MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR KHENCHELA
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Département de Mathématiques et Informatiques

N° de série :

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques Appliquées

La contrôlabilité des systèmes stochastiques semi-linéaires dans les espaces de Hilbert

Réalisé par : ***AOURAGH OUALIDA***
BENAMRANE HANA

Membres de jury :

MANSOURI DJAMEL ***M. A. Président***
MERAH FATEH ***Dr. Examinateur***

Dirigé par : ***Mme. HAMEDI NOUDJOUD***

Présenté le 18/06/2018

Table des matières

Remerciement

Tout d'abord nous remercions le bon Dieu tout puissant de la santé, de la volanté , la patience qu'il nous a donné tout au long de notre cursus.

Nous tenons à remercier trés vivement :
Notre ensseignant * LAGHROUR CHAOUKI *
Notre ensseignant * NASRAOUI YAZID* .
Notre encadreur : Mme * HAMDI NOUDJOUD* pour son aide qui nous a fait aimer notre travail.

Sans oublier de remercier les enseignants de l'université ABBES LAGHROUR et toutes personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je loue Dieu tout puissant qui m'a donné la force et le courage pour achever ce travail .

Je dédie ce modeste travail à :

Ceux que personne ne peut compenser les sacrifices qu'ils ont consentis pour mon éducation et mon bien être : mes trés chers parents sans oublier mes soeurs DOUAA et SERINE et MERIEM et RAYAN et mon frère ZINOU et les petits IYAD et HAKIM et toutes les familles : HOUHA - BENAMRANE.

A mon encadreur : Mme HAMDI NOUDJOUD.

Tous mes amis sans exception .

A tous les enseignants de l'université ABBES LAGHROUR aussi à tous mes amis.

A tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je loue Dieu tout puissant qui m'a donné la force et le courage pour achever ce travail .

Je dédie ce modeste travail à :

Ceux que personne ne peut compenser les sacrifices qu'ils ont consentis pour mon éducation et mon bien être : mes trés chers parents sans oublier mes soeurs NAIMA et WAHIBA et RADHIA et HANOUDA et mes frères BACHIR et KHALED et ABDELRRAHMANE et les petits ANFEL et TEDJELDDINE .

A mon encadreur : Mme HAMDI NOUDJOUD.

Tous mes amis sans exception .

A tous les enseignants de l'université ABBES LAGHROUR aussi à tous mes amis.

A tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Introduction

La contrôlabilité des systèmes stochastiques linéaires bornées dans les espaces de dimension finie à été étudier par Dubov, Mordukhovich, Zabczyk, Ehrhardt, Kliemann, Mahmudov et Denker[4,7]. Les differents notions de contrôlabilité des équations d'évolutions stochastiques linéaires on été étudié par Dubov, Mordukhovich, Bashirov et Mahmudov [7].

La contrôlabilité des systèmes déterministes non linéaires dans l'espace de dimension finie été largement étudier par plusieurs auteurs, qui ont étendue ce concept à des systèmes de dimension infinie. Il y a peut de travaux sur la contrôlabilité des systèmes stochastiques non linéaires.

Parmi les differents méthodes de l'étude des concepts de contrôlabilité pour les systèmes non linéaires abstrait, les principes des points fixe (théorème de Banach, théorème de Shauder, théorème de Schaefer) ont été largement utilisés pour ces systèmes. Dans ces méthodes, le problème de contrôlabilité est transformé en un problème de point fixe pour un opérateur non linéaire dans un espace de fonction. L'objet de ce mémoire est d'étudier ce nouveau concept de la contrôlabilité approchée faible d'un système stochastique. Et de dériver les conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée faible d'un système stochastique semi-linéaire dans les espaces de Hilbert.

En particulier, nous montrons que si le semi-groupe générer par A est analytique alors la contrôlabilité approchée du système déterministe linéaire correspondant au système stochastique semi-linéaire implique la contrôlabilité approchée faible de système semi-linéaire stochastique.

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur les processus aléatoire, l'intégrale stochastique et les semigroupes.

Dans la première partie du deuxième chapitre, nous rappellons l'essentiel des notions de contrôlabilité et leurs propriétées. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous abordons le problème qui nous intéresse, l'étude de la contrôlabilité approchée faible d'un système stochastique semi-linéaire dans les espaces de Hilbert, en appliquant le théorème de point fixe de Banach.

Chapitre 1

Préliminaires

Commençant dans ce premier chapitre par un rappel sur quelques notions dans la théorie des probabilités et l'analyse fonctionnel. Ce qui va être l'outil dans le deuxième chapitre.

1.1 La Tribu

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ensemble quelconque de $\mathbb{R}$, $P(\Omega)$: l'ensemble de toutes les parties de Ω et soit $\mathcal{F} \subset P(\Omega)$; $\mathcal{F} \neq \emptyset$*

on dit que $\mathcal{F} \in \Omega$ est une σ- algèbre ssi :

- $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- $\forall\ A \in \mathcal{F},\ \bar{A} \in \mathcal{F}$.
- $\forall\ A_1\ A_2 \ldots\ A_n \ldots$ *une suite infinie d'élément de* $\mathcal{F}$ *alors :* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

1.2 Variable aléatoire

Définition 1.2.1 *Soit l'espace Ω qui est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire, $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre sur Ω, P est une probabilité d'un évènement par rapport à l'ensemble des cas possibles. Soit $(\Omega,\mathcal{F},P)$ un espace de probabilité, on appelle variable aléatoire sur cet espace, tout application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$X : P(\Omega) \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to X(\omega)$$

1.3 Espérance mathématique

- **Le cas d'une variable aléatoire discrète**

  Si X est une variable aléatoire discr*ète* définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on appelle espérance de X, le réel définie par

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\omega)$$

- **Le cas d'une variable aléatoire continue**

  Si X est une variable aléatoire absolument continue de densié f on appelle espérance de X, le réel définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X f(x) dx$$

- **Propriété de l' espérance**

  Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un même espace Ω admettant une espérance, alors :

  1. E(X+Y)=E(X)+E(Y) ;
  2. E(aX)=aE(X), $\forall$ a $\in \mathbb{R}$;
  3. Si X $\geq$ 0 alors E(X)$\geq$ 0 ;
  4. Si X est un caractère constant tel que : $\forall\ \omega \in \Omega$, X(ω)=k
     alors E(X)=k ;

1.4 Filtration

Définition 1.4.1 *La suite $(\mathcal{F}_n)_n$ est une filtration de l'espace probabilisé $(\Omega$,$\mathcal{F}$,$P)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$ et si $\mathcal{F}_n$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}_{n+1}$.*

– On introduit la tribu $\mathcal{F}_\infty$=σ($\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$).

– La tribu finale $\mathcal{F}_\infty$ est une sous-tribu de$\mathcal{F}$.

On dit que $(\Omega$,$\mathcal{F}$,$P)$ est un espace filtré .

Remarque 1.4.1 *On dit que $\mathcal{F}_s$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}_t$ si*

$\forall t \geq 0, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, $s \leq t$.

1.5 Les Processus

1.5.1 Processus aléatoire

Définition Générale

Un processus aléatoire est un ensemble de variable aléatoire, toutes définies sur le même espace de probabilité, et indexées par un paramètre réel t.

On note tel processus $\{\mathrm{X}(t) : t \in \mathcal{C}\ \}$,

- t est le paramètre du processus.
- $\mathcal{C}$ est l'ensemble des paramètre. Si $\mathcal{C}$ est fini ou infini dénombrable $\mathcal{C}$ est discret (par exemble $\mathcal{C}=\{\ 0,1,2...\ \}$, sinons $\mathcal{C}$ est continue (par exemple $\mathcal{C}=[0\ ,+\infty\ [\ )$. Quand $\mathcal{C}$ est un ensemble d'entier, on note les variable aléatoire par X_n.
- Soit $\mathcal{S}$ est l'espace des états (i.e : des valeurs possibles) des $\mathrm{X}(t)$. Si $\mathcal{S}$ est fini ou infinie dénombrable, $\mathrm{X}(t)$ est discret, sinon $\mathrm{X}(t)$ est continue.

