



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Non-existence de solutions globales à une équation d'onde avec amortissement fractionnel

Réalisé par : **Amrane Chaima**
Ghouari Kamilia

Dirigé par : **Mr Tebessi Faouzi**
Présenté le **13/09/2020**

Membres de jury :

Mr Achichi A **M.A.A** **Président**
Mm Hakkar N **M.A.A** **Examineur**

2019-2020

Remerciements



Nous souhaitons , avant toute chose , remercier Dieu

pour nous avoir soutenus et permis la réalisation de cette mémoire

Remercier notre encadreur qui nous soutenu tout au long de la rédaction de cette mémoire , par son écoute et ses conseils pertinents malgré leur nombreuses responsabilités.

Merci Monsieur Jebessi Faouzi

Remercier également l'ensemble des membres du jury pour avoir consacré leur temps à examiner ce travail et nous leur respectons pour l'attention qu'ils ont portée à notre travail.

Remercier tout les professeurs de première année primaire jusqu'à master 2

Merci à tous et à toutes .



Dédicace



A celle qui ma donnée la vie ,le symbole de tendresse, qui s'est sacrifie

pour mon bonheur et ma réussite ,a ma très chère mère .

*A mon très chère père , son affection et son soutien m'ont été un grand secours
au long de ma vie.*

*Aucune dédicace ne saurait exprimer es grandes admirations ,mes considérations mes sincères
admiration
pour vous,*

Que Dieu vous gardes et vous protège .

A mes très chères soeurs .

A mon très chère frère.

A tous mes merveilleux amies surtout :Hind , Rayan ,Abir, Asma,Warda .

A tous ceux qui me seront chères

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail.

Table des matières

Introduction	4
1 Notions préliminaires	8
1.1 Espace des fonctions intégrable	8
1.1.1 Inégalité importante	9
1.1.2 Intégral successive de Cauchy	10
1.1.3 Support d'une fonction :	11
1.1.4 Fonction test	11
1.2 Calcule fractionnaire	11
1.2.1 Historique	11
1.2.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	12
1.2.3 Intégral fractionnaire	17
1.2.4 Dérivées au sens de Reimann-Liouville	17
1.3 Dérivées au sens de Caputo	19
1.3.1 La relation entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville	21
2 Non-Existence de solutions globales pour une équation d'onde avec amortissement fractionnel	22
2.1 Prèliminaire	22
2.1.1 <i>Solution locale</i>	22
2.1.2 <i>Solution globale</i>	22

Table des matières

2.1.3	<i>Explosion de solution</i>	23
2.1.4	Exposant critique	23
2.1.5	Laplacien de puissance fractionnaire	23
2.2	Non existence de la solution global	24
3	Conditions nécessaires pour l'existence des solutions locales et globales	34
	Bibliographie	41

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation et étude qui occupe les mathématiciens depuis le dix-huitième siècle avec les travaux d'Euler, d'Alembert, Lagrange et Laplace... ; au fil de cette dernière quarantaine d'années beaucoup de phénomènes et de problèmes modernes physiques biologiques et technologique ont été modélés par des équations aux dérivées partielles (*EDP*), paraboliques ou hyperboliques (modélisant des phénomènes de propagation, émergeant par exemple naturellement en mécanique).

Il existe un grand nombre d'équations différentielles partielles non linéaires de type hyperbolique dont la solution pour une donnée de données initiales ne peut pas être étendue globalement dans le temps et développer une singularité dans le temps fini

Un tel phénomène est appelé explosion de la solution et T est appelé le temps de l'explosion.

L'étude des phénomènes d'explosion des solutions est non seulement intéressante du point de vue mathématique, mais aussi importante pour une compréhension profonde de la nature des phénomènes que ces équations décrivent.

Depuis 1966, avec le travail de Fujita, le phénomènes d'explosion des solutions dans les équation non-linéaires parabolique et hyperbolique ont une grande attention en étude

Un accent particulier a été mis sur les questions comme : quand, ou et comment les solutions explosent.

Notre memoire se compose de trois chapiters :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales sur l'espace des fonctions integrables et les dérivées fractionnaires.

Dans le deuxième chapitre : On introduit la définitions de l'explosion d'une solution et de l'exposant critique, ensuite on démontre par l'absurde; la non-existence ou l'explosion de la solution d'un problème pour une équation d'onde avec amortissement fractionnel.

Dans le troisième chapitre : On conclut par mentionné deux théorèmes concernant les conditions nécessaires pour l'existence des solutions globales et locales.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de problème de Cauchy pour la non-existence de la solution globale pour une équation d'onde avec amortissement fractionnel

La première étude traite l'explosion de la solution global. La démonstration de celle ci est faite par l'absurde, en supposons que notre problème admit une solution faible global non trivial, avec le choix convenable de la fonction test et l'utilisation des propriétés de l'intégration fractionnaire, on détermine une contradiction.

La deuxième étude identifiée des conditions nécessaires pour l'existence des solutions locales et globales en sélectionnant des fonctions test et en utilisant des estimations démontrées dans la première étude .

Abstract :

The main objective of this thesis is the study of the Cauchy problem for the non-existence of the global solution for a wave equation with fractional damping

The first study deals with the explosion of the global solution. The proof of this is made by the absurd, assuming that our problem admits a non-trivial global weak solution, with the suitable choice of the test function and the use of the properties of fractional integration, we determine a contradiction.

The second study identified the conditions necessary for the existence of local and global solutions by selecting test functions and using estimates demonstrated in the first study

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on donne des outils de base et des résultats préliminaires essentiels à notre travail.

