



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série:.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de **Master**
Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

**STABILITÉ D'UN MODÈLE DE
DIFFUSION**

Réalisé par : **AGABA Chahinaz**

Dirigé par : **Dr. DJEBARA Lamia**

Membres de jury :

Dr. BAHRI Boubakeur

Président

Dr. ZAHY Ouanassa

Examineur

2022-2023

*"The important thing in science
is not so much to obtain new
facts as to discover new ways
of thinking about them"*

—Sir William Henry Bragg,

Remerciements

J'aimerais, en premier lieu, remercier mon Dieu tout puissant qui m'a donné la volonté et la force afin de réaliser ce travail.

*Je voudrais remercier grandement, **Dr. Lamia DJBARA**, qui m'a dirigé. Elle a toujours été disponible, à l'écoute de mes questions, et elle s'est toujours intéressée à l'avancement de mes travaux. Pour tout cela merci.*

*J'exprime toute ma reconnaissance aux membres de jury **Dr. Ouanassa ZAHY** et **Dr. Boubakeur BAHRI** de m'avoir fait l'honneur de participer à mon jury.
Mes remerciements*

Merci à qui n'ont cessé d'être pour moi des exemples de persévérance, de courage et de générosité, à vous, mes parents, ma sœur et mes frères.

Je n'oublie pas de remercier tous mes collègues et amis sans exception.

Je tiens enfin à exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin au bon déroulement de ce mémoire.

Chahinaz AGABA

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières

Introduction Générale	2
------------------------------------	---

CHAPITRE I

NOTIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

I.1. NOTATIONS ET NOTIONS GÉNÉRALES	7
1.1.1. Équations différentielles ordinaires.....	7
1.1.2. Équations aux dérivées partielles	7
1.1.3. Espaces fonctionnels	7
1.1.4. Formule de Green.....	9
1.1.5. L'inégalité de Cauchy-Schwarz	9
1.1.6. Inégalité de Gronwall	9
1.1.7. Théorème des valeurs intermédiaires	9
1.1.8. Généralisations du théorème des valeurs intermédiaires	10
1.1.9. Fonction propre	10
1.1.10. Lemme de Barbalat	11

1.2. CONCEPTS FONDAMENTAUX ET NOTIONS DE STABILITÉ LOCALE ET GLOBALE	11
1.2.1. Théories de la stabilité locale dans le cas des EDOs.....	13
1.2.2. Théories de la stabilité locale dans le cas des EDPs	14
1.2.2.1. Propriétés des valeurs propres de l'opérateur de Laplace	14
1.2.2.2. Stabilité locale.....	15
1.2.3. Théories de la stabilité asymptotique globale	16

CHAPITRE II

LA MODÉLISATION ET LES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION

2.1. INTRODUCTION	19
2.2. PRINCIPE DE MODÉLISATION MATHÉMATIQUE	19
2.2.1. Une approche de modélisation	19
2.2.2. Aspects d'une modélisation mathématique.....	19
2.2.3. Analyse des modèles.	20
2.3. BIBLIOGRAPHIE ET DESCRIPTION DU MODÈLE	21
2.3.1. Définition et bref historique	21
2.3.2. Systèmes de réaction-diffusion	21
2.3.3. Etablissement des équations de réaction-diffusion	22

2.3.3.1.	Dérivation des équations de réaction-diffusion	22
2.3.3.2.	Résolution des équations de réaction-diffusion	24
2.4.	MODÉLISATION DE QUELQUES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION ÉPIDÉMIOLOGIQUE	25
2.4.1.	Modèle SIR de Kermack-Mckendrick	25
2.4.2.	Modèle SIS de Kermack-Mckendrick.....	27
2.5.	CONCEPTS DE BASE DE L'ÉPIDÉMIOLOGIE DYNAMIQUE	28
2.6.	INTERPRÉTATION DU MODÈLE DE SYSTÈME CHOISI.....	30

CHAPITRE III

LA STABILITÉ LOCALE ET GLOBALE D'UN MODÈLE DIFFUSIF

3.1.	INTRODUCTION	33
3.2.	PROPRIÉTÉS DU MODÈLE	34
3.2.1.	Positivité des solutions.....	37
3.2.2.	Régions invariantes.....	37
3.2.3.	Existence de points d'équilibre et nombre de reproduction de base R_0	39
3.3.	STABILITÉ ASYMPTOTIQUE LOCALE	44
3.3.1.	Stabilité locale de l'EDO	44
3.3.2.	Stabilité locale de l'EDP	47
3.4.	STABILITÉ ASYMPTOTIQUE GLOBALE	50

3.4.1. Stabilité asymptotique globale avec $R_0 < 1$	50
3.4.2. Stabilité asymptotique globale avec $R_0 > 1$	54
3.5. Exemples d'application	58
3.5.1. Premier exemple	58
<hr/>	
Conclusion Générale	63
Références bibliographiques	64
Résumé, Abstract, ملخص	69

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. Introduction Générale

Les mathématiques ont toujours le bénéfice de participer au développement de plusieurs domaines scientifiques : la physique, la biologie, la biomédicale, l'ingénierie, etc. Pour le mathématicien, ces domaines offrent de nouvelles et passionnantes branches de recherches.

Les systèmes de *Réaction-Diffusion* apparaissent naturellement dans la modélisation mathématique d'une grande variété de phénomènes, non seulement dans les sciences naturelles, mais aussi dans l'ingénierie et l'économie, tels que la dynamique des gaz, des processus de fusion, certains modèles biologiques, les processus cellulaires, l'écologie, la propagation de maladies, les processus industriels, le transport catalytique de contaminants dans l'environnement, la dynamique des populations, la propagation des flammes et des réactions chimiques et autres. La plupart de ceux-ci, en première vue, sont des phénomènes qui ont un dénominateur commun, la présence de diffusion (permettant à la propagation d'une épidémie ou d'une substance chimique), et de réaction (qui est la manière spécifique dont les différentes phases ou composantes chimiques réagissent), ils sont génériquement appelés *systèmes de Réaction-Diffusion*.

Les équations de *réaction-Diffusion* sont des équations aux dérivées partielles paraboliques semi-linéaires qui apparaissent dans de nombreux domaines scientifiques tels que la chimie, la physique, la biologie, l'écologie et même la médecine. Elles apparaissent généralement sous la forme de systèmes couplés. Ces équations traduisent l'interaction entre plusieurs composantes ou masses d'un même espèce ou d'une même population.

La théorie générale des systèmes de *réaction-diffusion*. C'est un sujet relativement récent de la recherche mathématique appliquée. La plupart des travaux qui ont été fait jusqu'à présent s'intéressent beaucoup à l'exploration de certains aspects de systèmes et équations très spécifiques. C'est parce que ces systèmes sont en général très compliqués et ouvrent un large éventail de phénomènes encore mal connus.

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations aux dérivées partielles. La forme générale de ces systèmes [1] est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D(t, x, u, \nabla u) \cdot \nabla u) + f(t, x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega, t \geq 0 \quad (1)$$

Où :

$u = u(t, x) = (u_1, \dots, u_m) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un vecteur de variables. f est une fonction vectorielle linéaire ou non-linéaire, qui se nomme les termes de réaction, elle est une application régulière (au moins *localement lipchitzienne*).

$D: \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction régulière. Lorsque D est une matrice carrée elle est appelée la matrice de diffusion, dans ce cas $\operatorname{div}(D(t, x, u, \nabla u) \cdot \nabla u) = D\Delta u$ sont les termes de diffusion.

Cette équation est posée sur un domaine ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, et complétée par des conditions sur le bord, par exemple, les conditions de Dirichlet homogènes ($u = 0$ sur $\partial\Omega$) ou les conditions de Neumann homogènes $\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\right)$.

Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u ; par exemple u peut être un vecteur de concentrations chimiques, et f est l'effet des réactions chimiques de ces concentrations, ou bien les composantes de u peuvent être des densités de populations végétales ou animales, et f représente l'effet des relations (de compétition ou de symbiose) entre des prédateurs et des proies. Les termes de diffusion peuvent représenter des diffusions moléculaires ou quelques mouvements aléatoires d'individus dans une population.

Les systèmes de *réaction-diffusion* des équations différentielles partielles jouent un rôle important dans la modélisation des applications de la vie réelle, ce qui a suscité l'intérêt des scientifiques, y compris celui d'*Alan Turing* en 1952.

Pour étudier la dynamique des maladies, les *modèles compartimentaux* ont joué un rôle important dans l'élimination de la maladie aux niveaux local et mondial. L'un des modèles à compartiments originaux ont donné lieu à de nombreuses formes différentes, est le modèle *SI* qui est un *modèle classique* en *épidémiologie mathématique* et la forme la plus simple de tous les modèles de maladie, montrant la propagation d'une maladie infectieuse dans une population. Les individus ont en fait sans immunité une fois infectés et sans traitement, de sorte qu'ils restent infectés tout au long de leur vie et restent en contact avec des populations sensibles.

La théorie de la dynamique épidémique est si riche qu'il nous est impossible d'en couvrir tous les aspects. Un modèle épidémique est un moyen simplifié de décrire la transmission d'une maladie transmissible par l'intermédiaire d'individus. Deux modèles dynamiques fondamentaux d'épidémies Les modèles dynamiques de maladies infectieuses sont principalement basés sur des structures à compartiments qui ont été initialement proposées par *Kermack* et *McKendrick* en 1927 et 1932. Les modèles de maladies infectieuses ont été présentés de manière systématique dans [2,3], qui ont obtenu un résultat de seuil connu pour le modèle qu'ils ont proposé. Depuis lors, une abondante littérature sur ces modèles s'est développée. Leurs travaux ont ensuite été développés par de nombreux autres scientifiques biomédicaux. Pour formuler un modèle dynamique de transmission d'une maladie épidémique, la population d'une zone donnée est souvent divisée en plusieurs groupes différents.

2. Situation du travail

Les mathématiques sont fortement impliquées dans le développement de la science. Ces interactions revitalisent et renforcent le champ de la science biomédicale et toutes les sciences, par conséquent, les mathématiciens doivent être impliqués dans la biologie comme toutes les importantes et excitantes découvertes scientifiques de tous les temps. Les meilleurs modèles montrent comment un processus marche et ensuite prévoient ce qui peut suivre, c'est ce qu'on essaie de décrire dans ce travail.

L'étude des maladies infectieuses a attiré l'attention d'un grand nombre de chercheurs tels que [4-7], dans le but d'améliorer le traitement de ces maladies par la planification et la prévision de la propagation de la maladie, réduisant ainsi les taux de mortalité, et les modèles ont été proposés et étudiés au cours des dernières années. Les modèles ont été proposés et étudiés ces dernières années. En particulier, la *réaction-diffusion* épidémique sensible-infecté-susceptible (*SIS*), voir, par exemple, [8-13].

Dans l'étude de *Jong et al* [14], le terme de transmission de l'incidence standard $\beta SI/N$ a été proposé comme alternative à l'action de masse. À cette fin, *Allen et al* [15] ont proposé un modèle de *réaction-diffusion* *SIS* dépendant de la fréquence pour une population vivant dans un habitat spatial continu. Dans [16], *Peng et Liu* ont étudié la stabilité globale de l'équilibre endémique dans certains cas particuliers pour le modèle d'*Allen et al*. De nombreuses propriétés importantes et intéressantes ont été obtenues, telles que la définition du nombre reproductif R_0 [17-19], la définition de l'*équilibre endémique* dans certains cas particuliers pour le modèle d'*Allen et al*. R_0 [17-19], la *stabilité globale* de l'équilibre sans maladie [20,21], etc.

Le travail constituant ce mémoire s'inscrit dans ce même contexte. Nous nous intéressons à l'étude de l'un des modèles classiques en épidémiologie mathématique de systèmes de *réaction-diffusion paraboliques* avec des *non linéarités*. C'est donc une contribution à l'étude de la *stabilité locale*, la *stabilité globale* des deux états stables et du *comportement asymptotique* des solutions du système de *réaction-diffusion*.

L'étude de la *stabilité globale* de l'endémie n'est pas seulement importante d'un point de vue mathématique, elle est également essentielle pour prédire l'évolution de la maladie à long terme, de sorte que les stratégies de prévention et d'intervention puissent être conçues efficacement et que les efforts administratifs en matière de santé publique puissent être correctement dimensionnés. Il existe certaines méthodes, notamment celles basées sur les systèmes dynamiques monotones qu'on serait traité par la suite, l'approche géométrique [22] et les fonctions de *Lyapunov* [23], pour effectuer une analyse de stabilité globale des modèles épidémiques.

La *méthode des fonctions de Lyapunov* est connue depuis de nombreuses décennies. Le défi dans l'application de cette méthode est qu'il n'y a pas de méthode systématique pour construire les fonctions de *Lyapunov* (en particulier, la détermination des coefficients

appropriés est souvent une question de chance), de sorte que son succès dépend largement des essais et des erreurs ainsi que du problème spécifique. Dans cette étude, nous visons à établir la stabilité globale des solutions constantes à l'état d'équilibre des systèmes de *réaction-diffusion* avec des conditions aux limites de *Neumann*.

Ce travail est alors composé de *trois chapitres*, il est précédé par cette introduction générale qui met en évidence l'art du sujet et l'un des problèmes abordés.

Nous avons trouvé judicieux de présenter au *premier chapitre* quelques notations, définitions et des résultats de base sur les espaces fonctionnels ; d'introduire les outils fonctionnels de base nécessaires à la *réaction-diffusion* et à la description du modèle épidémique qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs. Dans le *second chapitre*, nous présentons certains aspects sur la modélisation et quelques modèles faisant intervenir des systèmes de *réaction-diffusion*. Le *dernier chapitre* est consacré à l'étude de système du modèle choisi en établissant les descriptions des paramètres, du **nombre de reproduction de base R_0** du modèle proposé et établit l'existence de deux équilibres. Ensuite, nous avons prouvé que les deux états stables du modèle sont **globalement asymptotiquement stables** en utilisant la **fonction de Lyapunov**. En donnant à la fin un exemple d'application pour valider l'analyse théorique présentée tout au long de ce chapitre.

CHAPITRE I

NOTIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1. NOTATIONS ET NOTIONS GÉNÉRALES

1.1.1. Équations différentielles ordinaires

Définition 1.1. [25] Une équation différentielle ordinaire (*notée EDO*) est une équation définie en termes d'une variable $x \in I$ (I intervalle réel), et une fonction inconnue $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ et ses dérivées par rapport à x , en formule

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots) = 0.$$

Une équation différentielle ordinaire est d'ordre k si elle contient les dérivées de y jusqu'à l'ordre k .

1.1.2. Équations aux dérivées partielles.

Définition 1.2. [25] Une équation aux dérivées partielles (*notée EDP*) est une relation entre une fonction de plusieurs variables (réelles) u , et ses dérivées partielles, et une fonction donnée f

$$F\left(u, x_1, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right) = f, \quad u \text{ dans } \Omega,$$

Où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n , et F est une fonction de plusieurs variables réelles. L'ordre de la dérivation le plus élevé est appelé l'ordre de l'EDP.

1.1.3. Espaces fonctionnels

i. Espace $C^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$

Définition 1.3. [30] Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n (non nécessairement borné) et k un entier. On notera $C^k(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions k fois différentiables dans Ω à valeurs dans \mathbb{C} dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues dans Ω . Pour $k=0$ c'est l'espace des fonctions continues.

On peut aussi définir cet espace par récurrence sur k en posant

$$C^k(\Omega) = \left\{ f \in C^{k-1}(\Omega) : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega), \quad i = 1, \dots, n \right\}, \quad k \geq 1.$$

Alors, $C^k(\Omega)$ est l'espace vectoriel des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout $\alpha, |\alpha| \leq k, x \rightarrow \partial^\alpha f(x)$ existe et appartient à $C^0(\Omega)$.

ii. L'espace L^p

En analyse, les espaces L^p sont des espaces de fonction dont la puissance $p^{\text{ème}}$ est intégrable, au sens de *Lebesgue*.

Définition 1.4. [27] Soit $\Omega =]a, b[$ tel que : $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ est un intervalle borné ou non borné de \mathbb{R} .

- **Pour** $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace $L^p(\Omega)$ comme suit

$$u \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty, u \text{ est mesurable,}$$

muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$(L^p(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^p(\Omega)})$ est un espace de *Banach*.

- **Pour** $p = 2$,

$$u \in L^2(\Omega) \Leftrightarrow \int_{\Omega} u(x)^2 dx < \infty, u \text{ mesurable à carré intégrable sur } \Omega.$$

$(L^2(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$ est un espace de *Hilbert*.

- **Pour** $p = \infty$,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{ C \geq 0, |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)})$ est un espace de *Banach*.

iii. Espace de Sobolev

Définition 1.5. [31] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . Pour $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace de Sobolev, noté $W^{m,p}(\Omega)$, est constitué des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m , au sens des distributions, s'identifient à des fonctions de $L^p(\Omega)$.

Pour ces dérivées, on pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$ et on utilise la notation :

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{|\alpha_1|} x_1 \dots \partial^{|\alpha_n|} x_N}.$$

La définition précédente s'écrit donc :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m \Rightarrow D^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Remarque 1.1. [31] Pour $p = 2$, il est d'usage de remplacer la notation $W^{m,2}(\Omega)$ par H^m .