Remarque 1.5.1 *t peut être interprété comme le temps et $\mathcal{C}$ comme les instants à considérer, X(t) est alors la valeur du prosessus à l'instant t.*

1.5.2 Processus de Itô

Définition 1.5.1 *Un processus de Itô est un processus stochastique de la forme :*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s.$$

avec :

- *u, v sont deux fonctions aléatoires.*
- *X_0 $\mathcal{F}_0$-mesurable.*
- *$\int_0^t v(s,\omega)ds < +\infty$ presque sûrement.*
- *$\int_0^t |u(s,\omega)|ds < +\infty$ presque sûrement.*
- *u(t) et v(t) sont $\mathcal{F}_0$-adaptés.*

Remarque 1.5.2 *Un processus est dit adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < +\infty\}$ si pour tout t, X_t est $\mathcal{F}_t$- mesurable.*

Théorème 1.5.1 *Soit X_t un processus d' Itô définie par*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s.$$

Soient $g \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ et $Y_t = g(t,X_t)$, Alors Y_t est également un processus d' Itô si

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t,X_t)dX_t + \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t,X_t)(dX_t)^2.$$

$(dX_t)^2$ est calculé avec les règle suivantes

$$dtdt = dtdB_t = dB_tdt = 0 \quad et \quad dB_tdB_t = dt.$$

Corollaire 1.5.1 *Soient X_t et Y_t deux processus d'ltô*
- $X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s.$
- $Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s.$

Alors $X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds.$
K_s, H_s sont des fonctions aléatoires.

1.5.3 Processus de wiener

Un processus stochastique {X(t), t >0} est un processus de weiner si :

1. $X(0) = 0$.
2. $\{X(t), t \leqslant 0\}$ à des évènements stationnaires et indépendants.
3. pour tout $t > 0, X(t)$ est normalements distribué avec moyenne μt et variance σ^2t .

1.6 Le mouvement brownien

Le processus $\{B_t, t > 0\}$ est un movement brownien si

1. $P(B_0 = 0) = 1.$
2. $\forall t \leq s, B_t - B_s$ est une variable réelle de loi gaussienne centrée, de variance (t-s).
3. $\forall n, \forall t_i \quad 0 \leq t_0 \leq ... \leq t_n$ les variables $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, ..., B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$ sont indépendantes.
4. pour tout (t,s) la variable $B_{t+s} - B_t$ est indépendante de la tribu du passé avant t.

1.7 L'intégrale stochastique

1.7.1 Construction de l'intégrale stochastique

On cherche *à* résoudre des équations de la forme

$$\frac{\partial X}{\partial t}\text{=b(t,}X_t\text{)+}\sigma\text{(t,}X_t\text{)"bruit".}$$

Exemple : modilisation d'un marché financier.

- placement sans risque $\frac{\partial X_0}{\partial t}= \rho\ X_0$.
- placement risqué $\frac{\partial X_1}{\partial t}=(\mu + \sigma \text{ "bruit" }) X_1$

  Pour donner un sens *à* ce modèle, on suppose que : $0 < \rho < \mu$

  et $\sigma > 0$.

On note $\frac{dB}{dt}$ le bruit.

Hypothése classique

- $t_1 \neq t_2 \Longrightarrow \frac{dB}{dt_1} \quad et \quad \frac{dB}{dt_2}$ sont indépendants.
- $\frac{dB}{dt}$ est stationnaire.
- E($\frac{dB}{dt}$) $= 0$.

ProbLème : il n'existe pas de processus raisonnable ayant ces propriété. On va donc essayer de remplacer $\frac{dB}{dt}$ par un processus avec deS meilleures propriétéS.

1.7.2 Propriétés

Soit f et $g \in \nu$ (0,T) alors

- $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$, $s \leq u \leq t$ pour presque tout Ω.
- $\int_S^T (cf + g)dB_t = c\int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$ pour presque tout Ω.
- E($\int_S^T f dB_t$) $= 0$.
- $\int_S^T f dB_t$ est $\mathcal{F}_T-$ mesurable.

avec ν la classe de processus.

Définition 1.7.1 *Un processus* $(M_t)_{t\geq 0}$ *est dit une martingale si*

- *$\forall t,\ M_t$ est $\mathcal{F}_t$-intégrable.*
- *$\forall t,\ M_t$ est intégrable.*
- *$\forall s < t,\ E(M_t|\mathcal{F}_s)$=$M_s$.*

Théorème 1.7.1 *Soit $f \in \nu$ (0,T) pour tout $T > 0$ alors*

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s,\omega) dB_s.$$

est une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ et c'est un processus continue.

Théorème 1.7.2 *Soit M_t une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, il existe un processus f et $g \in \nu$ (0,T) pour toute $T > 0$ tel que*

$$M_t(\omega) = M_0 + \int_0^t f(s,\omega) dB_s.$$

1.8 Semi-groupe

Définition 1.8.1 *Soit E un espace de Banach,une famille $\{S(t)\}_{t\geq}$ d'opérateurs linéaires bornnées est appelée semi-groupe fortement continue $(S.G.C_0)$ si elle satisfait les conditions suivantes*

1. $S(0) = Id_{\mathcal{L}(E)}$.
2. $S(t_1 + t_2) = S(t_1).S(t_2) \qquad \forall t_1, t_2 \in [0, +\infty]$.
3. $\lim\limits_{t\to 0} \|S(t)u - u\| = 0 \qquad \forall u \in E$.

Définition 1.8.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continue $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire*

$$A : D(A) \subset E \longrightarrow E.$$

défini par

1. $D(A) = \{f \in E : \lim\limits_{t\to 0} \frac{S(t)f - f}{t} existe\}$.
2. $\forall f \in E : Af = \lim\limits_{t\to 0} \frac{S(t)f - f}{t}$.

Théorème 1.8.1 *Théorème de Hille-Yosida*
Un opérateur linéaire A, fermé et dense dans un espace de Hilbert H, est le générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe si il existe deux nombres réels M, W tels que $\forall \lambda > W, \lambda \in \rho(A)$,

où $\rho(A)$ *est l'ensemble résolvant de* A.

tels que $\|R(\lambda, A)\|^r \leq \frac{M}{(\lambda - W)^r}, \forall r \geq 1,\ R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ *est l'opérateur résolvant.*

Théorème 1.8.2 *Théorème de Hille-Yosida*

Un opérateur linéaire $A : D(A) \longrightarrow E$ *est le générateur d'un* C_0 *semi-groupe de contraction si et seulement si*

1. *A est fermé et D(A) dense dans E.*
2. *L'ensemble résolvant de* A *contient la demi-droite* $]0, +\infty[$, *et on a*
   $\forall \lambda > 0 : \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Chapitre 2

La contrôlabilité des systèmes stochastiques

Dans ce chapitre, nous introduissons la notion de contrôlabilité exacte (resp. approchée) d'un système stochastique linéaire ainsi que certain résultats pour la caractérisation de ces notions. Par suite, on étudie la contrôlabilité approchée faible d'un système stochastique semi-linéaire.

2.1 Position de problème

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec une filtration ordinaire $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$.
Nous considérons trois espace de Hilbert E, H et U, et un processus de wiener sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ avec l'opérateur de covariance $Q \in \mathcal{L}(E)$ tel que $tr\ Q < \infty$.
Nous supposons qu'il existe un système complet orthonormal e_k dans E, une suite bornée non négatif de nombres réels λ_k tel que $Qe_k = \lambda_k e_k$, $k = 1, 2, ...$ et une suite $\{B_k\}$ de movements Brownien indépendants tels que
$< W(t), e >= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} < e_k, e > B_k(t)$, $e \in E, t \in I = [0, T]$.
et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^w$ où $\mathcal{F}_t^w$ est une σ-algèbre engendré par $\{w(s) : 0 \leq s \leq t\}$.
Soit $L_2^0 = L_2(Q^{1/2}E, H)$ l'espace de Hilbert de tous les opérateurs de Hilbert-Schmidt de $Q^{1/2}E \ dans\ H$ avec le produit scalaire $< \psi, \phi >_{L_2^0} = tr[\psi Q \phi^*]$.
$L_2(\mathcal{F}_T, H)$ est l'espace de Hilbert de tout les variables $\mathcal{F}_T$ mesurables, carrées intégrables à valeurs dans l'espace de Hilbert H. $L_2^{\mathcal{F}}(I, H)$ est l'espace de Hilbert de tous les processus carrées intégrables et $\mathcal{F}_t$-adaptés à valeurs dans H.

Nous rappelons que f est dite $\mathcal{F}_t$-adapté si $f(t,.) : \Omega \longrightarrow H$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable presque pour tout $t \in I$.

Soit $C(I, L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H))$ l'espace de Banach des applications continue de I vers $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P, H)$ verifiant la condition $sup\{E||\varphi||^2, t \in I\} < \infty$. $\mathcal{H}_2(\mathcal{U}_2)$ est le sous espace fermé de $C(I, L_2(\Omega, \mathcal{F}, P, H))$ constitué des processus $\varphi(.) \in C(I, L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; H))$(resp. $(\varphi(.) \in C(I, L_2(\Omega, \mathcal{F}, P; U)))$ muni de la norme, $||\varphi(t)||^2 = sup\{E||\varphi||^2, t \in I\}$.

