



جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR UNIVERSITY KHENCHELA

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ « Abbès LAGHROUR » DE KHENCHELA
FACULTE DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE



جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR UNIVERSITY KHENCHELA

Département de Génie Mécanique

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de master (L.M.D)

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Génie Des Matériaux

Thème

Flexion des structures poreuse en matériaux
fonctionnellement graduées à l'aide d'une simple
théorie de déformation par cisaillement d'ordre
supérieur

Réalisé par : - Khalfaoui Nedjwa
-Hamzaoui Wail

Dirigé par : Dr. CHITOUR Mourad

Membres de jury :

Mr. Mansouri Khelifa

Mr. Khadraoui Faicel

M.C.A

M.C.A

Université de Khenchela

Université de Khenchela

Président

Examinateur

Résumé

Les matériaux à gradient fonctionnel (FGM) représentent une classe avancée de matériaux composites dont les propriétés mécaniques ou physiques varient progressivement à travers l'épaisseur, permettant de combiner la résistance thermique des céramiques avec la ténacité des métaux, tout en réduisant les contraintes et fissurations aux interfaces. Cette étude vise à analyser le comportement mécanique de ces matériaux sous différentes sollicitations, notamment dans les poutres et plaques, en développant des modèles théoriques précis basés sur les théories classiques (CPT) de premier ordre (FSDT) et d'ordre supérieur (HSDT) ainsi que sur des lois de mélange comme celles de Voigt et de Mori-Tanaka. L'analyse numérique fondée sur le principe des travaux virtuels et la méthode de Navier, a permis d'intégrer l'effet de la porosité selon plusieurs distributions. Les résultats montrent que les théories d'ordre supérieur offrent une meilleure précision, en particulier pour les structures épaisses, que la porosité influence significativement la rigidité et les déformations, et que les conditions aux limites jouent un rôle déterminant dans le comportement en flexion et flambement.

Mots-clés : Matériaux à gradient fonctionnel FGM, Flexion, Méthode de Navier, Flambement, porosité

Abstract

Functionally Graded Materials (FGMs) represent an advanced class of composite materials whose mechanical or physical properties vary gradually through the thickness, allowing the combination of the thermal resistance of ceramics with the toughness of metals, while reducing stress concentrations and cracking at the interfaces. This study aims to analyze the mechanical behavior of these materials under various loadings, particularly in beams and plates, by developing accurate theoretical models based on Classical Plate Theory (CPT), First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), and Higher-Order Shear Deformation Theory (HSDT), as well as mixing rules such as Voigt and Mori-Tanaka models. The numerical analysis, based on the principle of virtual work and Navier's method, incorporated the effect of porosity according to several distributions. The results show that higher-order theories provide greater accuracy, especially for thick structures, that porosity significantly affects stiffness and deformations, and that boundary conditions play a decisive role in bending and buckling behavior.

Key words: functionally graded materials, bending, Navier method, buckling, porosity

ملخص

فئة متقدمة من المواد المركبة التي تتغير خصائصها الميكانيكية أو الفيزيائية (FGMs) تمثل المواد المتدرجة وظيفياً تدريجياً مع تغير السمك، مما يسمح بدمج المقاومة الحرارية للسيراميك مع صلابة المعادن، مع تقليل تركيزات الإجهاد والتشققات عند السطوح البينية. تهدف هذه الدراسة إلى تحليل السلوك الميكانيكي لهذه المواد تحت أحمال متنوعة، وخاصةً في ، ونظرية تشوه (CPT) العوارض والصفائح، من خلال تطوير نماذج نظرية دقيقة تستند إلى نظرية الصفائح الكلاسيكية ، بالإضافة إلى قواعد الخلط مثل (HSDT) ، ونظرية تشوه القص من الدرجة الأعلى (FSDT) القص من الدرجة الأولى ، نموذجي فويجت وموري-تاناكا. وقد شمل التحليل العددي، القائم على مبدأ العمل الافتراضي وطريقة نافير، تأثير المسامية وفقاً لتوزيعات متعددة. وتُظهر النتائج أن النظريات ذات الدرجات الأعلى توفر دقة أكبر، وخاصةً للهياكل السمكية، وأن المسامية تؤثر بشكل كبير على الصلابة والتشوهات، وأن الظروف الحدية تلعب دوراً حاسماً في سلوك الانحناء والانبعاج.

الكلمات المفتاحية المواد المتدرجة وظيفياً . الانحناء . طريقة نافيري . الانبعاج

Remerciements

Nous remercions en premier lieu "ALLAH" qui nous a donné la puissance et donné la volonté, la force, la patience, le courage pour faire ce travail.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribué au succès de notre travail et qui nous ont aidés lors de la rédaction de ce mémoire.

Nous voudrions dans un premier temps remercier notre encadrant Dr. CHITOUR Mourad, Pour leur patience, leur disponibilité et surtout leurs judicieux conseils.

Je souhaite également remercier les membres du jury de ce mémoire composé de :

Dr.Mansouri Khelifa Et Dr.Kadraoui Faicel . Pour l'importance qu'ils ont accordée à notre travail en acceptant d'être membre de ce jury et pour le temps qu'ils ont consacré à l'examen de ce mémoire.

Nous désirons aussi remercier les enseignants, les responsables et toute l'équipe pédagogique de département de génie mécanique, qui nous ont fourni les outils nécessaires à la réussite de nos études universitaires.

Dédicace 1

Je dédie ce modeste travail à

La mémoire de ma chère grand-mère « AMAMA » Et je sais que si elle était avec moi aujourd'hui, elle serait la première à être heureuse pour moi, Qu'Allah lui fasse miséricorde et fasse de sa tombe un jardin parmi les jardins du paradis.

La mémoire de mes grands-pères et mes grands-mères et ma tante «DALILA »

À mes chers parents, vous êtes la flamme de toutes mes réussites, vos attentions ont fait de ma vie une merveille. Merci pour tout l'amour, l'éducation et le bon sens que vous nous avez fait apprendre, moi, mes frères et ma soeur, que Dieu nous les garde et les préserve en bonne santé pendant toute notre vie,

Mes tantes « NADIA » et « HAYET » mes deuxièmes mamans qui sont toujours à mes côtés.

