frac{1}{8}$
$a_1 b_2 c_2$	$b_2 c_2$	$-a_1 c_2$	$-a_1 b_2$	
$a_1 b_1 c_2$	$b_1 c_2$	$a_1 c_2$	$-a_1 b_1$	
$a_2 b_1 c_2$	$-b_1 c_2$	$a_2 c_2$	$-a_2 b_1$	
$a_2 b_2 c_1$	$-b_2 c_1$	$-a_2 c_1$	$a_2 b_2$	
$a_1 b_2 c_1$	$b_2 c_1$	$-a_1 c_1$	$a_1 b_2$	
$a_1 b_1 c_1$	$b_1 c_1$	$a_1 c_1$	$a_1 b_1$	
$a_2 b_1 c_1$	$-b_1 c_1$	$a_2 c_1$	$a_2 b_1$	

Avec

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + \xi; & a_2 &= 1 - \xi \\ b_1 &= 1 + \eta; & b_2 &= 1 - \eta \\ c_1 &= 1 + \zeta; & c_2 &= 1 - \zeta \end{aligned}$$

7.2. Élément à 20 nœuds Hex20 :

Cet élément est très souvent utilisé surtout sous sa forme isoparamétrique :

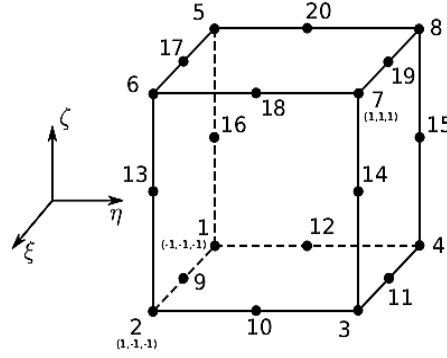


Figure (II.5) : Elément H20

$$\langle N \rangle = \langle 1 \ \xi \ \eta \ \zeta ; \ \xi^2 \ \xi\eta \ \eta^2 \ \eta\zeta \ \zeta^2 \ \xi\zeta ; \ \xi^2 \ \eta \ \xi\eta^2 \ \eta^2 \ \zeta \ \eta\zeta^2 \ \xi\zeta^2 \ \xi^2 \ \zeta \ \xi\eta\zeta ; \ \xi^2 \ \eta\zeta \ \xi\eta^2 \ \zeta \ \xi\eta\zeta^2 \rangle \quad (II.45)$$

Les fonctions N_i et leur dérivées sont les suivantes :

Nœuds i	1	3	5	7	13	15	17	19
ξ_i	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
η_i	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
ζ_i	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1

➤ Nœuds sommets :

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(-2 + \xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i) \quad (II.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)(-1 + 2\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{8} \eta_i (1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i)(-1 + \xi\xi_i + 2\eta\eta_i + \zeta\zeta_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8} \zeta_i (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(-1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i + 2\zeta\zeta_i) \end{aligned} \quad (II.47)$$

➤ Nœuds sur côtés parallèles à l'axe ξ :

Nœuds i	2	6	14	18
$\xi_i = 0; \ \xi_i$	-1	1	-1	1
ζ_i	-1	-1	1	1

$$N_i = \frac{1}{8} (1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \quad (II.48)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2}\xi(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \\
\frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\eta_i(1 - \xi^2)(1 + \zeta\zeta_i) \\
\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{4}\zeta_i(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)
\end{aligned} \tag{II.49}$$

➤ Nœuds sur côtés parallèles à l'axe η :

Nœuds i	2	6	14	18
$\eta_i = 0; \xi_i$	1	-1	-1	-1
ζ_i	-1	-1	1	1

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_i) \tag{II.50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\xi_i(1 - \eta^2)(1 + \zeta\zeta_i) \\
\frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= -\frac{1}{2}\eta(1 + \xi\xi_i)(1 + \zeta\zeta_i) \\
\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{4}\zeta_i(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)
\end{aligned} \tag{II.51}$$

➤ Nœuds sur côtés parallèles à l'axe ζ :

Nœuds i	2	6	14	18
$\zeta_i = 0; \xi_i$	1	-1	-1	-1
η_i	-1	-1	1	1

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2) \tag{II.52}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{4}\xi_i(1 + \eta\eta_i)(1 - \zeta^2) \\
\frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{4}\eta_i(1 + \xi\xi_i)(1 - \zeta^2) \\
\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{2}\zeta(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta\eta_i)
\end{aligned} \tag{II.53}$$

7.3. Élément à 4 nœuds T4 : — —

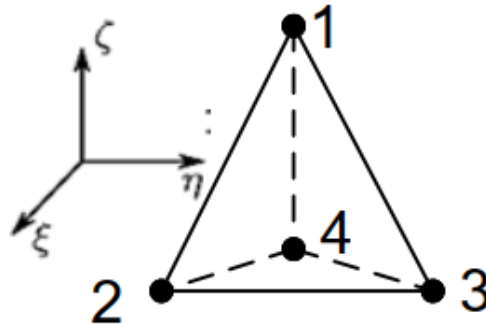


Figure (II.6) : Élément T4

Les 4 nœuds géométriques sont confondus avec les nœuds d'interpolation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{4} \xi_i (1 + \eta \eta_i) (1 - \zeta^2) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{4} \eta_i (1 + \xi \xi_i) (1 - \zeta^2) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= -\frac{1}{2} \zeta (1 + \xi \xi_i) (1 - \eta \eta_i) \end{aligned} \tag{II.54}$$

$$[P_n] = \begin{bmatrix} \langle p(\xi_1) \rangle \\ \langle p(\xi_2) \rangle \\ \langle p(\xi_3) \rangle \\ \langle p(\xi_4) \rangle \end{bmatrix}; [P_n]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II.55}$$

$\{N\}$	$\left\{ \frac{\partial N}{\partial \xi} \right\}$	$\left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\}$	$\left\{ \frac{\partial N}{\partial \zeta} \right\}$
$1 - \xi - \eta - \zeta$	-1	-1	-1
ξ	1	0	0
η	0	1	0
ζ	0	0	1

7.4. Élément à 10 nœuds T10 :

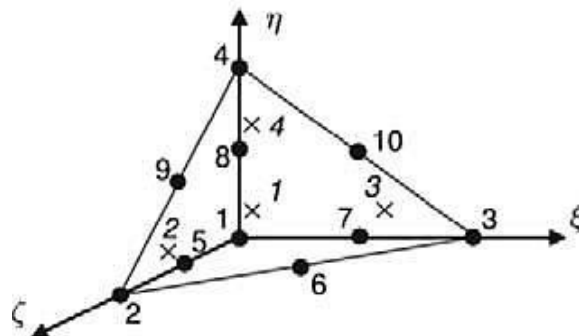


Figure (II.7) : Élément T10

Nous conservons la géométrie de l'élément tétraédrique linéaire. La base polynomiale est quadratique complète :

$$\langle N \rangle = \langle 1 \quad \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \eta\zeta \quad \zeta^2 \quad \xi\zeta \rangle \quad (\text{II.56})$$