1.1 Espace des fonctions intégrable

Définition 1.1 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des classes de fonction f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < +\infty.$$

muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2– Pour $p = \infty$, l'espace des classes de fonctions mesurables bornées presque partout (p, p) sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{M \geq 0 : |f(x)| \leq M. \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Définition 1.2 Une fonction définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^N est dite localement intégrable si sa

restriction à tout compacte K de Ω est p -intégrable :

c-à-d

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{f \mid f \in L^p(K) \ \forall K \subset \Omega\}.$$

1.1.1 Inégalité importante

Inégalités de Cauchy-Schwarz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} u(x) v(x) \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inégalités de Holder

Soient $u \in L^p(\Omega), v \in L^q(\Omega)$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$\int_{\Omega} u(x) v(x) \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.1)$$

Cette inégalité est la généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Inégalité de Cauchy avec ϵ

Pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout a, b dans \mathbb{R} , nous avons l'inégalité :

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\epsilon} |b|^2.$$

Inégalité de Young avec ϵ

Pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout A, B dans \mathbb{R}^N et $p, q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nous avons l'inégalité :

$$|AB| \leq \frac{1}{p} |\epsilon A|^p + \frac{p-1}{p} \left| \frac{B}{\epsilon} \right|^{\frac{\epsilon}{p-1}}.$$

ou

$$|AB| \leq \epsilon |A|^p + C_\epsilon |B|^q. \quad (1.2)$$

avec

$$C_\epsilon = \frac{1}{q} (p\epsilon)^{\frac{q}{p}}.$$

qui est la génération de l'inégalité de Cauchy avec ϵ

Egalité presque partout

Proposition 1.1 Soit $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ une fonction mesurable, alors

$$\int_X f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \, \mu - \text{presque partout}. \quad (1.3)$$

Corollaire 1.1 Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour tout fonction $\varphi \in D(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega f(u) \varphi(u) = 0 \Rightarrow f(u) = 0 \text{ presque partout } \forall u \in \Omega. \quad (1.4)$$

1.1.2 Intégral successive de Cauchy

Soit f une fonction réelle continue, la n ème primitive de f est :

$$f^{[n]}(x) = \int_a^x \int_a^{\delta_1} \int_a^{\delta_2} \dots \int_a^{\delta_{n-1}} f(\delta_n) \, d\delta_n \dots d\delta_2 d\delta_1.$$

La version condensée en une seule intégrale est :

$$f^{[n]}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) \, dy.$$

par récurrence, puisque f est continue, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^{(1)}(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(y) \, dy \\ &= f(x). \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} f^{[n]}(x) &= \frac{d}{dx} \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-y)^{n-1} f(y) dy. \\ &= f^{(n-1)}(x) .\end{aligned}$$

1.1.3 Support d'une fonction :

Définition 1.3 Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur \mathbb{R}^n . On appelle support de la fonction f , noté $\text{supp}(f)$ est l'adhérence des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que : $f(x) \neq 0$, i.e :

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq 0\}}.$$

C'est donc un ensemble fermée de \mathbb{R}^n

1.1.4 Fonction test

Définition 1.4 Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n . Une fonction test φ sur Ω est une fonction de Ω dans \mathbb{R} , indéfiniment dérivable et à support compact

Corollaire 1.2 1) L'ensemble D des fonctions-test est un sous-espace vectoriel.

2) Si φ est une fonction-test, il en est de même de φt .

3) Si φ est une fonction-test de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et f une fonction de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors : $f\varphi$ est une fonction-test.

1.2 Calcule fractionnaire

1.2.1 Historique

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres arbitraires (réels ou complexes).

L'une des théories qui peut être considérée aussi bien ancienne que nouvelle et qui connaît actuellement une grande popularité parmi les chercheurs dans les sciences fondamentales et en

ingénierie, est celle du "Calcul Fractionnaire" qui étend la dérivation et l'intégration aux ordres non entier. Au début c'était presque un jeu d'esprit pour certains mathématiciens de renommée, qui voulaient généraliser la notion de différentiation d'ordre entier par des opérateurs d'ordre fractionnaire, permettant le calcul de la dérivée d'ordre α réel ou complexe d'une fonction différentiable $f(t)$, soit

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t).$$

Partant de quelques spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), cette théorie a été largement développée jusqu'à nos jours. De nombreux mathématiciens ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé, dont on peut citer :P.S. Laplace, J.B.J. Fourier, J. Hadamard,A. Marchaud, H. Kober, D.V. Widder et M. Riesz (1949).

Parallèlement à ce progrès théorique, quelques aspects pratiques limités du calcul fractionnaire, ont été développés par : Abel, Heavisid et Gemant pour résoudre certains problèmes physiques.

Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions. Dans cette partie, on introduit l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville et de Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions.

1.2.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section on présent quelques fonction spéciales qui jouent un role très important dans le calcul fractionnaire

La fonction Gamma

L'une des fonction de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler :

Définition 1.5 *La fonction Gamma d'Euler, notée $\Gamma(z)$, est défini par l'intégrale suivant*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \text{ pour } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.5)$$

Remarque 1.1 1) La fonction gamma est strictement convexe et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall n > 0 : \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) t^{x-1} e^{-t} dt.$$

de plus

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k t^{x-1} e^{-t} dt \quad .$$

2) $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

3) Une propriété importante de cette fonction est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(z) > 0, .$$

Qu'en peut démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\ &= [-e^{-t} t^z]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction Gamma généralise la fonction factorielle car d'après la relation de récurrence précédente

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\ &= n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times \Gamma(1). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} \exp(-t) dt \\ &= [\exp(-t)]_0^{+\infty} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}.$$

4) On a

$$\Gamma(0^+) = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma(n) = +\infty; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(n)}{n} = +\infty.$$

Et aussi

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

La fonction Béta

Définition 1.6 La fonction Béta est définie par :

$$\beta(z, \varpi) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\varpi-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(\varpi) > 0. \quad (1.6)$$

Proposition 1.2 La fonction Gamma et Béta son liées par la relation suivant :

$$\beta(z, \varpi) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(\varpi)}{\Gamma(z + \varpi)}. \quad (1.7)$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \Gamma(\varpi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} t_2^{\varpi-1} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} \left(\int_0^{+\infty} t_2^{\varpi-1} e^{-(t_1+t_2)} dt_2 \right) dt_1.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable, $t'_2 = t_1 + t_2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\varpi) &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1} \int_{t_1}^{+\infty} (t'_2 - t_1)^{\varpi-1} e^{-t'_2} dt'_2 dt_1 \\ &= \int_{t_1}^{+\infty} e^{-t'_2} \int_0^{t'_2} (t'_2 - t_1)^{\varpi-1} t_1^{z-1} dt_1 dt'_2.\end{aligned}$$