1.1.4. Formule de Green

Cette formule joue un rôle essentiel dans la résolution des *EDP*. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties.

Théorème 1.1. [32] Soit Ω un ouvert borné de frontière régulière. Soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ et v une fonction de $H^1(\Omega)$. Alors la formule de Green s'écrit

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx,$$

où η est le vecteur normale à Ω .

De plus, si $u \in H^2(\Omega)$, et $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

1.1.5. L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 1.2. [24] Dans un espace X muni d'un produit scalaire, l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

est satisfaite pour tous x et y dans X .

1.1.6. Inégalité de Gronwall

Lemme 1.1. [28] Soit $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et positive. Supposons qu'il existe deux constantes réelles a et b supérieures ou égales à zéro, tel que

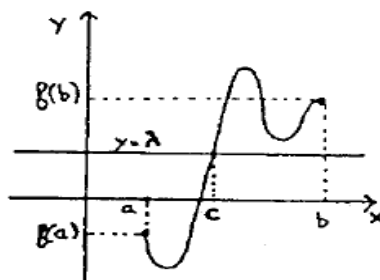
$$0 \leq u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) ds, \quad \forall t \in [0, T[.$$

Alors;

$$u(t) \leq a e^{bt}, \quad \text{for } 0 \leq t < T.$$

1.1.7. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.3. [29] Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux élément de I . Alors toute droite horizontale $y = \lambda$ passant entre les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ coupe le graphe G_f au moins une fois.



D'autres façons, si λ est un nombre réel quelconque compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe c entre a et b tel que $f(c) = \lambda$.

Corollaire 1.1. [26] Soit $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue tel que

$$f(a)f(b) < 0.$$

C'est-à-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls et de signes opposés. Alors il existe $\bar{x} \in]a, b[$ tel que $f(\bar{x}) = 0$.

Si de plus f est strictement monotone, alors \bar{x} est unique.

1.1.8. Généralisations du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.4. [26] Remplacement \mathbb{R} par Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Soit $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur (a, b) avec des limites L_a et L_b (finies ou infinies) en a et b respectivement,

$$\lim_{v \rightarrow a} h(v) = L_a \text{ et } \lim_{v \rightarrow b} h(v) = L_b.$$

Alors, pour tout réel k strictement inclus entre L_a et L_b , il existe un unique réel $c \in (a, b)$ avec $h(c) = k$

1.1.9. Fonction propre

En mathématiques, une fonction propre d'un opérateur linéaire P défini sur un espace de fonctions est toute fonction non nulle Φ dans cet espace qui, lorsqu'elle est influencée par P , n'est multipliée que par un facteur d'échelle appelé valeur propre. Sous forme d'équation, cette condition peut être écrite comme suit

$$P\Phi = \lambda\Phi.$$

Pour une valeur propre scalaire λ . Les solutions de cette équation peuvent également être soumises à des conditions aux limites qui restreignent les valeurs propres et les fonctions propres admissibles.

1.1.10. Lemme de Barbalat

Lemme 1.2. Si $c > 0$ $c > 0$ sont des constantes, $\psi(t) \geq 0$, et $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t h(t) dt$ existe et est finie, supposons que $\varphi \in C^1([0, +\infty))$, φ est borné par en dessous et satisfait:

$$\varphi'(t) \leq -c\psi(t) + h(t), \quad \text{dans } [0, +\infty).$$

Si $\psi \in C^1([0, +\infty))$ et $\psi'(t) \leq k$ dans $[0, +\infty)$ pour une certaine constante $k > 0$. Alors, $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$.

La preuve du lemme se trouve dans [33, Lemma 1.1, page 2].

1.2. CONCEPTS FONDAMENTAUX ET NOTIONS DE STABILITÉ LOCALE ET GLOBALE

Présentons le système général suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} - d_i \Delta u_i = F_i(u_1, u_2, \dots, u_m), & \text{en } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ u_i(0, x) = u_{i0}(x) \geq 0, & i = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) est un domaine borné dans \mathbb{R}^n avec une frontière lisse $\partial\Omega$ et $d_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, m$.

Cette forme d'écriture est équivalente à la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, x) = D \Delta U(t, x) + F(U(t, x)), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

avec

$$U(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_m(t, x))^T, \quad \text{et} \quad F(U) = (f_1(u), f_2(u), \dots, f_m(u))^T.$$

Les points d'équilibre (états) sont essentiels à l'étude de la dynamique de tout système physique en biologie, en économie, en physique, etc. Ils sont utilisés dans l'étude de la théorie de la stabilité, qui est un sujet de grande importance pour les scientifiques. Il est désirable que tous les états (solutions) d'un système donné tendent vers l'équilibre (point). Nous donnons maintenant les définitions suivantes.

Définition 1.6 [34] (*Non-négativité des solutions*) Soit $F : I \subseteq \bar{\mathbb{R}}_+^n$.

F est essentiellement non négative si $f_i(U) \geq 0$, pour tout $i = 1, \dots, n$ et $U \in \bar{\mathbb{R}}_+^n$ tel que $u_i = 0$, où u_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de U .

Proposition 1.1 [35] Supposons que $I \subset \bar{\mathbb{R}}_+^n$. Alors, $\bar{\mathbb{R}}_+^n$ est un ensemble invariant par rapport au système d'ODEs si et seulement si F est essentiellement non négatif.

Définition 1.7. (Point d'équilibre). Un point $u^* \in \mathbb{R}^m$ dans l'espace des états est dit point d'équilibre de (1.1) si $\frac{du}{dt} = 0$ i.e. $F(u^*) = 0$. Cela signifie que, chaque fois que l'état du système est au départ en u , il restera en u^* pour tout le temps futur. Le point d'équilibre d'un système dynamique représente une condition stationnaire pour la dynamique. Un système dynamique peut avoir zéro, un ou plusieurs points d'équilibre. S'il existe plusieurs points d'équilibre, nous devons examiner la stabilité de chacun d'entre eux.

Définition 1.8. [36,37], (Localement stable). Un point d'équilibre est localement stable si toutes les solutions qui commencent près de u^* restent près de u^* pendant tout le temps. En d'autres termes, un point d'équilibre u^* pour (1.1) est dit **stable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ (ce qui signifie que les conditions initiales sont dans un voisinage de u^*) de sorte que

$$\|u(0) - u^*\| < \delta \Rightarrow \|u(t) - u^*\| < \varepsilon,$$

pour tout $t > 0$. Sinon, il est **instable**. Notez que la stabilité locale d'un point d'équilibre signifie que si vous placez le système quelque part à proximité du point, il se déplacera de lui-même vers le point d'équilibre dans un certain temps. Si u^* n'est pas stable, on dit qu'il est instable.

(Stabilité globale). La stabilité globale signifie que le système atteindra le point d'équilibre à partir de n'importe quel point de départ possible; c'est-à-dire qu'il n'y a pas de condition de "voisinage".

(Localement asymptotiquement stable - Globalement asymptotiquement stable) [38].

On dit que le point u^* est un équilibre localement asymptotiquement stable si, en outre, pour $\|u(0) - u^*\| < \delta$ on a $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t) - u^*\| = 0$, ou un point d'équilibre est **localement asymptotiquement stable** s'il est localement stable et si toutes les solutions commençant près de u^* tendent vers u^* à mesure que $t \rightarrow \infty$. Cela correspond au cas où toutes les trajectoires proches convergent vers le point d'équilibre en temps long. Si le système est asymptotiquement stable quel que soit le vecteur d'état initial $u(0)$, alors le point d'équilibre est **globalement asymptotiquement stable**.

1.2.1. Théories de la stabilité locale dans le cas des EDOs

Afin de connaître les théories de base pour la stabilité du système d'EDO, nous commençons par omettre l'opérateur Laplacien Δ et par fixer la dérivée temporelle. En général, le système (1.2) peut être composé de deux composantes exprimées sous la forme suivante

$$\frac{dU}{dt} = F(U), \quad (1.3)$$

où $F(U) = (f(u, v), g(u, v))^T$ (ici, nous changeons de notation).

Nous supposons que le système (1.3) a pour équilibre le point $(u^*, v^*) = (0, 0)$, nous obtenons la linéarité de ce système en (u^*, v^*)

$$\frac{dU}{dt} = A(U), \quad (1.4)$$

Où

$$A = \left(\begin{array}{cc} f_u(u, v) & f_v(u, v) \\ g_u(u, v) & g_v(u, v) \end{array} \right) \Bigg|_{u=u^*, v=v^*} = \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \text{ et } U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

et que si A est non singulier. Nous allons étudier les propriétés qualitatives des solutions du système (1.4), en particulier leur comportement asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Pour connaître le comportement asymptotique nous désignons par λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A , où cette dépendance est résumée dans le tableau suivant [39]

Tableau 1.1 : Comportement asymptotique des solutions du système linéaire à 2 composantes (1.4) en fonction de la nature des valeurs propres de A .

Les valeurs propres	L'équilibre
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2 < 0$	Nœud asymptotiquement stable
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2 > 0$	Nœud instable
$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$	Selle instable
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha < 0$	Nœud asymptotiquement stable
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \alpha > 0$	Foyer instable
$\lambda_{1,2} = \pm i\beta,$	Centre stable

Premier cas de stabilité, d'après le *tableau 1.1*, un système linéaire (1.4) est asymptotiquement stable si les parties réelles des valeurs propres de A sont négatives. Si au moins une valeur propre est positive ou a une partie réelle positive, alors le système (1.4) est instable en $(u^*, v^*) = (0, 0)$.

Le deuxième cas de stabilité, le nœud asymptotiquement stable, peut être garanti de la théorie suivante :

Théorème 1.5. [40] Le système (1.4) est localement asymptotiquement stable à l'équilibre (u^*, v^*) si et seulement si la *trace* de A est *négative* et son *déterminant positif*, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \text{tr}(J) = a_{11} + a_{22} < 0, \\ \det(J) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \end{cases}$$

Définition 1.9. [28] Un sous-ensemble $D \subseteq \Omega$ est un ensemble invariant par rapport à (1.3) si D contient les orbites de tous ses points.

Définition 1.10. [28] (*Un ensemble positivement invariant*) Un ensemble positivement invariant est un ensemble ayant les propriétés suivantes : Etant donné un système dynamique (1.3) et une trajectoire $U(t, U_0)$ où U_0 est le point initial. Soit $D = \{U \in \mathbb{R}^n; N(U) = 0\}$ où N est une fonction à valeur aréolaire. L'ensemble D est dit positivement invariant si $U_0 \in D$ implique que $U(t, U_0) \in D$ pour tous les temps $t \geq 0$. En d'autres termes, une solution qui commence dans D reste dans D pour tous les temps $t \geq 0$.

Définition 1.11. [28] (*La région d'attraction de l'équilibre*) Supposons que $U = U^*$ soit un point d'équilibre de (1.3) et que N soit la solution du système.

L'ensemble $D = \{\xi \in \Omega / \lim_{t \rightarrow \infty} N(t, \xi) = U^*\}$ est appelé région d'attraction de l'équilibre U^* .

1.2.2. Théories de la stabilité locale dans le cas des EDPs

L'une des méthodes courantes pour étudier la stabilité asymptotique locale des systèmes d'EDP est la méthode du développement des fonctions propres [28]. Il est important de rappeler certaines théories relatives aux valeurs propres de l'opérateur de Laplace.

1.2.2.1. Propriétés des valeurs propres de l'opérateur de Laplace

Notons ces valeurs propres par $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ et les fonctions propres normalisées correspondantes dans Ω par $\Phi_0, \dots, \Phi_k, \dots$. Nous supposons des conditions aux limites de Neumann. Ces valeurs propres et fonctions propres satisfont le problème des valeurs propres suivant

$$\begin{cases} -\Delta \Phi_k = \lambda_k \Phi_k, \\ \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} = 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

et
$$\|\Phi_k\|_2 = \int_{\Omega} \Phi_k^2(x) dx = 1. \quad (1.7)$$

1.2.2.2. Stabilité locale

En général, le système (1.2) peut être constitué de deux composants avec une réaction linéarisée exprimée sous la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}U - D \Delta U = J_0 U, \quad (1.8)$$

dans le cas le plus simple, D est supposé être diagonal et la diffusion croisée est négligée, c'est-à-dire que

$$D = \begin{pmatrix} d_u & 0 \\ 0 & d_v \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

où d_u et d_v représentent les constantes de diffusivité pour les substances u et v , respectivement, et J_0 est la matrice jacobéenne du système d'EDO correspondant, évaluée au point d'équilibre.

Désignons l'opérateur de linéarisation par $\mathfrak{S} = J_0 U + D \Delta U$. Supposons que $(\phi(x), \psi(x))$ soit une fonction propre de \mathfrak{S} correspondant à une valeur propre de la matrice ζ . Nous avons

$$\mathfrak{S}(\phi(x), \psi(x))^T = \zeta(\phi(x), \psi(x))^T,$$

Conduisant à

$$(L - \zeta I) \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

À des fins de simplification, fixons

$$\begin{cases} \phi = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m} a_{ij} \Phi_{ij}, \\ \psi = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m} b_{ij} \Phi_{ij}. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant écrire $(\phi(x), \psi(x))^T = \sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m} (a_{ij}, b_{ij})^T \Phi_{ij}$.

Ceci peut être récrit sous la forme

$$\sum_{0 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq m} (J_0 - \lambda_i D - \zeta I) \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix} \Phi_{ij} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le point d'équilibre est localement asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de \mathfrak{S} ont des parties réelles négatives.

Théorème 1.6. [38] Le point d'équilibre de (1.2) est (localement) asymptotiquement stable si le point d'équilibre du problème linéaire (1.8) est asymptotiquement stable.

1.2.3. Théories de la stabilité asymptotique globale

Différents types de stabilité peuvent être discutés pour les solutions d'équations différentielles décrivant des systèmes dynamiques. Le type le plus important est celui qui concerne la stabilité des solutions proches d'un point d'équilibre. Cette approche peut être abordée dans le cadre de la théorie d'*Alexandre Lyapounov*.

En termes simples, si les solutions qui commencent près d'un point d'équilibre u^* (ou bien x_e) restent près de u^* pour toujours, alors u^* est stable selon la théorie de *Lyapunov*. Plus fortement, si u^* est stable selon *Lyapunov* et que toutes les solutions qui commencent près de u^* convergent vers u^* , alors u^* est asymptotiquement stable.

➤ Méthode directe de *Lyapunov* pour la stabilité

Lyapunov, dans son ouvrage original de 1892, a proposé deux méthodes pour démontrer la stabilité. [41] La première méthode consistait à développer la solution dans une série qui était ensuite prouvée convergente dans les limites.

La seconde méthode, aujourd'hui appelée *critère de stabilité* de *Lyapunov* ou *méthode directe*, utilise une fonction de *Lyapunov* $L(u)$ qui présente une analogie avec la fonction potentielle de la dynamique classique.

Définition 1.12. [40] (*Fonctionnelle de Lyapunov*) Si $u^* \in \mathbb{R}^n$ est un point d'équilibre du système (1.1) et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert contenant u^* . On appelle *fonctionnelle de Lyapunov* $L \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ associée au système (1.1), toute fonction

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

telle que

$$L(u) > L(u^*), \quad \text{pour tout } u \in \Omega, u \neq u^*, \quad (1.10)$$

et

$$\frac{d}{dt} L(u(t, \cdot)) = \langle \nabla L(u), F(u) \rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } u \in \Omega, \quad (1.11)$$

pour tout $t > 0$, et toute solution $u(t, \cdot) = (u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot), \dots, u_n(t, \cdot))$ du système (1.1).

Alors, $L(u)$ est appelée fonctionnelle de *Lyapunov* et le système est stable au sens de *Lyapunov*.

Une condition supplémentaire appelée "propreté" ou "non borné radial" est nécessaire pour conclure à la stabilité globale. La stabilité asymptotique globale (GAS) s'ensuit de manière similaire. *Lyapunov* s'est rendu compte que la stabilité pouvait être prouvée sans qu'il soit nécessaire de connaître la véritable énergie physique, à condition qu'une fonction de *Lyapunov* puisse être trouvée pour satisfaire les contraintes mentionnées ci-dessus.

Théorème 1.7. [40] (*théorème de stabilité de Lyapunov*).

- i. Si le système (1.1) a une fonction de *Lyapunov*, alors u^* est stable.
- ii. Si on a que $\frac{d}{dt}L(u(t, \cdot)) < 0$, pour tout $u \in \Omega$, $u \neq u^*$, alors u^* est asymptotiquement stable.

Théorème 1.8. [41] (*théorème de LaSalle*)

Soit $u = u^*$ un point d'équilibre et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine contenant u^* . Soit $L \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\frac{d}{dt}L(u(t, \cdot)) \leq 0$ dans Ω . Soit $M = \left\{ u \in \Omega, \frac{d}{dt}L(u(t, \cdot)) = 0 \right\} = \{u^*\}$. Alors, u^* est asymptotiquement stable.

Remarque 1.2. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, dans le dernier théorème, u^* est globalement asymptotiquement stable.

CHAPITRE II

LA MODÉLISATION ET LES SYSTÈMES DE RÉACTION- DIFFUSION

2.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous commençons par l'approche de *modélisation* qui joue aujourd'hui un rôle tout aussi fondamental qu'en sciences. Dans la deuxième partie, nous définissons et introduisons une bibliographie sur l'*épidémiologie* et les systèmes de *réaction-diffusion*.