$\{N\}$	$\left\{\frac{\partial N}{\partial \xi}\right\}$	$\left\{\frac{\partial N}{\partial \eta}\right\}$	$\left\{\frac{\partial N}{\partial \zeta}\right\}$
$-\lambda(1 - 2\lambda)$	$1 - 4\lambda$	$1 - 4\lambda$	$1 - 4\lambda$
$4\xi\lambda$	$4(\lambda - \xi)$	-4ξ	-4ξ
$-\xi(1 - 2\xi)$	$-1 + 4\xi$	0	0
$4\xi\eta$	4η	4ξ	0
$-\eta(1 - 2\eta)$	0	$-1 + 4\eta$	0
$4\eta\lambda$	-4η	$4(\lambda - \eta)$	-4η
$4\zeta\lambda$	-4ζ	-4ζ	$4(\lambda - \zeta)$
$4\xi\zeta$	4ζ	0	4ξ
$4\eta\zeta$	0	4ζ	4η
$-\zeta(1 - 2\zeta)$	0	0	$-1 + 4\zeta$

$$\text{Avec } \lambda = 1 - \xi - \eta - \zeta$$

Chapitre III :
Exemples
numérique

Chapitre III. Exemples Numériques

1. Introduction ^{[KAR05], [MEF14], [PAT07], [MIC11]}

ABAQUS/CAE™ est un code de calcul qui résout les problèmes de divers champs par la technique des éléments finis (M.E.F). Dans ce cadre il présente un système complet intégrant non seulement les fonctions de calculs proprement dites mais également les fonctions de construction du modèle et les fonctions de traitement des résultats ABAQUS/CAE™ est un programme qui traite des problèmes d'élasticité linéaire dans les domaines statiques et dynamiques, des problèmes non linéaire, des problèmes thermiques etc...ABAQUS compose de trois produits ABAQUS/Standard, ABAQUS/Explicit et ABAQUS/CAE.

1.1. Système d'unités dans le code de calcul ABAQUS :

Comme dans beaucoup de logiciels, il n'y a pas de système d'unités fixé. C'est à l'utilisateur de définir son propre système (tableau III.1)

Masse	Longueur	Temps	Force	Pression	Energie
M	L	T	ML T ⁻²	ML ⁻¹ T ⁻²	ML ² T ⁻²
Kg	m	S	N	Pa	J
G	mm	Ms	N	Mpa	mJ
Tonne	mm	S	N	Mpa	mJ

Tableau(III.1) : Système d'unités pour la programmation

Le tableau présente les différentes unités pour la résolution d'un problème mécanique avec le code ABAQUS.

1.2. Organisation de l'interface ABAQUS CAE (complète ABAQUS environnement)

Il est important de savoir que le module CAE figure (III.1) que vous allez utiliser pour créer votre jeu de données est relativement récent (quelques années) et qu'il est plutôt destiné à la mise en données de problèmes relativement classiques.

Donc pas toutes les commandes utilisables dans ABAQUS et fait souvent le choix de paramètres par défaut.

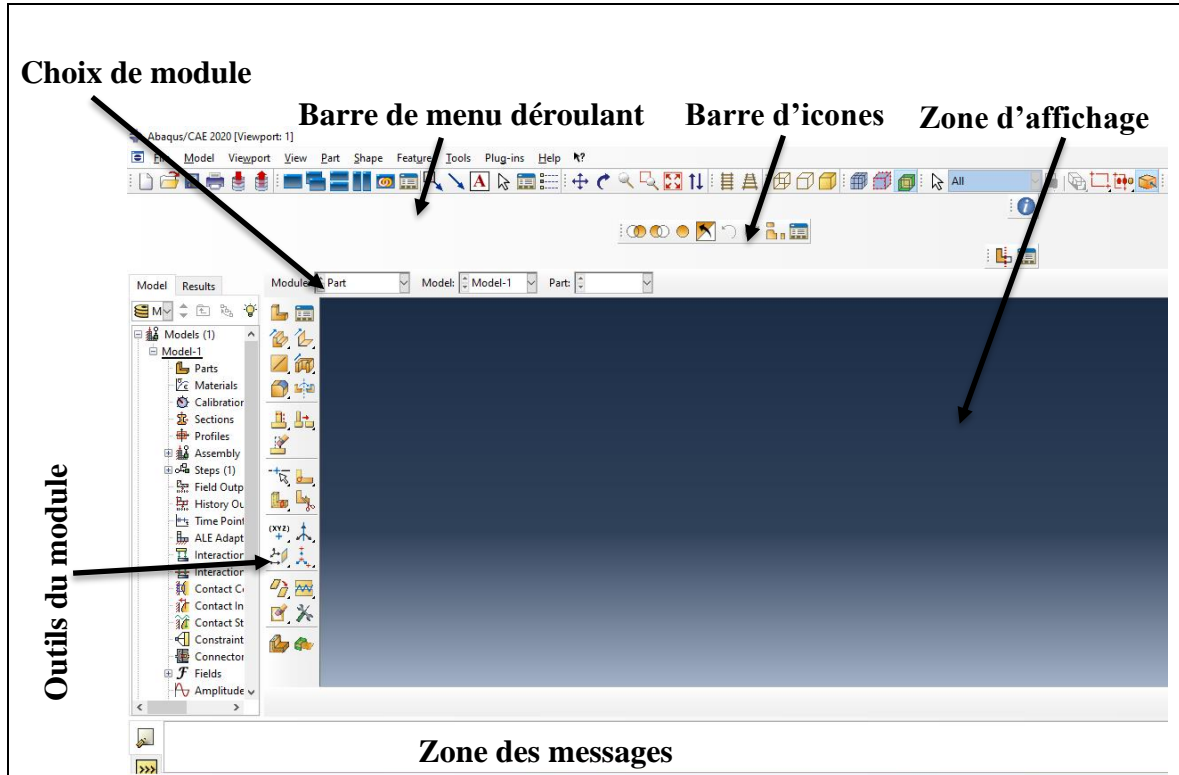
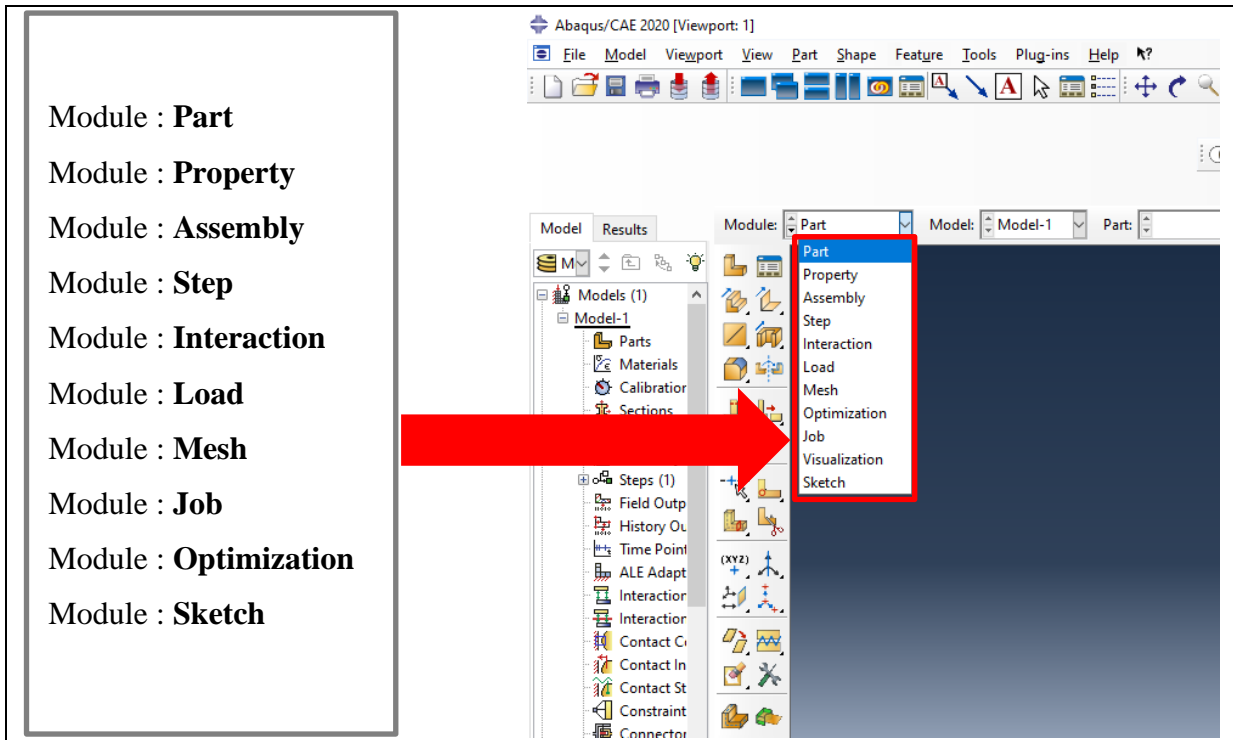