À ma soeur NADA la plus pétillante, souriante et charmante soeur au monde.

Mes frères « AYMEN » et « YAASSER » qui sont mon soutien et ma force dans la vie.

Mes cousins et cousines : Abd el raouf, Youssef, Saad, Hafessa, Hind.Rayane , wiam , Safa

Toute la famille « KHALFAOUI ».

À mes meilleurs amis : Ibtissem , Amira , Miled , Malak

Mes amies de promos : Khawla, Rahma, Imane, Ikram,Radhia

Nedjwa

Dédicace 2

Je dédie ce modeste travail,

À mes chers parents, pour leur soutien leur patience et sacrifices
pour me voir réussir.

A mon frère et ma sœur, qui m'avez toujours soutenu et
encouragé.

A mes aimable amis, collègues d'étude qui m'ont accompagné
durant mon chemin d'études supérieures

TABLE DE MATIERE

Résumé.....
Introduction Générale
Chapitre 1.....	3
Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués	3
1 Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués	4
Introduction	4
1.1 Concept des matériaux fonctionnellement gradués.....	4
1.2 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels	6
1.3 Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés	8
1.4 Les propriétés matérielles des structures FGM.....	9
1.4.1 Les lois de mélanges.....	10
1.4.2 Modèle de Mori-Tanaka	13
1.4.3 Modèle de Voigt	14
1.5 Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.....	14
1.5.1 Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade).....	14
1.5.2 Frittage et infiltration (Sintering)	15
1.5.3 Compaction sèche des poudres	15
1.5.4 Projection plasma (Plasma projection).....	16
1.5.5 La métallurgie des poudres (Powder metallurgy)	16
1.5.6 Dépôts physique ou chimique en phase vapeur (C.V.D / P.V.D).....	17
1.5.7 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting).....	18
1.6 Domaines d'applications des matériaux à gradient	18
1.7 Avantage et inconvénients de la FGM	19
1.7.1 Avantages de la FGM.....	19

1.7.2	Inconvénients de la FGM	20
	Conclusion.....	21
	Références	22
Chapitre 2.....		24
Analyses des structures FGM par les théories d'élasticités		24
2	Généralité sur les théories d'élasticité.....	25
Introduction.....		25
2.1	La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT).....	25
2.2	La théorie classique des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT)	26
2.3	La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT -First Shear Deformation Theory)	27
2.4	Théorie des poutres du premier ordre (Timoshenko TBT).....	27
2.5	Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT. High Shear deformation Theory)	29
2.5.1	Théorie des plaques d'ordre élevé.....	29
2.5.2	Théorie des poutres d'ordre élevé	30
2.6	Les différentes théories (fonction de cisaillement $f(z)$).....	31
2.7	Les théories tridimensionnelles (3D et quasi-3D).....	34
2.8	Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)	35
	Conclusion.....	35
	Références	36
Chapitre 3.....		38
Etude analytique de la flexion des poutres poreuses en FGM <<Résultats, Validation et Interprétations>>		38
3	Etude analytique de la flexion des poutres poreuses en FGM Introduction	39
3.1	Propriétés matérielles imparfaites des poutres FGM	41
3.2	Formulations théoriques de la poutre à gradient fonctionnel (FG)	42
3.2.1	Cinématique et déformations	42

3.2.2	Équations régissant.....	43
3.2.3	Solution exacte pour diverses conditions limites de la poutre FG :.....	45
3.3	Résultats numériques et discussion	46
3.3.1	Étude de convergence et de validation	46
3.3.2	Étude paramétrique et discussions – effet de porosité	49
	Conclusion.....	53
	Références.....	54
	Conclusion générale	57

LISTE DES FIGURES

Figure I. 1 : Schéma de la variation continue de la microstructure	4
Figure I. 2: Concept des matériaux à gradient de propriétés	6
Figure I. 3: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites	7
Figure I. 4: La distribution composante des matériaux	7
Figure I. 5 : Géométrie d'une poutre FGM.....	10
Figure I. 6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM	11
Figure I. 7 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM	12
Figure I. 8 : Variation de la fraction volumique dans une poutre E-FGM	13
Figure I. 9 Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulière.	13
Figure I. 10 : Principe de la méthode coulage en bande	15
Figure I. 11: Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma	16
Figure I. 12: Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres.....	17
Figure I. 13: Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)	18
Figure I. 14 : Les principaux domaines d'application des FGM.....	19
Figure II. 1 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté: Des Plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT). Des poutres selon les hypothèses de la théorie classique d'Euler-Bernoulli(CBT)	26
Figure II. 2 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté : Des Plaques selon les hypothèses de la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin - Des poutres selon l'hypothèse de la théorie du premier ordre de Timoshenko (TBT).....	28
Figure II. 3 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté - Des Plaques et des poutres selon l'hypothèse de la théorie d'ordre élevé.....	30

Figure II. 4 : Comparaison des différentes théories d'ordre élevé (HSDT) avec (FSDT) et (CPT)	31
Figure II. 5: Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur	34
Figure III. 1 :Géométrie et système de coordonnées de la poutre FG imparfaite	41
Figure III. 2: Variation de la déflexion centrale adimensionnelle w en fonction de l/h des poutres parfaites et imparfaites ($k=2$) :a) charges distribuées sinusoïdalement, b) charge distribuées uniformément	50
Figure III. 3 : Variation de la contrainte dans l'épaisseur des poutres parfaites et imparfaites $l/h = 10$ ($k = 2$) sous des charges uniformément réparties : a) contrainte axiale σ_{xx} b) contrainte transversale τ_{xz}	50
Figure III. 4 : La variation des charges de flambement en fonction du rapport l/h des poutres parfaites et imparfaites ($k=2, \Omega=0.2$) : a)Condition limite SS , b)Condition limite CC	51
Figure III. 5 : Effet du coefficient de porosité sur la flèche centrale adimensionnée w des poutres à gradient de matériau (FG) ($k=2, l/h=10$) – (a) soumises à des charges réparties sinusoïdales – (b) soumises à des charges réparties uniformes	51
Figure III. 6 : Variation of the non-dimensional central deflection w versus non-dimensional length x/l of perfect and imperfect beams $l/h = 10$ ($k = 2$) – (a)- subjected to sinusoidal distributed loads-(b)- subjected to uniform	52