2.2. PRINCIPE DE MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

2.2.1. Une approche de modélisation

La modélisation des phénomènes physiques, biologiques ou économiques a toujours été la principale motivation du développement des mathématiques, aussi abstraites soient-elles, mais avant tout, qu'est-ce que la modélisation ?

2.2.2. Aspects d'une modélisation mathématique

Pour mieux proposer une description mathématique convenable d'un phénomène du monde réel ou artificiel, nous retenons les définitions de la modélisation et du modèle suivantes [42].

Définition 2.1. La *modélisation* est le processus par lequel un problème du monde réel est interprété et représenté en termes de symboles abstraits. Lorsque la description abstraite fait intervenir une formulation mathématique, on parle de modélisation mathématique [42].

Autrement dit, La modélisation consiste à écrire en notation mathématique ce qui est d'abord exprimé en mots en faisant intervenir des variables lorsque cela est nécessaire pour décrire, expliquer ou prédire le comportement d'un phénomène dans le monde réel, elle peut être particulièrement utilisée en mathématiques et a fait l'objet de nombreuses recherches dans plusieurs domaines.

Définition 2.2. [42] On appelle *modèle* toute construction simple visant à reproduire un processus (physique, biologique, etc.) afin d'en dégager des informations peu accessibles (par l'observation ou l'expérimentation) dans la réalité.

Dès lors, l'étude d'un modèle mathématique peut permettre, entre autres, de mieux comprendre le phénomène considéré, de contribuer à sa gestion optimale ou de faire de la prédiction sur son comportement. Cependant, toute équation mathématique découlant d'un essai de modélisation d'un phénomène n'est pas obligatoirement un modèle mathématique.

En effet, un modèle mathématique doit nécessairement vérifier certaines propriétés (voir [42], [43]) :

- i. les relations mathématiques sont consistantes,
- ii. les variables du système sont directement interprétables, c'est-à-dire, ces variables sont des quantités, des concentrations, etc.
- iii. dans le cas usuel d'un système entrée – sortie, l'entrée du système peut être interprétée comme une information à propos du système réel considéré ; la sortie est quant à elle considérée comme une information du système étudié.

2.2.3. Analyse des modèles.

Après l'obtention du modèle, nous nous intéressons à l'étude des équations obtenues d'un point de vue mathématique. Compte tenu de la diversité des phénomènes étudiés, les équations peuvent être [42] :

- algébriques linéaires ou non,
- différentielles linéaires ou non,
- intégrales linéaires ou non,
- aux dérivées partielles ...

Il devient alors clair que de nombreux outils mathématiques seront nécessaires pour cette analyse.

Nous pouvons citer entre autres [43] :

- i. L'analyse des données qui est indispensable pour mettre en évidence les variables significatives importantes.
- ii. La résolution (analytique, numérique) de systèmes d'équations différentielles, aux dérivées partielles ou intégrales. Les problèmes d'existence et d'unicité de solutions sont également présents.
- iii. L'identification de paramètres ou de fonctions inconnues dans les modèles.
- iv. Les méthodes d'optimisation.
- v. La recherche de critères (ayant un sens physiologique) permettant d'assurer l'unicité de l'identification lorsqu'elle n'est pas réalisée à partir des seules données expérimentales.
- vi. La théorie du contrôle optimal sera nécessaire lorsque l'on envisagera d'agir sur le système au mieux de certains critères.
- vii. Enfin, l'étude de la sensibilité des paramètres identifiés par rapport aux erreurs expérimentales est aussi une source de difficultés.

En conclusion, très pragmatiquement, l'intérêt d'un modèle réside dans sa capacité à apporter des réponses "satisfaisantes" aux questions que l'on se pose à propos du phénomène étudié.

En outre le modèle permet :

- De regrouper toutes les connaissances dont on dispose à propos du système étudié dans des formules mathématiques qui sont par définition concises et précises.
- De faire des simulations (numériques) sans avoir à refaire des expériences qui pourraient se révéler longues et coûteuses.
- De mettre en évidence, dans certains cas, des résultats des propriétés nouvelles concernant le système.
- D'agir sur le système pour l'optimiser ou le contrôler au mieux de certains critères (coût minimal, effet maximal, énergie minimale...)
- D'étudier les systèmes complexes où de nombreuses variables, (régulation, contre régulation) interviennent.

2.3. BIBLIOGRAPHIE ET DESCRIPTION DU MODÈLE

Pour étudier les maladies infectieuses en biologie mathématique, on doit d'abord comprendre rapidement les éléments de base de cette science en donnant des exemples d'épidémies simples en termes de *SIR* et *SIS* de base ou de modèles pour une taille de population constante. Dans une épidémie simple, où la population n'est constituée que de sujets sensibles et de sujets infectieux, et qui sont bien pris en compte dans les représentations mathématiques.

2.3.1. Définition et bref historique

L'*épidémiologie* est la discipline qui étudie les schémas de santé et de maladie et les facteurs associés au niveau de la population. Le mot "*épidémiologie*" est dérivé des termes grecs *epi*, qui signifie "sur", *dem*, qui signifie "peuple", et *logos*, qui signifie "étude". Cette *étymologie* implique que le sujet de l'*épidémiologie* ne s'applique qu'aux populations humaines.

Le rôle de père de l'*épidémiologie* est souvent attribué au *médecin grec Hippocrate (460-377 B.C.E)*, qui a décrit le lien entre la maladie et l'environnement. Le terme "*épidémiologie*" semble avoir été utilisé pour la première fois pour décrire l'étude des épidémies en 1802 par le *médecin espagnol de Villalba dans Epidemiologia Espanola*. Jusqu'au *vingtième siècle*, les études épidémiologiques portaient principalement sur les *maladies infectieuses*.

De nos jours, les principales causes de décès dans le monde sont des maladies telles que les accidents vasculaires cérébraux et les maladies coronariennes, ce qui place les maladies qui ne se transmettent pas d'une personne à l'autre au centre des préoccupations de l'épidémiologie. Parmi les maladies infectieuses, les infections des voies respiratoires inférieures (telles que la pneumonie) sont les principales causes de décès dans le monde.

2.3.2. Systèmes de réaction-diffusion

Les systèmes de *diffusion-réaction* sont bien établis dans différentes disciplines des sciences de la vie. Lorsqu'ils sont appliqués à la question humaine, ils sont utilisés pour estimer les processus démographiques impliqués dans les principaux épisodes de dispersion humaine (ou animale) et pour estimer le modèle général de diffusion des nouvelles idées ou technologies à travers les cultures. Autrement dit, les systèmes de *réaction-diffusion* sont utilisés pour modéliser une variété de phénomènes dans les sciences naturelles telles que la biologie, la chimie, la dynamique des populations, la thermique, mais aussi la physique, la cristallisation, la médecine, etc. Par exemple, en chimie, les individus représentent des produits chimiques. En biochimie, ils peuvent représenter des molécules [28] (*Fig. 2.1.*). Dans la dynamique des populations, ils sont des humains. Dans l'environnement, ils peuvent représenter les animaux ou les plantes d'une forêt, etc.

Ce manuscrit présente une introduction aux systèmes de *diffusion-réaction* pour un public non-matheux.

Définition 2.3. [44] (*Diffusion*): Le concept de *diffusion* est issu des sciences physiques (la *loi de Fick* est considérée comme le principe fondamental de la *diffusion*). Dans son sens physique, la diffusion est définie comme un phénomène dans lequel un certain groupe de particules dans son ensemble se répand en fonction du mouvement irrégulier de chaque particule. Ainsi, la *diffusion* est toujours dirigée des régions à forte concentration vers les régions à faible concentration et la dépendance temporelle de la distribution des particules dans l'espace est donnée par l'*équation de diffusion*, qui est la formulation mathématique de la dynamique de diffusion décrite. La théorie de la *diffusion* cherche à expliquer le comportement de propagation d'un groupe de particules (plutôt que le comportement de propagation d'une seule particule) et, par conséquent, la variable d'intérêt est la proportion du groupe de particules qui peut être trouvée. La *diffusion* est appliquée en biologie pour décrire les processus de bio-diffusion et pour modéliser la dynamique des populations ou la propagation des maladies infectieuses au sein de la population, ou, de manière moins quantitative, en sciences sociales pour décrire la propagation des idées (diffusion des innovations, diffusion lexicale, diffusion transculturelle).

Définition 2.4. [44] (*Réaction*): Après avoir modélisé les phénomènes de dispersion, nous nous intéressons aux processus de croissance. Nous entendons ici par croissance l'augmentation ou la diminution de la variable d'intérêt (par exemple, la taille de la population, le nombre d'individus qui utilisent une nouvelle technologie) en raison de processus intrinsèques de naissance et de mort. À l'instar de la dynamique de diffusion, où la *loi de Fick* constitue le principe fondamental, le comportement de la croissance peut être caractérisé par un très petit nombre de concepts de base tels que le modèle de croissance malthusien ou le modèle de croissance logistique. La loi de croissance malthusienne propose que la population humaine d'une nation croisse de manière exponentielle (du moins pendant un certain temps). À l'inverse, la loi logistique postule que le taux de croissance est proportionnel à la taille de la population actuelle et à la quantité de ressources disponibles, et qu'il est donc limité si la quantité de ressources est restreinte.

2.3.3. Etablissement des équations de *réaction-diffusion*

2.3.3.1. Dérivation des équations de *réaction-diffusion*

Dans ce paragraphe nous allons établir un système d'équations de réaction-diffusion dans le cas d'une réaction chimique et d'une diffusion moléculaire [1]. Considérons une région (qui peut être un tube à essai ou une cellule vivante) dans laquelle des réactions chimiques se réalisent (la cellule vivante est le siège de milliers de réactions chimiques simultanées).

$$\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u,v) + D_u \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = G(u,v) + D_v \Delta v \end{array}$$

The diagram shows the two equations above. A horizontal line is drawn below the equations. Three arrows point downwards from this line to the labels 'Rate of concentration change', 'Reaction', and 'Diffusion'.

Figure 2.1: Système de réaction-diffusion [28]

Soit $u_i = u_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$ la concentration de l' $i^{\text{ème}}$ espèce E_i prenant part dans les réactions, et soit $f_i = f_i(x, t, u)$ le taux de formation de cet espèce dans cette réaction. Ici $u = u(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est le vecteur de concentrations, x est le lieu et t est le temps.

Soit $\phi_i = \phi_i(x, t)$, $i = \overline{1, n}$, le flux de l' $i^{\text{ème}}$ espèce dû à la *diffusion* avec la convention usuelle c'est que ϕ_i est positif si l'écoulement de l' $i^{\text{ème}}$ espèce se fait de l'intérieur de la région vers l'extérieur.

Soit Ω la région considérée de surface $S = \partial\Omega$. Alors, la vitesse de formation de la quantité de E_i dans Ω est égale à la quantité formée par la réaction moins le flux à travers la surface S . En termes mathématiques :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u_i dx = \int_{\Omega} f_i dx - \int_S \phi_i dv. \quad (2.1)$$

En utilisant le théorème de la divergence, il vient

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - f_i + \nabla \phi_i \right) dx = 0. \quad (2.2)$$

Comme cette relation est vraie pour toute région nous en tirons pour chaque i

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \phi_i = f_i. \quad (2.3)$$

D'après la première *loi de Fick*, le flux ϕ_i de E_i se donne par l'expression

$$\phi_i = -D_i \nabla u_i. \quad (2.4)$$

Où D_i est le coefficient de diffusion de l'espèce E_i . Ainsi, des deux dernières relations nous tirons

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \nabla (D_i \nabla u_i) + f_i, \quad \text{pour } i = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

De façon générale, les coefficients D_i peuvent dépendre de t , x et u . Si D_i sont des constantes, nous obtenons

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = D_i \nabla u_i + f_i. \quad (2.6)$$

Dont la forme vectorielle, peut s'écrire

$$u_t = D \nabla u + f.$$

Où $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $D = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_n)$, est la matrice diagonale d'éléments diagonaux D_1, D_2, \dots, D_n .

Il est aussi possible que le flux ϕ_i de la densité u_i peut dépendre des gradients des concentrations des autres espèces pas seulement de ∇u_i , le gradient de u_i , c'est-à-dire

$$\phi_i = \sum_{1 \leq j \leq n} D_{ij} \nabla u_j, \quad (2.7)$$

ou dans la forme matricielle

$$\phi = -D \nabla u. \quad (2.8)$$

Où $D = (D_{ij})$ est une $n \times n$ matrice non diagonale, ses termes sont les coefficients de diffusion. D_{ij} Caractérise la diffusion de u_i dans u_j . Dans ce cas on a ce qu'on appelle croisement de diffusion entre les densités u_i (En anglais : cross diffusion).

Il est à noter ici que :

- i. Les coefficients de diffusion ne sont pas toujours positifs. La positivité de ces coefficients signifie que l'écoulement de la matière se fait des milieux plus concentrés vers les moins concentrés. Il se peut que les organismes s'attirent vers leur espèce et le mouvement se fait alors dans le sens du gradient de concentration, c'est-à-dire des milieux les moins concentrés vers les plus concentrés ; et dans ce cas, le coefficient de diffusion soit négatif.
- ii. Si le terme de réaction $f_i > 0$, il existe une source ou production de masse pour la $i^{\text{ème}}$ espèce. Dans le cas contraire $f_i < 0$, il y a une annihilation de masse.
- iii. Le coefficient de diffusion D soit constant si la région Ω est un milieu homogène, et soit régionalisé (dépend de la position x) si la région Ω est un milieu hétérogène.

2.3.3.2. Résolution des équations de réaction-diffusion

Il n'existe pas de solutions générales des systèmes de réaction-diffusion.

On dispose cependant d'informations qualitatives sur l'existence globale des solutions et leurs comportements attendus lorsque la variable t tend vers l'infini.

Le fait que ces systèmes modélisent des phénomènes du monde réel, les questions mathématiques importantes qui les concernent sont :

- i. Existence (et unicité) de solutions faibles et fortes pour des données initiales données dans une vaste classe de fonctions.
- ii. Caractère globale de la solution.
- iii. Positivité de la solution chaque fois que les données initiales sont positives.

- iv. Comportement asymptotique de la solution globale lorsque le temps t tend vers l'infini.
- v. Dépendance continue de la solution des données initiales.

2.4. MODÉLISATION DE QUELQUES SYSTÈMES DE RÉACTION-DIFFUSION ÉPIDÉMIOLOGIQUE

Nous ne présentons que les modèles mathématiques de base des maladies, les idées de modélisation, et les concepts et techniques fondamentaux.

Un modèle épidémique est un moyen simple de décrire la transmission d'une maladie transmissible par l'intermédiaire d'individus. Deux modèles dynamiques fondamentaux d'épidémies Les modèles dynamiques de maladies infectieuses sont principalement basés sur des structures à compartiments qui ont été initialement proposées par *Kermack* et *McKendrick* en 1927 et 1932. Les modèles de maladies infectieuses ont été présentés de manière systématique dans [45,46], qui ont obtenu un résultat de seuil connu pour le modèle qu'ils ont proposé.

Depuis lors, une grande littérature sur ces modèles s'est développée. Leurs travaux ont ensuite été développés par de nombreux autres scientifiques biomédicaux. Pour formuler un modèle dynamique de transmission d'une maladie épidémique, la population d'une zone particulière est souvent divisée en plusieurs groupes différents.

2.4.1. Modèle *SIR* de *Kermack-Mckendrick*

Dans le modèle *SIR* de *Kermack-Mckendrick* étudié par *Kermack* et *Mckendrick* dans [45], la population est divisée en trois groupes : un groupe *sensible*, noté S , dans lequel tous les individus sont *sensibles* s'ils entrent en contact avec une maladie ; un groupe *infecté*, noté I , dans lequel tous les individus sont *infectés* par la maladie ; et un groupe *éliminé*, noté R , dans lequel tous les individus se sont *remis de l'infection*.

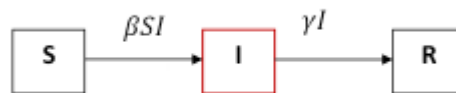


Figure 2.2. Le modèle *SIR* sans dynamique vitale.

Les nombres d'individus dans les groupes S , I et R , à l'instant t , sont respectivement $S(t)$, $I(t)$ et $R(t)$. Les trois hypothèses suivantes ont été formulées par les auteurs :

- i. La maladie se propage dans un environnement fermé, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'immigration, ni de naissance ou de décès dans la population, de sorte que la population totale reste une constante N pour tout t , c'est-à-dire,

$$\beta S(t) + I(t) + R(t) \equiv N.$$

- ii. Le nombre de personnes sensibles qui sont infectées par un individu infecté par unité de temps, au moment t , est proportionnel au nombre total exposé à la maladie par le paramètre relatif appelé facteur de transmission β , de sorte que le nombre total de personnes nouvellement infectées, au moment t , est $\beta S(t)I(t)$.
- iii. Le nombre d'individus retirés (guéris) du groupe infecté par unité de temps est $I(t)$ au temps t , où γ est le coefficient du taux de guérison, et les individus guéris acquièrent une immunité permanente ; les équations du modèle sont données dans le système suivant :

$$\begin{cases} S_t = -\beta S(t)I(t), \\ I_t = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \\ R_t = \gamma I(t), \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{cases} \quad (2.9)$$

Et voir la *figure 2.2.* pour l'organigramme correspondant au *modèle SIR.*

La formule de la variable R étant distincte des deux premières équations du système (2.9), il suffit de considérer le système suivant

$$\begin{cases} S_t = -\beta S(t)I(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ I_t = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Si le nombre initial de personnes sensibles $S(0) = S_0 > \frac{\gamma}{\beta}$, le nombre de personnes infectées augmente et si $S(0) = S_0 < \frac{\gamma}{\beta}$, le nombre de personnes infectées diminue.