$\mathcal{L}(X, Y)$ est l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés d'un espace de Hilbert X à un espace de Hilbert Y.

considèrons le système stochastique linéaire suivant

$$dx(t) = [Ax(t) + Bu(t)]dt + \xi dw(t). \tag{2.1}$$
$$x(0) = x_0, t \in I = [0, T].$$

où $A : D(A) \subset H \to H$ générateur d'un C_0 semi-groupe d'opérateur linéaire borné S(t), B est un opérateur linéaire borné de U dans H, w est un processsus de Weiner de covariance Q et $\xi \in L_2^{\mathcal{F}}(I, L_2^0)$.

On va étudier la contrôlabilité approchée faible du système semi-linéaire suivant

$$dx(t) = [Ax(t) + Bu(t) + F(t, x(t), u(t)]dt + \xi(t, x(t), u(t))dw(t). \tag{2.2}$$
$$x(0) = x_0, t \in I = [0, T].$$

telque $A : H \longrightarrow H$ est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe S(.). $B \in \mathcal{L}(U, H)$, $F : [0, T] \times H \times U \longrightarrow H, \xi : [0, T] \times H \times U \longrightarrow L_2^0$.

La solution de (2.1) s'écrit comme suit

$$x(t, x_0, u) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t S(t-s)\xi(s)dw(s). \tag{2.3}$$

On considère le système déterministe correspondant au système stochastique (2.1)

$$y(t, y_0, \upsilon) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)B\upsilon(s)ds. \tag{2.4}$$

pour $y_0 \in H \quad et \quad \upsilon \in L_2([0, T], U)$.

2.2 Les différents notions de contrôlabilité

Maintenant on introduisons l'opérateur de contrôlabilité $\prod_s^T$ associée à (2.1)

$$\Pi_s^T = \int_0^T BB^* S^*(T-t) E\{.|\mathcal{F}_t\} dt.$$

qui appartient à $\mathcal{L}(L_2(\mathcal{F}_T, H),\ L_2(\mathcal{F}_T, H))$ et l'opérateur de contrôlabilité $\Gamma_s^T \in \mathcal{L}(H, H)$:

$$\Gamma_s^T = \int_s^T S(T-t) BB^* S^*(T-t) dt.$$

pour une solution de système (2.2) nous entendons une solution de l' intégrale non linéaire suivant

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)[Bu(s) + F(s, x(s), u(s)] ds$$

$$+ \int_0^t S(t-s)\xi(s, x(t), u(s)) dw(s). \tag{2.5}$$

où $u \in U_{ad} = \mathcal{U}_2$.

et $\quad U_{ad} = \mathcal{U}_2$

telque $\mathcal{H}_2(\mathcal{U}_2)$ est le sous-espace fermé de $C(I, L_2(\Omega, F, P; H))$.

2.2.1 La contrôlabilité exacte

Définition 2.2.1 (7) *Le système linéaire (2.1) (resp. semi-linéaire (2.2)) est exactement contrôlable sur [0,T] si*

$\mathcal{R}_T(x_0) = L_2(\mathcal{F}_T, H)$

telque

$\mathcal{R}_T(x_0) = \{x(t, x_0, u) : u \in L_2^{\mathcal{F}}(I, H)\}$.

Théorème 2.2.1 (7) *Le système de contrôlabilité (2.1) est exactemet contrôlable sur [0,T] si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

1. $\prod_0^T \geq \gamma I$.
2. $R(\lambda, \prod_0^T)$ *converges quand* $\lambda \to 0^+$ *dans la topologie uniforme des opérateurs.*

3. *$\lambda R(\lambda, \prod_0^T)$ converges vers l'operateur nulle quand $\lambda \to 0^+$ dans la topologie uniforme des opérateurs.*

Remarque 2.2.1 $R(\lambda, \prod_0^T) = (\lambda I - \prod_0^T)^{-1}$.

Théorème 2.2.2 (7) *Les quatre conditions suivantes sont équivalente*

1. *Le système stochastique (2.1) est exactement contrôlable sur [0,T].*
2. *Le système déterministe (2.4) est exactement contrôlable sur [s,T],*
   $0 \leq s < T$.
3. *Le système déterministe (2.4) est exactement contrôlable dans un petit temps.*
4. *Le système stochastique(2.1) est exactement contrôlable dans un petit temps.*

2.2.2 La contrôlabilité approchée

Définition 2.2.2 (7) *Le système linéaire (2.1)(resp. semi-linéaire (2.2)) est approximativement contrôlable sur [0,T] si*
$\overline{\mathcal{R}(T, x_0)} = L_2(\mathcal{F}_T, H)$.

Théorème 2.2.3 (7) *Le système de contrôlabilité (2.1) est approximativement contrôlable sur [0,T], si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée*
– $\prod_0^T > 0$.
– *$\lambda R(\lambda, \prod_0^T)$ converge vers l'opérateur nulle quand $\lambda \longrightarrow 0+$, dans la topologie forte des opérateurs.*
– *$\lambda R(\lambda, \prod_0^T)$ converge vers l'opérateur nulle quand $\lambda \longrightarrow 0+$, dans la topologie faible des opérateurs.*

Théorème 2.2.4 (7) *Les quatre conditions suivantes sont équivalentes.*
– *Le système stochastique (2.1) est approximativement contrôlable sur [0.T].*
– *Le système déterministe (2.4) est approximativement contrôlable sur[s,T], $0 \leq s < T$.*
– *Le système déterministe (2.4) est petit temps approximativement contrôlable.*
– *Le système stochastique (2.1) est petit temps approximativement contrôlable.*

Théorème 2.2.5 (7) *si S(t) est analytique. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

- *Le système stochastique (2.1) est approximativement contrôlable sur [0,T].*
- *Le système déterministe (2.4) est approximativement contrôlable sur [0,T].*
- *Le système déterministe (2.4) est approximativement contrôlable dans un petit temps.*

Remarque 2.2.2 *Si H est un espace de dimension finie, alors la contrôlabilité exacte, la contrôlabilité approchée, du système stochastique (2.1), et la contrôlabilité du système déterministe (2.4) coincident.*

Définition 2.2.3 (4) *On dit que le système (2.2) est approximativement faiblement contrôlable si pour* $x_T \in L_2(\mathcal{F}_T, H)$, *tout* $\epsilon > 0$ *et tout* $y \in L_2(\mathcal{F}_T, H)$ *il existe un contrôle* $u \in U_{ad}$ *telque* $\quad E < y, x(T) - x_T >< \epsilon$.

Lemme 2.2.1 (4) *Pour tout* $h \in L_2(\mathcal{F}_T, H)$ *il existe un* $\varphi(.) \in L_2^{\mathcal{F}}(I, L_2^0)$ *unique telque*

$$h = Eh + \int_0^T \varphi(s)dw(s). \tag{2.6}$$

le lemme suivant donne une formule pour un contrôle transférant l'état x_0 *à un* ϵ*-voisinage d'un état arbitraire* $h \in L_2(\mathcal{F}_T, H)$.

Lemme 2.2.2 (4) *Pour tout* $h \in L_2(\mathcal{F}_T, H), f(.) \in L_2^{\mathcal{F}}(I, H), \sigma(.) \in L_2^{\mathcal{F}}(I, \in L_2^0)$, *le contrôle*

$$u(t) = B^* S^*(T-t)(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(t)x_0)$$

$$-B^* S^*(T-t) \int_0^t (\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} S(T-s) f(s) ds$$

$$- B^* S^*(T-t) \int_0^t (\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} [S(T-s)\sigma(s) - \varphi(s)] dw(t) \tag{2.7}$$

transfère le système

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)[Bu(s) + f(s)]ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s) \tag{2.8}$$

de $x_0 \in H$ *à*

$$x(T) = h - \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(t)x_0) + \alpha \int_0^T (\alpha + \Gamma_r^T)^{-1} S(T-r) f(r) dr$$

$$+ \alpha \int_0^T (\alpha + \Gamma_r^T)^{-1}[S(T-r)\sigma(r) - \varphi(r)] dw(r) \tag{2.9}$$

à l'instant T. Ici $\varphi(.) \in L_2^{\mathcal{F}}(I, L_2^0)$ *provient de la représentation (2.6).*

Preuve

On a

$$\begin{aligned}
u(t) &= B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)\\
&\quad -B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f(s)ds\\
&\quad -B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\sigma(s)-\varphi(s)]dw(t)
\end{aligned}$$

et

$$x(t)=S(t)x_0+\int_0^t S(t-s)[Bu(s)+f(s)]ds+\int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s)$$