Si on pose

$$t'_1 = \frac{t_1}{t'_2}.$$

on arrive a

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(\varpi) &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} \left(\int_0^1 (t'_2 - t'_1 t'_2)^{\varpi-1} (t_1 t'_2)^{z-1} t'_2 dt'_1 \right) dt'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} \left((t'_2)^{z-1} \int_0^1 (1 - t'_1)^{\varpi-1} (t'_2)^{\varpi-1} (t'_2)^{z-1} (t'_1)^{z-1} dt'_1 \right) dt'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} \left((t'_2)^{z+\varpi-1} \int_0^1 (1 - t'_1)^{\varpi-1} (t'_1)^{z-1} dt'_1 \right) dt'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} (t'_2)^{z+\varpi-1} \left(\int_0^1 (1 - t'_1)^{\varpi-1} (t'_1)^{z-1} dt'_1 \right) dt'_2 \\ &= \Gamma(z + \varpi) \beta(z, \varpi).\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré. ■

Quelques propriétés de fonction Bêta · Par le changement de variable $u = 1 - t$, on obtient

que la fonction beta est symétrique

$$\beta(x, y) = \beta(y, x).$$

· Elle satisfait les équations fonctionnelles telles que

$$\begin{aligned}\beta(x, y+1) &= \frac{y}{x+y} \beta(x, y), \\ \beta(x, y) \beta(y+x, 1-y) &= \frac{\pi}{x \sin(\pi y)}, \\ \beta(x, x) &= 2^{1-2x} \beta\left(\frac{1}{2}, x\right).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \beta(x, y) = \beta(x, y) \left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)} \right).$$

Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.7 La fonction de Mittag-Leffler, qui tient son nom du mathématicien **Gösta Mittag-Leffler**, est une fonction spéciale, qui s'applique dans le plan complexe et dépend de deux paramètres complexes α et β . La fonction est définie pour $\alpha, \beta > 0$, notée $E_{\alpha\beta}$:

$$E_{\alpha\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}.$$

· Pour $\beta = 1$, on obtient la fonction de Mittag-Leffler dite à un paramètre :

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

· La fonction exponentielle est déduite de $E_{\alpha}(z)$ en posant $\alpha = 1$:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)}.$$

1.2.3 Intégral fractionnaire

Intégrale au sens de Reimann-Liouville

Définition 1.8 Soit $\alpha > 0$, l'opérateur $I_{a/t}^\alpha f$ est appelé opérateur d'intégration fractionnaire (à gauche) de Reimann-Liouville d'ordre α

$$(I_{a/t}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau; \alpha > 0. \quad (1.8)$$

Exemple 1.1 Soit f une fonction telle que $f(t) = (t - a)^n, a \in \mathbb{R}$.

On calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α

$$I_{a/t}^\alpha (t - a)^n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - s)^{\alpha-1} (s - a)^n ds.$$

à l'aide de changement de variable $s = a + (t - a)x$ on obtient :

$$I_{a/t}^\alpha (t - a)^n = \frac{(t - a)^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - x)^{\alpha-1} x^n dx.$$

aussi

$$I_{a/t}^\alpha (t - a)^n = \frac{(t - a)^{n+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(n + 1, \alpha).$$

Pour $n = 2, \alpha = 0.5$, on a :

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3.5)} (t - a)^{2.5}.$$

Définition 1.9 Soit $\alpha > 0$, l'opérateur ${}_t I_T^\alpha$ est appelé opérateur d'intégration fractionnaire (à droite) de Reimann-Liouville d'ordre α ;

$$\forall t < T \quad (I_{t/T}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

1.2.4 Dérivées au sens de Reimann-Liouville

Définition 1.10 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et f une fonction intégrable définie sur $[0, T]$.

La dérivée d'ordre α de f est définie par :

1- Dérivée au sens de Reimann-Liouville à gauche

$${}^R D_{0/t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (1.9)$$

2- Dérivée au sens de Reimann-Liouville à droite

$${}^R D_{t/T}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_t^T \frac{f(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau. \quad (1.10)$$

Où le nombre entier n est choisi telle que : $n-1 < \alpha < n$

Remarque 1.2 Soit C une constante, on a

$$\begin{aligned} {}^R D_{0/t}^\alpha C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t \frac{C}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{-(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} t^{n-\alpha} \\ &= \frac{C(n-\alpha-1)!}{\Gamma(n-\alpha)} t^{-\alpha}. \end{aligned}$$

La dérivée d'une fonction constante au sens de Reimann-Liouville n'est pas nulle.

Quelques propriétés

La linéarité

Soient f et g deux fonctions dont la dérivées fractionnaire au sens de R-L d'ordre α existent ,alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$: ${}^R D_{a/t}^\alpha (\lambda f + \mu g)$ existe et on a :

$${}^R D_{a/t}^\alpha (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda {}^R D_{a/t}^\alpha f(x) + \mu {}^R D_{a/t}^\alpha g(x).$$

Non –commutativité · Supposons que $n - 1 < \alpha < n, m - 1 < \beta < m, n, m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^R D_{a/t}^\alpha$ existe alors :

$${}^R D_{a/t}^\alpha {}^R D_{a/t}^\beta f(t) \neq {}^R D_{a/t}^\beta {}^R D_{a/t}^\alpha f(t).$$

Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

$${}^R D_{a/t}^\alpha I_a^\alpha f = f.$$

1.3 Dérivées au sens de Caputo

Définition 1.11 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $f^{(n)}$ intégrable définie sur $[0, T]$.