Figure (III.1): Organisation d'ABAQUS

1.3. Les Modules

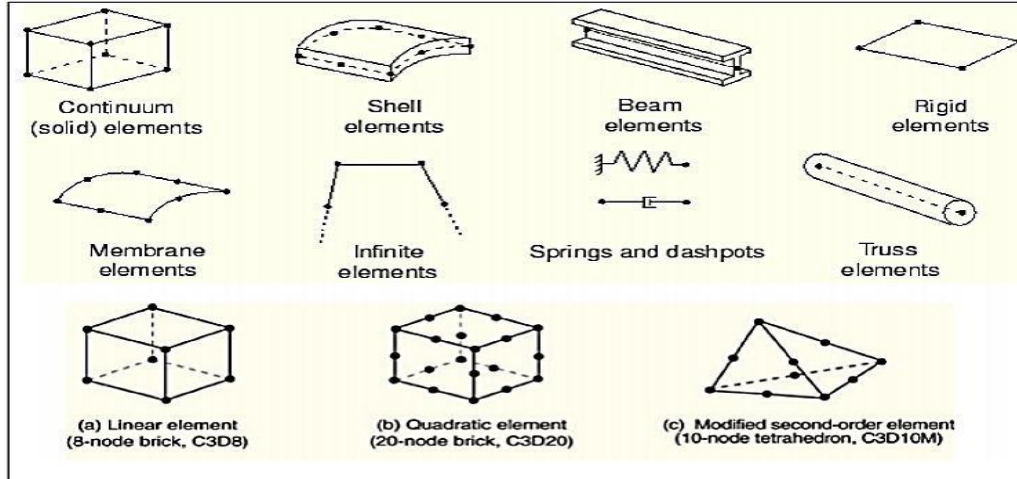
La réalisation complète d'un jeu de données s'effectue après un passage successif dans les modules, figure. Figure (III.2)



Figure(III.2): Réalisation de la mise en données d'un problème

1.4. Les éléments dans ABAQUS

- Un très large choix d'éléments (plus de 100), figure (III.3).
- Chaque élément est caractérisé par : famille, ddl, nombre de nœuds, intégration.
- Possibilités de programmer de nouveaux éléments (en FORTRAN, sur ABAQUS/Standard).



Figure(III.3) : Quelque élément dans Abaqus

Nombre de nœuds –ordre d'interpolation:

(a) Linear element
(8-node brick, C3D8)

(b) Quadratic element
(20-node brick, C3D20)

(c) Modified second-order element
(10-node tetrahedron, C3D10M)

Types d'intégration:

Linear element
(e.g., CPS4)

Quadratic element
(e.g., CPS8)

Linear element
(e.g., CPS4R)

Quadratic element
(e.g., CPS8R)

Intégration complète

initial geometry hole deformed geometry

Mode incompatible (flexion)

Intégration réduite

Uniform pressure

Hybride (milieu incompressible)

Figure (III.4): Les types d'intégrations et le nombre de nœuds

1.5. Les différents fichiers pour la simulation sous ABAQUS

1.5.1. Fichier d'entrée (Input file)

Extension.inp : contient des mots clés décrivant la géométrie, les matériaux, les conditions limites et les chargements de la structure étudiée

- Génération du fichier .inp :
 - Avec un éditeur (fichier texte) ou programme en connaissant les divers mots clés de commande Abaqus
 - Avec l'interface graphique Abaqus/CAE

1.5.2. Fichier de résultats (output file)

Extension .odb : Contient les contours et courbes de résultats

1.6. Autres fichiers créés par Abaqus lors de la simulation

- Fichier .com : exécutable de vos calculs
- Fichier .res : fichier binaire de reprise
- Fichier .dat : liste des résultats, résumé de votre modélisation
- Fichier .msg : résumé du déroulement du calcul en cours, message d'erreur
- Fichier .fil : fichier binaire des résultats
- Fichier .log : fichier de procédure
- Fichier .sta : Fichier statistique ... ets.

2. Comparaison numérique en analyse non linéaires

Pour étudier l'influence de type d'élément volumiques hexaédriques à 8 nœuds C3D8 et à 20 nœuds C3D20 et tétraèdres 4 nœuds C3D4 et à 10 nœuds C3D10 d'ABAQUS en non linéaires sur la propagation de la plasticité avec la nature de l'intégration et les Différent critères de plasticité.

Un certain nombre de tests représentatifs seront analysés : Tout d'abord, nous avons étudié le comportement d'une poutre encastree et l'autre extrémité est soumise à une force. Ensuite, le cas d'une plaque est soumise à un état de traction simple, nous étudions aussi l'exemple d'une poutre encastree forme rectangulaire trouée et l'autre extrémité est soumise à une force.

