

Examen : Espaces vectoriels normés

Exercice 1-(5Pts)

1. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathcal{R}$ une fonction définie par $f(x) = e^{-x}$.

Montrer que $f \in L^p([0, +\infty[)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.

2. Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathcal{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x(1 + |\ln x|)^2}$. Montrer que $f \in L^1([0, 1])$.

3. Soit $p \in [1, +\infty[$. Montrer que $L^\infty([1, 2]) \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p([1, 2])$.

Exercice 2-(8 Pts)

Soient la fonction porte $\pi(x)$ et la fonction de triangle $\Delta(x)$, telles que

$$\pi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \Delta(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement $\pi(x)$ et $\Delta(x)$.

2. Calculer la transformée de Fourier de $\pi(x)$ et $\Delta(x)$.

3. En déduire la transformée de Fourier des fonctions suivantes :

$$\pi\left(\frac{x}{2}\right), (x+1)\pi(x), \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2.$$

Exercice 3-(7Pts)

Résoudre, en utilisant la transformation de Laplace, l'équation intégrale suivante

$$e^{-t}x(t) - \int_0^t e^{-\tau}x(\tau)d\tau = \sin t, \quad t \geq 0.$$

Bonne chance

Correction d'examen final.

Exercice n°1 (5 pts)

① Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f(x) = e^{-x}$.
montrer que $f \in L^p(]0, +\infty[)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Pour $p = +\infty$ (expl.).

$|f(x)| = |e^{-x}| = e^{-x} \leq e^0 = 1$ donc f est bornée.
d'où $f \in L^\infty(]0, +\infty[)$.

Pour $p \in [1, +\infty[$

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^p dx = \int_0^{+\infty} e^{-xp} dx = \left. -\frac{1}{p} e^{-xp} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{p} < +\infty.$$

d'où $f \in L^p$ $\forall p \in [1, +\infty[$.

② Soit $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)^2}$
* $f \in L^1(]0, 2]) \Leftrightarrow \int_0^2 |f(x)| dx < +\infty$.

$$\int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 \frac{1}{x(1+\ln x)^2} dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)^2} dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1-\ln x)^2} dx$$

$\int \frac{f'}{f^2} = -\frac{1}{f}$

$$= \left. \frac{1}{1-\ln x} \right|_0^2 = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\ln x} = 1 < +\infty.$$

d'où $f \in L^1(]0, 2])$

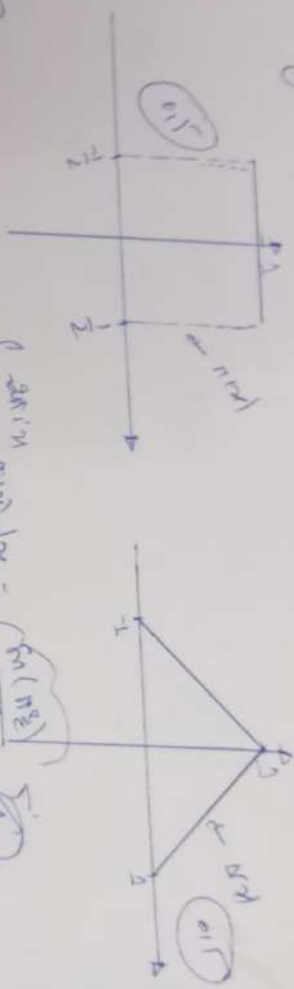
③ Soit $p \in [1, +\infty[$. montrer que $L^\infty(]0, 2]) \cap L^p(]0, 2]) \subset L^p(]0, 2])$
c.e: $\forall p \geq 1, L^\infty(]0, 2]) \subset L^p(]0, 2])$

Soit $f \in L^\infty(]0, 2])$ alors: $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$
 $\int_0^2 |f(x)|^p dx \leq \int_0^2 \|f\|_\infty^p dx = \|f\|_\infty^p \int_0^2 dx = \|f\|_\infty^p \cdot 2 < +\infty$
donc $f \in L^p$ (car $\|f\|_\infty < +\infty$)

Exercice n°2 (8 pts)

Soit f la fonction triangulaire de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$