La dérivée d'ordre α de f est définie par :

1- Dérivée au sens de Caputo à gauche

$${}^C D_{0/t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau. \quad (1.11)$$

2- Dérivée au sens de Caputo à droite :

$${}^C D_{t/T}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^T \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau - t)^{\alpha - n + 1}} d\tau. \quad (1.12)$$

avec n un entier positif vérifiant l'inégalité : $n - 1 < \alpha < n$

Remarque 1.3 Considérons la fonction $f(t) = C$; où C une constante, on a

$$\begin{aligned} {}^C D_{0/t}^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t \frac{0}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \\ &= 0. \end{aligned}$$

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

Quelques propriétés

La linéarité Soient $n - 1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et soient les deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ telle que ${}^C D^{(\alpha)} f(t)$ et ${}^C D^{(\alpha)} g(t)$ existent, la dérivée fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire

$${}^C D_{0/t}^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}^C D_{0/t}^\alpha f(t) + \mu {}^C D_{0/t}^\alpha g(t).$$

– **Preuve** On a :

$${}^C D_{0/t}^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t).$$

donc

$$\begin{aligned} {}^C D_{0/t}^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) &= I^{n-\alpha} D^n [\lambda f(t) + \mu g(t)] \\ &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(t) + \mu I^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda {}^C D_{0/t}^\alpha f(t) + \mu {}^C D_{0/t}^\alpha g(t). \end{aligned}$$

■

Non –commutativité · Supposons que $n - 1 < \alpha < n, m - 1 < \beta < m, n, m \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^C D_{0/t}^\alpha$ existe alors :

$${}^C D_{0/t}^\alpha {}^C D_{0/t}^\beta f(t) \neq {}^C D_{0/t}^\beta {}^C D_{0/t}^\alpha f(t).$$

Composition avec l’opérateur d’intégration fractionnaire

$${}^C D_a^\alpha I_a^\alpha f = f.$$

1.3.1 La relation entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, ($n \in \mathbb{N}$) la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont reliés par la formule :

$$({}^R D_{a/t}^\alpha f)(t) = ({}^C D_{a/t}^\alpha f)(t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}. \quad (1.13)$$

· Quand

$$f^{(k)}(a) = 0 \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

la dérivée au sens de Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville c'est-à-dire :

$$({}^R D_{a/t}^\alpha f)(t) = ({}^C D_{a/t}^\alpha f)(t).$$

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est-à-dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure $t = a$

On peut dire que le chemin suit pour arriver la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit le sens de Riemann-Liouville c'est-à-dire :

Pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha < m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(t)$ et puis on dérive le résultat obtenu l'ordre entier m .

Mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre où $m-1 \leq \alpha < m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(t)$ et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$

Chapitre 2

Non-Existence de solutions globales pour une équation d'onde avec amortissement fractionnel

2.1 Prèliminaire

2.1.1 *Solution locale*

Définition 2.1 *On dit que $u(x, t)$ est une solution locale du problème d'évolution si elle définie sur un temps finie c-à-d*

$$\exists T > 0; \forall t \in [0, T] : u(x, t) \text{ existe}$$

2.1.2 *Solution globale*

Définition 2.2 *Si $u(x, t)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, alors $u(x, t)$ est appelé solution globale c-à-d*

$$\forall t \in [0, +\infty[: u(x, t) \text{ existe}$$

2.1.3 *Explosion de solution*

Définition 2.3 Soit $u(x, t)$ est une solution d'un problème d'évolution, telle que $x \in \mathbb{R}^N$ et $t \geq 0$; on dit que $u(x, t)$ explose en temps finie T si

$$\lim_{t \rightarrow T^-} |u(x, t)| = +\infty.$$

Dans ce cas

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |u(x, t)| = +\infty.$$

2.1.4 Exposant critique

Ainsi, l'étude du phénomène d'explosion d'une solution d'un problème de diffusion a conduit à l'apparition d'un exposant appelé l'exposant critique

Définition 2.4 On dit que p_c est l'exposant critique de problème si :

pour $p \leq p_c$, alors aucune solution positive non-triviale de ce problème ne peut être globale
· pour $p > p_c$, le problème admet des solutions positives non-triviale globales sous des hypothèses de données initiales petites .

2.1.5 Laplacien de puissance fractionnaire

Les opérateurs de diffusion fractionnaire sont bien connus des probabilistes, et leur étude par des outils d'EDP c'est intensifiée depuis quelques années.

Plusieurs modèles faisant intervenir de tels opérateurs ont été proposés en dynamique des populations et en détonation des gaz. Le Laplacien d'ordre fractionnaire $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ dans \mathbb{R}^n est le prototype de tels opérateurs, il est défini par, sa transformée de Fourier, comme suit :

$$\mathcal{F}((-\Delta)^s f(\xi)) = c |\xi|^{2s} \mathcal{F}f(\xi), \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

où : $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et $0 < s < 1$.

D'un point de vue purement mathématique, cet opérateur partage certaines propriétés cruciales du Laplacien : en particulier, il vérifie le principe du maximum.

2.2 Non existence de la solution global

Dans cette partie, on va étudier la non existence de la solution global du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) + (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{0/t}^\alpha u(x, t) = |u|^p & \text{pour } (x, t) \in Q = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.1)$$

Où :

$(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}}$: le Laplacien de puissance fractionnaire $\frac{\beta}{2}$, avec $\beta \in]0, 2]$;

$D_{0/t}^\alpha$: la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in (1, 2)$; tel que

$$D_{0/t}^\alpha u = D_{0/t}^{\alpha-1} u_t.$$

Où : $D_{0/t}^{\alpha-1}$ désigne la dérivée fractionnaire sens de Caputo d'ordre $\alpha - 1$ et l'exposant $p \in]1, +\infty[$

Définition 2.5 Une fonction $u \in L_{loc}^1(Q_T)$ ($Q_T = \mathbb{R}^n \times [0, T]$) est une solution local faible de problème (P) défini sur Q_T , $0 < T < +\infty$, si $u \in L_{loc}^p(Q_T)$ tel que