On substitue (2.7) dans (2.8) on obtient

$$\begin{aligned}
x(t) &= S(t)x_0+\int_0^t S(t-s)Bu(s)ds+\int_0^t S(t-s)f(s)ds+\int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s)\\
x(t) &= S(t)x_0+\int_0^t S(t-s)f(s)ds+\int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s)\\
&\quad +\int_0^t S(t-s)B[B^*S^*(T-s)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)\\
&\quad -B^*S^*(T-s)\int_0^s(\alpha+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)dr\\
&\quad -B^*S^*(T-s)\int_0^s(\alpha+\Gamma_r^T)^{-1}[S(T-r)\sigma(r)-\varphi(r)]dw(r)]ds\\
x(t) &= S(t)x_0+\int_0^t S(t-s)f(s)ds+\int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s)\\
&\quad +\int_0^t S(t-s)BB^*S^*(T-s)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0)ds\\
&\quad -\int_0^t S(t-s)BB^*S^*(T-s)\int_0^s(\alpha+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)drds\\
&\quad -\int_0^t S(t-s)BB^*S^*(T-s)\int_0^s(\alpha+\Gamma_r^T)^{-1}[S(T-r)\sigma(r)-\varphi(r)]dw(r)]ds.
\end{aligned}$$

D'aprés la propriété de semi-groupe

$$\begin{aligned}
S^*(T-s) &= S^*(T+t-t-s) = S^*(t-s)S^*(T-t). \\
x(t) &= S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s) \\
&+ \int_0^t S(t-s)BB^*S^*(t-s)S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)ds \\
&- \int_0^t S(t-s)BB^*S^*(t-s)S^*(T-t)\int_0^s (\alpha+\Gamma_r^T)^{-1}S(T-r)f(r)drds \\
&- \int_0^t S(t-s)BB^*S^*(t-s)S^*(T-t)\int_0^s (\alpha+\Gamma_r^T)^{-1}[S(T-r)\sigma(r)-\varphi(r)]dw(r)]ds.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= S(t)x_0 + \Gamma_0^t S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) \\
&- \int_0^t\int_s^t S(t-r)BB^*S^*(t-r)S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f(s)drds \\
&- \int_0^t\int_s^t S(t-r)BB^*S^*(t-r)S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)]\sigma(s)-\varphi(s)]drdw(s) \\
&+ \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= S(t)x_0 + \Gamma_0^t S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) \\
&- \int_0^t \Gamma_s^t S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f(s)ds \\
&- \int_0^t \Gamma_s^t S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\sigma(s)-\varphi(s)]dw(s) \\
&+ \int_0^t S(t-s)f(s)ds + \int_0^t S(t-s)\sigma(s)dw(s).
\end{aligned}$$

On a $S^*(T-T) = S^*(0) = I$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_0^T(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1} = &\quad \Gamma_0^T(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1} + \alpha(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1} - \alpha(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1} \\
= &\quad (\alpha+\Gamma_0^t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1} - \alpha(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1} \\
= &\quad I - \alpha(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(T) &= S(T)x_0 + \Gamma_0^T S^*(T-T)(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) \\ &- \int_0^T \Gamma_s^T S^*(T-T)(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1})S(T-s)f(s)ds \\ &- \int_0^T \Gamma_s^T S^*(T-T)(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\sigma(s) - \varphi(s)]dw(s) \\ &+ \int_0^T S(T-s)f(s)ds + \int_0^T S(T-s)\sigma(s)dw(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(T) &= S(T)x_0 + [I - \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}](Eh - S(T)x_0) \\ &- \int_0^T (I - \alpha(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1})S(T-s)f(s)ds \\ &- \int_0^T (I - \alpha(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1})[S(T-s)\sigma(s) - \varphi(s)]dw(s) \\ &+ \int_0^T S(T-s)f(s)ds + \int_0^T S(T-s)\sigma(s)dw(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(T) &= S(T)x_0 + Eh - S(T)x_0 - \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) \\ &- \int_0^T S(T-s)f(s)ds + \int_0^T \alpha(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f(s)ds \\ &- \int_0^T [S(T-s)\sigma(s) - \varphi(s)]dw(s) \\ &+ \int_0^T \alpha(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1}[(S(T-s)\sigma(s) - \varphi(s)]dw(s) \\ &+ \int_0^T S(T-s)f(s)ds + \int_0^T S(T-s)\sigma(s)dw(s). \end{aligned}$$

telque $h = Eh + \int_0^T \varphi(s)dw(s)$.

$$\begin{aligned} x(T) &= h - \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) \\ &+\alpha \int_0^T (\alpha + \Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)f(s)ds \\ &+\alpha \int_0^T (\alpha + \Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\sigma(s) - \varphi(s)]dw(s). \end{aligned}$$

Remarque 2.2.3 *d'après le théorème (2.2.3) la contrôlabilité approchée (exacte) du système (2.1) est equivalente à la convergence de* $\alpha(\alpha + \prod_0^T)^{-1} : L_2(\mathcal{F}_T, H) \longrightarrow L_2(\mathcal{F}_T, H)$ *vers l'opérateur zéro dans la topologie forte (uniforme) des opérateurs quand* $\alpha \longrightarrow 0^+$.
Selon cette remarque et la formule (2.9) le contrôle définie par (2.7) transforme le système linéaire (2.1) de $x_0 \in H$ *à un* ϵ*-voisinage d'un point arbitraire* $h \in L_2(\mathcal{F}_t, H)$.

2.3 La contrôlabilité faible et approchée

Dans cette section, nous dérivons des conditions de contrôlabilité pour le système stochastique semi-linéaire (2.2) en utilisant le théorème de point fixe de Banach.
Nous imposons les conditions suivantes sur les données du problème
$(A1)$ $(F, \xi) : [0, T] \times H \times U \longrightarrow H \times L_2^0$ satisfait à la condition de lipshitz en ce qui concerne (x,u) pour tout t∈[0,T].

$$||F(t, x_1, u_1) - F(t, x_2, u_2)||^2 + ||\xi(t, x_1, u_1) - \xi(t, x_2, u_2)||^2$$

$$\leq L(||x_1 - x_2||)^2 + ||u_1 - u_2||^2).$$

$(A2)$ (F, ξ) est continue sur $[0, T] \times H \times U$ et satisfait :

$$||F(t, x, u)||^2 + ||\xi(t, x, u)||^2 \leq L.$$

$(A2')$ (F, ξ) est continue sur $[0, T] \times H \times U$ et satisfait :

$$||F(t, x, u)||^2 + ||\xi(t, x, u)||^2 \leq L(1 + ||x||^2 + ||u||^2).$$

(AC) le système linéaire (2.1) est approximativement contrôlable sur [0,T] c-à-d le système déterministe corespondant à (2.1) est approximativement contrôlable sur [s,T], $0 \leq s \leq T$.
(CC) le système linéaire (2.1) est exactement contrôlable sur [0,T] c-à-d il existe $\gamma > 0$ telque

$$E < \Pi_0^T z, z > \geq \gamma E||z||^2 \text{ pour tout } z \in L_2(\mathcal{F}_T, H).$$

il est evident que dans les conditions $(A1)$ *et* $(A2)$, pour tout $u(.) \in U_{ad}$ l'equation intégrale (2.5) à une solution unique dans $\mathcal{H}_2$.

Nous définissons maintenant l'opérateur non linéaire ϕ_α de $\mathcal{H}_2 \times U_{ad}$ à $\mathcal{H}_2 \times U_{ad}$ comme suite

$$(z^\alpha(t), v^\alpha(t)) = \phi_\alpha(x,u)(t) \tag{2.10}$$

oú

$$\begin{aligned} z^\alpha(t) = \quad & S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)[Bv^\alpha(s) + F(s,x(s),u(s))]ds \\ & + \int_0^t S(t-s)\xi(s,x(s),u(s))dw(s) \\ = \quad & S(t)x_0 + \phi_1(x,v^\alpha)(t) + \phi_2(x,u)(t) + \phi_3(x,u)(t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v^\alpha(t) = \quad & B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(t)x_0) \\ & -B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s))ds \\ & -B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha+\Gamma_s^t)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x(s),u(s)) - \varphi(s)]dw(s). \end{aligned}$$

En tenant compte des hypothèses on obtient que l'opérateur ϕ_α est bien définie. Nous allons montrer que la contrôlabilité approchée du système (2.5) peut être prouvée si l'opérateur ϕ_α à un point fixe.

Théorème 2.3.1 ***Théorème de point fixe*** *[8]*
Soit E un espace de Banach et f une application contractante de E dans E, alors il existe dans E un point fixe unique de f.

Maintenant, pour plus de commodité introduisons les notations
$M = \|B\|^2, \qquad l = max\{\|S(t)\|^2, t \in I\}.$
Dans la preuve du théorème suivant nous allons utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante

Remarque 2.3.1 ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***

– *soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace Préhilbertien. Alors, pour tous vecteurs x et y de E.*

$$|\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\|.$$

Dans le cas des fonctions mesurables à valeurs complexes de carré intégrable, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

– $\int_a^b |f\bar{g}| \leq (\int_a^b |f|^2)^{\frac{1}{2}}(\int_a^b |g|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Théorème 2.3.2 *Supposons que les hypothèses* $(A1)$ *et* $(A2')$ *sont vérifiéés. Alors pour tout* $\alpha > 0$ *l'opérateur* ϕ_α *à un point fixe unique en* $\mathcal{H}_2 \times U_{ad}$.