① On a : $(f(x))_{\mathbb{R}} = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx = \frac{\sin(\frac{\pi\xi}{2})}{\pi\xi}$

puisque $f(x)$ est paire, d'où :

$$(f(x))_{\mathbb{R}} = \hat{f}(\xi) = 2 \int_0^1 \cos(\xi x) dx = 2 \int_0^1 \cos(2\pi u) du$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2 \sin(\frac{\pi\xi}{2})}{\pi\xi} = \left(\frac{\sin(\frac{\pi\xi}{2})}{\pi\xi} \right)^2$$

② En déduire la transformée de Fourier des $f_k(x)$:

$$(f_k(x))_{\mathbb{R}} = \hat{f}_k(\xi) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\frac{\pi\xi}{2})}{(\frac{\pi\xi}{2})} = \frac{\sin(\frac{\pi\xi}{2})}{\pi\xi}$$

$$F((x+1)f_k(x))_{\mathbb{R}} = F(x+1)f_k(x)_{\mathbb{R}} = F(x)f_k(x)_{\mathbb{R}} + F(x)f_k(x)_{\mathbb{R}}$$

$$\frac{d}{dx} f_k(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(\frac{\pi(x+1)}{2})}{\pi(x+1)} \right) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\sin(\frac{\pi\xi}{2})}{\pi\xi} \right) = \frac{\sin(\frac{\pi\xi}{2})}{\pi\xi}$$

$$x \quad f'(n(x)/\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} n(x) dx = \hat{n}(\xi).$$

$$f'[\hat{n}(\xi)] = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{n}(\xi) d\xi = n(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \left(\frac{6\pi \xi}{\pi \xi} \right) d\xi = n(x).$$

Same $n(x)$ at both sides.

$$n(x) = n(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \left(\frac{6\pi \xi}{\pi \xi} \right) d\xi = n(x)$$

Side:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \left(\frac{6\pi \xi}{\pi \xi} \right) d\xi = n(x)$$

$$x \quad \text{ma: } f'(x/\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \hat{n}(\xi) d\xi = \hat{n}(x).$$

$$\Leftrightarrow f'(\hat{n}(\xi)) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{n}(\xi) d\xi = n(x).$$

Same $n(x)$ at both sides.

$$d'_{\text{out}}: \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \hat{n}(\xi) d\xi = n(x) = \hat{n}(x).$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} \left(\frac{6\pi \xi}{\pi \xi} \right) d\xi = n(x)$$

1

Exercice 3. (3pts) $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{p^2} \right) = \int_0^t \int_0^t x(\tau) d\tau = \sin t, \quad t > 0$

Multiplication

$$x(t) = \int_0^t \int_0^t x(\tau) d\tau = \sin t \cdot e^t$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t \underbrace{e^{-\tau} x(\tau)}_{\mathcal{L}^{-1} x(t)} d\tau = \mathcal{L}^{-1} \sin t$$

olopres sa relation de produit de convolution:

$$\mathcal{L}(fg)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$$

$$\text{Avec: } \mathcal{L}^{-1} x(t) = \int_0^t e^{-\tau} x(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathcal{L}^{-1} x(t) = \mathcal{L}^{-1} \sin t$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(\mathcal{L}^{-1} \sin t) = \mathcal{L}(\sin t)$$

$$\Rightarrow x(p) = \mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{(p^2+1)}$$

$$\Rightarrow x(p) = \frac{1}{(p^2+1)}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) x(p) = \frac{1}{(p^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(p-1)(p+1)}{(p^2+1)} x(p) = \frac{1}{(p^2+1)} \Rightarrow x(p) = \frac{p-1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{(p-2)}{(p-1)} x(p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)} \Rightarrow x(p) = \frac{p-2}{(p-1)^2(p^2+1)}$$

$$\Rightarrow x(p) = \frac{p-1}{(p-2)(p^2+1)} = \frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{p-1}{(p^2+1)}$$

$$= \frac{1}{p-2} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{p-1}{(p^2+1)} + \frac{1}{(p-1)^2+1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(x(p)) = x(t) = \frac{1}{p-2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{(p^2+1)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{p-2} e^{-2t} - \frac{1}{p} \cos t + \frac{1}{p} \sin t = \frac{1}{p-2} e^{-2t} + \frac{1}{p} (\sin t - \cos t)$$

page 4

3pts