Définissons $R_0 = \frac{\beta}{\gamma} S_0$. Alors, l'épidémie se propage lorsque $R_0 > 1$ et meurt lorsque $R_0 < 1$.

Nous savons que γI est le nombre de personnes qui ont guéri du groupe infecté I , par unité de temps, au moment t . Par conséquent, après la période de temps $\frac{1}{\gamma}$, toutes les personnes

infectées $I(t)$ sont guéries. Par ailleurs, $\frac{1}{\gamma}$ est en fait la durée moyenne de l'infection, et R_0 le

nombre de nouveaux individus infectés par un individu infecté pendant toute la période d'infection, alors que tous les individus de la population sont initialement sensibles. Le nombre d'individus infectés diminue si $R_0 < 1$ et augmente si $R_0 > 1$. Par conséquent, pour contrôler la propagation d'une épidémie, l'un des facteurs clés est d'estimer la valeur de R_0 et de la réduire à moins de un. Donc, la quantité R_0 détermine le seuil de transmission.

Il résulte de la deuxième équation de (2.10) que $I(t) \rightarrow 0$, lorsque $t \rightarrow +\infty$, si $R_0 < 1$. Puisque $S(t)$ est monotone décroissante et bornée ci-dessous, $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = S_\infty$.

2.4.2. Modèle SIS de Kermack-Mckendrick

Pour les maladies virales épidémiologiques, telles que la grippe, la rougeole, la covid-19 et la variole, les individus qui ont guéri acquièrent généralement une immunité contre le virus (*SIR*). Mais pour l'étude de la dynamique de la transmission des maladies bactériennes, telles que l'encéphalite et la gonorrhée, les personnes qui ont guéri n'acquièrent pas d'immunité et l'infection peut se répéter. Pour cette étude, *Kermack* et *Mckendrick* [46] suggèrent que les équations du modèle SIS sont données dans le système

$$\begin{cases} S_t = -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t), \\ I_t = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t), \quad t \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Dans le modèle *SIS*, les individus infectés redeviennent susceptibles d'être infectés une fois qu'ils se sont remis de l'infection. Ce modèle est l'un des plus simples et constitue la principale forme de maladie infectieuse qui se transmet d'une personne à l'autre, et de nombreux autres modèles ne sont rien d'autre que des dérivés de cette forme. Ce modèle se compose de deux parties: S le nombre de personnes exposées à l'infection et I le nombre de personnes infectieuses, où la guérison donne une résistance durable, comme la rougeole et la rubéole.

S'il y a une migration de la population et que les taux de natalité et de mortalité augmentent au sein de la population, ce qui signifie que la taille de la population va changer, ou qu'il y a d'autres maladies qui ont causé la mort de la population, alors la population sera différente et on suppose qu'un petit nombre d'infections sont introduites au sein de la population à risque. Avec une personne à risque, la personne infectée le devient immédiatement. Autrement dit, S se transforme en I et le graphique du modèle *SIS* est illustré à la *figure 2.3*.

Les formes de base des modèles épidémiologiques se répartissent entre les groupes suivants :

- **Modèles sans dynamique vitale:** si une maladie se propage rapidement dans une population pendant une courte période, comme la grippe ou la varicelle, les facteurs vitaux, tels que la mortalité naturelle de la population et les naissances, peuvent généralement être ignorés. Nous appelons ces modèles des modèles sans biodynamique.
- **Modèles sans période de latence:** Les modèles sans période de latence sont des modèles dans lesquels les individus sont directement blessés. Ces modèles sont représentés par les modèles *SI*, *SIS*, *SIR*, *SIRS*, *SIRI*, ...

Par exemple, dans le modèle *SI*, les personnes infectées ne peuvent pas être guéries de l'infection et dans le modèle *SIS*, les personnes infectées deviennent susceptibles d'être réinfectées immédiatement après avoir guéri de l'infection (pas d'immunité après la guérison). Quant au modèle *SIRS*, les personnes guéries bénéficient d'une immunité temporaire après la guérison de l'infection, et leur immunité s'estompe avec le temps.

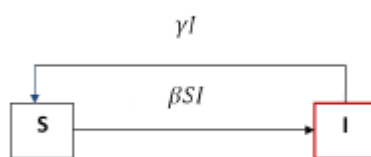


Figure 2.3. Le modèle SIS sans dynamique vitale.

Dans le cas des modèles dynamiques, il y a deux cas de figure :

- **Premier cas:** Si nous supposons que les taux de natalité et de mortalité dans la population sont égaux pendant la période de l'épidémie et qu'il n'y a pas de décès dus à la maladie, alors la taille de la population restera constante dans un environnement fermé, notée N .
- **Deuxième cas:** Si les taux de natalité et de mortalité au sein de la population sont différents, ou s'il y a des décès, alors il y a une migration dans la population, alors la taille de la population est variable.

Pour une meilleure compréhension, nous présentons un exemple de *modèle SIS* dans lequel les nouveau-nés ou les individus atteints de nombreuses maladies, telles que l'hépatite C et l'hépatite B, peuvent être infectés, un modèle dans lequel les nouveau-nés peuvent également être infectés par des individus atteints de nombreuses maladies. μ le coefficient du taux de mortalité naturelle, b est le coefficient du taux de natalité, Λ est le taux d'entrée de la population totale, B est le coefficient du taux de sortie des personnes sensibles et des personnes infectées et α est le coefficient du taux de mortalité causé par la maladie. Voir la *figure 2.4*.

2.5. CONCEPTS DE BASE DE L'ÉPIDÉMIOLOGIE DYNAMIQUE

Le nombre de reproduction de base R_0 [47]

Notons que la modélisation mathématique peut jouer un rôle important pour aider à quantifier des stratégies de lutte possibles contre une maladie en se concentrant sur les aspects importants d'une maladie, en déterminant des quantités seuils pour la survie de la maladie et en évaluant l'effet de stratégies de lutte particulières. Une quantité seuil très importante est le nombre de reproduction de base, qui est généralement indiqué par R_0 .

La définition épidémiologique de R_0 est le nombre moyen d'infections secondaires qui sont des infections qui surviennent pendant ou après le traitement d'une autre infection, produits par un individu infecté introduit dans une population d'individus sensibles, où un individu infecté a contracté la maladie, et les individus sensibles sont en bonne santé mais peuvent contracter la maladie.

D'après la définition épidémiologique du R_0

Nous présentons ci-dessous un petit résumé historique expliquant les différentes étapes qui ont permis sa définition mathématique.

- 1886: *R. Böckh* introduit ce concept pour estimer le nombre moyen de descendants d'une femelle pendant toute sa vie.
- 1925: *L.-J. Dublin* et *A. Lotka* ont proposé la première formule mathématique pour un R_0 , lié à la probabilité de survie des femmes en fonction de l'âge et au taux de fécondité comme suit :

$$R_0 = \int_0^{+\infty} P(a)\beta(a)da.$$

Où $P(a)$ est la probabilité de survie et $\beta(a)$ le taux de fécondité.

Notons que la définition de R_0 donnée par *Dublin* et *Lotka* est liée à la démographie mais n'est pas encore un concept épidémiologique.

- Début du 20^{ème} siècle: *R. Ross* a donné le lien épidémiologie de R_0 lorsqu'il étudiait un modèle de la propagation de la malaria.
- Début des années 30: La notion de seuil est déjà introduite en épidémiologie mathématique, mais sans faire le lien avec la démographie et la notion de formulation de la reproduction.
- 1952: *G. McDonald* a introduit la définition suivante de R_0 :

Définition 2.5. (*Taux de reproduction de base de la malaria*). Le nombre d'infections distribué dans une communauté comme résultat direct de la présence en son sein d'un seul cas primaire non immunitaire.

— Les années 70: un groupe de mathématiciens appliqués et écologistes ont introduit la définition du nombre de reproduction de base du point de vue épidémiologique et ils ont donné la définition suivante :

Définition 2.6. (*Le nombre de reproduction de base, définition épidémiologique*). Le nombre d'infections secondaires résultant d'une seule infection primaire dans une population hautement sensible.

— 1990: *O. Diekmann*, *J.A.P. Heesterbeek* et *J.A.J. Metz* ont donné la définition mathématique de R_0 lié à la valeur propre dominante du soi-disant «opérateur de nouvelle génération» en relation avec l'étude de la stabilité du *Disease-free equilibrium* (DFE) lié au système dynamique épidémiologique et ils donnaient la définition suivante :

Définition 2.7. (*Le nombre de reproduction de base, définition mathématique*). Le nombre de nouvelles infections produites par un individu infectieux typique dans une population à un DFE.

Définition 2.8. (Rayon spectral). Nous appelons le rayon spectral d'une matrice A de $n \times n$, la valeur maximale du module de ses valeurs propres.

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|.$$

Définition 2.9. $R_0 = \rho(A)$, où $A = FV^{-1}$ est la matrice de génération suivante pour le modèle épidémiologique et pour comprendre ce que sont F et V les matrices $n \times n$, (voir [50, page 32]).

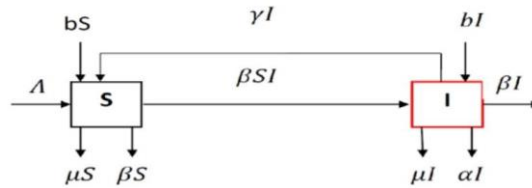


Figure 2.4. Le modèle SIS avec les entrées et les sorties et la mort induite par la maladie.

Si $R_0 > 1$, chaque individu infecté produit plus d'une nouvelle infection, et la maladie peut infecter la population et créer une situation épidémique. Si $R_0 < 1$, un individu infecté produit en moyenne moins d'un nouvel individu infecté au cours de sa période infectieuse, et l'infection ne peut pas se développer. (Voir [48,49, 50]).

Pour mieux comprendre ce nombre R_0 et trouver un équilibre sans maladie et un équilibre endémique, nous proposons d'étudier l'exemple ci-dessous, qui a été introduit dans [51].

2.6. INTERPRÉTATION DU MODÈLE DE SYSTÈME CHOISI

Parmi les modèles compartimentaux originaux qui ont donné lieu à de nombreuses formes différentes il y a le SI . Ce dernier est un modèle classique en épidémiologie mathématique et la forme la plus simple de tous les modèles de maladie, montrant la propagation d'une maladie infectieuse dans une population. Il est exprimé par le système (3.1)-(3.3) (voir le *chapitre 3*).

D'après le système (3.1)-(3.3) (voir le *chapitre 3*), le *modèle SI* est un modèle dérivé du modèle de base simple su . Le modèle concerne la propagation d'une maladie infectieuse dans une population confinée dans une région Ω (ce qui correspond à $\frac{\partial s}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, ce qui signifie

qu'il n'y a pas de migration Ω) et la population divisée en deux états de santé : sensible à l'infection de ce pathogène (souvent désigné par s) ; et la classe infectée par le pathogène u . Dans ce cas, il y a une arrivée de nouveaux individus sensibles Λ dans la population et en supposant (La population d'individus sensibles est augmentée à tout moment "t" par le taux de recrutement Λ . Nous considérons que toutes les nouvelles naissances sont sensibles et rejoignent la classe sensible $s(t, x)$), un taux de mortalité μ ; nous avons donc $\Lambda - \mu s$. Pendant l'épidémie, le nombre de personnes sensibles est supposé devenir infectieux au cours

du temps par contact avec d'autres personnes infectieuses (La population de personnes sensibles est diminuée par le taux de contact des personnes sensibles avec des personnes infectées par $f(s,u)$), et ensuite il quitte la communauté des personnes sensibles. D'où le terme $-f(s,u)$.

L'infection est supposée quitter une couche infectieuse au rythme de l'infection, se mettre en quarantaine, puis meurt, d'où le terme $g(s,u) - \sigma u$.

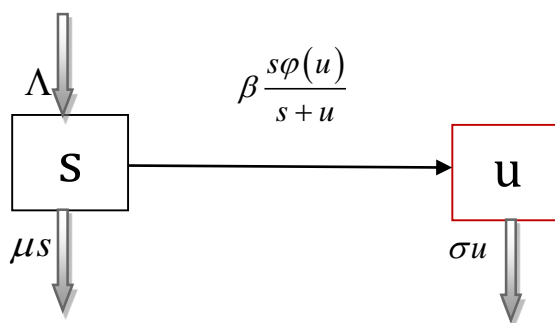


Figure 2.5. Schéma épidémiologique du modèle de système proposé.

L'objectif principal de la modélisation est de prévoir le nombre d'infections afin d'éliminer la maladie en réduisant la transmission, c'est-à-dire que nous devons réduire le nombre moyen d'infections secondaires causées par une seule infection à moins de 1, ce qui est connu comme le nombre de reproduction de base R_0 .

Enfin, nous disons que les systèmes de *réaction-diffusion* sont devenus importants dans de nombreux domaines et sont bien établis dans différentes disciplines des sciences de la vie.

CHAPITRE III

LA STABILITÉ LOCALE ET GLOBALE D'UN MODÈLE DIFFUSIF

3.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons établir les modèles de système (3.1) et la description des paramètres, nous allons définir le nombre de reproduction de base R_0 du modèle proposé et établir l'existence de deux équilibres. Ensuite, nous allons prouver la *stabilité asymptotique locale*, et enfin, la *stabilité asymptotique globale* des deux états stables en utilisant une *fonctionnelle de Lyapunov* appropriée.

Pour cela et dans cette étude, nous considérons le système de *réaction-diffusion* :

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} - d_1 \Delta s = \Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s = F(s, u), & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial t} - d_2 \Delta u = \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u = G(s, u), & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

Les paramètres constants $d_1, d_2 > 0$ sont les coefficients de diffusion, et le symbole Δ désigne l'opérateur *Laplacien* sur Ω , où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert borné de \mathbb{R}^n avec une frontière lisse $\partial\Omega$.

Supposons les conditions initiales suivantes

$$s(x, 0) = s_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.2)$$

Tel que $s_0, u_0 \in C(\bar{\Omega})$,

et on lui impose des conditions aux limites homogènes de Neumann

$$\frac{\partial s}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \Omega. \quad (3.3)$$

Et ν étant la normale externe unitaire à $\partial\Omega$.

Supposons également que les conditions initiales $s_0(x), u_0(x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ où $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, +\infty)$.

La *non-linéarité* φ est supposée être une fonction non négative et continûment différentiable sur \mathbb{R}^+ (cf. [53]) telle que

$$\varphi(0) = 0. \quad (3.4)$$

et
$$0 < u\varphi'(u) \leq \varphi(u), \text{ pour tout } u > 0. \quad (3.5)$$

Cette fonction d'incidence $\varphi(u)$ introduit une relation non-linéaire entre les deux classes d'individus *Sensibles-Infecteds*.

Les fonctions $s(x,t)$, $u(x,t)$ représentent les densités de population non-dimensionnelles des individus sensibles et infectés au temps t et à l'emplacement x .

Plusieurs maladies infectieuses continuent de frapper des populations entières. Elles sont considérées comme l'une des principales causes de mortalité. En conséquence, la modélisation mathématique en biologie joue un rôle important dans l'amélioration de la compréhension des modèles épidémiologiques et de la lutte contre les maladies [54,55]. Le système proposé décrit la transmission du *VIH* dans une population. La population étudiée contient des individus *sensibles* s et des individus *infectés* u . La constante Λ représente le *taux de flux d'individus nouvellement exposés*, μ est le *taux de mortalité*, le paramètre β décrit le *taux de prévalence de la maladie* parmi les individus par unité de temps, et le paramètre σ est donné par $\sigma = \mu + \eta$, où $\frac{1}{\eta}$ est la *période thématique* de l'activité sexuelle des individus affectés. Les principales causes de décès dans le monde sont des maladies telles que les accidents vasculaires cérébraux, les maladies coronariennes et les maladies infectieuses.

3.2. PROPRIÉTÉS DU MODÈLE

Par la suite, nous définissons le *nombre de reproduction de base* R_0 et sa relation avec la *stabilité locale* du système. Cependant, nous énonçons d'abord un lemme qui a été développé dans [53] et qui sera utile comme suit :

Lemme 3.1. La condition (3.5) implique

$$0 < \frac{\varphi(u)}{u} \leq \varphi'(0), \text{ pour tout } u > 0. \quad (3.6)$$

Preuve. Il est clair que si (3.5) est satisfaite, nous avons

$$\left(\frac{\varphi(u)}{u} \right)' = \frac{(\varphi(u))' u - \varphi(u)}{u^2} \leq 0.$$

Par conséquent, $\frac{\varphi(u)}{u}$ est une fonction décroissante. Maintenant, pour tout $\xi \in (0, u)$, nous avons

$$\frac{\varphi(u)}{u} \leq \frac{\varphi(\xi)}{\xi}.$$

Il s'ensuit que

$$0 < \frac{\varphi(u)}{u} \leq \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\xi}.$$

Ce qui donne (3.6).