LISTE DES TABLEAUX

Tableau I. 1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal	5
Tableau I. 2: Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon	8
Tableau II. 1 :Quelques modèles de fonction de forme $f(z)$ présentées par la littérature pour la théorie HDST	33
Tableau III. 1 : Fonctions admissibles X_m, Y_n	45
Tableau III. 2 : Déplacements et contraintes adimensionnels des poutres fonctionnellement graduées ($L = 5h$)	48
Tableau III. 3 : Comparaison des charges de flambement normalisées de poutres fonctionnellement graduées avec différentes conditions limites ($L/h = 5$).....	49

LISTE DES NOTATIONS

P	Propriétés mécaniques
V	Fraction volumique
P_i	Propriétés mécaniques du constituant i
V_i	Fraction volumique du constituant i
T	Température
P_1, P_2	Coefficient de la température
P_c	Propriétés mécaniques de la céramique
V_c	Fraction volumique de la céramique
P_m	Propriétés mécaniques du métal
V_m	Fraction volumique du métal
E	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
x,y,z	Coordonnées cartésiennes
E(z)	Module de Young en fonction de z
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de z
V(z)	Fraction volumique en fonction de z
p	Paramètre matériel
h	Épaisseur de plaque
a	Largeur de la plaque
b	Longueur de la plaque

$P(z)$	Propriétés mécaniques en fonction de z
G	Module de cisaillement
K	Conductivité thermique
α	Coefficient de dilatation thermique
u, v, w	Déplacements dans les directions x, y, z
u_0, v_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ou poutre.
ϕ_x, ϕ_y	Rotations totales à la normale au plan moyen autour des axes x et y
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y
$f(z)$	Fonction de gauchissement
$g(z)$	Première dérivée de la fonction $f(z)$
$g'(z)$	Première dérivée de la fonction $g(z)$
θ	Déplacement transversal dû au cisaillement
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$	Contraintes normales
τ_{xz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$	Déformations normales
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformations transversales
A, B	Coefficients dépendent de la solution de Navier
C_{ij}, Q_{ij}	Coefficient de rigidité élastique
i et j	Nombres naturels
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	Variation du travail externe

$\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0, \delta \theta$ Variation du champ de déplacements

Introduction Générale

Introduction

Au cours des dernières années, le besoin croissant de développement dans le secteur industriel a fortement stimulé les avancées scientifiques et la recherche. Ce progrès ne saurait être atteint sans l'évolution constante des connaissances scientifiques, dont les résultats permettent la mise au point de procédés modernes dans l'industrie.

C'est dans ce contexte que le concept des matériaux à gradient de propriétés, appelés FGM (Functionally Graded Materials), a vu le jour. Il a été introduit pour la première fois en 1984 par Sendai et son équipe au laboratoire national aérospatial du Japon. Les FGM sont des matériaux composites innovants dont les propriétés varient de manière continue en fonction de l'épaisseur, grâce à une distribution progressive des fractions de volume des composants.

Typiquement, une plaque en matériau fonctionnellement gradué est constituée de deux matériaux : une base métallique sur la face inférieure, dont les propriétés évoluent graduellement jusqu'à atteindre une face supérieure entièrement composée de céramique. Cette combinaison permet d'obtenir une structure à la fois rigide, résistante à la corrosion et capable de supporter des températures très élevées.

Les FGM trouvent des applications dans de nombreux domaines tels que l'aérospatiale, la médecine, la défense, la marine, le génie civil, la chimie, l'énergie nucléaire, l'électronique, la conversion d'énergie, l'industrie automobile et même les équipements sportifs.

L'objectif de notre mémoire, est l'utilisation de la théorie raffinée déformation de cisaillement d'ordre élevé en adoptant quatre type de fonctions de cisaillement (la fonction exponentielle, la fonction polynômiale, la fonction hyperbolique et la fonction trigonométrique) afin d'analyser le comportement de flexion des plaques fonctionnellement graduées soumises à une charge mécanique sinusoidale « q » et reposant sur un appuie simple. L'influence des plusieurs paramètre géométriques et mécaniques comme le rapport d'élancement et le degré d'homogénéité sur le comportement mécanique des plaques FGM (la variation des déplacements et des contraintes normales et tangentielles) est déterminée par la suite.

Le présent travail de recherche sera donc organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons une revue globale sur les matériaux à gradient de propriétés, leurs évolutions, leurs techniques d'élaboration et les domaines d'utilisation, ainsi que les différentes procédures d'homogénéisation pour la fabrication et l'élaboration

de ces matériaux, les lois de mélanges qui régissent les plaques FGM et les avantages et les inconvénients de ces derniers.

Dans le second chapitre, nous rappelons les différentes théories de déformation et/ou de cisaillement avec différents nombres de variables pour les plaques fonctionnellement graduées dans un but d'étudier le comportement des plaques, à savoir : le Principe de Navier Bernoulli généralisé et La théorie classique des plaques minces de love-Kirchhoff « CPT » qui négligé l'effet de cisaillement, la théorie de premier ordre de déformation et de cisaillement « FSDT » les théories de déformation et de cisaillement d'ordre élevé « HSDT ».

Le troisième chapitre est consacré au développement des formulations mathématiques pour l'étude théorique d'un modèle analytique sur le comportement en flexion de la plaque en FGM sous un chargement mécanique sinusoïdal, Ces modèles analytiques basés sur une théorie raffinée de déformation et de cisaillement d'ordre élevé.

Chapitre 1

Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués

1 Généralités sur les matériaux fonctionnellement gradués

Introduction

La récente technologie nécessite d'employer des matériaux innovants caractérisés selon les exigences en termes de performances techniques, de fiabilité, d'économie d'élaboration, de durabilité et d'impact environnemental, les matériaux classiques ne répondent pas toujours à ces spécifications. Dans ce contexte, la conception des matériaux avancés qui allient d'une façon simultanée la rigidité, la résistance, la ténacité élevée et une grande légèreté est un facteur plus important. Pour atteindre ces objectifs, les chercheurs et les industriels ont contribué au développement d'une nouvelle génération des matériaux composites appelée « matériaux à gradient de propriétés » qui font l'objet d'importantes recherches. [1]

1.1 Concept des matériaux fonctionnellement gradués

Les matériaux à gradient fonctionnel représentent une catégorie novatrice de matériaux composites dont les caractéristiques thermomécaniques fluctuent en fonction d'une loi de fonction continue (figure I.1) ou discrète au fil de l'épaisseur. Cela permet d'éviter des accumulations de contraintes thermiques et mécaniques aux interfaces (causant ainsi délaminage et décollement).