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} u_{tt}(x, t) \xi(x, t) dxdt - \int_{Q_T} \Delta u(x, t) \xi(x, t) dxdt + \int_{Q_T} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} D_{0/t}^\alpha u(x, t) \xi(x, t) dxdt \\ &= \int_{Q_T} |u|^p \xi(x, t) dxdt. \end{aligned} \quad (2.2)$$

pour toute fonction test $\xi \in C_{x,t}^{2,2}(Q_T)$, $\xi \geq 0$ et satisfaisant

$$\xi(T, x) = \xi_t(T, x) = \xi_t(0, x) = 0.$$

Remarque 2.1 L'équation (2.2) donne :

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} \xi_{tt}(x, t) u(x, t) - \int_{Q_T} u(x, t) \Delta \xi(x, t) dx dt - \int_{Q_T} u(x, t) D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi(x, t) dx dt \\ &= \int_{Q_T} |u|^p \xi(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} \xi(x, 0) u_1(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0(x) D_{t/T}^{\alpha-1} \xi(x, 0) dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

En effet ;

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} u_{tt}(x, t) \xi(x, t) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} u_t(x, t) \xi(x, t) \Big|_0^T dx - \int_{Q_T} u_t(x, t) \xi_t(x, t) dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x) \xi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \xi_t(x, t) \cdot u(x, t) \Big|_0^T dx + \int_{Q_T} \xi_{tt}(x, t) \cdot u(x, t) dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x) \xi(x, 0) dx + \int_{Q_T} \xi_{tt}(x, t) \cdot u(x, t) dx dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Et de manière similaire, on obtient les terme de (2.3).

Théorème 2.1 On suppose que :

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0(x) dx > 0, \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x) dx > 0, p > 1 .$$

Si

$$p \leq p_c = 1 + \frac{2\alpha}{2 + \alpha N - 2\alpha}.$$

Donc le problème (2.1) n'admet pas une solution globale non trivial

Preuve (Par contradiction)

On suppose que le problème (2.1) admet une solution faible positive globale non trivial c-à-d : $u(x, t)$ existe pour tout $T^* > 0$,

Considérons une fonction $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}_+)$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ est décroissante} \\ \phi(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{si } |y| \geq 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

On remarque que

$$0 \leq \phi(y) \leq 1, \forall y \in \mathbb{R}_+.$$

Choisissons comme fonction test, la fonction $\xi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$\xi(x, t) = \phi^\lambda \left(\frac{t^{2\alpha} + |x|^4}{R^4} \right).$$

avec

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda > p \text{ et } R \in \mathbb{R}_+^*$$

où

$$t = R^{\frac{2}{\alpha}} \tau, x = Ry.$$

Il est claire que

$$dxdt = R^{\frac{2}{\alpha} + N} dyd\tau.$$

De la définition de la fonction $\phi(y)$, il est clair que :

$$\xi(x, t) \geq 0 \text{ et } \xi \in C_{x,t}^{2,2}(Q_T),$$

et

$$\xi(x, T) = \xi_t(T, x) = \xi_t(0, x) = 0.$$

Pour estimer le membre droite de (2.3), on utilise l'inégalité de ε - young (1.2),

En prenant

$$A = u\xi^{\frac{1}{p}}, B = \xi_{tt}\xi^{-\frac{1}{p}}.$$

on obtient :

$$\int_{Q_T} \xi_{tt} u dxdt \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p \xi dxdt + C_\varepsilon \int_{\text{supp } \xi_{tt}} \xi^{\frac{-p'}{p}} |\xi_{tt}|^{p'} dxdt. \quad (2.5)$$

De manière similaire, en prenant

$$A = u\xi^{\frac{1}{p}}, B = \Delta \xi \xi^{-\frac{1}{p}}.$$

on trouve

$$\int_{Q_T} u \Delta \xi dx dt \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p \xi dx dt + C_\varepsilon \int_{\text{supp } \Delta \xi} |\Delta \xi|^{p'} \xi^{-\frac{p'}{p}} dx dt. \quad (2.6)$$

et en prenant

$$A = u \xi^{\frac{1}{p}}, B = D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi \xi^{-\frac{1}{p}}.$$

on trouve

$$\int_{Q_T} u D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi dx dt \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^p \xi dx dt + C_\varepsilon \int_{\text{supp } D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi} \xi^{-\frac{p'}{p}} D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi^{p'} dx dt. \quad (2.7)$$

On note aussi, que la fonction test ξ est choisit de manière que

$$\begin{aligned} \int_{\text{supp } \xi_{tt}} \xi^{-\frac{p'}{p}} |\xi_{tt}|^{p'} dx dt &< \infty \\ \int_{\text{supp } \Delta \xi} |\Delta \xi|^{p'} \xi^{-\frac{p'}{p}} dx dt &< \infty. \end{aligned}$$

et

$$\int_{\text{supp } D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi} \xi^{-\frac{p'}{p}} D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi^{p'} dx dt < \infty.$$

Pour ε assez petit, les estimations (2.3), (2.5), (2.6) et (2.7) donne

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |u|^p \xi(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} \xi(x, 0) u_1(x) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0(x) D_{t/T}^{\alpha-1} \xi(x, 0) dx \\ &\leq C_\varepsilon \left[\int_{\text{supp } \xi_{tt}} \xi^{-\frac{p'}{p}} |\xi_{tt}|^{p'} dx dt + \int_{\text{supp } \Delta \xi} |\Delta \xi|^{p'} \xi^{-\frac{p'}{p}} dx dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{\text{supp } D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi} \xi^{-\frac{p'}{p}} D_{t/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi^{p'} dx dt \right]. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Introduisons maintenant, les variables scalaires (τ, y) définies par :

$$t = R^\alpha \tau, x = Ry.$$

On pose :

$$\Omega = \{(\tau, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \text{ tq } \tau^2 + |y|^4 \leq 2\}.$$