Lemme 3.2. [64] Étant donné que φ satisfait au critère (3.5) et que

$$\Sigma(x) = x - 1 - \ln(x) \quad \text{for all } x > 0,$$

L'inégalité

$$\Sigma\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) \leq \Sigma\left(\frac{v}{v^*}\right),$$

où v^* est la deuxième composante du point d'équilibre E^* , tient.

Preuve. La fonction $\frac{\varphi(v)}{v}$ est décroissante pour tout $v > 0$, d'après la condition (3.5).

Nous pouvons séparer la preuve en deux cas :

Cas 1 : Supposons que $v \geq v^*$.

Nous avons $\frac{\varphi(v)}{v}$ est une fonction décroissante, ce qui signifie que

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} \leq \frac{v}{v^*},$$

et (3.5) implique que φ est non décroissante

$$\varphi(v) \geq \varphi(v^*),$$

par conséquent

$$1 \leq \frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} \leq \frac{v}{v^*},$$

Nous avons $\Sigma'(x) = \frac{x-1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
$\Sigma'(x)$		-	0
$\Sigma(x)$		\searrow	\nearrow
		0	

Lorsque $x > 1$. La fonction $\Sigma(x)$ est croissante, donc

$$\Sigma\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) \leq \Sigma\left(\frac{v}{v^*}\right), \text{ for all } v \geq v^*.$$

Cas 2 : Supposons que $0 < v < v^*$.

La fonction $\frac{\varphi(v)}{v}$ est décroissante pour tout $v > 0$, Cela implique que

$$\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} > \frac{v}{v^*},$$

et φ est non décroissante

$$\varphi(v) < \varphi(v^*),$$

Nous obtenons

$$1 > \frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)} > \frac{v}{v^*} > 0,$$

Lorsque $0 < x < 1$ la fonction Σ est décroissante, donc

$$\Sigma\left(\frac{\varphi(v)}{\varphi(v^*)}\right) < \Sigma\left(\frac{v}{v^*}\right), \text{ for all } v \geq v^*.$$

3.2.1. Positivité des solutions

Supposons les conditions initiales $(s_0, u_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ suivantes :

$$\begin{aligned} s(0) &= s_0 \geq 0, \\ u(0) &= u_0 \geq 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Notons que pour $(s, u) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$, nous avons

$$\begin{cases} F(0, u) = \Lambda > 0, \\ G(s, 0) = 0, \end{cases} \quad \text{pour tout } s, u \geq 0. \quad (3.8)$$

Qui rend la fonction $(F, G)^T$ essentiellement non-négative. Par conséquent, le carré non-négatif $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$ est un ensemble invariant (voir *Haddad et al.* [58]), et la *proposition 2.1.* de *Quittner et Souplet* [66]). En abandonnant la variable spatiale, le système proposé se réduit au système suivant d'équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = F(s, u), & \text{dans } (0, +\infty), \\ \frac{du}{dt} = G(s, u), & \text{dans } (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.9)$$

Par la suite, nous définissons une région invariante pour le système. Nous identifions les équilibres du système et leur relation avec le nombre de reproduction de base R_0 . Nous étudions la stabilité locale et globale du système dans les scénarios *EDO* et *EDP*.

3.2.2. Régions invariantes

Tout au long de ce chapitre, soit :

$$N = s + u.$$

On définit également :

$$D = \left\{ (s, u) : s, u \geq 0 \text{ et } s + u \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}.$$

La proposition suivante montre que D et la région invariante du système (3.9).

Proposition 3.1. [52] La région D est non vide, attractive et positivement invariante.

Preuve. Nous commençons par additionner les équations du système (3.9), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N(t) &= \frac{d}{dt} [s(t) + u(t)] = s_t + u_t \\ &= \left[\Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s \right] + \left[\beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma) u \right] \\ &\leq \Lambda - \min(\mu, (\mu + \sigma))(s + u) \\ &\leq \Lambda - \mu(s + u) \\ &\leq \Lambda - \mu N. \end{aligned}$$

Maintenant, par une intégration de la dernière inégalité sur $[0, t]$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dl} N(l) dl &= \int_0^t (\Lambda - \mu N(l)) dl \\ N(t) - N(0) &= \Lambda t - \mu \int_0^t N(l) dl \\ N(t) &\leq \Lambda t - \mu \int_0^t N(l) dl + N(0). \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de **Gronwall**, nous aboutissons :

$$\begin{aligned} N(t) &\leq N_0 e^{-\mu t} + \Lambda \int_0^t e^{-\mu(t-l)} dl, \quad \forall t > 0 \\ &= N_0 e^{-\mu t} + \Lambda e^{-\mu t} \int_0^t e^{-\mu l} dl, \\ &= N_0 e^{-\mu t} + \Lambda e^{-\mu t} \left[\frac{e^{\mu l}}{\mu} \right]_0^t, \\ &= N_0 e^{-\mu t} + \Lambda e^{-\mu t} \left(\frac{e^{\mu t}}{\mu} - \frac{1}{\mu} \right). \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$N(t) \leq N_0 e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}), \quad \forall t > 0.$$

En substituant la valeur de N , nous obtenons :

$$(s+u)(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + (s+u)(0) e^{-\mu t}.$$

Pour $t \geq 0$. Si les états initiaux satisfaisant $(s+u)(0) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, alors

$$\begin{aligned} (s+u)(t) &\leq \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) + \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu t}, \\ &= \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} e^{-\mu t}, \end{aligned}$$

Par suite,

$$(s+u)(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \forall t > 0,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup (s+u)(t),$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Ainsi, pour tout $t \in (0, \infty)$,

$$s(t, x) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \text{et} \quad u(t, x) \leq \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Par conséquent, s et u sont uniformément bornées sur $(0, \infty) \times \Omega$.

Par conséquent, la région D est positivement invariante et attractive dans $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$.

Il suffit donc de considérer la dynamique du modèle dans D , car D est la région biologiquement réalisable du système où les résultats d'existence et d'unicité sont valables pour le système.

3.2.3. Existence de points d'équilibre et nombre de reproduction de base R_0

Dans cette partie, nous visons à montrer l'existence de points d'équilibre pour (3.1) – (3.3) dans le cas d'EDO et à calculer le *nombre de reproduction de base* R_0 .

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = \Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s, & \text{dans } (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u, & \text{dans } (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.10)$$

Avec les conditions initiales

$$s_0(t) > 0, \quad u_0(t) \geq 0. \quad (3.11)$$

Existence de points d'équilibre

Théorème 3.1. Le système (3.10) - (3.11) n'a qu'un point d'équilibre $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$. Sous les conditions (3.4) et (3.5), et si le nombre de reproduction $R_0 = \frac{\beta\varphi'(0)}{(\mu + \sigma)} > 1$, alors, le système admet deux points d'équilibre ; le point d'équilibre sans maladie $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ et le point d'équilibre endémique $E^* = (s^*, u^*) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$.

Preuve. D'abord, nous calculons les points d'équilibre;

Les équilibres positifs des modèles (3.10) et (3.11) satisfont aux conditions suivantes

$$\begin{cases} \Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s = 0, \\ \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

➤ Si $s = 0$, il est facile de voir que le système **n'a pas** de points d'équilibre.

➤ Si $u = 0$, $\Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s = 0$, ce qui implique que $s = \frac{\Lambda}{\mu}$.

Donc, il est facile de voir que le système (3.12) n'a qu'un équilibre $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$.

Ensuite, Nous étudions maintenant les conditions d'existence d'un état stationnaire endémique dans le cas où $u > 0$. En additionnant les deux équations dans (3.12), et parce que $\mu > 0$ et $\varphi(u) > 0$, nous obtenons

$$s = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + \sigma)u}{\mu}.$$

En remplaçant cela dans la première équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Lambda - \beta\varphi(u) \left[\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + \sigma)u}{\mu} \right] \frac{1}{\left[\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + \sigma)u}{\mu} \right] + u} - \mu \left[\frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + \sigma)u}{\mu} \right] &= 0 \\ \Lambda - \beta\varphi(u) \left[\frac{\Lambda - (\mu + \sigma)u}{\mu} \right] \frac{1}{\frac{\Lambda - (\mu + \sigma)u + \mu u}{\mu}} - \mu \left[\frac{\Lambda - (\mu + \sigma)u}{\mu} \right] &= 0 \\ \Lambda - \beta\varphi(u) \left[\frac{\Lambda - (\mu + \sigma)u}{\mu} \right] \frac{1}{\mu} - \mu \left[\frac{\Lambda - (\mu + \sigma)u}{\mu} \right] &= 0 \\ \Lambda - \beta\varphi(u) [\Lambda - (\mu + \sigma)u] \frac{1}{\Lambda - (\mu + \sigma)u + \mu u} - [\Lambda - (\mu + \sigma)u] &= 0 \\ -\beta\varphi(u) [\Lambda - (\mu + \sigma)u] \frac{1}{\Lambda - (\mu + \sigma)u + \mu u} + (\mu + \sigma)u &= 0 \\ \frac{-\beta\Lambda\varphi(u) + \beta\varphi(u)(\mu + \sigma)u}{\Lambda - (\mu + \sigma)u + \mu u} + (\mu + \sigma)u &= 0 \\ -\beta\Lambda\varphi(u) + \beta\varphi(u)(\mu + \sigma)u + (\mu + \sigma)u [\Lambda - (\mu + \sigma)u + \mu u] &= 0, \end{aligned}$$

et parce que $\sigma, \mu, \Lambda > 0$ et $u > 0$, alors nous pouvons diviser cette dernière équation par $(\mu + \sigma)u$, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{\beta\Lambda\varphi(u)}{(\mu+\sigma)u} + \beta\varphi(u) + [\Lambda - (\mu+\sigma)u + \mu u] &= 0 \\ -\frac{\beta\varphi(u)}{(\mu+\sigma)u} + \frac{\beta\varphi(u)}{\Lambda} + 1 - \frac{(\mu+\sigma)u}{\Lambda} + \frac{\mu u}{\Lambda} &= 0 \\ \frac{\beta\varphi(u)}{(\mu+\sigma)u} - \frac{\beta\varphi(u)}{\Lambda} - 1 + \frac{\sigma u}{\Lambda} &= 0 \\ \frac{\beta\varphi(u)}{(\mu+\sigma)u} - \left[1 - \frac{\sigma u}{\Lambda} + \frac{\beta\varphi(u)}{\Lambda}\right] &= 0. \end{aligned}$$

Posons :

$$h(u) = \frac{\beta\varphi(u)}{(\sigma + \mu)u} - \left(1 - u \frac{\sigma}{\Lambda} + \frac{\beta\varphi(u)}{\Lambda}\right),$$

Ce qui implique que :

$$h(u) = 0, \quad \text{pour tout } u > 0. \quad (3.13)$$

h est continue pour tout $u > 0$. D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} h(u) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\beta\varphi(u)}{(\sigma + \mu)u} - \left(1 - u \frac{\sigma}{\Lambda} + \frac{\beta\varphi(u)}{\Lambda}\right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\beta}{\sigma + \mu}\right) \frac{\varphi(u)}{u} - \left(1 - u \frac{\sigma}{\Lambda} + \frac{\beta\varphi(u)}{\Lambda}\right), \end{aligned}$$

en appliquant la *règle de L'Hopital*

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} h(u) &= \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\beta}{\sigma + \mu}\right) \varphi'(u) - \left(1 - u \frac{\sigma}{\Lambda} + \frac{\beta\varphi(u)}{\Lambda}\right) \\ &= \left(\frac{\beta}{\sigma + \mu}\right) \varphi'(0) - \left(1 - (0) \frac{\sigma}{\Lambda} + \frac{\beta\varphi(0)}{\Lambda}\right) \\ &= \left(\frac{\beta}{\sigma + \mu}\right) \varphi'(0) - 1 \\ &= R_0 - 1. \end{aligned}$$

D'où R_0 est le *nombre de reproduction de base* à identifier ensuite.

Maintenant, nous calculons $\lim_{u \rightarrow \frac{\Lambda}{\sigma}} h(u)$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow \frac{\Lambda}{\sigma}} h(u) &= h\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right) \\
 &= \left(\frac{\beta}{\sigma + \mu}\right) \frac{\varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right)}{\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right)} - \left(1 - \left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right) \frac{\sigma}{\Lambda} + \frac{\beta \varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right)}{\Lambda}\right) \\
 &= \left(\frac{\beta}{\sigma + \mu}\right) \frac{\varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right)}{\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right)} - \frac{\beta \varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right)}{\Lambda} \\
 &= \frac{\beta}{\Lambda} \varphi\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right) \left[\frac{\sigma}{\sigma + \mu} - 1\right] < 0.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $R_0 > 1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \lim_{u \rightarrow 0} h(u) \lim_{u \rightarrow \frac{\Lambda}{\sigma}} h(u) &= \lim_{u \rightarrow 0} h(u) h\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right) \\
 &= (R_0 - 1) h\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right) < 0.
 \end{aligned}$$

En appliquant *le théorème des valeurs intermédiaires*, il existe un réel $u^* \in \left(0, \frac{\Lambda}{\sigma}\right)$ tel que (3.13) est valable.

En utilisant (3.4)-(3.6), nous pouvons montrer que la fonction h est strictement décroissante pour tout $u > 0$ et $R_0 > 1$ comme suit,

$$\begin{aligned}
 \frac{dh(u)}{du} &= \frac{\beta(u\varphi'(u) - \varphi(u))}{(\mu + \sigma)u^2} + \frac{\sigma - \beta\varphi'(u)}{\Lambda} \\
 &= \frac{\beta\Lambda[u\varphi'(u) - \varphi(u)] + (\mu + \sigma)u^2[\sigma - \beta\varphi'(u)]}{\Lambda(\mu + \sigma)u^2}.
 \end{aligned}$$

D'après (3.5) nous avons: $u\varphi'(u) - \varphi(u) \leq 0$.

D'où $\frac{dh(u)}{du} < 0$.

Donc, il existe un unique réel $u^* \in \left(0, \frac{\Lambda}{\sigma}\right)$, tel que $h(u^*) = 0$, ce qui implique l'existence d'un

$$\text{unique } s^* = \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{(\mu + \sigma)u^*}{\mu}.$$

Notons que dans la seconde équation du système (3.12) n'a pas de solution dans $\left(\frac{\Lambda}{\sigma}, +\infty\right)$ car

$$\max_{u \in \left(\frac{\Lambda}{\sigma}, +\infty\right)} h(u) \leq h\left(\frac{\Lambda}{\sigma}\right) < 0.$$

Ceci conclut la preuve.

Le nombre de reproduction de base R_0

Dans la preuve précédente, nous avons utilisé le nombre de reproduction R_0 du système (3.10)–(3.11). Il est maintenant temps d'identifier sa valeur au moyen de la méthode des matrices de prochaine génération formulée dans [56] et décrite plus loin dans ([57], Lemme 1 page 32]).

Le nombre de reproduction de base R_0 est défini comme le *rayon spectral* de la matrice FV^{-1} (voir [56,57]). En outre, F est non négatif, V est une M -matrice non singulière et toutes les valeurs propres ont une partie réelle positive.

Les systèmes (3.10)–(3.11) peuvent être réécrits sous forme vectorielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial s}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ s_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u \\ \Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mu + \sigma)u \\ -\Lambda + \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} + \mu s \end{pmatrix}.$$

Les matrices Jacobéennes correspondantes aux vecteurs $\begin{pmatrix} \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (\mu + \sigma)u \\ -\Lambda + \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} + \mu s \end{pmatrix}$

au point d'équilibre sans maladie $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0\right)$ sont données respectivement par

$$\begin{pmatrix} \beta\varphi'(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Et $\begin{pmatrix} (\mu + \sigma) & 0 \\ \beta\varphi'(0) & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ V_1 & V_2 \end{pmatrix}.$

Le nombre reproductif de base R_0 est le rayon spectral de la matrice de la prochaine génération $R_0 = \rho(FV^{-1})$, qui est donné par :

$$\begin{aligned} K &= FV^{-1} \\ &= \beta\phi'(0)(\mu + \sigma)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc,

$$R_0 = \rho(FV^{-1}) = \frac{\beta\phi'(0)}{(\mu + \sigma)}. \quad (3.14)$$

3.3. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE LOCALE

3.3.1. Stabilité locale de l'EDO

Passons maintenant à étudier la stabilité asymptotique locale du point d'équilibre sans maladie E_0 et du point d'équilibre endémique E^* comme décrit dans la proposition suivante.

Proposition 3.2.

Toujours sous les conditions (3.4)-(3.5), les deux hypothèses sont réalisées pour (3.7)-(3.9) :

- Si $R_0 < 1$, le point d'équilibre sans maladie E_0 est localement asymptotiquement stable.
- Si $R_0 > 1$, E_0 est instable et le point d'équilibre endémique E^* est localement asymptotiquement stable.