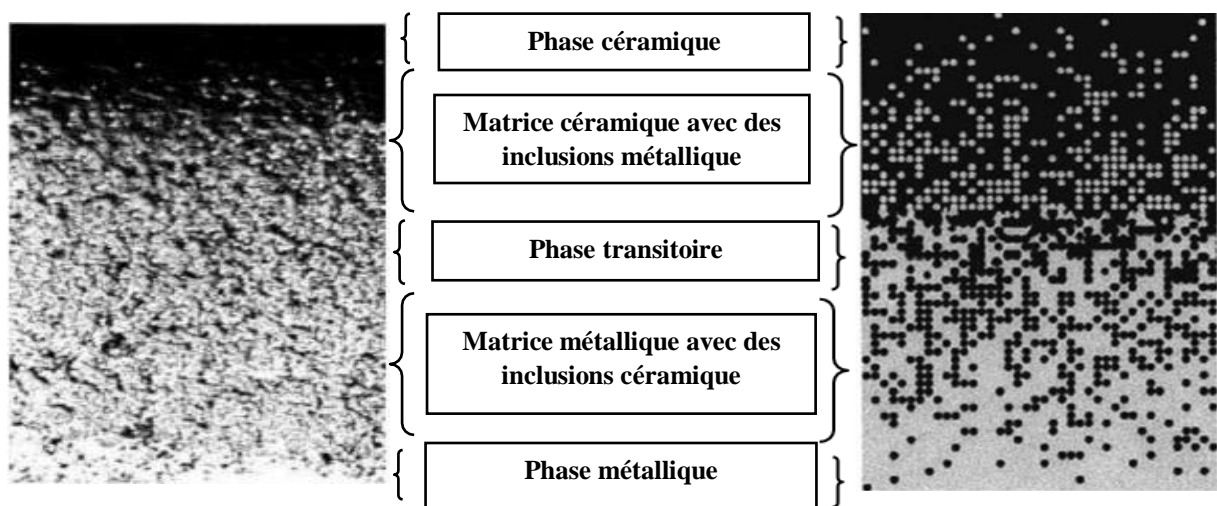


Figure I. 1 : Schéma de la variation continue de la microstructure

Le concept du matériau à gradient de propriété (FGM) peut être effectué en modifiant le pourcentage de plusieurs composants (matériaux), ou en altérant la microstructure d'un composant, de façon à ce que le matériau nouvellement créé ait les caractéristiques souhaitées selon la direction voulue. Il s'agit donc d'un composite, un hétérogène présentant des caractéristiques inhomogènes à l'échelle macroscopique et homogènes à la microscopie.

L'union de ces deux substances favorise l'amélioration des caractéristiques mécaniques et thermiques des composants, la diminution des tensions thermiques résiduelles et la résistance face aux conditions d'exploitation extrêmes. Effectivement, la performance de la céramique à haute température surpasse celle des métaux, requérant ainsi diverses caractéristiques simultanément

La plupart des « FGM » sont constitués de céramique et de métal dont les propriétés mécaniques sont comparées dans le tableau I.1

Tableau I. 1 : Comparaison entre les propriétés de la céramique et du métal

La face à haute température	Céramique	-bonne résistance thermique -bonne résistance à l'oxydation, -faible conductivité thermique
Continuité du matériau d'un point à l'autre «couche intermédiaire»	Céramique-métal	-Elimination des problèmes de l'interface. -Relaxer les contraintes thermiques.
La face à basse température	Métal	-bonne résistance mécanique -conductivité thermique élevée. -Très bonne ténacité

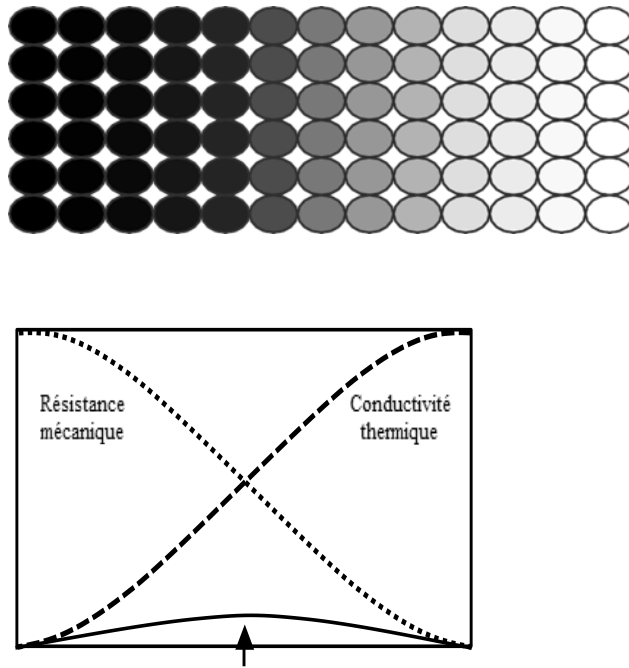


Figure 1. 2: Concept des matériaux à gradient de propriétés

1.2 Comparaison des matériaux types FGM et les matériaux composites traditionnels

Généralement les F.G.M sont des matériaux multicouches intégrant divers composants comme les céramiques et les métaux. Ainsi, ils sont des matériaux composites présentant des propriétés macroscopiquement disparates. Les F.G.M se différencient des matériaux composites traditionnels par leur constante évolution en termes de composition et de microstructure, comme le démontre la figure I.3 . Cela conduit à un gradient qui définira les caractéristiques matérielles des FGM. Dans certaines situations, un FGM peut être composé d'un matériau identique mais présentant une microstructure distincte.