Preuve

La preuve est basée sur le théorème classique du point fixe de Banach (2.3.1) pour les contractions, nous montrons d'abord que ϕ_α définie de $\mathcal{H}_2 \times U_{ad}$ dans lui-même. En effet en utilisant le lemme (2.2.2), l'hypothèse (A2') et (A1) on peut montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}
E\|v^\alpha(t)\|^2 &= E\|B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh - s(T)x_0) \\
&\quad -B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s))ds \\
&\quad -B^*S^*(T-t)\int_0^t (\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x(s),u(s)) - \varphi(s)]dw(s)\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\|v^{\alpha}(t)\|^2 &= E\|B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-s(T)x_0)\|^2 \\
&+E\|B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s))ds\|^2 \\
&+E\|B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x(s),u(s))-\varphi(s)]dw(s)\|^2 \\
&-2E< B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-s(T)x_0), \\
&B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s)ds > \\
&-2E< B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-s(T)x_0), \\
&B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x(s),u(s))-\varphi(s)]dw(s) > \\
&+2E< B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s)ds,
\end{aligned}$$

$$B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x(s),u(s))-\varphi(s)]dw(s) > \tag{2.11}$$

D'autre part on a

$$E\|B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-s(T)x_0)\|^2 \leq E(\|B^*\|^2\|S^*(T-t)\|^2\|(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}\|^2\|(Eh-s(T)x_0)\|^2)$$

on sait que

$\|B^*\|^2 = M$ et $\|(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}\|^2 \leq \frac{1}{\alpha}$ et $\|S^*(t)\|^2 = l$.

et $\|Eh - S(T)x_0\|^2 \leq 2(\|Eh\|^2 + l\|x_0\|^2)$.

alors

$$E\|B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-s(T)x_0)\|^2 \leq \frac{2lM}{\alpha}E(\|Eh\|^2+l\|x_0\|^2) \tag{2.12}$$

et

$$\begin{aligned}
&E\|B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s))ds\|^2 \\
&\leq E(\|B^*\|^2\|S^*(T-t)\|^2\|\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s))ds\|^2) \\
&\leq \frac{lM}{\alpha}E\|\int_0^t S(T-s)F(s,x(s),u(s))ds\|^2
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy- Schwarz

$$\begin{aligned}
&E\|B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s))ds\|^2\\
&\leq \frac{lM}{\alpha}E[(\int_0^t\|S(T-s)\|^2ds)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t\|F(s,x(s),u(s))\|^2ds)^{\frac{1}{2}}]^2\\
&\leq \frac{lM}{\alpha}E[(\int_0^t\|S(T-s)\|^2ds)(\int_0^t\|F(s,x(s),u(s))\|^2ds)]\\
&\leq \frac{lM}{\alpha}E[l(\int_0^T ds)(\int_0^t\|F(s,x(s),u(s))\|^2ds)]
\end{aligned}$$

D'où

$$E\|B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,x(s),u(s))ds\|^2$$

$$\leq \frac{lM}{\alpha}lTE\int_0^t\|F(s,x(s),u(s))\|^2ds. \tag{2.13}$$

Et

$$\begin{aligned}
&E\|B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x(s),u(s))-\varphi(s)]dw(s)\|^2\\
\leq\ & E[\|B^*\|^2\|S^*(T-t)\|^2\|\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x(s),u(s))-\varphi(s)]dw(s)\|^2]\\
\leq\ & lME(\|\int_0^t((\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)\xi(s,x(s),u(s))-\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}\varphi(s))dw(s)\|^2)\\
\leq\ & 2lME(\|\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)\xi(s,x(s),u(s))dw(s)\|^2+\|\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}\varphi(s)dw(s)\|^2)
\end{aligned}$$

Nous appliquons l'inégalité du Cauchy- Shwarz, à nouveau pour avoir
$E\|B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x(s),u(s))-\varphi(s)]dw(s)\|^2$

$$\leq \frac{2lM}{\alpha}E[l\int_0^t||\xi(s,x(s),u(s))||^2ds+\int_0^t||\varphi(s)||^2ds] \tag{2.14}$$

d'aprés (2.11), (2.12), (2.13) et (2.14) et on applique l'inégalité de Cauchy- Shwarz, et en utilisant les hypothèses (A1), (A2), (A2') on obtient

$$E\|v^\alpha(t)\|^2\leq C_1(1+\sup_{t\in I}E\|x(t)\|^2+\sup_{t\in I}E\|u(t)\|^2). \tag{2.15}$$

On montre que

$E\|\phi_1(x,v^\alpha(t))\|^2 \leq T^2 lMC_1(1+\sup\limits_{t\in I}E\|x(t)\|^2+\sup\limits_{t\in I}E\|u(t)\|^2)$.

on a $\quad \phi_1(x,v^\alpha(t)) = \int_0^t S(t-s)Bv^\alpha(s)ds$.

alors

$$E\|\phi_1(x,v^\alpha(t))\|^2 = E\|\int_0^t S(t-s)Bv^\alpha(s)ds\|^2.$$

d'après l'inegalité de Cauchy-Shwarz

$$E\|\phi_1(x,v^\alpha(t))\|^2 \leq E[(\int_0^t \|S(t-s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t \|Bv^\alpha(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}]^2.$$

$$E\|\phi_1(x,v^\alpha(t))\|^2 \leq \sup_{t\in I}\|S(t)\|^2 T\sup_{t\in I}\|B\|^2 E(\int_0^t \|v^\alpha(s)\|^2 ds).$$

$$E\|\phi_1(x,v^\alpha(t))\|^2 \leq lMTE(\int_0^t \|v^\alpha(s)\|^2 ds).$$

d'après l'inégalité (2.15) on déduit

$$E\|\phi_1(x,v^\alpha(t))\|^2 \leq T^2 lMC_1(1+\sup_{t\in I}E\|x(t)\|^2+\sup_{t\in I}E\|u(t)\|^2). \tag{2.16}$$

Maintenant on montre que

$E\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 \leq C_2(1+\sup\limits_{t\in I}E\|x(t)\|^2+\sup\limits_{t\in I}E\|u(t)\|^2)$.

on a $\phi_2(x,u)(t) = \int_0^t S(t-s)F(s,x(s),u(s))ds$.

alors

$$E\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 = E\|\int_0^t S(t-s)F(s,x(s),u(s))ds\|^2.$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Shwarz

$$E\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 \leq E[(\int_0^t \|S(t-s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t \|F(s,x(s),u(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}]^2.$$

$$E\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 \leq \sup_{s\in I}\|S(t)\|^2(\int_0^T ds)E(\int_0^t \|F(s,x(s),u(s)\|^2 ds).$$

$$E\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 \leq lTE(\int_0^t \|F(s,x(s),u(s)\|^2 ds).$$

d'après l'hypothèse (A2') on obtient

$$E\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 \leq TlLE(\int_0^T (1+\sup_{s\in I}\|x(s)\|^2+\sup_{s\in I}\|u(s)\|^2)ds).$$

alors :

$$E\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 \leq TlL(T + \sup_{s\in I} E\|x(s)\|^2 \int_0^T ds + \sup_{s\in I} E\|u(s)\|^2 \int_0^T ds).$$

$$E\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 \leq T^2 Ll(1 + \sup_{s\in I} E\|x(s)\|^2 + \sup_{s\in I} E\|u(s)\|^2) \tag{2.17}$$

si on pose $C_2 = T^2Ll$, on obtient le résultat.

D'abors on montre

$E\|\phi_3(x,u)(t)\|^2 \leq Ll(1 + \sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 + \sup_{t\in I} E\|u(t)\|^2)$.

tel que $\quad \phi_3(x,u)(t) = \int_0^t S(t-s)\xi(s,x(s),u(s))dw(s)$.

$$E\|\phi_3(x,u)(t)\|^2 = E\| \int_0^t S(t-s)\xi(s,x(s),u(s))dw(s)\|^2.$$

$$E\|\phi_3(x,u)(t)\|^2 \leq \sup_{t\in I} \|S(t)\|^2 E(\int_0^t \|\xi(s,x(s),u(s))\|^2 ds.$$

d'après l'hypothèse (A2')

$$E\|\phi_3(x,u)(t)\|^2 \leq lLE(\sup_{s\in I}(1 + \|x(s)\|^2 + \|u(s)\|^2).$$

$$Donc E\|\phi_3(x,u)(t)\|^2 \leq Ll(1 + \sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 + \sup_{t\in I} E\|u(t)\|^2). \tag{2.18}$$

d'où le résultat.