Preuve. Pour prouver la stabilité asymptotique locale, nous utilisons la matrice jacobéenne, qui peut être donnée par

$$J(s, u) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta \frac{u\phi(u)}{(s+u)^2} & -\beta \frac{s\phi'(u)(s+u) - s\phi(u)}{(s+u)^2} \\ \beta \frac{u\phi(u)}{(s+u)^2} & \beta \frac{s\phi'(u)(s+u) - s\phi(u)}{(s+u)^2} - (\mu + \sigma) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

En évaluant $J(s, u)$ à E_0 , nous obtenons

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} -\mu & -\beta\phi'(0) \\ 0 & \beta\phi'(0) - (\mu + \sigma) \end{pmatrix}$$

Il est facile de démontrer que les valeurs propres sont les suivantes par la détermination du déterminant de la matrice $\det(J(E_0) - \lambda I_2)$, nous trouvons

$$\lambda_1 = -\mu < 0, \quad \text{and} \quad \lambda_2 = \beta\varphi'(0) - (\mu + \sigma). \quad (3.16)$$

Il est facile de voir que $\lambda_2 < 0$ si $R_0 < 1$, ce qui conduit à la stabilité asymptotique de E_0 .

Le second cas est celui où $R_0 > 1$. Le point d'équilibre E_0 est clairement *instable*, mais le système possède un point d'équilibre E^* .

L'évaluation de la matrice jacobéenne (3.15) en E^* donne

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} & -\beta \frac{s^* \varphi'(u^*)(s^* + u^*) - s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} \\ \beta \frac{u \varphi(u)}{(s+u)^2} & \beta \frac{s^* \varphi'(u^*)(s^* + u^*) - s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} - (\mu + \sigma) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu - X & -Y \\ X & Y - (\mu + \sigma) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Où

$$X = \beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2}. \quad (3.19)$$

$$Y = \beta \frac{s^* \varphi'(u^*)(s^* + u^*) - s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2}. \quad (3.20)$$

Nous extrayons $\mu + \sigma$ des solutions du système (3.1), et en utilisant (3.5), nous obtenons

$$-X + Y - (\mu + \sigma) = -\beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} + \beta \frac{s^* \varphi'(u^*)(s^* + u^*) - s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} - (\mu + \sigma),$$

Avec

$$\begin{aligned}\beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u = 0 &\Rightarrow \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*} - (\mu + \sigma)u^* = 0 \\ &\Rightarrow \mu + \sigma = \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}-X + Y - (\mu + \sigma) &= -\beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} + \beta \frac{s^* \varphi'(u^*)(s^* + u^*) - s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} - \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)} \\ &= -\beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} - \beta \frac{s^* \varphi'(u^*)}{s^* + u^*} - \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} - \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)},\end{aligned}$$

D'après le *lemme 3.1*. Par la supposition de

$$0 < u\varphi'(u) \leq \varphi(u), \quad \text{pour tout } u > 0.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}-X + Y - (\mu + \sigma) &\leq -\beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} + \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)} - \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} - \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)} \\ &= -\beta \frac{\varphi(u^*)}{s^* + u^*} < 0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

La trace du jacobéen donné par

$$\text{tr}(J(E^*)) = -\mu + [-X + Y - (\mu + \sigma)] < 0.$$

Le déterminant du jacobéen peut être donné par

$$\begin{aligned}\det(J(E^*)) &= (-\mu - X)(Y - (\mu + \sigma)) + XY \\ &= -\mu Y + \mu(\mu + \sigma) + (\mu + \sigma)X \\ &= -\mu(-X + Y - (\mu + \sigma)) + \sigma X.\end{aligned}$$

En utilisant (3.21), nous obtenons $\det(J(E^*)) > 0$. Par conséquent, l'équilibre E^* est

localement asymptotiquement stable.

3.3.2. Stabilité locale de l'EDP

Dans cette section, nous examinons la stabilité locale d'équations aux dérivées partielles (EDP) plus générales (3.1)-(3.3).

Théorème 3.2. Pour le système (3.1) :

- i. Si $R_0 < 1$, l'équilibre E_0 est localement asymptotiquement stable.
- ii. Si $R_0 > 1$, l'équilibre E^* est localement asymptotiquement stable.

Preuve.

(i) En présence de diffusion, le point d'équilibre $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$ satisfait

$$\begin{cases} d_1 \Delta s + \Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s = 0, & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\ d_2 \Delta u + \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u = 0, & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega. \end{cases} \quad (3.22)$$

Avec

$$L(E_0) = \begin{pmatrix} d_1 \Delta - \mu & -\beta \varphi'(0) \\ 0 & d_2 \Delta + \beta \varphi'(0) - (\mu + \sigma) \end{pmatrix}.$$

En utilisant la même méthode que [59,60], la stabilité de E_0 se réduit à l'examen des valeurs propres des matrices

$$J_i(E_0) = \begin{pmatrix} -d_1 \lambda_i - \mu & -\beta \varphi'(0) \\ 0 & -d_2 \lambda_i + \beta \varphi'(0) - (\mu + \sigma) \end{pmatrix}, \quad \text{pour tout } i, \quad (3.23)$$

qui sont données pour tout $i \geq 0$ par

$$\begin{cases} k_{1i} = -d_1 \lambda_i - \mu, \\ k_{2i} = -d_2 \lambda_i + \beta \varphi'(0) - (\mu + \sigma). \end{cases}$$

Puisque les valeurs propres du Laplacien sont positives et dans l'ordre croissant, k_{1i} et k_{2i} ont clairement des parties réelles négatives pour $R_0 < 1$, ce qui conduit à la stabilité locale de E_0 .

Le second équilibre E^* satisfait (3.3) et (3.22). L'opérateur de linéarisation correspondant est

$$L(E^*) = \begin{pmatrix} d_1\Delta - \mu - X & -Y \\ X & d_2\Delta + Y - (\mu + \sigma) \end{pmatrix}.$$

Nous prenons les valeurs de X et Y de (3.19) et (3.20), respectivement.

Ainsi, la stabilité de E^* repose sur la négativité des parties réelles des valeurs propres des matrices

$$J_i(E^*) = \begin{pmatrix} -d_1\lambda_i - \mu - X & -Y \\ X & -d_2\lambda_i + Y - (\mu + \sigma) \end{pmatrix}, \text{ pour tout } i,$$

qui a une trace

$$\text{tr}(J_i(E^*)) = -(d_1 + d_2)\lambda_i - \mu + [-X + Y - (\mu + \sigma)] < 0.$$

Le déterminant du jacobéen peut être donné par

$$\det(J_i(E^*)) = d_1 d_2 \lambda_i^2 + H_0 \lambda_i + \det J(E^*) = 0.$$

Où

$$H_0 = d_1 \left(\beta \frac{s^* \varphi'(u^*)(s^* + u^*) - s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} + (\mu + \sigma) \right) + d_2 \left(\mu + \beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} \right).$$

Si l'on considère que (s^*, u^*) sont des solutions du système (3.1), on trouve

$$\begin{cases} \Lambda = \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*} + \mu s^* = (\mu + \sigma) u^* + \mu s^*, \\ (\mu + \sigma) u^* = \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*}. \end{cases} \quad (3.24)$$

En utilisant (3.5) et (3.24), on peut dire que

$$\begin{aligned}
 H_0 &\geq d_1 \left(-\beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)} + \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} + \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)} \right) + d_2 \left(\mu + \beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} \right) \\
 &\geq d_1 \left(\beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} \right) + d_2 \left(\mu + \beta \frac{u^* \varphi(u^*)}{(s^* + u^*)^2} \right) > 0.
 \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\det(J_i(E^*)) > 0.$$

Par conséquent, E^* est *localement asymptotiquement stable*.

3.4. STABILITÉ ASYMPTOTIQUE GLOBALE

Dans cette section, nous étudions la stabilité globale qui dépend du nombre de reproduction R_0 , raison pour laquelle nous avons décidé de traiter séparément les scénarios $R_0 < 1$ et $R_0 > 1$.

3.4.1. Stabilité asymptotique globale avec $R_0 < 1$

Théorème 3.3. Soit :

$$F_\theta(t) = \int_{\Omega} \left[us + \frac{\theta}{2} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 + \frac{1}{2} u^2 + 2 \frac{\Lambda}{\mu + \sigma} u \right] dx.$$

Où

$$\varphi'(0) \leq \frac{\Lambda}{\beta \left(\theta \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{2\Lambda}{\mu + \sigma} \right)}. \quad (3.25)$$

avec

$$\theta > \frac{(d_1 + d_2)^2}{4d_1 d_2}. \quad (3.26)$$

alors $F_\theta(t)$ est une *fonctionnelle de Lyapunov*.

Preuve. Il faut montrer que $F_\theta(t)$ est une *fonctionnelle de Lyapunov*.

En $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$, $F_\theta(t) = 0$. (Voir [61])

Il faut d'abord montrer que $F_\theta(t) > 0$ pour que $\frac{\Lambda}{\mu} \neq 0$. L'évaluation de la dérivée est donnée comme suit :

$$\dot{F}_\theta(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial s}{\partial t} u + \frac{\partial u}{\partial t} s \right) dx + \theta \int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \frac{\partial s}{\partial t} dx + \int_{\Omega} u \frac{\partial u}{\partial t} dx + 2 \frac{\Lambda}{\mu + \sigma} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dx.$$

En substituant les dérivées partielles $\frac{\partial s}{\partial t}$ et $\frac{\partial u}{\partial t}$ avec leurs valeurs respectives de (3.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{F}_\theta(t) &= \int_{\Omega} \left(u + \theta \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \right) \frac{\partial s}{\partial t} dx + \int_{\Omega} \left(s + u + 2 \frac{\Lambda}{\mu + \sigma} \right) \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ &= \int_{\Omega} \left(u + \theta \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \right) \left(d_1 \Delta s + \Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s \right) dx + \int_{\Omega} \left(s + u + 2 \frac{\Lambda}{\mu + \sigma} \right) \left(d_2 \Delta u + \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u \right) dx \quad (27) \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Le premier terme peut s'écrire $I_1 = I_{11} + I_{12}$. Nous commençons par examiner I_1 . En utilisant la **formule de Green** et en supposant les *conditions aux limites de Neumann* dans (3.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int_{\Omega} \left(u + \theta \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right) \right) d_1 \Delta s dx \\ &= -d_1 \int_{\Omega} (\nabla u + \theta \nabla s) \nabla s dx \\ &= -d_1 \int_{\Omega} \nabla u \nabla s dx - \theta d_1 \int_{\Omega} |\nabla s|^2 dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int_{\Omega} \left(s + u + 2 \frac{\Lambda}{\mu + \sigma} \right) d_2 \Delta u dx \\ &= -d_2 \int_{\Omega} (\nabla s + \nabla u) \nabla u dx \\ &= -d_2 \int_{\Omega} \nabla s \nabla u dx - d_2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx. \end{aligned}$$

Nous commençons par le terme I_1 , que nous pouvons réécrire comme suit :

$$I_1 = - \int_{\Omega} Q(\nabla s, \nabla u) dx.$$

où $Q(\nabla s, \nabla u)$ est une forme quadratique par rapport à ∇s et ∇u :

$$Q(\nabla s, \nabla u) = \theta d_1 |\nabla s|^2 + (d_1 + d_2) \nabla u \nabla s + d_2 |\nabla u|^2.$$

Nous savons que Q est positif comme θ , d_1 et d_2 satisfont les conditions $\theta d_1 > 0$ et

$$\theta > \frac{(d_1 + d_2)^2}{4d_1 d_2}, \text{ d'où l'on obtient}$$

$$I_1 \leq 0. \quad (3.28)$$

La deuxième partie de la dérivée s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} I_2 &= -\mu \int_{\Omega} su \, dx + \Lambda \int_{\Omega} u \, dx - \beta \int_{\Omega} \frac{su\varphi(u)}{s+u} \, dx - \theta \mu \int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 \, dx - \theta \beta \int_{\Omega} \frac{s^2\varphi(u)}{s+u} \, dx + \theta \beta \frac{\Lambda}{\mu} \int_{\Omega} \frac{s\varphi(u)}{s+u} \, dx \\ &\quad + \beta \int_{\Omega} \frac{s^2\varphi(u)}{s+u} \, dx - (\mu + \sigma) \int_{\Omega} su \, dx + \beta \int_{\Omega} \frac{su\varphi(u)}{s+u} \, dx - (\mu + \sigma) \int_{\Omega} u^2 \, dx + 2 \frac{\Lambda\beta}{\mu + \sigma} \int_{\Omega} \frac{s\varphi(u)}{s+u} \, dx - 2\Lambda \int_{\Omega} u \, dx \\ &= I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24}, \end{aligned}$$

avec

$$I_{21} = \beta \int_{\Omega} \frac{s^2\varphi(u)}{s+u} \, dx - \theta \beta \int_{\Omega} \frac{s^2\varphi(u)}{s+u} \, dx - \beta \int_{\Omega} \frac{su\varphi(u)}{s+u} \, dx, \quad (3.29)$$

$$I_{22} = \beta \int_{\Omega} \frac{su\varphi(u)}{s+u} \, dx, \quad (3.30)$$

$$I_{23} = -\Lambda \int_{\Omega} u \, dx - (2\mu + \sigma) \int_{\Omega} su \, dx,$$

$$I_{24} = \theta \beta \frac{\Lambda}{\mu} \int_{\Omega} \frac{s\varphi(u)}{s+u} \, dx + 2 \frac{\Lambda\beta}{\mu + \sigma} \int_{\Omega} \frac{s\varphi(u)}{s+u} \, dx - \theta \mu \int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 \, dx - (\mu + \sigma) \int_{\Omega} u^2 \, dx.$$

Nous avons

$$\frac{s}{s+u} \leq 1. \quad (3.31)$$

En utilisant l'inégalité (3.31) dans I_{24} , on obtient

$$I_{24} \leq \left(\theta\beta \frac{\Lambda}{\mu} + 2 \frac{\Lambda\beta}{\mu + \sigma} \right) \int_{\Omega} \varphi(u) dx - \theta\mu \int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 dx - (\mu + \sigma) \int_{\Omega} u^2 dx. \quad (3.32)$$

En outre, nous pouvons écrire

$$I_{23} \leq -\Lambda \int_{\Omega} u dx. \quad (3.33)$$

En utilisant (3.29), (3.30), (3.32) et (3.33), nous obtenons

$$\begin{aligned} I_2 &= I_{21} + I_{22} + I_{23} + I_{24} \\ &\leq \beta \int_{\Omega} \frac{s^2 \varphi(u)}{s+u} dx - \theta\beta \int_{\Omega} \frac{s^2 \varphi(u)}{s+u} dx + \left[\left(\theta\beta \frac{\Lambda}{\mu} + 2 \frac{\Lambda\beta}{\mu + \sigma} \right) \varphi'(0) - \Lambda \right] \int_{\Omega} u dx \\ &\quad - \theta\mu \int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 dx - (\mu + \sigma) \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

Puisque θ vérifie les estimations (3.26), alors

$$I_2 \leq \beta(1-\theta) \int_{\Omega} \frac{s^2 \varphi(u)}{s+u} dx - \theta\mu \int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 dx - (\mu + \sigma) \int_{\Omega} u^2 dx. \quad (3.34)$$

Alors, par (3.28) et (3.34),

$$\dot{F}_{\theta}(t) \leq -\theta d_1 \int_{\Omega} |\nabla s|^2 dx - d_2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \theta\mu \int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 dx - (\mu + \sigma) \int_{\Omega} u^2 dx \leq 0. \quad (3.35)$$

Par conséquent, $F_{\theta}(t)$ est une *fonctionnelle de Lyapunov*.

Théorème 3.4. Soit $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right)$ la solution de (3.1)-(3.3) dans $(0, +\infty)$, avec les hypothèses (3.25) et (3.26). Alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| s(t, \cdot) - \frac{\Lambda}{\mu} \right\| = 0. \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot)\|_{\infty} = 0. \quad (3.36)$$

Preuve. En utilisant l'inégalité (3.35) et en intégrant sur $(0, t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{F}_{\theta}(t) &= \theta d_1 \int_0^t \left[\int_{\Omega} |\nabla s|^2 dx \right] dz + d_2 \int_0^t \left[\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right] dz + \theta\mu \int_0^t \left[\int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 dx \right] dz + (\mu + \sigma) \int_0^t \left[\int_{\Omega} u^2 dx \right] dz \\ &\leq F_{\theta}(0). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Puisque $F_\theta(t) \geq 0$, nous avons d'après (3.37) que

$$\int_0^t \left[\int_{\Omega} \left(s - \frac{\Lambda}{\mu} \right)^2 dx \right] dz \leq \frac{F_\theta(0)}{\theta\mu}, \quad \text{et} \quad \int_0^t \left[\int_{\Omega} u^2 dx \right] dz \leq \frac{F_\theta(0)}{\mu + \sigma}. \quad (3.38)$$

Ainsi, on conclut de (3.37) à (3.38) que $F_\theta(t) \in L^1(0, +\infty)$ et $\dot{F}_\theta(t) \in L^1(0, +\infty)$.

Par le lemme de *Barbalate* ([62] Lemma (1.2.2)), on obtient $F_\theta(t) \rightarrow 0$, c'est-à-dire,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| s(t, \cdot) - \frac{\Lambda}{\mu} \right\|_2 = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \cdot)\|_2 = 0. \quad (3.39)$$

En combinant ces deux limites et le fait que les orbites $\{s(t, x), t > 0\}$ et $\{u(t, x), t > 0\}$ sont relativement compactes dans $C(\bar{\Omega})$ (cf. [63]). Le théorème est complètement prouvé.