3. Déflexion d'une charpente Type H encastree

La figure (III.5) montre une charpente type H encastree et l'autre extrémité est soumise à une force $F=30\text{KN}$ de longueur $L=1000\text{ mm}$, de largeur $b=50\text{ mm}$ et de hauteur $h=100\text{ mm}$.Le matériau constitutif de cette poutre est supposé plastic non linéaire et isotrope et homogène ayant pour module de Young $E=210\text{ GP}$ a et coefficient de Poisson $\nu=0,3$

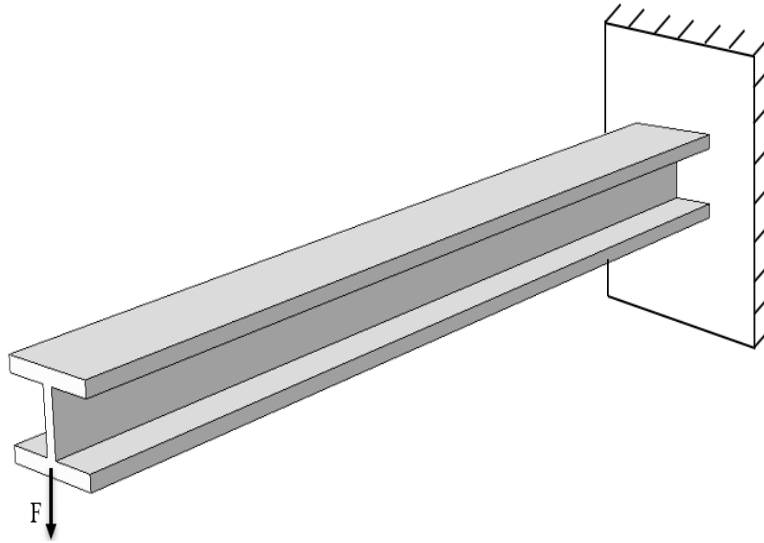
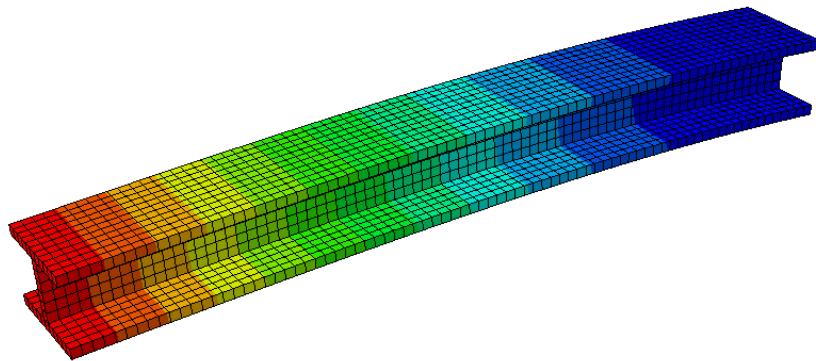


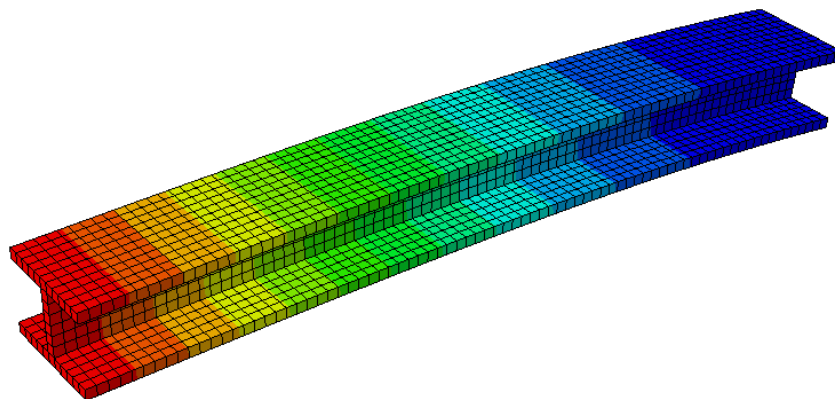
Figure (III.5) : Charpente console Type H

3.1. Comparaison entre les éléments volumiques

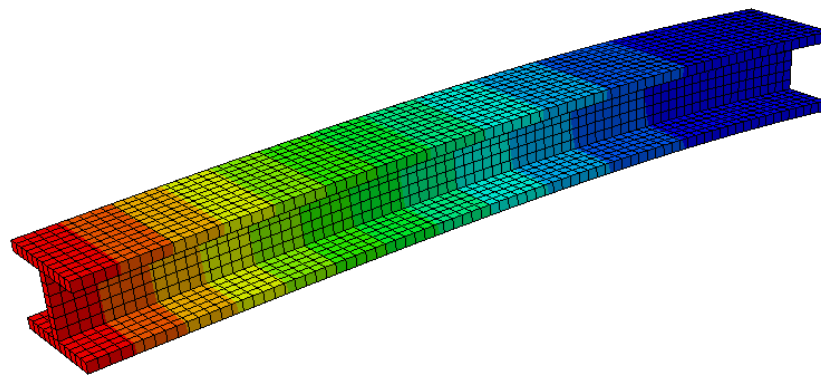
La simulation est effectuée avec un maillage d'éléments hexaédriques à 8 nœuds (interpolation linéaires) et à 20 nœuds (interpolation quadratique) avec une intégration complète et une intégration réduite figure (III.6). Les résultats obtenus sont reportés dans la figure (III.7)



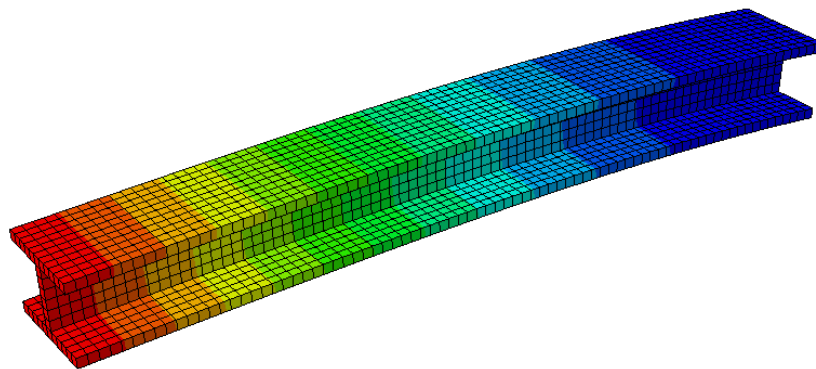
C3D8R



C3D8



C3D20R



C3D20

Figure (III .6) : Déplacement de la structure avec différents éléments volumiques

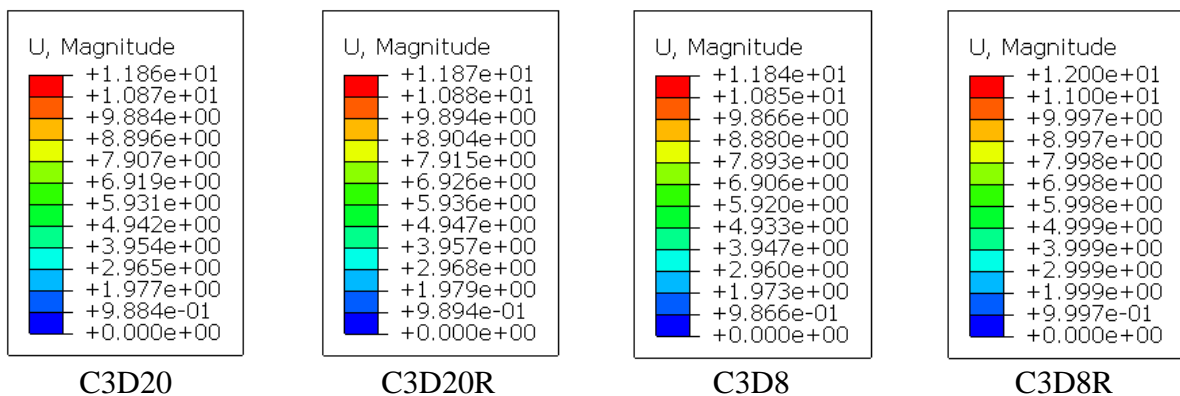


Figure (III .7) : Les résultats obtenus de différents éléments volumiques

La figure (3.2) et figure (3.2) donne le déplacement du nœud chargé avec différentes éléments volumique, On remarque que les résultats obtenus pour l'intégration réduite donné bonne résultat que à l'exacte aussi les éléments (C3D8R, C3D20R) plus précis que l'élément (C3D8, C3D20). On remarque que les résultats obtenus pour l'élément C3D8R donné bonne résultat et plus précis que l'élément C3D10 et Les zones proches de l'encastrement et du point d'application du chargement sont les plus plastifiées. Donc on va choisir l'élément C3D8R

3.2. Comparaison entre les critères de Von Mises et Tresca

La figure (III.8) montre Propagation et l'influence du critère de plasticité sur la structure. On remarque le standard Tresca donne de meilleurs résultats que ceux de Von Mises Comme

le montre la figure (III.8).

