

Examen Final

Exercice 1: (7 pts)

Les questions suivantes sont indépendantes :

I) Soient E, F deux \mathbb{k} -e. v. n., $T : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire borné.

1. Complète:

- a. T est borné veut dire.....
- b. $\|T\| =$
- c. Si $f \in E^*$ alors f est appelée.....

2. Énoncer le théorème de Banach Steinhaus.

II) Répondre par vrai ou faux, en justifiant.

1. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et (x_n) une suite de E convergente vers $x \in E$. On a $\|x_n - x\| \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Soient E, F deux \mathbb{k} -e. v. normés, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M > 0$. S'il existe $x_* \in X - \{0\}$ tel que $M \leq \frac{\|Ax_*\|}{\|x_*\|}$ alors $M \leq \|A\|$.

3. $\mathcal{L}(C[0, 1])$ est un espace de Banach.

Exercice 2: (5 pts)

Dans l'espace de Hilbert $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$. On considère l'opérateur A est défini par

$$Tf(t) = \int_{-1}^1 f(x)(t-x) dx$$

1. Montrer que T est continue, puis qu'il est compact.
2. déterminer le spectre de T . On déduire le rayon spectral de T .

Exercice 3: (8 pts)

Considérons l'opérateur

$$T : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$$

$$f \rightarrow Tf(x) = \int_0^1 x e^s f(s) ds$$

Montrer que

1. T est bien défini.
2. T est linéaire, borné, continue et $\|A\| \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{e^2 - 1}$.
3. $\mathcal{N}(T)$ est fermé.
4. T^* existe.
5. T n'est pas autoadjoint

L3: Mathématiques.

Module: Introduction à la théorie des opérateurs linéaires.

Le corrigé type de l'examen

Exercice 1:

I) a. Test borné veut dire: $\exists M > 0, \|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$. (1pt)

b. $\|T\| = \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}$. (0,75pt)

c. Si $f \in E^*$ alors f est dite fonctionnelle linéaire bornée sur E . (1pt)

2/ Énoncé du Théorème de Banach Steinhaus: Soient

E un espace de Banach, F une e.v.n et (0,25pt)

$(T_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}(E, F)$. (0,25pt)

Si $\sup_{i \in I} \|T_i x\| < \infty$ pour tout $x \in E$ alors $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$ (0,25pt)

II). 1. Vrai: par la définition de la convergence de $(x_n) \subset E$ vers $x \in E$. (1pt)

2. Vrai: car $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{0 \neq x \in E} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$. (1pt)

3. Vrai:

$\mathcal{L}(C[0,1])$ est un espace de Banach car $\mathcal{L}(C[0,1]) = \mathcal{L}(C^0[0,1], C^0[0,1])$ et $C[0,1]$ l'espace d'arrivée est un espace de Banach muni de la norme de convergence uniforme. (1pt)

Exercice 2:

1) Montrons que T est continue (1pt)

$$\begin{aligned} \text{ona: } |Tf(t)| &\leq \int_{-1}^1 |f(x)| \cdot |t-x| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2} \left(\int_{-1}^1 |t-x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donc $\|Tf(t)\| \leq \frac{2}{3} \|f\|$ d'où T est continue.

• Compacité: On remarque que (1,5 pt)

$$Tf(t) = t \times \int_{-1}^1 f(x) dx - 1 \times \int_{-1}^1 x f(x) dx$$

donc $\text{Im } T \subset \text{Vect}\{1, t\}$ alors T est de rang fini, comme T est continue, alors T est compact.

2/ Déterminerons le spectre de T (1,5 pt)

Comme T est compact, alors $\sigma(T)$ est fermé de 0 et des $\lambda \neq 0$ v.p.