On démontre qu'il existe C_3 tel que

$\|\phi_\alpha(x,u)\|^2 = \|v^\alpha\|^2 + \|z^\alpha\|^2 \leq C_3(1 + \|x\|^2 + \|u\|^2)$.

d'après (2.15) on a

$\|v^\alpha\|^2 \leq C_1(1 + \sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 + \sup_{t\in I} E\|u(t)\|^2)$.

et on a

$z^\alpha(t) = S(t)x_0 + \phi_1(x,v^\alpha)(t) + \phi_2(x,u)(t) + \phi_3(x,u)(t)$.

on a d'après (2.16)

$\|\phi_1(x,v^\alpha)(t)\|^2 \leq T^2 lMC_1(1 + \sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 + \sup_{t\in I} E\|u(t)\|^2)$.

et d'après (2.17)

$\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 \leq C_2(1+\sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 + \sup_{t\in I} E\|u(t)\|^2)$.

finalement d'après (2.18)

$\|\phi_3(x,u)(t)\|^2 \leq Ll(1+\sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 + \sup_{t\in I} E\|u(t)\|^2)$. alors

$$\begin{aligned} E\|z^\alpha\|^2 = & \quad \|S(t)x_0 + \phi_1(x,v^\alpha)(t) + \phi_2(x,u)(t) + \phi_3(x,u)(t)\|^2 \\ = & \quad \|S(t)x_0 + \phi_1(x,v^\alpha)(t)\|^2 + \|\phi_2(x,u)(t) + \phi_3(x,u)(t)\|^2 \\ & \quad +2\|S(t)x_0 + \phi_1(x,v^\alpha)(t)\|\|\phi_2(x,u)(t) + \phi_3(x,u)(t)\| \end{aligned}$$

on sait que si $a = S(t)x_0 + \phi_1(x,v^\alpha)(t)$ et $b = \phi_2(x,u)(t) + \phi_3(x,u)(t)$

alors $2\|a\|\|b\| \leq \|a\|^2 + \|b\|^2$.

par la même méthode on trouve

$$\begin{aligned} E\|z^\alpha\|^2 & \leq 4\|S(t)x_0\|^2 + 4\|\phi_1(x,v^\alpha)(t)\|^2 + 4\|\phi_2(x,u)(t)\|^2 + 4\|\phi_3(x,u)(t)\|^2. \\ & \leq 4lx_0 + 4[T^2lMC_1 + C_2 + Ll](1+\sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 + \sup_{t\in I} E\|u(t)\|^2). \end{aligned}$$

donc

$$\|\phi_\alpha(x,u)\|^2 = \|v^\alpha\|^2 + \|z^\alpha\|^2 \leq 4lx_0 + 4[C_1 + T^2lMC_1 + C_2 + Ll + C_1]$$
$$(1+\sup_{t\in I} E\|x(t)\|^2 + \sup_{t\in I} E\|u(t)\|^2).$$

on a $\|x_0\|^2 \leq \|x\|^2 \leq 1 + \|x\|^2 + \|u\|^2$.

et d'autre part $\|x\|^2 = \sup_{t\in I} \|x(t)\|^2$.

et $\|u\|^2 = \sup_{t\in I} \|u(t)\|^2$.

alors

$$\|\phi_\alpha(x,u)\|^2 \leq 4l(1+\|x\|^2+\|u\|^2) + 4[T^2lMC_1 + C_2 + Ll + C_1](1+\|x\|^2+\|u\|^2).$$

on pose $C_3 = 4[l + T^2lMC_1 + C_2 + Ll + C_1]$ on obtient

$$\|\phi_\alpha(x,u)\|^2 \leq C_3(1+\|x\|^2+\|u\|^2).$$

Ensuite, nous montrons qu'il existe un nombre naturel n tel que ϕ_α^n est une application, soit maintenant (x_1, u_1) et (x_2, u_2) des processus arbitraire de $\mathcal{H}_2 \times U_{ad}$, alors

$$\begin{aligned} E\|\phi_\alpha(x_1,u_1)(t) - \phi_\alpha(x_2,u_2)(t)\|^2 &= E\|(z_1^\alpha(t), v_1^\alpha(t)) - (z_2^\alpha(t), v_2^\alpha(t))\|^2. \\ &= E\|(z_1^\alpha(t) - z_2^\alpha(t)), (v_1^\alpha(t) - v_2^\alpha(t))\|^2. \\ &\leq E\|v_1^\alpha(t) - v_2^\alpha(t)\|^2 + E\|z_1^\alpha(t) - z_2^\alpha(t)\|^2. \end{aligned}$$

On sait que

$z_1^\alpha(t) = s(t)x_0 + \phi_1(x_1,u_1)(t) + \phi_2(x_1,u_1)(t) + \phi_3(x_1,u_1)(t)$, et

$z_2^\alpha(t) = s(t)x_0 + \phi_1(x_2,u_2)(t) + \phi_2(x_2,u_2)(t) + \phi_3(x_2,u_2)(t)$, alors

$$\begin{aligned} E\|\phi_\alpha(x_1,u_1)(t) - \phi_\alpha(x_2,u_2)(t)\|^2 &\leq E\|v_1^\alpha(t) - v_2^\alpha(t)\|^2 \\ +E\|[\phi_1(x_1,u_1)(t) - \phi_1(x_2,u_2)(t) + \phi_2(x_1,u_1)(t) & \quad -\phi_2(x_2,u_2)(t) + \phi_3(x_1,u_1)(t) - \phi_3(x_2,u_2)(t)]\|^2 \\ &\leq E\|v_1^\alpha(t) - v_2^\alpha(t)\|^2 + E[2\|\phi_1(x_1,u_1)(t) \\ -\phi_1(x_2,u_2)(t)\|^2 & \quad +2\|\phi_2(x_1,u_1)(t) - \phi_2(x_2,u_2)(t)\|^2 + \\ \|\phi_3(x_1,u_1)(t) - \phi_3(x_2,u_2)(t)\|^2]. & \\ &\leq E\|v_1^\alpha(t) - v_2^\alpha(t)\|^2 + 2E\|\phi_1(x_1,u_1)(t) \\ -\phi_1(x_2,u_2)(t)\|^2 & \\ & \quad +4E\|\phi_2(x_1,u_1)(t) - \phi_2(x_2,u_2)(t)\|^2 \end{aligned}$$

$$E\|\phi_\alpha(x_1,u_1)(t)-\phi_\alpha(x_2,u_2)(t)\|^2 \leq E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2+E[2\|\phi_1(x_1,u_1)(t)-\phi_1(x_2,u_2)(t)\|^2$$
$$+4\|\phi_2(x_1,u_1)(t)-\phi_2(x_2,u_2)(t)\|^2+4\|\phi_3(x_1,u_1)(t)-\phi_3(x_2,u_2)(t)\|^2].$$

$$E\|\phi_\alpha(x_1,u_1)(t)-\phi_\alpha(x_2,u_2)(t)\|^2 \leq E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2+4E\|\phi_1(x_1,u_1)(t)-\phi_1(x_2,u_2)(t)\|^2$$
$$+4E\|\phi_2(x_1,u_1)(t)-\phi_2(x_2,u_2)(t)\|^2+4E\|\phi_3(x_1,u_1)(t)-\phi_3(x_2,u_2)(t)\|^2.$$

donc

$$E\|\phi_\alpha(x_1,u_1)(t)-\phi_\alpha(x_2,u_2)(t)\|^2 \quad \leq \quad E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2+4I_1(t)+4I_2(t)+4I_3(t).$$

et on a

$$E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2 = E\|B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^t)^{-1}(E(h)-S(t)x_0)$$
$$-B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^t)^{-1}S(T-s)F(s,x_1(s),u_1(s))ds$$
$$-B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^t)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x_1(s),u_1(s))-\varphi(s)]dw(s)$$
$$-B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^t)^{-1}(E(h)-S(t)x_0)+B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^t)^{-1}S(T-s)F(s,x_2(s),u_2(s))ds$$
$$+B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^t)^{-1}[S(T-s)\xi(s,x_2(s),u_2(s))-\varphi(s)]dw(s)\|^2.$$

$$E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2 = E\|B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^t)^{-1}S(T-s)[F(s,x_2(s),u_2(s))-F(s,x_1(s),u_1(s))]ds$$
$$+B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^t)^{-1}S(T-s)[\xi(s,x_2(s),u_2(s))-\xi((s,x_1(s),u_1(s))]dw(s)\|^2.$$
$$\leq \|B^*S^*(T-t)\|^2E\|\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^t)^{-1}S(T-s)[F(s,x_2(s),u_2(s))-F(s,x_1(s),u_1(s))]ds$$
$$+\int_0^t S(T-s)[\xi(s,x_2(s),u_2(s))-\xi((s,x_1(s),u_1(s))]dw(s)\|^2.$$

on sait que

$\|B^*\|^2 = M$ et $\sup\limits_{t\in I}\|S(t)\|^2 = l$, $\|(\alpha+\Gamma_0^t)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$, donc

$$E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2 \leq \frac{lM}{\alpha}E[lt\int_0^t \|(F(s,x_2(s),u_2(s))-F(s,x_1(s),u_1(s))]\|^2ds)$$
$$+lE(\int_0^t \|(\xi(s,x_2(s),u_2(s))-\xi(s,x_1(s),u_1(s)))\|^2ds)].$$

d'aprés l'hypothèse (A1) on obtient

$$E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2 \leq \frac{2}{\alpha}lME[ltL\int_0^t(\|x_1(s)-x_2(s)\|^2+\|u_1(s)-u_2(s)\|^2)ds$$
$$+lLE(\int_0^t(\|x_1(s)-x_2(s)\|^2+\|u_1(s)-u_2(s)\|^2)ds].$$

donc

$$E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2 \leq \frac{2}{\alpha}l^2M(t+1)LE(\int_0^t(\|x_1(s)-x_2(s)\|^2+\|u_1(s)-u_2(s)\|^2)ds.$$

finalement on obtient

$$E\|v_1^\alpha(t)-v_2^\alpha(t)\|^2 \leq \frac{2}{\alpha}l^2M(t+1)Lt(\|x_1-x_2\|^2+\|u_1-u_2\|^2). \tag{2.19}$$