Par conséquent, on écrivant :

$$\varphi(t, x) = \varphi\left(R^{\frac{2}{\alpha}}\tau, Ry\right) = \chi(\tau, y).$$

on a :

$$\begin{aligned} \varphi_t(t, x) &= \frac{\partial \varphi\left(R^{\frac{2}{\alpha}}\tau, Ry\right)}{\partial\left(R^{\frac{2}{\alpha}}\tau\right)} \\ &= R^{-\frac{2}{\alpha}} \frac{\partial \varphi\left(R^{\frac{2}{\alpha}}\tau, Ry\right)}{\partial \tau} \\ &= R^{-\frac{2}{\alpha}} \chi_\tau(\tau, y). \end{aligned}$$

donc

$$\varphi_{tt}(t, x) = R^{-\frac{4}{\alpha}} \chi_{\tau\tau}(\tau, y).$$

et

$$dt = R^{\frac{2}{\alpha}} d\tau, \quad dx = R^N dy.$$

alors

$$\int_{\text{supp } \xi} \xi^{-\frac{p'}{p}} |\xi_{tt}|^{p'} dt dx \leq R^{\frac{2}{\alpha} + N - \frac{4}{\alpha} p'} \int_{\Omega} \chi^{-\frac{p'}{p}} |\chi_{tt}|^{p'} d\tau dy. \quad (2.9)$$

Aussi

$$\begin{aligned} (\Delta_x) \varphi(t, x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} \right) \varphi(t, x) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial (Ry_1)^2}, \frac{\partial^2}{\partial (Ry_2)^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial (Ry_N)^2} \right) \varphi\left(R^{\frac{2}{\alpha}}\tau, Ry\right) \\ &= R^{-2} (\Delta_y) \chi(\tau, y). \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\text{suppp } \Delta \xi} |\Delta \xi|^{p'} \xi^{-\frac{p'}{p}} dt dx \leq R^{\frac{2}{\alpha} + N - 2p'} \int_{\Omega} |\Delta \chi|^{p'} \chi^{-\frac{p'}{p}} d\tau dy. \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta_x)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(t, x) &= D_{t/T}^{\alpha} \left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x_N^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \varphi(t, x) \right] \\ &= D_{t/T}^{\alpha} \left[- \left(\frac{\partial^2}{\partial (Ry_1)^2}, \frac{\partial^2}{\partial (Ry_2)^2}, \dots, \frac{\partial^2}{\partial (Ry_N)^2} \right)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \left(R^{\frac{2}{\alpha}} \tau, Ry \right) \right] \\ &= R^{-\beta} (-\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}} \varphi \left(R^{\frac{2}{\alpha}} \tau, Ry \right) \\ &= R^{-(2+\beta)} (-\Delta_y)^{\frac{\beta}{2}} \chi(\tau, y). \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\text{suppp } \varphi} \xi^{-\frac{p'}{p}} D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi^{p'} dt dx \leq R^{\frac{2}{\alpha} + N - (\beta+2)p'} \int_{\Omega} \chi^{-\frac{p'}{p}} D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \chi^{p'} dy d\tau. \quad (2.11)$$

Par conséquence, on obtient l'estimation suivant :

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} |u|^p \xi dt dx &\leq C_{\epsilon} R^{\frac{2}{\alpha} + N - \frac{4}{\alpha} p'} \int_{\Omega} \chi^{-\frac{p'}{p}} |\chi_{tt}|^{p'} d\tau dy \\ &\quad + C_{\epsilon} R^{\frac{2}{\alpha} + N - 2p'} \int_{\Omega} |\Delta \chi|^{p'} \chi^{-\frac{p'}{p}} d\tau dy \\ &\quad + C_{\epsilon} R^{\frac{2}{\alpha} + N - (\beta+2)p'} \int_{\Omega} \chi^{-\frac{p'}{p}} D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \chi^{p'} d\tau dy. \end{aligned}$$

Or

$$R^{-2p'} = \sup_{\substack{1 < \alpha < 2 \\ 0 < \beta \leq 2}} \left(R^{\frac{4}{\alpha} p'}, R^{-2p'}, R^{-(2+\beta)p'} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} |u|^p \xi dt dx &\leq C_{\epsilon} R^{\frac{2}{\alpha} + N - 2p'} \int_{\Omega} \left[\chi^{-\frac{p'}{p}} |\chi_{tt}|^{p'} + |\Delta \chi|^{p'} \chi^{-\frac{p'}{p}} \right. \\ &\quad \left. + \chi^{-\frac{p'}{p}} D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \chi^{p'} \right] d\tau dy. \end{aligned} \quad (2.12)$$

On distingue deux cas :

Cas 1 : Si

$$\frac{2}{\alpha} + N - 2p' < 0. \quad (2.13)$$

Comme p et q sont conjugués, on a

$$p' = \frac{p}{p-1}.$$

Donc, (2.13) donne $\frac{2}{\alpha} + N - 2\left(\frac{p}{p-1}\right) < 0$

alors

$$\frac{2p}{p-1} < \frac{2 + \alpha N}{\alpha}.$$

ainsi

$$2p\alpha < 2p - 2 + p\alpha N - \alpha N.$$

donc

$$2p\alpha - pN\alpha - 2P < -2 - \alpha N.$$

on trouve

$$p(2\alpha - N\alpha - 2) < -2 - \alpha N.$$

on a

$$p < \frac{2 + \alpha N}{N\alpha + 2 - 2\alpha}.$$

alors

$$p < 1 + \frac{2 + \alpha N - N\alpha - 2 + 2\alpha}{N\alpha + 2 - 2\alpha}.$$

D'où

$$p < 1 + \frac{2\alpha}{2 + \alpha N - 2\alpha} + 1 = p_c.$$

Dans le cas $p < p_c$, en passant à la limite quand R tend vers ∞ dans (2, 12) ; on trouve

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} \xi |u|^p dxdt &= \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |u|^p dxdt \\ &= 0. \end{aligned}$$

donc

$$u = 0. \text{ p.p}$$

Cas 2 :

Si : $p = p_c$ en ce cas , de l'estimation (2.12) , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+} |u|^p dxdt \leq C. \tag{2.14}$$

On pose

$$C_R = \{(x, t) : R^4 \leq t^{2\alpha} + |x|^4 \leq 2R^4\}.$$

De (2.12) , on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} |u|^p \xi dxdt = 0.$$