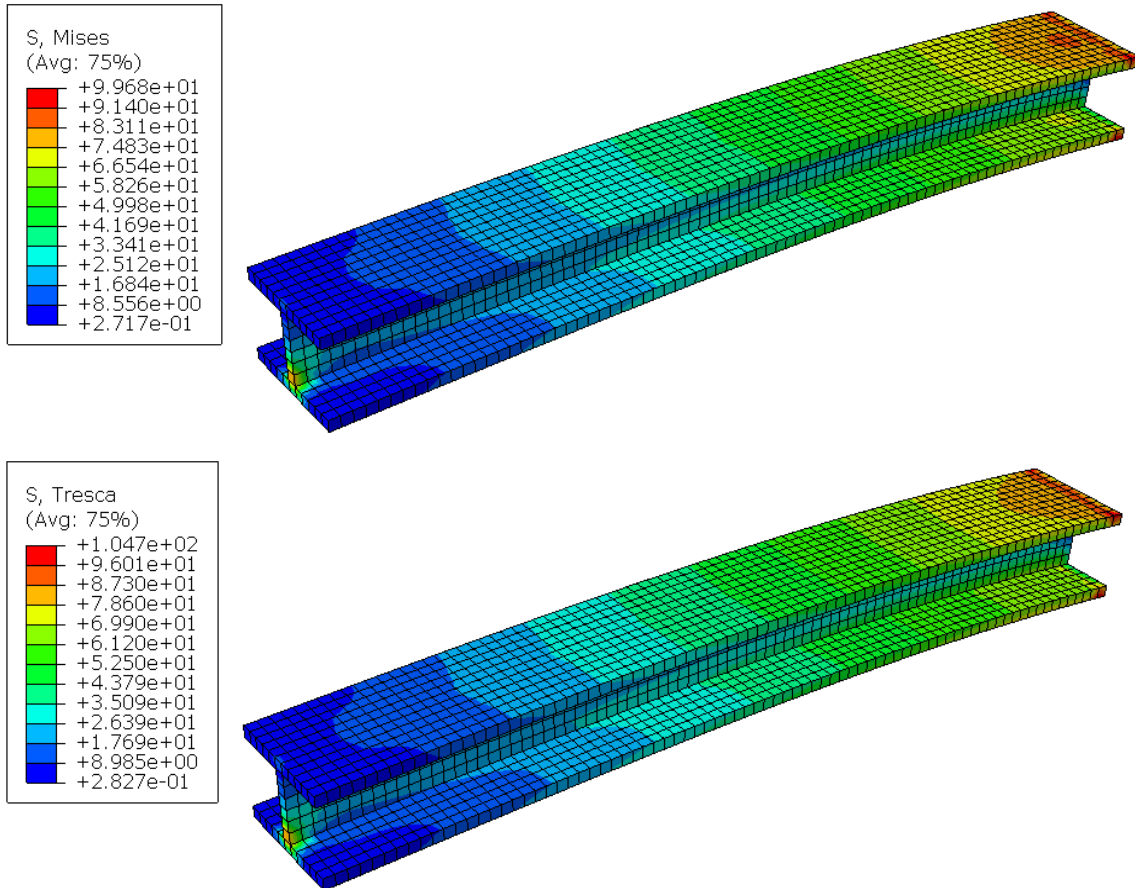


Figure (III.8) : Contrainte de la structure avec élément volumique C3D8R

4. Plaque trouée soumise à un champ de traction

La figure (III.9) montre une plaque est soumise à un état de traction simple de largeur W , de longueur L , ayant une épaisseur e , percée d'un trou circulaire de rayon R . On considère un matériau isotrope, homogène et non linéaire.

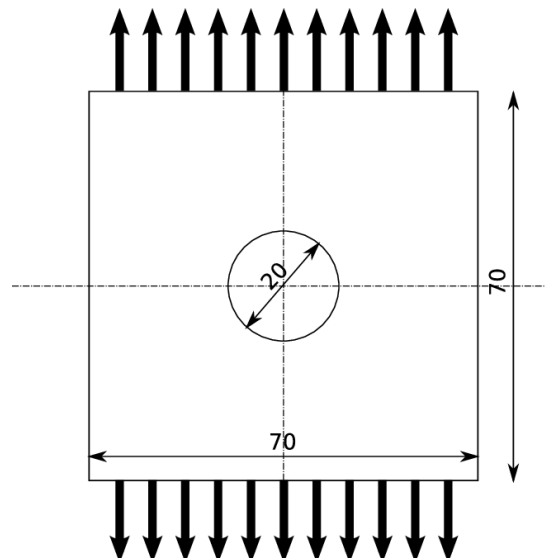


Figure (III.9) : plaque trouée

4.1. Comparaison entre les éléments volumiques

La simulation est effectuée avec un maillage d'éléments tétraédriques à 4 nœuds (C3D4) et à 20 nœuds (C3D20) avec une intégration complète figure (3.10). Les résultats obtenus sont reportés dans le la figure (3.11)

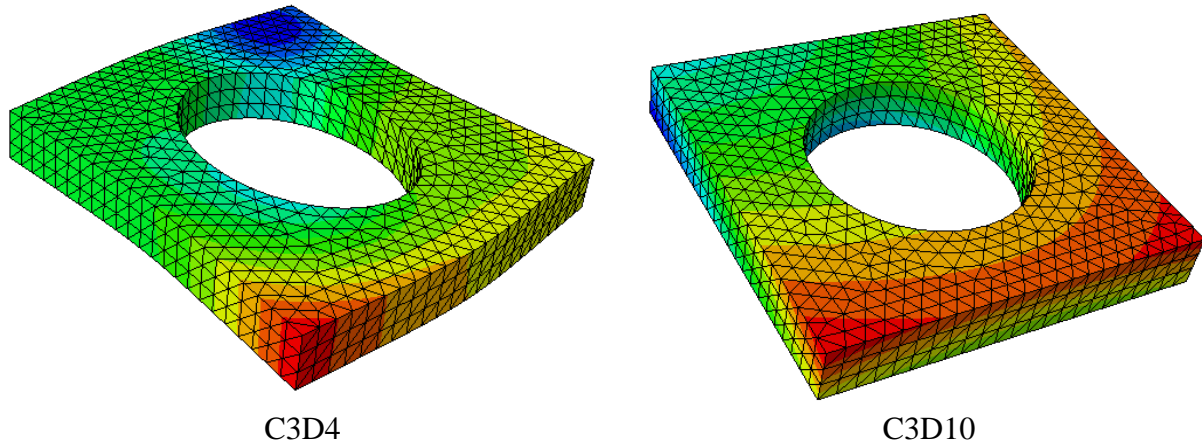


Figure (III .10) : déplacement de la structure avec différents des éléments volumiques