3.4.2. Stabilité asymptotique globale avec $R_0 > 1$

Dans ce cas, nous appliquons une *fonctionnelle de Lyapunov* appropriée. Cependant, énonçons d'abord un lemme nécessaire extrait de [64] qui nous aidera dans la démonstration à venir.

Nous considérons

$$V(x) = x - 1 - \ln x, \quad \text{for all } x > 0. \quad (3.40)$$

Lemme 3.3. Étant donné que φ satisfait aux critères (3.5) et (3.40). L'inégalité

$$V \left(\begin{pmatrix} \frac{\varphi(u)}{s+u} \\ \frac{\varphi(u^*)}{s^*+u^*} \end{pmatrix} \right) \leq V \left(\begin{pmatrix} u \\ u^* \end{pmatrix} \right), \quad (3.41)$$

où (s^*, u^*) est le second point d'équilibre E , est valable.

Preuve. Notons que (3.5) implique que φ est une fonction non décroissante pour tout $u > 0$.

Nous mettons $g(u) = \frac{\varphi(u)}{s+u}$. Puisque $\frac{g(u)}{u}$ est une fonction décroissante [64,65], nous pouvons séparer la preuve en deux régions :

(1) Supposons que $u \geq u^*$. Puisque $g(u)$ est une fonction décroissante, nous avons :

$$\frac{g(u)}{g(u^*)} \leq \frac{u}{u^*},$$

et nous en obtenons le résultat suivant :

$$\frac{\frac{\varphi(u)}{s+u}}{\frac{\varphi(u^*)}{s^*+u^*}} \leq \frac{u}{u^*}.$$

Notons que (3.5) implique que g est non décroissant, ce qui conduit à

$$g(u) \geq g(u^*),$$

et, par conséquent,

$$1 \leq \frac{\frac{\varphi(u)}{s+u}}{\frac{\varphi(u^*)}{s^*+u^*}} \leq \frac{u}{u^*}.$$

Puisque V est croissant pour tout $x > 1$, (3.41) est valable.

(2) La deuxième région est $0 < u < u^*$. Encore une fois, puisque g est une fonction décroissante, on a

$$\frac{g(u)}{g(u^*)} > \frac{u}{u^*},$$

ce qui nous donne

$$\frac{\frac{\varphi(u)}{s+u}}{\frac{\varphi(u^*)}{s^*+u^*}} > \frac{u}{u^*},$$

et compte tenu de la non décroissance de g , on obtient

$$g(u) < g(u^*),$$

et nous obtenons

$$1 > \frac{\frac{\varphi(u)}{s+u}}{\frac{\varphi(u^*)}{s^*+u^*}} > \frac{u}{u^*} > 0.$$

Par conséquent, V est décroissante pour $0 < x < 1$, (3.41) est valable.

Théorème 3.5. Soit

$$W(t) = \int_{\Omega} \left[s^* V\left(\frac{s}{s^*}\right) + u^* V\left(\frac{u}{u^*}\right) \right] dx. \quad (3.42)$$

Alors, $W(t)$ est non négatif et est strictement minimisé à l'unique équilibre E^* , c'est-à-dire qu'il s'agit d'une *fonctionnelle de Lyapunov* valide.

Preuve. La dérivée de $W(t)$ est évaluée comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= \int_{\Omega} \left[\left(1 - \frac{s^*}{s}\right) \frac{ds}{dt} + \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \frac{du}{dt} \right] dx \\ &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s^*}{s}\right) \left[d_1 \Delta s + \Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s \right] dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \left[d_2 \Delta u + \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u \right] dx. \end{aligned} \quad (3.43)$$

En utilisant la *formule de Green* et les conditions aux limites de *Neuman*, nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned} \dot{W}(t) &= -d_1 \int_{\Omega} \nabla \left(1 - \frac{s^*}{s}\right) \nabla s \, dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s^*}{s}\right) \left(\Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s \right) dx - d_2 \int_{\Omega} \nabla \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \nabla u \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \left(\beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u \right) dx \\ &= -d_1 \int_{\Omega} \frac{s^*}{s^2} |\nabla s|^2 \, dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s^*}{s}\right) \left(\Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s \right) dx - d_2 \int_{\Omega} \frac{u^*}{u^2} |\nabla u|^2 \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \left(\beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u \right) dx \\ &= M + N, \end{aligned}$$

Où

$$M = -d_1 \int_{\Omega} \frac{s^*}{s^2} |\nabla s|^2 \, dx - d_2 \int_{\Omega} \frac{u^*}{u^2} |\nabla u|^2 \, dx \leq 0. \quad (3.44)$$

et

$$N = \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s^*}{s}\right) \left(\Lambda - \beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - \mu s \right) dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u}\right) \left(\beta \frac{s\varphi(u)}{s+u} - (\mu + \sigma)u \right) dx. \quad (3.45)$$

En substituant (3.44) dans (3.45), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s^*}{s} \right) \left(\beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*} + \mu s^* - \beta \frac{s \varphi(u)}{s + u} - \mu s \right) dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u} \right) \left(\beta \frac{s \varphi(u)}{s + u} - \beta \frac{s^* u \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)} \right) dx \\
 &= \int_{\Omega} \left[\left(1 - \frac{s^*}{s} \right) (\mu s^* - \mu s) + \left(1 - \frac{s^*}{s} \right) \left(\beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*} - \beta \frac{s \varphi(u)}{s + u} \right) \right] dx + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{u^*}{u} \right) \left[\beta \frac{s \varphi(u)}{s + u} - \beta \frac{s^* u \varphi(u^*)}{u^* (s^* + u^*)} \right] dx \\
 &= \int_{\Omega} \mu s^* \left(1 - \frac{s^*}{s} \right) \left(1 - \frac{s}{s^*} \right) dx + \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*} \int_{\Omega} \left[\left(1 - \frac{s^*}{s} \right) \left(1 - \frac{\varphi(u)}{\frac{s+u}{\varphi(u^*)}} \right) + \left(1 - \frac{u^*}{u} \right) \left(\frac{\varphi(u)}{\frac{s+u}{\varphi(u^*)}} - \frac{u}{\frac{s^*+u^*}{\varphi(u^*)}} \right) \right] dx \\
 &= \mu s^* \int_{\Omega} \left(1 - \frac{s^*}{s} \right) \left(1 - \frac{s}{s^*} \right) dx + \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*} \int_{\Omega} \left[1 - \frac{s^*}{s} + \frac{\varphi(u)}{\frac{s+u}{\varphi(u^*)}} + 1 - \frac{u}{u^*} - \frac{\frac{u^* s \varphi(u^*)}{s+u}}{\frac{u s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*}} \right] dx.
 \end{aligned}$$

Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{s^*}{s} \right) \left(1 - \frac{s}{s^*} \right) &= -V \left(\frac{s^*}{s} \right) - V \left(\frac{s}{s^*} \right) \\
 1 - \frac{s^*}{s} &= -V \left(\frac{s^*}{s} \right) - \ln \left(\frac{s^*}{s} \right) \\
 1 - \frac{u}{u^*} &= -V \left(\frac{u}{u^*} \right) - \ln \left(\frac{u}{u^*} \right) \\
 -1 + \frac{\varphi(u)}{\frac{s+u}{\varphi(u^*)}} &= V \left(\frac{\varphi(u)}{\frac{s+u}{\varphi(u^*)}} \right) + \ln \left(\frac{\varphi(u)}{\frac{s+u}{\varphi(u^*)}} \right) \\
 1 - \frac{\frac{u^* s \varphi(u^*)}{s+u}}{\frac{u s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*}} &= -V \left(\frac{\frac{u^* s \varphi(u^*)}{s+u}}{\frac{u s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*}} \right) - \ln \left(\frac{\frac{u^* s \varphi(u^*)}{s+u}}{\frac{u s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*}} \right).
 \end{aligned}$$

Nous avons

$$-\ln \left(\frac{s^*}{s} \right) - \ln \left(\frac{u}{u^*} \right) + \ln \left(\frac{\varphi(u)}{\frac{s+u}{\varphi(u^*)}} \right) - \ln \left(\frac{\frac{u^* s \varphi(u^*)}{s+u}}{\frac{u s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*}} \right) = 0.$$

En utilisant (3.41), nous trouvons

$$N = -\mu s^* \int_{\Omega} V \left(\frac{s^*}{s} \right) + V \left(\frac{s}{s^*} \right) dx + \beta \frac{s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*} \int_{\Omega} \left[-V \left(\frac{s^*}{s} \right) - V \left(\frac{u}{u^*} \right) + V \left(\frac{\varphi(u)}{\frac{s+u}{\varphi(u^*)}} \right) - V \left(\frac{\frac{u^* s \varphi(u^*)}{s+u}}{\frac{u s^* \varphi(u^*)}{s^* + u^*}} \right) \right] dx.$$

Il est clair que $N \leq 0$. On revient à (3.44), ce qui conduit à $W(t) \leq 0$. Par conséquent, $W(t)$ est une *fonctionnelle de Lyapunov*.

Théorème 3.6. Soit $E^* = (s^*, u^*)$ la solution de (3.1)-(3.3) dans $(0, +\infty)$.

Alors,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|s(t, \bullet) - s^*\|_{\infty} = 0. \quad (3.46)$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \bullet) - u^*\|_{\infty} = 0. \quad (3.47)$$

Preuve. D'après (3.44), et en intégrant sur $(0, t)$, cela donne

$$W(t) = \int_0^t \left[\int_{\Omega} \mu s^* \left(\frac{s - s^*}{s} \right)^2 dx \right] dz + \int_0^t \left[\int_{\Omega} \beta \frac{s^* u^*}{s^* + u^*} \left(\frac{u - u^*}{u^*} \right) dx \right] dz \leq W(0).$$

La solution (s, u) étant uniformément bornée sur $(t, x) \in (0, +\infty) \times \Omega$, on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \left[\int_{\Omega} (s(t, \bullet) - s^*)^2 dx \right] dz < +\infty, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left[\int_{\Omega} (u(t, \bullet) - u^*)^2 dx \right] dz < +\infty.$$

Nous savons que

$$\int_0^{+\infty} \|s(t, \bullet) - s^*\|_2^2 dz < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \|u(t, \bullet) - u^*\|_2^2 dz < +\infty.$$

Nous pouvons montrer que cette solution est $C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega})$ [15]. Ainsi, nous concluons que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|s(t, \bullet) - s^*\|_2 = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t, \bullet) - u^*\|_2 = 0.$$

Nous utilisons la même démonstration que précédemment (cf. [63]), et la preuve est terminée.

3.5. Exemples d'application

3.5.1. Premier exemple

Dans ce premier exemple, nous considérons la fonction :

$$\varphi(u) = ku, \quad \text{pour tout } k > 0,$$

Le problème résultant est donné par :

$$\begin{cases}
 \frac{\partial s}{\partial t} - d_1 \Delta s = \Lambda - \beta \frac{ksu}{s+u} - \mu s, & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\
 \frac{\partial u}{\partial t} - d_2 \Delta u = \beta \frac{ksu}{s+u} - (\mu + \sigma)u, & \text{dans } (0, +\infty) \times \Omega, \\
 s(0, x) = s_0(x); \quad u(0, x) = u_0(x); & \text{en } \Omega, \\
 \frac{\partial s}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{en } (0, +\infty) \times \Omega.
 \end{cases} \quad (3.48)$$

En fait, le système (3.48) est identique est similaire au modèle *SI* étudié, et les scénarios d'*EDP* et d'*EDO* de ce modèle ont été traités précédemment dans [59,60, 61]. Les conditions (3.4)-(3.5) et sont clairement satisfaites comme :

$$\begin{cases}
 \varphi(0) = 0, \\
 \varphi'(u) = k > 0, \\
 \varphi'(0) = k, \\
 ku = u\varphi'(u) \leq \varphi(u) = ku.
 \end{cases} \quad (3.49)$$

En abandonnant la variable spatiale, le système (3.1) se réduit au système suivant d'équations différentielles ordinaires (*EDO*) :

$$\begin{cases}
 \frac{ds}{dt} = \Lambda - \beta \frac{ksu}{s+u} - \mu s = F(s, u), & \text{dans } (0, +\infty), \\
 \frac{du}{dt} = \beta \frac{ksu}{s+u} - (\mu + \sigma)u = G(s, u), & \text{dans } (0, +\infty).
 \end{cases}$$

D'abord, nous calculons les points d'équilibre ;

Nous avons :

$$\begin{cases}
 F(s, u) = \Lambda - \beta \frac{ksu}{s+u} - \mu s = 0, \\
 G(s, u) = \beta \frac{ksu}{s+u} - (\mu + \sigma)u = 0.
 \end{cases}$$

Le point d'équilibre sans maladie E_0 et endémique E^*

- Si $s = 0$, il est facile de voir que le système **n'a pas** de points d'équilibre.
- Si $s \neq 0$, par l'addition des deux équations du système, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 & \Lambda - \mu s - (\mu + \sigma)u = 0, \\
 \Rightarrow & \quad s = \frac{\Lambda - (\mu + \sigma)u}{\mu}.
 \end{aligned}$$

Par substitution de cette valeur de s dans la deuxième équation du système, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & k \left[\frac{\Lambda - (\mu + \sigma)u}{\mu} \right] u - (\mu + \sigma)u = 0 \\ & \beta \left[\frac{\Lambda - (\mu + \sigma)u}{\mu} \right] + u - (\mu + \sigma)u = 0 \\ & \frac{\beta k [\Lambda - (\mu + \sigma)u] u}{\Lambda - (\mu + \sigma)u + \mu u} - (\mu + \sigma)u = 0 \\ & \frac{\beta k [\Lambda - (\mu + \sigma)u] u}{\Lambda - [(\mu + \sigma) - \mu]u} - (\mu + \sigma)u = 0 \\ & \beta k [\Lambda - (\mu + \sigma)u] u - [\Lambda - \sigma u](\mu + \sigma)u = 0 \\ & \beta k \Lambda u - \beta k (\mu + \sigma)u^2 - \Lambda (\mu + \sigma)u + \sigma (\mu + \sigma)u^2 = 0 \\ & -[\beta k \Lambda + \Lambda (\mu + \sigma)]u + [\sigma (\mu + \sigma) - \beta k (\mu + \sigma)]u^2 = 0. \end{aligned}$$

Par suite, nous trouvons finalement :

$$\begin{cases} u = 0. & \text{ou bien,} \\ u = \frac{-\beta k \Lambda + \Lambda (\mu + \sigma)}{\sigma (\mu + \sigma) - \beta k (\mu + \sigma)}, \end{cases} \Leftrightarrow u = \Lambda \frac{\mu + \sigma - \beta k}{(\sigma - \beta k)(\mu + \sigma)}.$$

➤ Lorsque $u = 0$, Alors que : $s = \frac{\Lambda}{\mu}$.

➤ Lorsque $u = \frac{-\beta k \Lambda + \Lambda (\mu + \sigma)}{\sigma (\mu + \sigma) - \beta k (\mu + \sigma)}$, Alors que: $s = \frac{\Lambda}{\beta k - \sigma}$.

Le nombre de reproduction du système (3.48) donné par $R_0 = \frac{\beta \phi'(0)}{(\mu + \sigma)} = \frac{\beta k}{(\mu + \sigma)}$, pour tout

$k > 0$. Donc, nous avons deux états d'équilibre constants,

$$E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0 \right), \quad \text{et} \quad E^* = \left(\frac{\Lambda}{\beta k - \sigma}, \Lambda \frac{\mu + \sigma - \beta k}{(\sigma - \beta k)(\mu + \sigma)} \right).$$

Nous avons alors, la description suivante :

- **Cas du système d'EDO** : lorsque $R_0 < 1$, E_0 est *globalement asymptotiquement stable*. Dans le second cas, où $R_0 > 1$, E^* est globalement asymptotiquement stable.

- **Cas du système d'EDP** : lorsque $R_0 < 1$, à partir le **théorème 3.3.** et étant donné $\theta > \frac{(d_1 + d_2)^2}{4d_1d_2}$, E_0 est *globalement asymptotiquement stable*. Dans le second cas, où $R_0 > 1$, à partir le **théorème 3.5.** E^* est globalement asymptotiquement stable.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un système d'équations aux dérivées partielles de type parabolique. Ce système décrit la propagation de certaines épidémies dans une population divisée en deux classes, les susceptibles et les infectés.

Ce travail a examiné la stabilité locale et globale des points d'équilibre du modèle proposé à l'aide d'une fonction de *Lyapunov* appropriée.

Nous avons calculé le point d'équilibre sans maladie, le point d'équilibre endémique et le nombre de reproduction de base du modèle. Nous avons également discuté de la stabilité locale et globale de la maladie aux points d'équilibre. Le point d'équilibre *sans maladie* est **localement et globalement stable** lorsque le nombre de reproduction de base soit inférieur à l'unité et **instable** lorsque le nombre de reproduction de base soit supérieur à l'unité. De plus, le point d'équilibre *endémique* est **localement et globalement stable** lorsque le nombre de reproduction de base soit supérieur à l'unité.