Mettons

$$\Omega_1 = \{(\tau, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N; 1 \leq \tau^{2\alpha} + |y|^4 \leq 2\}.$$

En utilisons l'inégalité de Hölder pour l'estimation (2.3) , on trouve

$$\begin{aligned} \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} \xi_{tt} u dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} u (\xi)^{\frac{1}{p}} \xi_{tt} (\xi)^{\frac{-1}{p}} dxdt \\ &\leq \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} |u|^p \xi dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} |\xi_{tt}|^{p'} (\xi)^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \left(\int_{C_R} |u|^p \xi dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} |\xi_{tt}|^{p'} (\xi)^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

De même manière, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} u \Delta \xi dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} u (\xi)^{\frac{1}{p}} \Delta \xi (\xi)^{\frac{-1}{p}} dxdt \\
 &\leq \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} |u|^p \xi dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} |\Delta \xi|^{p'} (\xi)^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 &\leq \left(\int_{C_R} |u|^p \xi dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} |\Delta \xi|^{p'} (\xi)^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}.
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} u D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi dxdt &= \int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} u (\xi)^{\frac{1}{p}} D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi (\xi)^{\frac{-1}{p}} dxdt \\
 &\leq \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} |u|^p \xi dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_{TR^{\frac{2}{\alpha}}}} \left| D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi \right|^{p'} (\xi)^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 &\leq \left(\int_{C_R} |u|^p \xi dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega_1} \left| D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi \right|^{p'} (\xi)^{\frac{-p'}{p}} dxdt \right)^{\frac{1}{p'}}.
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int \xi |u|^p &\leq \left(\int_{C_R} |u|^p \xi dxdt \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\int_{\Omega_1} |\Delta \xi|^{p'} \xi^{\frac{-p'}{p}} dyd\tau \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_{\Omega_1} |\xi_{tt}|^{p'} \xi^{\frac{-p'}{p}} dyd\tau \right)^{\frac{1}{p'}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{\Omega_1} \left| D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi \right|^{p'} \xi^{\frac{-p'}{p}} dyd\tau \right)^{\frac{1}{p'}} \right]. \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

On passe à la limite quand $R \rightarrow \infty$ on obtient

$$\int \xi |u|^p dxdt = 0. \tag{2.16}$$

donc

$$u = 0.p.p$$

D'où une contradiction

Donc le problème (2.1) n'admet pas de solution globale non trivial. ■

Chapitre 3

Conditions nécessaires pour l'existence des solutions locales et globales

Théorème 3.1 *Soit u une solution locale de (2.1) où $T < +\infty$ et $p > 1$. Alors ils existent des constantes C_1 , C_2 et C_3 telles que*

$$C_1 T^{-\alpha} \inf_{|x|>R} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 \right) + C_2 \inf_{|x|>R} u_1(x) \leq C_3 T^{-2p'}.$$

Preuve Considérons la fonction de test suivante :

$$\xi(x, t) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right) \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^{2p'}. \quad (3.1)$$

où : $\Phi \in W_{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ est une fonction positive, avec

$$\text{supp } \Phi \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^N : 1 < |x| < 2 \right\}.$$

et elle satisfie :

$$|\Delta \Phi| \leq k \Phi ; \text{ pour une constante } k > 0 \quad (3.2)$$

$$\left| (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \Phi \right| \leq k' \Phi ; \text{ pour une constantes } k' > 0. \quad (3.3)$$

D'après la formule (2.8), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 D_{t/T}^{\alpha-1} \xi(0) dx + \int_{Q_T} \xi u_1 dx dt \\ & \leq C \left(\int_{Q_T} \xi^{-\frac{p'}{p}} |\xi_{tt}|^{p'} dx dt + |\Delta \xi|^{p'} dx dt + \left| D_{t/T}^{\alpha} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi \right|^{p'} dx dt \right). \end{aligned}$$

pour une constante C .

Il est clair que ξ ainsi définie, satisfait :

$$\begin{cases} \xi(x, T) = 0 \\ \xi_t(x, T) = \xi_t(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Nous introduisons le changement de variable suivant :

$$t = T\tau \quad T > 0.$$

De (3.1), on a

$$\xi_t(x, t) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right) 2p' \left[\left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^{2p'-1} \left(\frac{-2t}{T^2}\right) \right].$$

Ainsi

$$\xi_{tt}(x, t) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right) 2p' \left[(2p' - 1) \left(\frac{4t^2}{T^4}\right) \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^{2p'-2} - \frac{2}{T^2} \left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^{2p'-1} \right].$$

et

$$0 < t < T \Rightarrow 0 < \tau < 1.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
 \int_{Q_T} \xi^{\frac{-p'}{p}} |\xi_{tt}|^{p'} dxdt &\leq C \int_{Q_T} \left[\left[\Phi \left(\frac{x}{R} \right) \left(1 - \frac{t^2}{T^2} \right)^{2p'} \right]^{\frac{-p'}{p}} \right. \\
 &\quad \times \left. \left| \Phi \left(\frac{x}{R} \right) \left[\frac{4t^2}{T^4} \left(1 - \frac{t^2}{T^2} \right)^{2p'-2} + \frac{2}{T^2} \left(1 - \frac{t^2}{T^2} \right)^{2p'-1} \right] \right|^{p'} \right] dxdt \\
 &\leq CT \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \left[\Phi \left(\frac{x}{R} \right)^{\frac{-p'}{p}} \Phi \left(\frac{x}{R} \right)^{p'} \left[(1 - \tau^2)^{2p'} \right]^{\frac{-p'}{p}} \right. \\
 &\quad \left. \left| \frac{4\tau^2}{T^2} (1 - \tau^2)^{2p'-2} + \frac{2}{T^2} (1 - \tau^2)^{2p'-1} \right|^{p'} \right] dx d\tau \\
 &\leq C_1 T^{1-2p'} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \Phi \left(\frac{x}{R} \right) dx. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