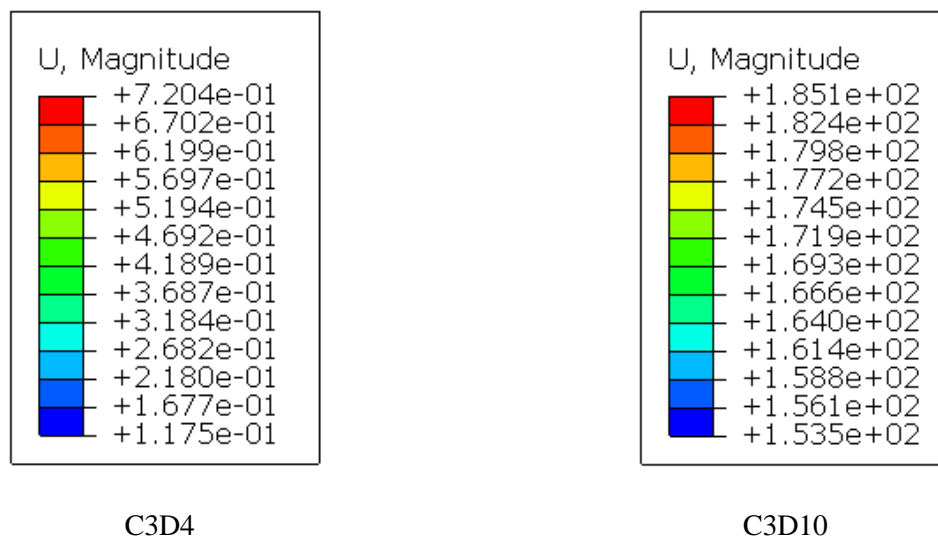


Figure (III .11) : Les résultats obtenus de différents éléments volumiques

La figure (3.10) et figure (3.11) donne le déplacement du nœud chargé avec différentes éléments volumique, On remarque que les résultats obtenus pour l'élément C3D10 donné bonne résultat et plus précis que l'élément C3D4. et Les zones proches de l'encastrement et du point d'application du chargement sont les plus plastifiées. Donc on va choisir l'élément C3D10

4.2. Comparaison entre les critères de Von Mises et Tresca

La figure (III.12) montre Propagation et l'influence du critère de plasticité sur la structure. On remarque le standard Tresca donne de meilleurs résultats que ceux de Von Mises et une concentration des contraintes est bien observée au bord du trou. On constate que la contrainte

au voisinage du trou est maximale Comme le montre la figure (III.12).

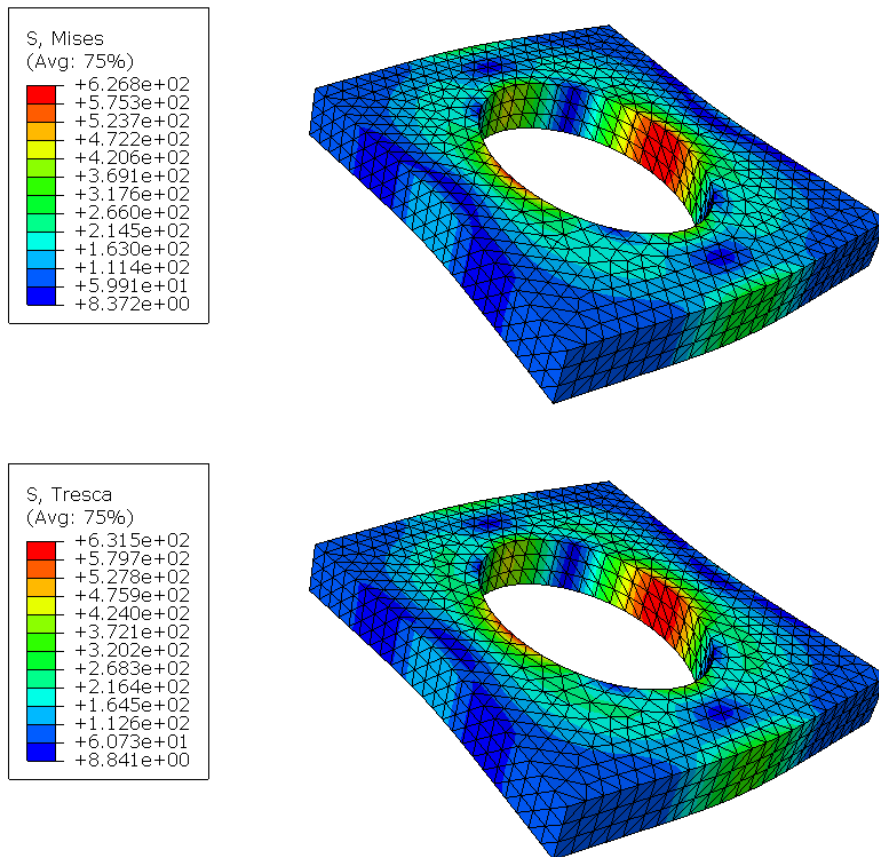


Figure (III.12) : contrainte de la structure avec élément volumique C3D10

5. Déflexion d'une poutre charpente type H trouée

La figure (III.13) montre une Charpente Type I encastree trouee et l'autre extremité est soumise à une force $F=10\text{KN}$ de longueur $L=610\text{mm}$, et de largeur $b=30\text{ mm}$, et de hauteur $h=102\text{ mm}$ Le rayon du trou $R=26$.Le matériau constitutif de cette poutre est supposé plastic non linéaire et isotrope et homogène ayant pour module de Young $E=210\text{ GP a}$ et coefficient de Poisson $\nu =0,3$.