Soit $\lambda \neq 0$, pour que λ soit une v.p il suffit qu'il existe

$$\varphi \neq 0 \text{ tq: } T\varphi = \lambda\varphi.$$

$$\text{Or } T\varphi(t) = at + b = \lambda\varphi(t)$$

puisque $\lambda \neq 0$ et $\varphi \in \text{Vect}\{1, t\}$ ie.

$$\varphi(t) = \alpha t + \beta \text{ donc,}$$

$$\lambda(\alpha t + \beta) = \int_{-1}^1 (t-x)(\alpha x + \beta) dx$$

$$= 2\beta t - \frac{2}{3}\alpha, \quad \forall t \in [-1, 1].$$

par l'identification, on peut écrire:

$$\begin{cases} \lambda\alpha = 2\beta \\ \lambda\beta = -\frac{2}{3}\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda\alpha - 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\lambda\beta = 0 \end{cases}$$

le déterminant de ce système est $D = \begin{vmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & 3\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 + 4.$

Si $D \neq 0$, alors $\alpha = \beta = 0$ et $\varphi = 0$

donc l'équation des valeurs propres est donnée par

$$D = 0 \iff 3\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}i \quad \text{d'où } \sigma(T) = \left\{ 0, \frac{2}{\sqrt{3}}i, -\frac{2}{\sqrt{3}}i \right\}.$$

• Rayon spectral de T : (1 pt)

le rayon spectral de T est le plus petit rayon de disque fermé qui contient $\sigma(T)$ d'où $r(T) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Exercice 3:

1) pour montrer que T est bien défini il suffit de ~~(1,5 PT)~~ montrer que

$$\forall f \in L^2[0,1] : Tf \in L^2[0,1].$$

Soit $f \in L^2[0,1]$, pour tout $t \in [0,1]$, on a.

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left| \int_0^1 x e^x f(s) ds \right| \\ &\leq \left(\int_0^1 x^2 e^{2s} ds \right)^{1/2} \|f\| \quad (\text{d'après Cauchy Schwarz}) \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 (e^2 - 1) \right)^{1/2} \|f\| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} x (e^2 - 1)^{1/2} \|f\| \quad \text{pour tout } t \in [0,1] \end{aligned}$$

Ceci implique que.

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx &\leq \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 (e^2 - 1) \|f\|^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} (e^2 - 1) \|f\|^2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= \frac{1}{6} (e^2 - 1) \|f\|^2 < \infty \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

C. à dire.

$$\int_0^1 |Tf(x)|^2 dx < \infty.$$

Ainsi, $Tf \in L^2[0,1]$.

2) T est linéaire ~~(0,5 PT)~~

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L^2[0,1]:$$

$$T(\alpha f + g)(x) = \int_0^1 x e^x (\alpha f + g)(s) ds$$

$$= \alpha \int_0^1 x e^s f(s) ds + \int_0^1 x e^s g(s) ds$$

$$= \alpha T f(x) + A g(x)$$

• T borné. (0,5 PT) + (0,5 PT)

on a. $\|Tf\|^2 = \int_0^1 |Tf(x)|^2 dx \leq \frac{1}{6} (e^2 - 1) \|f\|^2$ (d'après l'éq 1)

Il suffit de prendre $M = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{e^2 - 1} > 0$.

• puisque T est un opérateur linéaire borné alors T est continue. (0,5 PT)

donc $\|A\| \leq M = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{e^2 - 1}$. (0,5 PT)

3/ puisque T est linéaire borné alors $\mathcal{N}(T)$ est fermé. (1 PT)

4/ puisque T est linéaire borné alors T^* existe. (1 PT)

5/ Calcul de T^* : Soient $f, g \in L^2[0,1]$. On a.

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^1 Tf(x) g(x) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 x e^s f(s) ds \right) g(x) dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x e^s f(s) g(x) ds dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x e^s f(s) g(x) dx ds$$

$$= \int_0^1 f(s) \left(\int_0^1 x e^s g(x) dx \right) ds$$

$$= \left\langle f, \underbrace{\int_0^1 x e^x g(x) dx}_{T^* g} \right\rangle$$

Ainsi : $T^* : L^2([0,1]) \rightarrow L^2([0,1])$
 $f \mapsto T^* f$

avec

$$(T^* f)(x) = \int_0^1 s e^x g(s) ds$$

de la définition de T et T^* on trouve que $T \neq T^*$
donc T n'est pas autoadjoint. (1PT)