De même manière pour le deuxième terme, en utilisant (3.2), on a

$$\int_{Q_T} \xi^{\frac{-p'}{p}} |\Delta \xi|^{p'} dxdt \leq C_2 K^{p'} R^{-2p'} T \int_{\mathbb{R}^N} \Phi \left(\frac{x}{R} \right) dx. \tag{3.5}$$

pour le troisième terme, en utilisant (3.3), on trouve :

$$\int_{Q_T} \xi^{\frac{-p'}{p}} \left| D_{i/T}^\alpha (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} \xi \right|^{p'} dxdt \leq C_3 R^{-\beta p'} T^{-\alpha p'+1} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi \left(\frac{x}{R} \right) dx. \tag{3.6}$$

En rassemblant les estimations (3.4), (3.5) et (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}
 &C_1 T^{-\alpha+1} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi \left(\frac{x}{R} \right) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 dx + C_2 T \int_{\mathbb{R}^N} \Phi \left(\frac{x}{R} \right) u_1 dx \\
 &\leq \left(\frac{C_1}{T^{2p'-1}} + C_2 k^{p'} R^{-2p'} T + C_3 R^{-\beta p'} T^{-\alpha p'+1} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi \left(\frac{x}{R} \right) dx. \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Cependant, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 \Phi \left(\frac{x}{R} \right) dx \geq \inf_{|x|>R} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi \left(\frac{x}{R} \right) dx. \tag{3.8}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_1(x) \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx \geq \inf_{|x|>R} u_1(x) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \quad (3.9)$$

Alors, en divisant sur $\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx$, l'estimation (3.6) donne

$$\begin{aligned} & C_1 T^{-\alpha} \inf_{|x|>R} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 \right) + C_2 \inf_{|x|>R} u_1(x) \\ & \leq \left(C_3 T^{-2p'} + C_4 k^{p'} R^{-2p'} + C_5 R^{-\beta p'} T^{-\alpha p'} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Passant à la limite quand $R \rightarrow +\infty$; on obtient :

$$C_1 T^{-\alpha} \inf_{|x|>R} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 \right) + C_2 \inf_{|x|>R} u_1(x) \leq C_3 T^{-2p'}. \quad (3.11)$$

■

Corollaire 3.1 *On suppose que le problème admet une solution faible globale alors une des deux relations :*

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 \right) = 0.$$

ou

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} u_1(x) = 0.$$

est satisfaite

Théorème 3.2 *On suppose que le problème (2,1) admet une solution faible globale non triviale alors il existent deux constantes positives k_1, k_2 tels que :*

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 |x|^{\min\{2p'-\alpha, \beta p' - \alpha(1-p')\}} \right) \leq k_1.$$

et

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{-\min\{2p', (\alpha+\beta)\}} u_1(x) \leq k_2.$$

Preuve Dans la relation

$$\begin{aligned} & C_1 T^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 dx + C_2 \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x) \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx \\ & \leq \left(C_3 T^{-2p'} + C_4 k^{p'} R^{-2p'} + C_5 R^{-\beta p'} T^{-\alpha p'} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \end{aligned}$$

Comme $\beta < 2$, et $\alpha - 2p' < 0$, on a

$$\begin{aligned} & C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 dx \\ & \leq \left(C_3 T^{\alpha-2p'} + C_4 k^{p'} R^{-2p'} T^{\alpha} + C_5 R^{-\beta p'} T^{\alpha-\alpha p'} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \end{aligned}$$

Prenons dans le côté droit $T = R$, on obtient

$$\begin{aligned} & C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 dx \\ & \leq \left(C_3 R^{\alpha-2p'} + C_4 k^{p'} R^{\alpha-2p'} + C_5 R^{-\beta p' + (\alpha-\alpha p')} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 dx \leq C_8 \quad R^{-\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \quad (3.12)$$

Maintenant; en utilisant l'hypothèse sur $\text{supp } \Phi$ (à savoir, $R < |x| < 2p'$)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 dx \leq C_8 \quad \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \quad (3.13)$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} |x|^{-\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) (-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 dx \\ &\geq \inf_{|x|>R} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 |x|^{\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \right) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Chapitre 3. Conditions nécessaires pour l'existence des solutions locales et globales

des estimations (3.13), (3.14), on trouve :

$$\begin{aligned} & \inf_{|x|>R} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 |x|^{\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx \\ & \leq C_8 \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Divisons (3.15) sur

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx.$$

et prenons le sup par rapport à x , on conclut que

$$\liminf_{|x|\rightarrow\infty} \left((-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} u_0 |x|^{\min\{2p'-\alpha, \beta p'-\alpha(1-p')\}} \right) \leq C_8.$$

Avec un argument similaire, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) u_1 dx \leq \left(\frac{C_1}{T^{2p'}} + C_2 k^{p'} R^{-2p'} + C_3 R^{-\beta p'} T^{-\alpha p'} \right) \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx.$$

On trouve

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) u_1 dx \leq C_9 R^{-\min\{2p', (\alpha+\beta)p'\}} \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx.$$

Cependant

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) u_1 dx \leq C_9 \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p', (\alpha+\beta)p'\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx.$$

Alors

$$\begin{aligned} & \inf_{|x|>R} \left(|x|^{\min\{2p', (\alpha+\beta)p'\}} u_1(x) \right) \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p', (\alpha+\beta)p'\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx \\ & \leq C_9 \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p', (\alpha+\beta)p'\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En divisons (3.16) sur

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-\min\{2p', (\alpha+\beta)p'\}} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx.$$

et prenons le sup par rapport à x , on conclut que

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \left(|x|^{-\min\{2p', (\alpha+\beta)p'\}} u_1(x) \right) \leq C_{10}.$$

■

Conclusion

Bibliographie

- [1] .B. Abdelmalek, "Asymptotique des équations différentielles et calcul formel", 9 dec 2010.
- [2] .D.Medjahid,"Etude des problèmes des volution fractionnaires par la méthode d'explosion", 7 oct 2013.
- [3] .K. Hayakawa, On non existence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, Proc.Japan Acad. 49 (1973) 503–505.