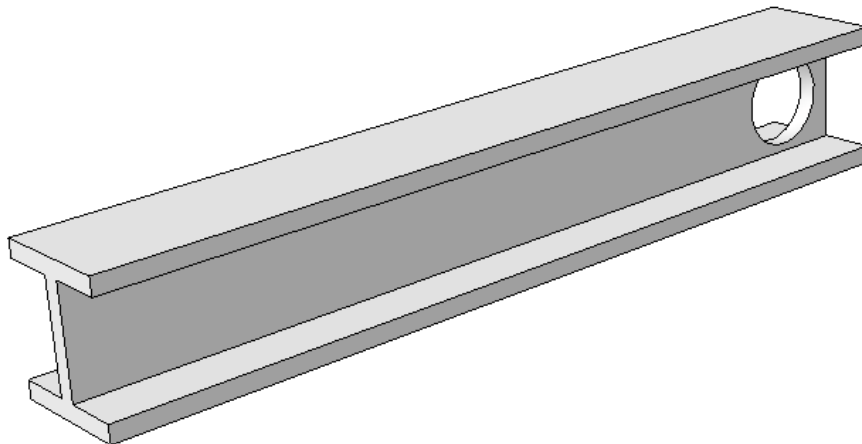
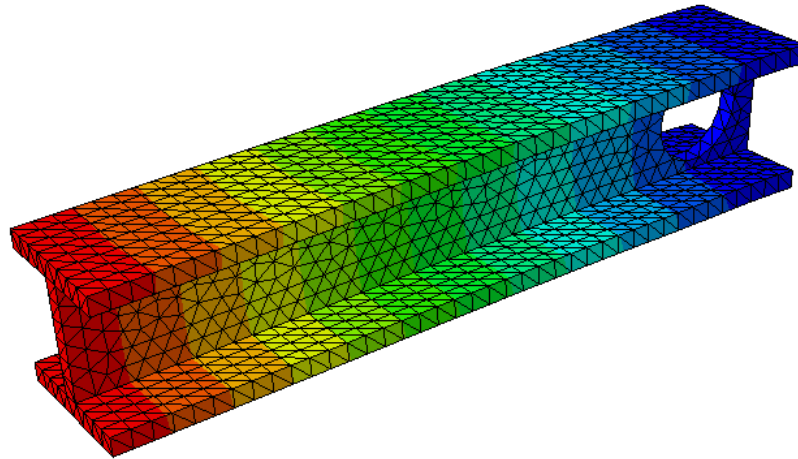


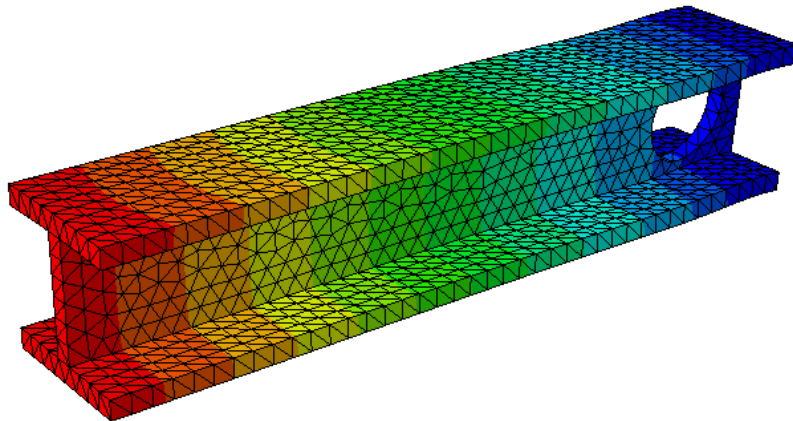
Figure (III.13) : poutre charpente type H trouée

5.1. Comparaison entre les éléments volumiques

La simulation est effectuée avec un maillage d'éléments hexaédriques à 8 nœuds (C3D8R) tétraédriques à 10 nœuds (C3D10) figure (3.14). Les résultats obtenus sont reportés dans le la figure (3.15)

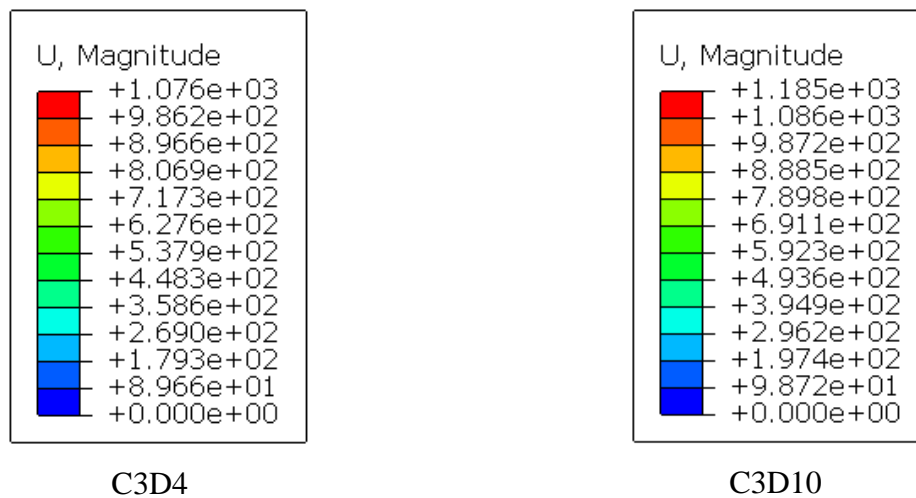


C3D4



C3D10

Figure (III .14) : déplacement de la structure avec différents des éléments volumiques



C3D4

C3D10

Figure (III .15) : Les résultats obtenus de différents éléments volumiques

La figure (3.14) et figure (3.15) donne le déplacement du nœud chargé avec différentes éléments volumique, On remarque que les résultats obtenus pour l'élément C3D8R donné bonne résultat et plus précis que l'élément C3D10 et Les zones proches de l'encastrement et du point d'application du chargement sont les plus plastifiées. Donc on va choisir l'élément C3D8R

5.2. Comparaison entre les critères de Von Mises et Tresca

La figure (III.16) montre Propagation et l'influence du critère de plasticité sur la structure. On remarque le standard Tresca donne de meilleurs résultats que ceux de Von Mises et une concentration des contraintes est bien observée au bord du trou Comme le montre la figure (III.16).