Plusieurs initiatives ont été mises en œuvre au Japon dans les années 80 et 90 pour progresser dans le domaine de l'architecture des FGM. Ces efforts ont également considéré l'étude de ces matériaux pour des utilisations à haute température (comme les composants pour des navettes spatiales hypersoniques) ainsi que pour des applications fonctionnelles (telles que les convertisseurs thermoélectriques et thermo-ioniques). Ces programmes ont abouti à l'élaboration du design architectural du FGM et de ses perspectives.

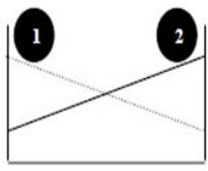
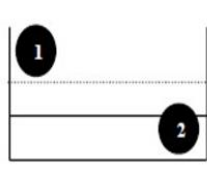
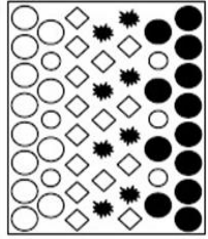
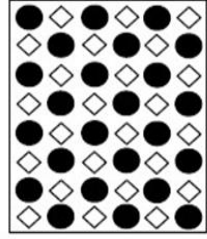
Propriétés	<p>1 Résistance mécanique</p> <p>2 Conductivité thermique</p>		
Structure	<p>Eléments constitutants:</p> <p>céramique ○</p> <p>métal ●</p> <p>microporosité ◊</p> <p>fibres ★</p>		
Matériaux	exemple	FGM	NON-FGM

Figure I. 3: Caractéristiques des matériaux composites FGM en comparaison avec les matériaux composites

a établi un modèle simple qui met en évidence les différences entre les matériaux à gradient de propriétés (FGM) et les matériaux plus traditionnels (Figure I.4).

Le matériau plan est caractérisé par une surface plane, tandis que le matériau lié présente une limite à l'interface de deux matériaux. Les FGM possèdent des caractéristiques remarquables qui les distinguent des matériaux composés et reliés de forme plane. Ainsi, les FGMs suscitent l'intérêt en raison de leur utilisation dans les secteurs industriels, car ils présentent une double caractéristique des deux matières premières combinées, et la répartition des composants est continue et sans interruption. Par exemple, l'un des FGM qui intègre le métal et la céramique possède la capacité de conduire la chaleur et de résister mécaniquement du côté métallique, tout en offrant une résistivité face aux hautes températures du côté céramique.

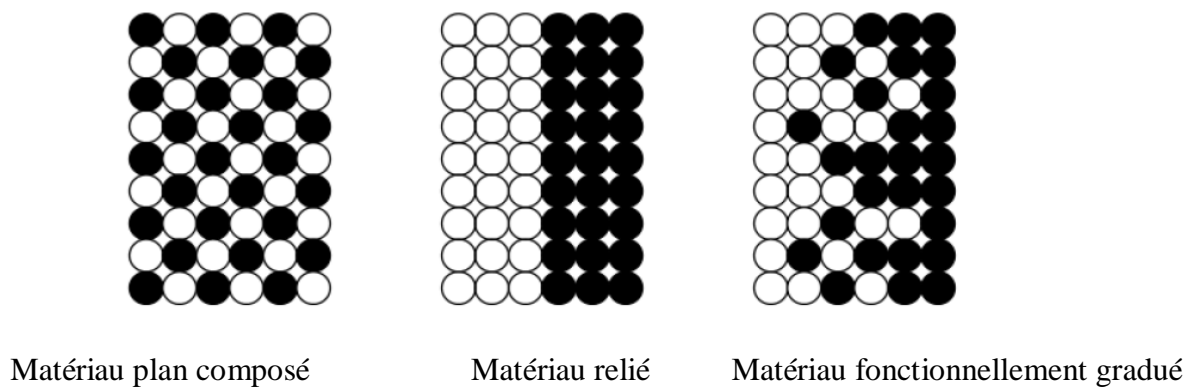


Figure I. 4: La distribution composante des matériaux

1.3 Histoire de développement des matériaux à gradient de propriétés

Le tableau I.1 représente l'évolution de la recherche sur les matériaux à gradients de propriétés depuis leur découverte

Tableau I. 2: Progrès de la recherche sur les matériaux FGM au Japon

Année	Progrès de recherche sur les FGM
1984	Concept initial par Dr Niino et d'autres scientifiques dans la région de Sendai, (Japon)
1986	Etude de faisabilité sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermiques sous l'auspice de la science et de l'agence de technologie (STA).
1986-1989	Recherche nationale de projet sur la technologie de base pour le développement des FGM sur la relaxation des contraintes thermique
1988	Fonctionnellement gradient matériaux forum (FGMF) 1 ^{er} Colloque sur FGM organisé par FGMF
1989	Conférence d'Allemagne-Japon (FGM) a Köln, (Allemagne)
1990	1 ^{er} Colloque international sur FGM à Sendai, (Japon). Comité consultatif international de FGM (IACFGM)
1990-1991	FGM partie I
1992	Études de faisabilité sur la R & D de FGM en tant que matériaux fonctionnels sous l'auspice du STA.
1993	Projet de recherche national sur les matériaux de conversion d'énergie avec une structure FGM
1994	3 ^{ème} colloque international sur FGM à Lausanne, (Suisse)
1995	Atelier : Japon-Russie-Ukraine sur des matériaux de conversion d'énergie (ENECOM-95), (Sendai).
1996	4 ^{ème} colloque international sur FGM dans la ville de la science de Tsukuba, (Japon)

1.4 Les propriétés matérielles des structures FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent.

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi phase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt. [2]

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (I.1)$$

Où P_i et V_{Fi} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne l'unité 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (I.2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général . Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (I.3)$$

$$V_c + V_m = 1 \quad (I.4)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.[2]

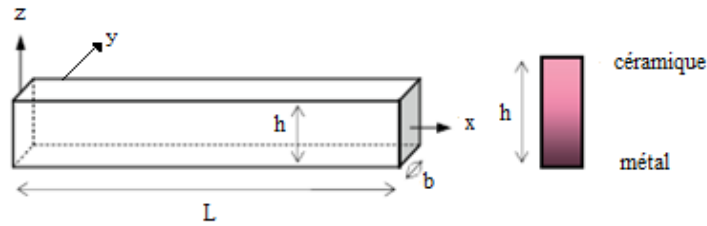


Figure I. 5 : Géométrie d'une poutre FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur (Figure. I.5). Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z), soit

$$E=E(z) : \text{ et } \nu = \nu(z)$$

ont indiqué que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varié en fonction de la loi de puissance (PFGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).[2]