De la même façon on a

$$I_1(t) = E\|\int_0^t S(t-s)B(v_1^\alpha(s) - v_2^\alpha(s))ds\|^2$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Shwarz

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq E[(\int_0^t \|S(t-s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t \|B(v_1^\alpha(s) - v_2^\alpha(s))\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}]^2. \\
&\leq sup_{t\in I}\|S(t)\|^2 \int_0^t ds\|B\|^2 E(\int_0^t \|v_1^\alpha(s) - v_2^\alpha(s))\|^2 ds. \\
&\leq lMt^2 E\|v_1^\alpha - v_2^\alpha\|^2.
\end{aligned}$$

on a d'aprés (2.19)

$$I_1(t) \quad \leq \quad lMt^2[\frac{2}{\alpha}l^2Lt(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2)].$$

donc

$$I_1(t) \quad \leq \quad \frac{2}{\alpha}M^2l^3(t+1)Lt^2(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2). \tag{2.20}$$

de la même façon on a

$$I_2(t) = E\|\int_0^t S(t-s)(F(s,x_1(s),u_1(s) - F(s,x_2(s),u_2(s))ds\|^2.$$

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq E[(\int_0^t \|S(t-s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}(\int_0^t \|F(s,x_1(s),u_1(s) - F(s,x_2(s),u_2(s)\|^2 ds)^{\frac{1}{2}}]^2. \\
&\leq \sup_{s\in I}\|S(t)\|^2 \int_0^t dsE(\int_0^t \|F(s,x_](s),u_1(s) - F(s,x_2(s),u_2(s)\|^2 ds). \\
&\leq ltE(\int_0^t \|F(s,x_](s),u_1(s) - F(s,x_2(s),u_2(s)\|^2 ds).
\end{aligned}$$

d'aprés l'hypothèse (A1) on obtient

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\leq ltLE(\int_0^t (\|x_1(s) - x_2(s)\|^2 + \|u_1(s) - u_2(s)\|^2)ds. \\
&\leq ltL(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2)(\int_0^t ds).
\end{aligned}$$

$$I_2(t) \leq lt^2L(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2). \tag{2.21}$$

On a $I_3(t) = E\| \int_0^t S(t-s)(\xi(s, x_1(s), u_1(s)) - \xi(s, x_2(s), u_2(s))dw(s)\|^2$.

alors

$$I_3(t) \leq \sup_{t \in II} \|S(t)\|^2 E\| \int_0^t \xi(s, x_1(s), u_1(s)) - \xi(s, x_2(s), u_2(s)))dw(s)\|^2.$$

d'après l'inegalité de Cauchy-Shwarz

$$I_3(t) \leq lE[(\int_0^t \|\xi(s, x_1(s), u_1(s)) - \xi(s, x_2(s), u_2(s))\|^2 ds.$$

d'après l'hypothèse (A1) on obtient

$$I_3(t) \leq lLE(\int_0^t \|x_1(s) - x_2(s)\|^2 + \|u_1(s) - u_2(s)\|^2)ds.$$

donc

$$I_3(t) \leq lLt(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2). \tag{2.22}$$

En prenant la somme de (2.19)-(2.22) nous obtenons

$E\|\phi_\alpha(x_1, u_1(t) - \phi_\alpha(x_2, u_2(t)\|^2 \leq E\|v_1^\alpha(t) - v_2^\alpha(t)\|^2 + 4I_1(t) + 4I_2(t) + 4I_3(t).$

$$\begin{aligned}
E\|\phi_\alpha(x_1, u_1(t) - \phi_\alpha(x_2, u_2(t)\|^2 &\leq \frac{2}{\alpha}l^2M(t+1)Lt(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2) \\
&\quad + \frac{2l^3}{\alpha}M^2(t+1)Lt^2(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2) \\
&\quad + 4lt^2L(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2) \\
&\quad + 4ltL(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2). \\
&\leq [\frac{2}{\alpha}l^2M(t+1)Lt + \frac{2l^3M^2}{\alpha}(t+1)Lt^2 + lt^2L + lLt] \\
&\quad (\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2). \\
&\leq [\frac{2}{\alpha}l^2M(t+1) + \frac{2l^3M^2}{\alpha}(t+1)t + 4lt + 4l]Lt \\
&\quad (\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2).
\end{aligned}$$

donc

$E\|\phi_\alpha(x_1, u_1(t) - \phi_\alpha(x_2, u_2(t)\|^2 = C(\alpha)tL(\|x_1 - x_2\|^2 + \|u_1 - u_2\|^2).$

Pour tout $(x_1, u_1), (x_2, u_2) \in \mathcal{H}_2 \times U_{ad}$.

De même calculons

$$E\|\phi_\alpha^2(x_1,u_1)(t)-\phi_\alpha^2(x_2,u_2)(t)\|^2$$

On a $\quad \phi_\alpha(\phi_\alpha(x,u)(t)=\phi_\alpha(z^\alpha(t),v^\alpha(t)=(H^\alpha(t),W^\alpha(t))$.

$$\begin{aligned}
H^\alpha(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-s)[BW^\alpha(t)+F(s,z^\alpha(s),v^\alpha(s))]ds \\
+\int_0^t S(t-s)\xi(s,z^\alpha(s),v^\alpha(s))dw(s). \\
= S(t)x_0+\phi_1(z^\alpha,v^\alpha)(t)+\phi_2(z^\alpha,v^\alpha)(t)+\phi_3(z^\alpha,v^\alpha)(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W^\alpha(t) = B^*S^*(T-t)(\alpha+\Gamma_0^T)^{-1}(Eh-S(T)x_0) \\
-B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}S(T-s)F(s,z^\alpha(s),v^\alpha(s))ds \\
-B^*S^*(T-t)\int_0^t(\alpha+\Gamma_s^T)^{-1}[S(T-s)\xi(s,z^\alpha(s),v^\alpha(s))-\varphi(s)]dw(s).
\end{aligned}$$

on a d'après (2.19)

$$\begin{aligned}
E\|\phi_\alpha^2(x_1,u_1)(t)-\phi_\alpha^2(x_2,u_2)(t)\|^2 &\leq \frac{2}{\alpha}l^2M(t+1)LE\int_0^t(\|z_1^\alpha(s)-z_2^\alpha(s)\|^2 \\
&+\|v_1^\alpha(s)-v_2^\alpha(s)\|^2)ds.
\end{aligned}$$

et d'après (2.20)