Références bibliographiques

- [1] MESBAHI, Salim. Analyse mathématique de systèmes de réaction-diffusion quasi-linéaires avec données non régulières. 2018. Thèse de doctorat.
- [2] KERMACK, William Ogilvy et MCKENDRICK, Anderson G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character, 1927, vol. 115, no 772, p. 700-721.
- [3] KERMACK, William Ogilvy et MCKENDRICK, Anderson G. Contributions to the mathematical theory of epidemics. II.—The problem of endemicity. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical and physical character, 1932, vol. 138, no 834, p. 55-83.
- [4] ZAFAR, Zain Ul Abadin, ZAIB, Sumera, HUSSAIN, Muhammad Tanveer, et al. Analysis and numerical simulation of tuberculosis model using different fractional derivatives. Chaos, Solitons & Fractals, 2022, vol. 160, p. 112202, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112202>.
- [5] ZAFAR, Zain Ul Abadin, AKINYEMI, Lanre, REZAZADEH, Hadi, et al. Non-topological, topological and rogue wave Soliton solutions for Sharma Tasso Olver equation. Journal of Ocean Engineering and Science, 2022, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.joes.2022.04.028>.
- [6] ZAFAR, Zain Ul Abadin, YOUNAS, Samina, ZAIB, Sumera, et al. An efficient numerical simulation and mathematical modeling for the prevention of tuberculosis. International Journal of Biomathematics, 2022, vol. 15, no 04, p. 2250015, DOI: <https://doi.org/10.1142/S1793524522500152>.
- [7] ZAFAR, Zain Ul Abadin, HUSSAIN, M. T., INC, Mustafa, et al. Fractional-order dynamics of human papillomavirus. Results in Physics, 2022, vol. 34, p. 105281 DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105281>.
- [8] LEI, Chengxia et ZHOU, Xinhui. Concentration phenomenon of the endemic equilibrium of a reaction-diffusion-advection SIS epidemic model with spontaneous infection. Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B, 2022, vol. 27, no 6 DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2021174>.
- [9] CHEN, Shanshan, SHI, Junping, SHUAI, Zhisheng, et al. Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic patch model with asymmetric connectivity matrix. Journal of Mathematical Biology, 2020, vol. 80, no 7, p. 2327-2361, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00285-020-01497-8>.
- [10] TOUIL, Asma et YOUKANA, Amar. Boundedness and asymptotic behavior of solutions for a diffusive epidemic model. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2017, vol. 40, no 4, p. 970-978, DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.4029>.
- [11] PENG, Rui et ZHAO, Xiao-Qiang. A reaction–diffusion SIS epidemic model in a time-periodic environment. Nonlinearity, 2012, vol. 25, no 5, p. 1451 DOI: <https://doi.org/10.1088/0951-7715/25/5/1451>.

- [12] TONG, Yachun et LEI, Chengxia. An SIS epidemic reaction–diffusion model with spontaneous infection in a spatially heterogeneous environment. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2018, vol. 41, p. 443-460, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.11.002>.
- [13] HUANG, Wenzhang, COOKE, Kenneth L., et CASTILLO-CHAVEZ, Carlos. Stability and bifurcation for a multiple-group model for the dynamics of HIV/AIDS transmission. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1992, vol. 52, no 3, p. 835-854, DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00290636>.
- [14] MOLLISON, Denis (ed.). *Epidemic models: their structure and relation to data*. Cambridge University Press, 1995.
- [15] ALLEN, Linda JS, BOLKER, Ben M., LOU, Yuan, et al. Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic reaction-diffusion model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2008, vol. 21, no 1, p. 1, DOI: <https://doi.org/10.3934/dcds.2008.21.1>.
- [16] PENG, Rui et LIU, Shengqiang. Global stability of the steady states of an SIS epidemic reaction–diffusion model. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2009, vol. 71, no 1-2, p. 239-247, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.na.2008.10.043>.
- [17] DIEKMANN, Odo, HEESTERBEEK, Johan Andre Peter, et METZ, Johan AJ. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Journal of mathematical biology*, 1990, vol. 28, p. 365-382, DOI: <https://doi.org/10.1007/BF00178324>.
- [18] ZAFAR, Zain Ul Abadin, TUNÇ, Cemil, ALI, Nigar, et al. Dynamics of an arbitrary order model of toxoplasmosis ailment in human and cat inhabitants. *Journal of Taibah University for Science*, 2021, vol. 15, no 1, p. 882-896, DOI: <https://doi.org/10.1080/16583655.2021.1990603>.
- [19] ZAFAR, Zain Ul Abadin, ALI, Nigar, et BALEANU, Dumitru. Dynamics and numerical investigations of a fractional-order model of toxoplasmosis in the population of human and cats. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, vol. 151, p. 111261, DOI : <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111261>.
- [20] HUANG, Wenzhang, HAN, Maoan, et LIU, Kaiyu. Dynamics of an SIS reaction-diffusion epidemic model for disease transmission. *Math. Biosci. Eng*, 2010, vol. 7, no 1, p. 51-66, DOI: <https://doi.org//10.3934/mbe.2010.7.51>.
- [21] WU, Yixiang et ZOU, Xingfu. Asymptotic profiles of steady states for a diffusive SIS epidemic model with mass action infection mechanism. *Journal of Differential Equations*, 2016, vol. 261, no 8, p. 4424-4447, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.06.028>.
- [22] LI, Michael Y., SMITH, Hal L., et WANG, Liancheng. Global dynamics of an SEIR epidemic model with vertical transmission. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2001, vol. 62, no 1, p. 58-69.
- [23] LAJMANOVICH, Ana et YORKE, James A. A deterministic model for gonorrhoea in a non homogeneous population. *Mathematical Biosciences*, 1976, vol. 28, no 3-4, p. 221-236.
- [24] GUEMOULA, Asma. *Quelques inégalités usuelles appliquées en théorie des opérateurs et applications*. 2018.

- [25] BENZAAZA, CHAHIRA et BENZAAZA, SYLIA. Résolution des équations aux dérivées partielles non linéaires. 2021. Thèse de doctorat. Université de Bordj Bou Arreridj Faculty of Mathematics and Computer Science.
- [26] LE DRET, Hervé. Théorèmes de point fixe et applications. In : Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. p. 41-60.
- [27] BEGHOU, Zineb et ROUAR, Salim. Existence globale des solutions pour certains problèmes de réaction-diffusion fractionnaires. 2020.
- [28] DJEBARA, Lamia. Asymptotic Stability of an Epidemic Reaction-Diffusion model. 2021. Thèse de doctorat. Taibah University, Saudi Arabia.
- [29] DEBÈS, Cédric, PAPADAKIS, Antonios, GRÖNKE, Sebastian, et al. Ageing-associated changes in transcriptional elongation influence longevity. *Nature*, 2023, p. 1-8.
- [30] HENRY, Daniel. Geometric theory of semilinear parabolic equations. Springer, 2006.
- [31] DEMENGEL, Françoise, DEMENGEL, Gilbert, et al. Espaces fonctionnels: utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles. EDP Sciences, 2007.
- [32] GARON, André et DELFOUR, Michel C. Transfinite Interpolations and Eulerian/Lagrangian Dynamics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2022.
- [33] WANG, Mingxin. Note on the Lyapunov functional method. *Applied mathematics letters*, 2018, vol. 75, p. 102-107.
- [34] HADDAD, Wassim M., CHELLABOINA, VijaySekhar, et HUI, Qing. *Nonnegative and compartmental dynamical systems*. Princeton University Press, 2010.
- [35] HADDAD, Wassim M. et NERSESOV, Sergey G. *Stability and control of large-scale dynamical systems: A Vector Dissipative Systems Approach*. Princeton University Press, 2011.
- [36] KHALIL, Hassan K. Nonlinear systems third edition. Patience Hall, 2002, vol. 115.
- [37] AHMAD, Shair et AMBROSETTI, Antonio. A textbook on ordinary differential equations. Springer, 2015.
- [38] CASTEN, Richard G. et HOLLAND, Charles J. Stability properties of solutions to systems of reaction-diffusion equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1977, vol. 33, no 2, p. 353-364.
- [39] ABDELMALEK, Salem et BENDOUKHA, Samir. The Lengyel–Epstein Reaction Diffusion System. *Applied Mathematical Analysis: Theory, Methods, and Applications*, 2020, p. 311-351.
- [40] AHMAD, Shair, AMBROSETTI, Antonio, AHMAD, Shair, et al. Systems of first order equations. *A Textbook on Ordinary Differential Equations*, 2014, p. 123-154.
- [41] LYAPUNOV, Aleksandr Mikhailovich. The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, 1992, vol. 55, no 3, p. 531-534.
- [42] CHERRUAULT, Yves. Modèles et méthodes mathématiques pour les sciences du vivant. Presses Universitaires de France-PUF, 1998.
- [43] HEBRI, B. et CHERRUAULT, Y. Contribution to the identification of linear compartmental systems. *Kybernetes*, 2004, vol. 33, no 8, p. 1277-1291.

- [44] HATTAF, Khalid et YOUSFI, Noura. Qualitative analysis of a generalized virus dynamics model with both modes of transmission and distributed delays. *International Journal of Differential Equations*, 2018, vol. 2018, p. 1-7.
- [45] KERMACK, William Ogilvy et MCKENDRICK, Anderson G. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 1927, vol. 115, no 772, p. 700-721.
- [46] KERMACK, William Ogilvy et MCKENDRICK, Anderson G. Contributions to the mathematical theory of epidemics. II.—The problem of endemicity. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, containing papers of a mathematical and physical character*, 1932, vol. 138, no 834, p. 55-83.
- [47] TISNADO GARLAND, Carolina. Impact d'un nouveau modèle de soins pharmaceutiques sur la polymédication et les médicaments potentiellement inappropriés en soins de longue durée: évaluation du modèle québécois PEPS. 2020.
- [48] CASTILLO-CHAVEZ, C., COOKE, K., LEVIN, Simon A., et al. *On the modelling of Epidemics*. 1989.
- [49] DIEKMANN, Odo, HEESTERBEEK, Johan Andre Peter, et METZ, Johan AJ. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Journal of mathematical biology*, 1990, vol. 28, p. 365-382.
- [50] VAN DEN DRIESSCHE, Pauline et WATMOUGH, James. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical biosciences*, 2002, vol. 180, no 1-2, p. 29-48.
- [51] MA, Zhien. *Dynamical modeling and analysis of epidemics*. World Scientific, 2009.
- [52] DJEBARA, Lamia, DOUAIFIA, Redouane, ABDELMALEK, Salem, et al. Global and local asymptotic stability of an epidemic reaction-diffusion model with a nonlinear incidence. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2022, vol. 45, no 11, p. 6766-6790.
- [53] ABDELMALEK, Salem, BENDOUKHA, Samir, REBIAI, Belgacem, et al. Extended global asymptotic stability conditions for a generalized reaction–diffusion system. *Acta Applicandae Mathematicae*, 2019, vol. 160, p. 1-20, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2016.11.007>.
- [54] PIQUEIRA, Jose Roberto C., CASTANO, Marcos Casado, et MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. Modeling the spreading of HIV in homosexual populations with heterogeneous preventive attitude. *Journal of Biological Systems*, 2004, vol. 12, no 04, p. 439-456, DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218339004001312>.
- [55] KIM, Kwang Ik, LIN, Zhigui, et ZHANG, Qunying. An SIR epidemic model with free boundary. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2013, vol. 14, no 5, p. 1992-2001, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.02.003>.
- [56] MUSALI, Farida Mahmoud, ALSOLAMI, Muna Rizzqallah, et al. Stability Analysis of an HIV/AIDS Epidemic Model with Screening. In : *International Mathematical Forum*. Hikari Ltd, 2011.
- [57] VAN DEN DRIESSCHE, Pauline et WATMOUGH, James. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission.

- Mathematical biosciences, 2002, vol. 180, no 1-2, p. 29-48, DOI: [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(02\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(02)00108-6).
- [58] HADDAD, Wassim M., CHELLABOINA, VijaySekhar, et HUI, Qing. Nonnegative and compartmental dynamical systems. Princeton University Press, 2010.
- [59] ABDELMALEK, Salem et BENDOUKHA, Samir. Global asymptotic stability of a diffusive SVIR epidemic model with immigration of individuals. Electronic Journal of Differential Equations, 2016, vol. 2016, no 129/324, p. 1-14.
- [60] TRIPATHI, Jai Prakash, TYAGI, Swati, et ABBAS, Syed. Dynamical analysis of a predator-prey interaction model with time delay and prey refuge. Nonautonomous Dynamical Systems, 2018, vol. 5, no 1, p. 138-151.
- [61] MARTCHEVA, Maia et MARTCHEVA, Maia. Zoonotic Disease, Avian Influenza, and Nonautonomous Models. An Introduction to Mathematical Epidemiology, 2015, p. 281-300, <https://link.springer.com/book/10.1007/978-1-4899-7612-3>.
- [62] GOPALSAMY, Kondalsamy. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Springer Science & Business Media, 1992.
- [63] HARAUX, Alain et KIRANE, Mokhtar. Estimations \$ C^1 \$ pour des problèmes paraboliques semi-linéaires. In : Annales de la Faculté des sciences de Toulouse : Mathématiques. 1983. p. 265-280.
- [64] SIGDEL, Ram P. et MCCLUSKEY, C. Connell. Global stability for an SEI model of infectious disease with immigration. Applied Mathematics and Computation, 2014, vol. 243, p. 684-689, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.06.020>.
- [65] HENSHAW, Sarah et MCCLUSKEY, C. Connell. Global stability of a vaccination model with immigration. Electronic Journal of Differential Equations, 2015, vol. 92, p. 1-10.
- [66] ACKERMANN, Nils. Long-time dynamics in semilinear parabolic problems with autocatalysis. In: Recent progress on reaction-diffusion systems and viscosity solutions. 2009. p. 1-30.

ملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة الاستقرار المقارب للحلول لنموذج وبائي لرد فعل - انتشار SI للدالة غير الخطية يصف انتشار مرض معدٍ بين الأفراد. نبرهن أن النموذج يحتوي على نوعين من نقاط التوازن تحت شرط واحد لحل النظام المقترح. ومن خلال تحليل للقيم الذاتية وتطبيق ميرهنة $Lyapunov$ التي تم إنشاؤها بشكل مناسب نحدد الاستقرار المقارب المحلي والكلّي في حالة المعادلات التفاضلية العادية وحالة المعادلات التفاضلية الجزئية. تم دراسة الاستقرار المقارب المحلي والكلّي في حالة التوازن المستوطنة بشرط أن يكون رقم التكاثر الأساسي أكبر من الوحدة والتوازن الخالي من المرض بشرط أن يكون رقم التكاثر الأساسي أصغر من الوحدة. أخيراً ، نقدم مثلاً تحليلياً عددياً يوضح ويؤكد نتائج الدراسة الموجودة في المذكرة.

كلمات مفتاحية: نظام تفاعل- رد فعل انتشار؛ المعادلات التفاضلية الجزئية؛ المعادلات التفاضلية العادية؛ نقطة التوازن، الاستقرار المقارب المحلي و الكلّي، دالية ليابونوف؛ معدل التكاثر الأساسي، التوازن المستوطن، التوازن دون مرض .

Abstract

*The aim of this thesis is to study the asymptotic stability of solutions for an epidemiological model of a nonlinear function **SI reaction–diffusion** describing the prevalence of an infectious disease between individuals. We prove that the proposed model has two steady states under one condition. By analyzing the eigenvalues and an appropriately constructed Lyapunov functional we establish both locally and globally asymptotic stability in the **ODE** and **PDE** cases of the non negative constant steady states if the basic reproduction number is greater than unit and of the disease free equilibrium if the basic reproduction number is smaller than or equal to the unit in ODE case. By applying an appropriately constructed **Lyapunov functional** we give the condition of the global stability in PDE case. Finally, we present a numerical analysis example illustrating and confirming the results of this study.*

Keywords - Reaction-diffusion; Partial differential equations; Ordinary differential equations; Equilibrium point, local stability, global stability; Lyapunov function; endemic equilibrium, steady state, disease free equilibrium, Basic reproduction number.

Résumé

*L'objectif de cette thèse est d'étudier la stabilité asymptotique de solutions pour un modèle épidémiologique d'une fonction **SI réaction–diffusion** non linéaire décrivant la prévalence d'une maladie infectieuse entre individus. Nous prouvons que le modèle proposé a deux états stationnaires sous une condition. En analysant les valeurs propres et une **fonctionnelle de Lyapunov** construite de manière appropriée, nous établissons à la **stabilité asymptotique locale et globale** dans les cas **ODE** et **PDE** des états stationnaires constants non négatifs si le nombre de reproduction de base est supérieur à l'unité et de l'équilibre sans maladie si le nombre de reproduction de base est inférieur ou égal à l'unité dans le cas de l'ODE. En appliquant une fonctionnelle de Lyapunov construite de manière appropriée, nous donnons la condition de stabilité globale dans le cas de l'EDP. Enfin, nous présentons un exemple d'analyse numérique illustrant et confirmant les résultats de cette étude.*

Mots Clés- Réaction-diffusion; Équations Différentielles Partielles; Équations Différentielles Ordinaires; Point d'équilibre; Stabilité asymptotique locale et globale; Fonctionnel de Lyapunov; Nombre de reproduction de base; équilibre endémique; équilibre sans maladie.