1.4.1 Les lois de mélanges

1.4.1.1 Loi de mélange en puissance (P-FGM)

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance.

$$V(z) = \left(\frac{z+h/2}{h} \right)^k \quad (I.5)$$

Où P est un paramètre matériau et z est dirigé suivant l'épaisseur h de la poutre. Les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM Peuvent être déterminées par la loi des mélanges [3]

$$P(z) = P_1 + (P_2 - P_1)V(z) \quad (I.6)$$

Où P_1 et P_2 sont respectivement les propriétés matérielles de la surface supérieure ($z = h/2$) et de la surface inférieure ($z = - h/2$) de la structure FGM. La variation de ces propriétés dans la direction de l'épaisseur de la structure P-FGM est représentée sur la figure (I.7)

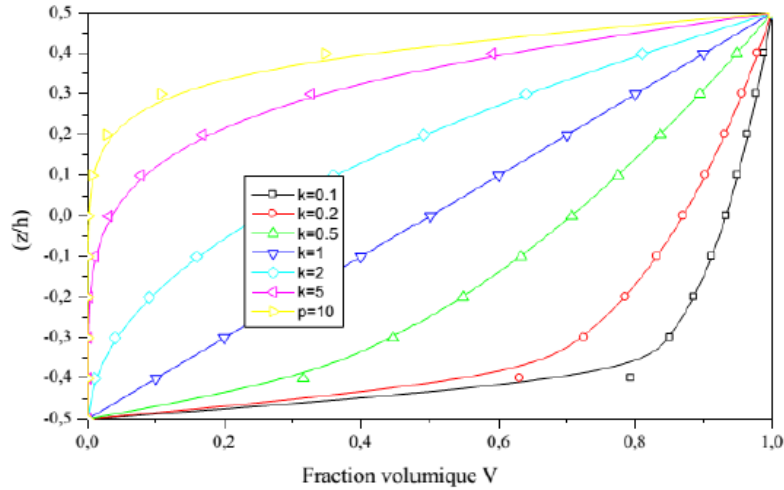


Figure I. 6 : Variation de la fraction volumique dans une poutre P-FGM

1.4.1.2 Loi de mélange en sigmoïde (S-FGM)

La fraction de volume de la plaque FGM est définie par deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par [4]

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.7})$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.8})$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par la relation suivante, sa variation est représentée sur la figure I.8

$$P(z) = V_1(z)P_1 + [1 - V_1(z)]P_2 \quad \text{Pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.9})$$

$$P(z) = V_2(z)P_1 + [1 - V_2(z)]P_2 \quad \text{Pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.10})$$

La figure (I.7) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I.9) et (I.10) représente les distributions sigmoïdes, et cette plaque FGM est appelée (Plaque S-FGM).

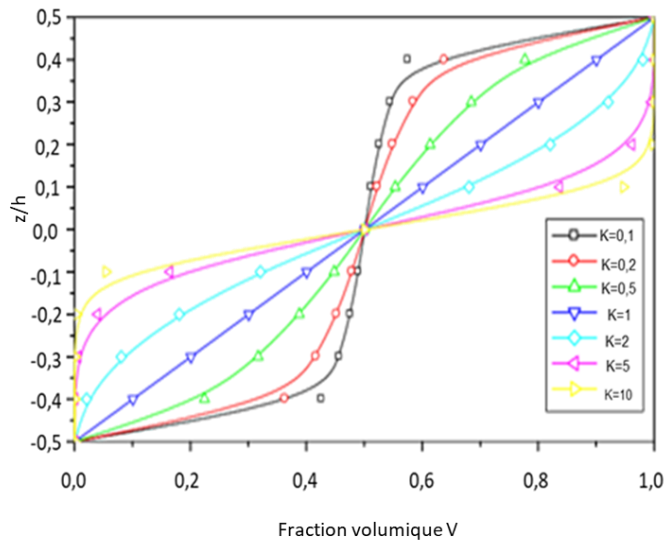


Figure I. 7 : Variation de la fraction volumique dans une poutre S-FGM

1.4.1.3 Loi de mélange exponentielle E-FGM

Cette loi est généralement adoptée par les chercheurs lorsqu'ils traitent des problèmes de mécanique de la rupture [5]. Selon cette loi, la propriété matérielle $P(z)$ dans une direction spécifique est donnée par

$$P(z) = P_2 e^{B(z+h/2)} \quad (I.11)$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) \quad (I.12)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la poutre E-FGM est représentée sur la (Figure I-8).

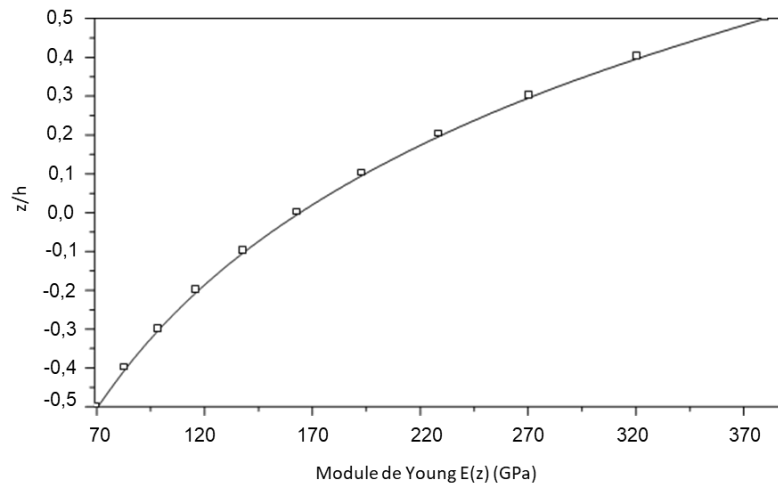


Figure I. 8 : Variation de la fraction volumique dans une poutre E-FGM

1.4.2 Modèle de Mori-Tanaka

Ce modèle est basé sur le schéma de Mori et Tanaka qui permet d'estimer les modules effectifs valables pour des zones de la microstructure où la variation de la matrice (continue) et celle des phases particulières (discontinues) sont bien connues Figure I.9. Ce modèle tient compte de l'interaction des champs élastiques des inclusions voisines. Il suppose que la phase matrice dénotée par l'indice 1 est renforcée par des particules sphériques de la phase particulière dénotée par l'indice 2.[6]



Figure I. 9 Matériau FGM à deux phases avec microstructure particulaire.