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq lMtE\int_0^t\|W_1^\alpha(s)-W_2^\alpha(s)\|^2ds \\
&\leq \frac{2}{\alpha}l^3M^2(t+1)LE\int_0^t\int_0^s(\|z_1^\alpha(r)-z_2^\alpha(r)\|^2+\|v_1^\alpha(r)-v_2^\alpha(r)\|^2)drds
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\leq \frac{2}{\alpha}l^3M^2(t+1)LE\int_0^t\int_0^t(\|z_1^\alpha(r)-z_2^\alpha(r)\|^2+\|v_1^\alpha(r)-v_2^\alpha(r)\|^2)drds. \\
&\leq \frac{2}{\alpha}l^3M^2(t+1)LE\int_0^t(\|z_1^\alpha(r)-z_2^\alpha(r)\|^2+\|v_1^\alpha(r)-v_2^\alpha(r)\|^2)dr\times(\int_0^t ds) \\
&\leq \frac{2}{\alpha}l^3M^2(t+1)LtE(\|z_1^\alpha(s)-z_2^\alpha(s)\|^2+\|v_1^\alpha(s)-v_2^\alpha(s)\|^2)ds.
\end{aligned}$$

et d'après (2.21)

$$I_2(t) \leq ltLE\int_0^t(\|z_1^\alpha(s)-z_2^\alpha(s)\|^2+\|v_1^\alpha(s)-v_2^\alpha(s)\|^2)ds.$$

et d'après (2.22)

$$I_3(t) \leq lLE\int_0^t (\|z_1^\alpha(s)-z_2^\alpha(s)\|^2+\|v_1^\alpha(s)-v_2^\alpha(s)\|^2)ds.$$

donc

$$\begin{aligned}
E\|\phi_\alpha^2(x_1,u_1)(t)-\phi_\alpha^2(x_2,u_2)(t)\|^2 &\leq C(\alpha)L\int_0^t E\|\phi_\alpha(x_1,u_1)(s)-\phi_\alpha(x_2,u_2)(s)\|^2.\\
&\leq C^2(\alpha)L^2\int_0^t\int_0^s (E\|x_1(r)-x_2(r)\|^2+E\|u_1(r)-u_2(r)\|^2)\\
&\quad drds.\\
&\leq C^2(\alpha)L^2(\|x_1-x_2\|^2+\|u_1-u_2\|^2)\int_0^t\int_0^s drds.\\
&\leq C^2(\alpha)L^2\frac{t^2}{2!}(\|x_1-x_2\|^2+\|u_1-u_2\|^2).
\end{aligned}$$

Il est donc évident que

$\sup_{t\in[0,T]} E\|\phi_\alpha^n(x_1,u_1)-\phi_\alpha^n(x_2,u_2)\|^2 \leq C^n(\alpha)L^n\frac{T^n}{n}(\|x_1-x_2\|^2+\|u_1-u_2\|^2).$

Il est connu que $C^n(\alpha)L^n\frac{T^n}{n!}<1$ pour n suffisamment grand, cela résulte que ϕ_α^n est une application de contraction pour n suffisamment grand .

En suite l'application ϕ_α a un point fixe unique (x,u)(.) dans $\mathcal{H}_2\times U_{ad}$ qui est la solution de l'equation(2.3). Le théorème est prouvé.

Théorème 2.3.3 *Sous les hypothèses (A1),(A2) et (AC), le systhème (2) est approximativement faiblement contrôlable sur [0,T].*

Preuve

soit (x^α, u^α) un point fixe de l'opérateur (2.6). En suite, à partir du lemme(2.2.2), nous obtenons

$$x^\alpha(t) = x_T \quad - \quad \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(t)x_0)$$

$$+ \quad \alpha \int_0^t (\alpha + \Gamma_r^T)^{-1} S(T-r) F(r, x^\alpha(r), u^\alpha(r)) dr$$

$$+ \quad \alpha \int_0^t (\alpha + \Gamma_r^T)^{-1} [\xi(r, x^\alpha(r), u^\alpha(r)) - \varphi(r)] dw(r). \tag{2.23}$$

D'après le théorème (2.2.3) et (AC) le système (2.1) est approximativement contrôlable. Et d'après le théorème(2.2.4) le système déterministe (2.4) est approximativement contrôlable sur [s,T], $0 \leq s \leq T$.

Donc $\|\alpha(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} z\|^2 \longrightarrow 0 \; quand \; \alpha \to 0^+$ pour tout $z \in H, 0 \leq s \leq T$ car les propriétés vérifiées par l 'opérateur $\prod_0^T$ dans le théorème (2.2.3) sont aussi vérifiées par l'opérateur Γ_s^T dans le cas déterministe.

D'après le lemme (2.2.1) pour tout $y \in L_2(\mathcal{F}_T, H)$, il existe $\prod(.) \in L_2^{\mathcal{F}}(I, L_2^0)$ tel que , $y = Eh + \int_0^T \Psi(s) dw(s)$.

Maintenant de (2.23) il existe des constantes $C_1 > 0, C_2 > 0$ telle que pour tout

$y \in L_2(\mathcal{F}_T, H)$.

$$\begin{aligned}
|E\langle y, x^\alpha(T) - h\rangle| = |E\langle y, x_T - \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0) \\
+\alpha \int_0^T (\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} S(T-r) F(r, x^\alpha(r), u^\alpha(r)) dr \\
+\alpha \int_0^T (\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} [\xi((r, x^\alpha(r), u^\alpha(r)) - \varphi(r)] dw(r)\rangle|. \\
= |E\langle y, x_T\rangle - E\langle y, \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1}(Eh - S(T)x_0)\rangle \\
+E\langle y, \alpha \int_0^T (\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} S(T-r) F(r, x^\alpha(r), u^\alpha(r)) dr\rangle \\
+E\langle y, \alpha \int_0^T (\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} [\xi((r, x^\alpha(r), u^\alpha(r)) - \varphi(r)] dw(r)\rangle|. \\
= |E\langle y, x_T\rangle + E\langle \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1} y, S(t)x_0 - Eh\rangle \\
+E \int_0^T \langle \alpha((\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} y, S(T-r) F(r, x^\alpha(r), u^\alpha(r))\rangle dr \\
+E\langle \int_0^T \alpha(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} [\xi((r, x^\alpha(r), u^\alpha(r)) - \varphi(r)] dw(r), y\rangle|.
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
|E\langle \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1} y, S(T)x_0 - Eh\rangle|_{L_2(\mathcal{F}_T, H} = |E \int_0^T \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1} y(s)[S(T)x_0 - Eh](s) ds|. \\
= |\int_0^T \alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1} Ey(s)[S(T)x_0 - Eh](s) ds|. \\
\leq (\int_0^T \|\alpha(\alpha + \Gamma_0^T)^{-1} Ey(s)\|_H^2 ds)^{\frac{1}{2}} (\int_0^T \|S(T)x_0 - Eh\|_H^2 ds)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

$$\leq \|\alpha(\alpha + \Gamma_s^T)^{-1} Ey\| \|S(T)x_0 - Eh\| + C_1 \int_0^T E\|\alpha(\alpha + \Gamma_r^T)^{-1} y\|^2 dr + C_2 \int_0^T E\|\alpha(\alpha + \Gamma_r^T)^{-1} \psi(r)\|^2 dr.$$

Le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro quand $\alpha \to 0^+$. Par conséquent $x^\alpha(T) \to h$ faiblement dans $L_2(\mathcal{F}_T, H)$ quand $\alpha \to 0^+$. Le système est donc approximativement faiblement contrôlable sur [0,T].

Corollaire 2.3.1 *supposons que les hypothèses (A1), (A2) tiennent. Si le semi-groupe S(t) est analytique et le système linéaire déterministe correspondant à (2.3) est approximativement contrôlable sur [0,T], alors le système (2.2) est approximativement faiblement contrôlable sur [0,T].*

Preuve

D'après le théorème (2.2.5), quand le semi-groupe S(t) est analytique le système (2.1) est approximativement contrôlable sur [0,T] si et seulement si le système linéaire déterministe correspondant est approximativement contrôlable sur [0,T]. Alors d'après le théorème (2.3.3) le système (2.2) est approximativement faiblement contrôlable.

Bibliographie

[1] A-Arapostathis,RK.George,MK.Ghoch,On the controllability of a class of non linear systems,Control Lett.44(2001)25-34.

[2] A.E.Bashirov ,N.I.Mahmoduv,On concepts of Controllability for linear deterministic and Stochastic Systems , SIAMJ.Control Optin $-37(1999)1808-1821$.

[3] D.Lambert , B.Lapeyre ,Introduction au calcul stochastique appliqué à la france, 1997.

[4] N.I.Mahmudov,Controllability of semilinear stochastic systems in Hilbert spaces, j-math-Anal-App-288(2003)197-211.

[5] N.U Ahmed, X.DING, McKean-Vlosov, Semilinear stochastic evolution equation in Hilbert space ,Stochastic process. Appl.60(1995)65-85.

[6] N.BOULEAU, Processus stochastiques et Applications,HERMANN,1988.

[7] N.I.Mahmudov,Controllability of linear stochastic systems in Hilbert spaces, j-math-Anal-App-259(2001)64-82.

[8] R.F.Curtain, H.J.Zwart, An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, New York, 1995.

Abstract

In this work we study the weak approximate controllability properties of semilinear stochastic systems assuming controllability of the associated linear systems. The results are obtained by using the Banach fixed point theorem.

Résumé

Dans ce travail on étudie les propriétés de la contrôlabilité approchée faible des systèmes semi-linéaires stochastiques, en supposant la contrôlabilité des systèmes linéaires associés. Les résultats sont obtenus en utilisant le théorème du point fixe de Banach.

ملخص

في هدا العمل ندرس خصائص قابلية التحكم التقريبية الضعيفة العشوائية شبه الخطية بفرض امكانية التحكم في الانظمة الخطية المرتبطة بها يتم الحصول على النتائج باستخدام نظرية النقطة الثابتة لبناخ.