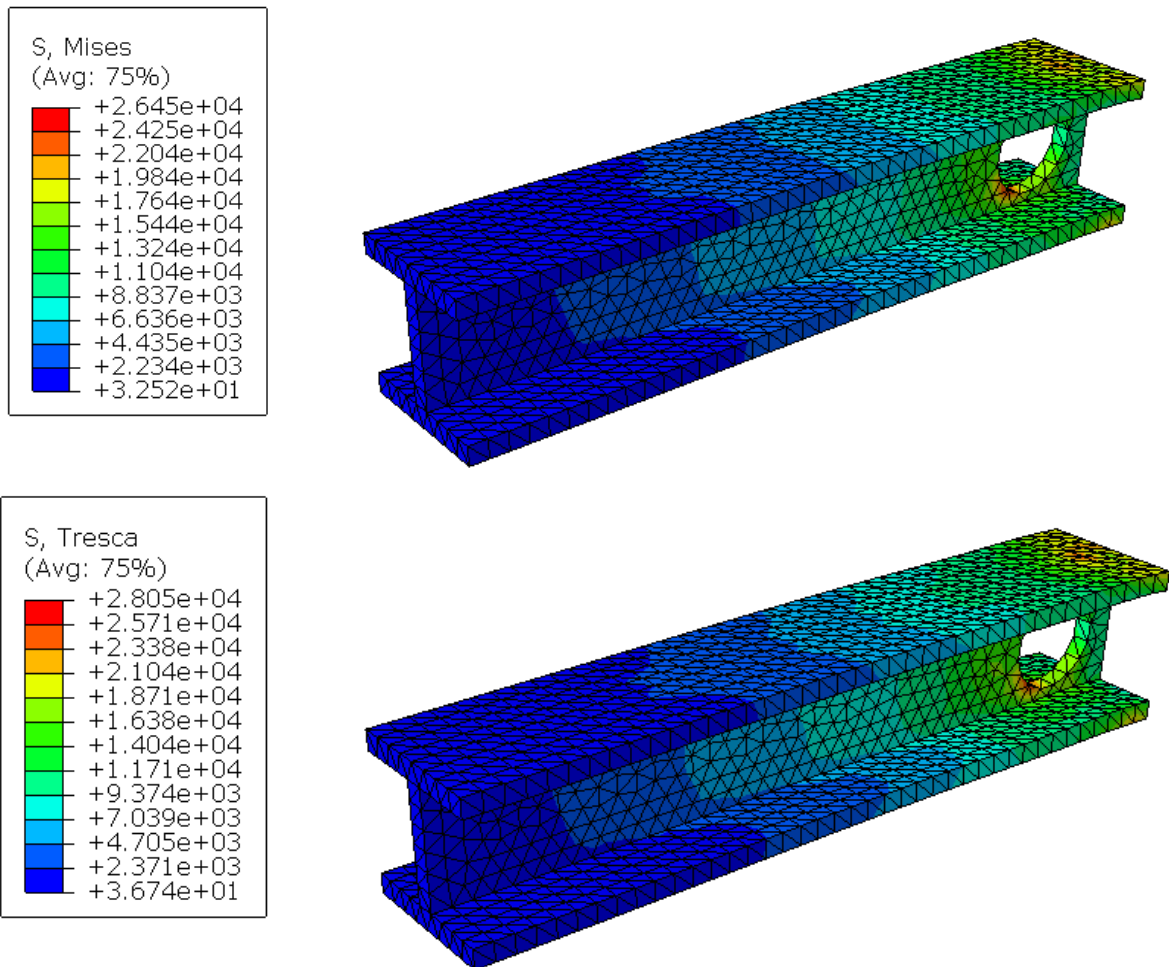


Figure (III .16) : contrainte de la structure avec élément volumique C3D4

Conclusion Générale

Les bases théoriques de la méthode des éléments finis (M.E.F) reposent d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures. Ainsi, la (M.E.F) est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie. La formulation isoparamétrique offre un avantage supplémentaire dans une analyse non-linéaire, elle permet grâce à l'intégration numérique de suivre la plastification à l'intérieur des éléments. ABAQUS est un outil puissant et flexible. Il est capable de traiter de manière fiable et robuste des problèmes complexes en étant réaliste grâce à la prise en compte de non-linéarités très fortes et aux aspects multi-physiques. Ce code de calcul éléments finis 3D permet de modéliser un ou plusieurs matériaux en grandes déformations. Dans ce contexte, des cas tests sont évalués pour l'analyse non linéaire matérielle des solides 3D utilisant le code éléments finis ABAQUS.

Dans ce travail on a déterminé numériquement la réponse statique des structures 3D dans le domaine non linéaire (l'élasto-plasticité) sous l'action d'un trajet de chargement donné, utilisant la méthode des éléments finis 3D sous le code du calcul Abaqus. On a considéré dans cette simulation numérique non linéaire (l'élasto-plasticité), l'influence des paramètres suivants : conditions aux limites, épaisseur et le type d'élément ainsi que le type d'intégration numérique, le critère de plasticité et la méthode de résolution sur la propagation de la plasticité dans les structures 3D.

Bibliographique

- [1] Benghezal Abd Erraouf : « Analyse élasto-Plastique par éléments finis multicouches des plaques de Mindlin », Thèse de Magistère en génie mécanique, Batna, 2003.
- [2] Bernard Halphen, Jean Salençon : « Elasto-Plasticité », Presses de l'école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1987.
- [3] Bouleftour Abderrahmane « Evaluation d'éléments finis volumiques dans Abaqus sur des cas tests non linéaires géométriques » Thèse de Magistère en génie mécanique, Biskra, 2014.
- [4] Briki Lyamine : « Analyse elasto-plastique des plaques minces et épaisses par éléments finis », Thèse de Magistère en génie Civil, Université Badji Mokhtar d'Annaba, 2004.
- [5] Chen W.F., D. J. Han : « Plasticity for structural engineers », Springer-Verlag, New York, 1988.
- [6] Christophe Bacon, Jean Ponjet : « Mécanique des solides déformables », Hermès Science Publications, Paris, 2000.
- [7] Coffignal Gérard : « Mécanique non-Linéaire et éléments finis », Fiscicule 5, Méthode des éléments finis en HPP pour les milieux continus solides. LMSP, ENSAM, Version électronique e.1.0b, Paris, 30 janvier 2001.
- [8] Coffignal Gérard ; « Mécanique non-Linéaire et éléments finis », Fiscicule 8, Méthode des éléments finis en grandes transformations pour les milieux continus solides : non linéarités matérielles et géométriques. LMSP, ENSAM, Version électronique e.2, Paris, 31 janvier 2003.
- [9] Coirier Jean : « Mécanique des milieux continus », Concepts de base – Editions Dunod, Paris, 1997.
- [10] Garrigues Jean : « Statique des solides élastiques en petites déformations », Ecole Supérieure de mécanique de Marseille, novembre 2001.
- [11] Gouri Dhatt : « une présentation de la méthode des éléments fini », Paris, 2^{ème} édition, 1984.
- [12] Guenfoud M. : « Introduction à la mécanique des milieux continus », Application à la mécanique des solides – Collection : le livre de Génie Civil, Centre Universitaire de Guelma, 1998-1999.

- [13] Guenfoud M. : « Introduction à la mécanique des milieux continus », Application à la mécanique des solides – Collection : le livre de Génie Civil, Centre Universitaire de Guelma, 1998-1999.
- [14] Hinton E., Owen D.R.J. : « Finite elements in plasticity – Theory and practice », Pineridge Press Limited. SWANSEA, U.K, 1980.
- [15] Imbert J. F. : « Analyse des structures par éléments finis », Cepadues Editions, 1984.
- [16] G. CAILLETAUD, M. TIJANI : « Cours mécanique des matériaux solide»,2011.
- [17] Jean-Charles Craveur, "Modélisation des structures – Calcul par éléments finis", Dunod, 2^{ème} édition, 2001.
- [18] Karlsson & Sorensen, ABAQUS standard User's manuel, 2005.
- [19] Lakhdar BESSAIS «Analyse des structures par la M.E.F basée sur l’approche en déformation» Thèse de Magistère en génie mécanique, Biskra, 2012.
- [20] Lemaitre Jean, Jean-Louis Chaboche : « Mécanique des matériaux solides », Dunod, deuxième édition, 1991.
- [21] Martin-Pérez B., M. Nofal : « UMAR – Theory and User Manual », IRC, NRC – CNRC, Version 1.0, May 2002.
- [22] Mefteh Kamel. Présentation Abaqus. Formation des masters ; université de Biskra 2014.
- [23] Mickael Abbas. Principe et fonctionnement ABAQUS .université de technologie de Compiègne .2011.
- [24] Oudin H. : « Loi de comportement », Notes de cours de plasticité, LMM division structures, 2001.
- [25] Patrickh Rozichi. Formation ABAQUS ; Université de Nantes. France 2007.
- [26] Quoc-Son Nguyen : « Stabilité et mécanique non linéaire », Hermès Science Publications, Paris, 2000.
- [27] Zienkiewicz O. C. : « The finite element method », Mcgraw-Hill Book Company, UK Limited, 1977.
- [28] Zienkiewicz O.C et Taylor R.L, "The Finite element Method", McGraw-Hill, London 1991.