Si on note par K le module de compressibilité, par G le module de cisaillement, par V la fraction volumique et par α le coefficient de dilatation thermique, les différentes propriétés locales obtenues par le modèle de Mori et Tanaka, pour une distribution aléatoire des particules isotropes dans une matrice isotrope

$$\frac{K-K_1}{K_2-K_1} = \frac{V_2}{1+V_1(K_2-K_1)/(K_1+4/3G_1)} \quad (I.13)$$

$$\frac{G-G_1}{G_2-G_1} = \frac{V_2}{1+V_1(G_2-G_1)/(G_1+f_1)} \quad (I.14)$$

$$\frac{G-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1} = \frac{(1/K)-(1/K_1)}{(1/K_2)-(1/K_1)} \quad (I.15)$$

1.4.3 Modèle de Voigt

Le schéma de Voigt (la loi des mélanges) est le modèle le plus populaire et le plus couramment utilisé pour estimer les propriétés mécaniques dépendant de l'épaisseur des FGM [7]

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V(z) \quad (I.16)$$

$V(z)$: est la fraction volumique

1.5 Techniques d'élaboration des matériaux à gradient de propriétés.

Le processus de fabrication des matériaux à gradient de propriétés peut être divisé en établissant la structure dans l'espace non homogène « gradation » et la transformation de cette structure en matériau en bloc « consolidation ». Il existe de nombreux procédés d'élaboration des FGM, les paragraphes suivants s'attachent à décrire les principales méthodes d'élaboration des FGM utilisées dans l'industrie.

1.5.1 Coulage en bande (Tape Casting ou Doctor-Blade)

Le coulage en bande est une technique de mise en forme par voie liquide qui consiste à étaler une barbotine de poudres fines en suspension sur une surface plane en couches minces et régulières. L'étalement de la bande est obtenu par le mouvement relatif d'un réservoir ou sabot. La suspension est ainsi laminée par son passage entre la lame du réservoir et le support figure I.10, ce qui confère à la bande déposée une épaisseur uniforme sur toute sa longueur. La hauteur du couteau du réservoir par rapport au support détermine l'épaisseur de la bande

Les produits obtenus sont des feuillets avec des épaisseurs contrôlées (25- 1000 μm). Après un raffermissement de la pâte, les feuillets sont démoulés et ensuite découpés. [8]

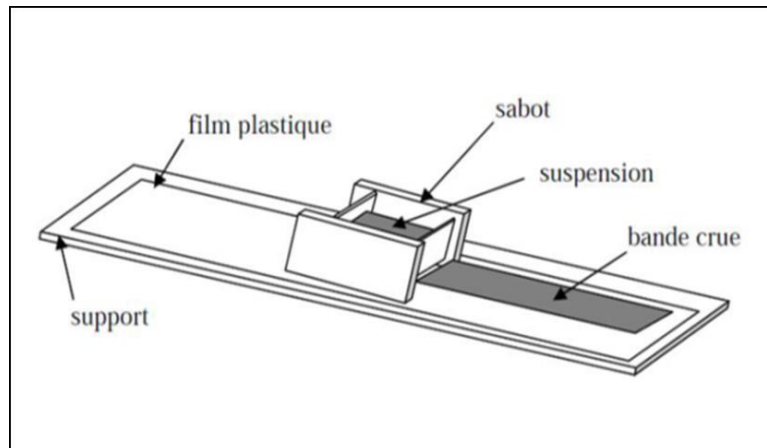


Figure I. 10 : Principe de la méthode coulage en bande

1.5.2 Frittage et infiltration (Sintering)

Par définition le frittage est un procédé de fabrication de pièces consistant à chauffer une poudre sans la mener jusqu'à la fusion. Sous l'effet de la chaleur, les grains se soudent entre eux, ce qui forme la cohésion de la pièce

Cette technique est constituée de deux étapes et convient à la fabrication d'un composite à gradient de fonction composé de deux matériaux dont les températures de fusion sont très différentes. La première étape est de fabriquer une matrice frittée du matériau à haute température de fusion avec un gradient de porosité. La seconde est de remplir ces porosités avec le deuxième matériau fondu par infiltration. Le résultat est excellent pour la diminution de la contrainte thermique

Cette technique peut être généralement appliquée pour plusieurs combinaisons de matériaux qui sont chimiquement inertes et qui ont des points de fusion bien différents les uns par rapport aux autres.[9]

1.5.3 Compaction sèche des poudres

Cette technique consiste à verser successivement dans un moule en acier les poudres, et à chaque fois qu'une poudre est versée une faible compression est exercée. Ensuite la compaction de l'ensemble des couches sera effectuée. Ce procédé est suivi généralement par une pression isostatique et un délainage. La densification sera enfin l'étape finale.

Ce procédé peut être envisagé pour la fabrication de pièces de formes complexes. En effet il s'applique aussi avec la technique du pressage isostatique, et de façon industrielle. [10]

1.5.4 Projection plasma (Plasma projection)

Un gaz soumis à une forte température (par exemple celle d'un arc électrique), se transforme en un état ionisé (plasma). Cette transformation est accompagnée d'un dégagement de chaleur important. Si une particule de céramique se trouve dans cet environnement, elle se fond totalement ou superficiellement, ce qui permet de la situer sur un substrat.

La projection plasma des particules des divers matériaux est devenue une méthode très utilisée pour fabriquer des FGM. L'équipement relativement simple, le rendement élevé du dépôt des particules sur des substrats à géométrie compliquée, les performances des surfaces en fonctionnement et la compatibilité des céramiques avec les métaux sont les avantages essentiels de cette technique[11]

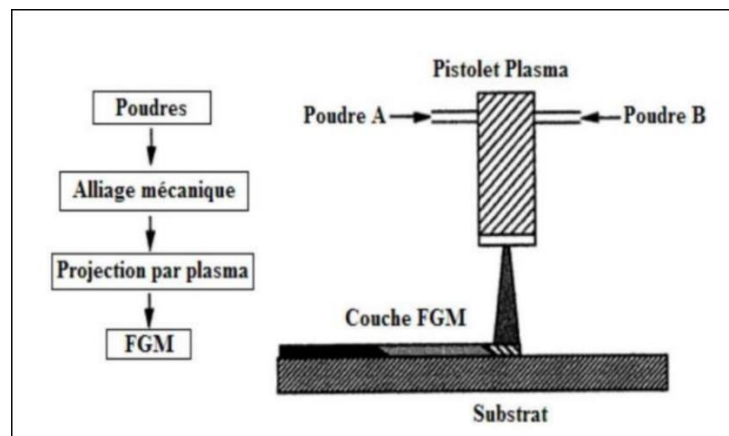


Figure I. 11: Fabrication d'une plaque FGM avec la projection plasma

1.5.5 La métallurgie des poudres (Powder metallurgy)

La métallurgie en poudre est une technique pour fabriquer les matériaux à gradient évalué, par trois étapes de base notamment : la pesée et le mélange de la poudre (a, b), le jalonnement de la poudre pré-mélangée (c) et finalement le frittage(d) Figure I.12 [12]

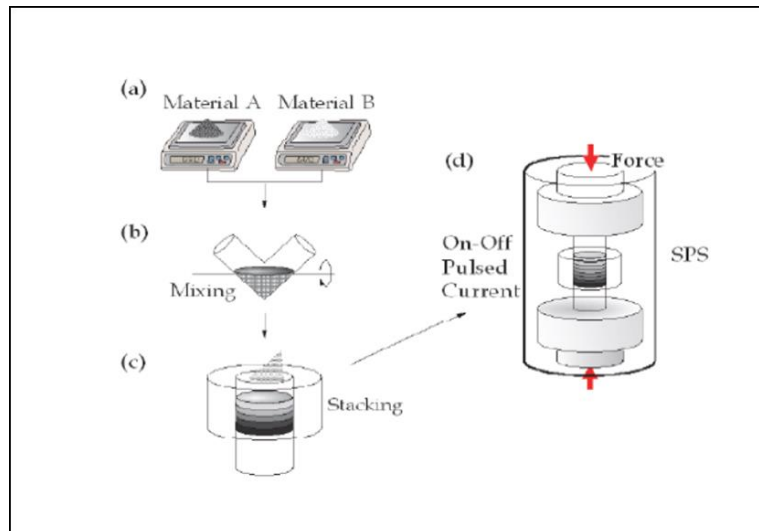


Figure I. 12: Processus de fabrication typique des FGM par la méthode de métallurgie des poudres

Cette technique a beaucoup d'avantages, on cite brièvement ci-dessous quelques-uns d'entre eux :

- Le procédé permet la réalisation de pièces à partir de métaux dont les méthodes classiques de fusion sont impossibles à adapter
- Une structure métallurgique fine et homogène
- Ce procédé de mise en forme des matériaux limite le nombre d'étape pour la production de produits finis usinés. La diminution des étapes a un impact direct sur les coûts de production.
- Obtention d'un produit de grande qualité à des prix compétitifs

1.5.6 Dépôts physique ou chimique en phase vapeur (C.V.D / P.V.D)

Les dépôts chimique ou physique en phase vapeur sont des techniques dans lesquelles les atomes du matériau source sont déposés sur la surface du substrat.

Les techniques de C.V.D. et P. V. D. peuvent être utilisées pour la préparation de F.G.M sur des substrats de formes compliquées,[13]

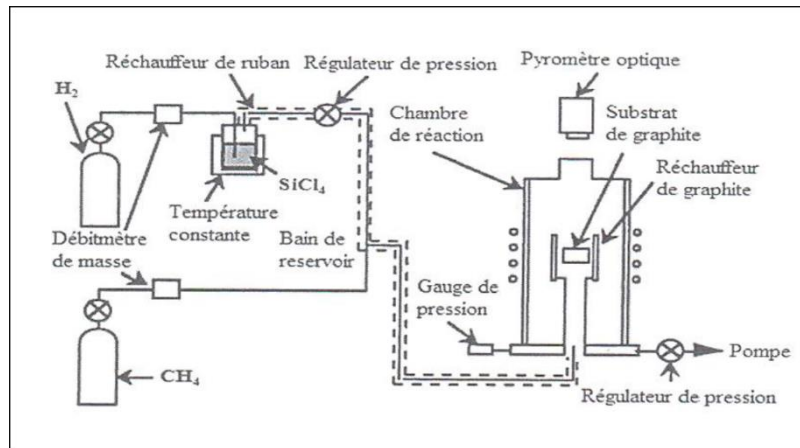


Figure I. 13: Schéma de l'installation pour la préparation d'un SiC/C FGM par le dépôt chimique en phase vapeur (CVD)

1.5.7 Coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine (Slip casting) consiste à couler une suspension dans un moule poreux qui va drainer le liquide grâce aux forces capillaires, laissant un tesson (couche de poudre compacte) sur la surface du moule. Après séchage, on obtient le corps en cru.

Donc le coulage s'effectuera en deux étapes essentielles :

- Formation du tesson ou « prise ».
- Consolidation du tesson « raffermissement ».

La filtration, c'est-à-dire la formation du tesson lors du coulage, peut être considérée comme un processus d'élimination d'une partie de l'eau de la barbotine, cette eau migre à travers la couche de tesson déjà formée, sous l'effet :

- Du pouvoir de succion du plâtre (coulage classique)
- D'une pression appliquée sur la barbotine (coulage sous pression).

Dans le cas de la fabrication de multicouches, après la formation du premier tesson, le dépôt de la deuxième couche s'effectue de manière telle que la barbotine ne pénètre pas dans le tesson formé. Ce procédé est successivement reproduit pour les autres couches.[14]

1.6 Domaines d'applications des matériaux à gradient

Le concept des matériaux à gradient évalué est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.14. Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique où les FGM ont fourni deux propriétés contradictoires telles que la conductivité thermique et d'isolation thermique dans un matériau. Actuellement elles permettent la production des

matériaux légers, forts et durables, et elles sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs.

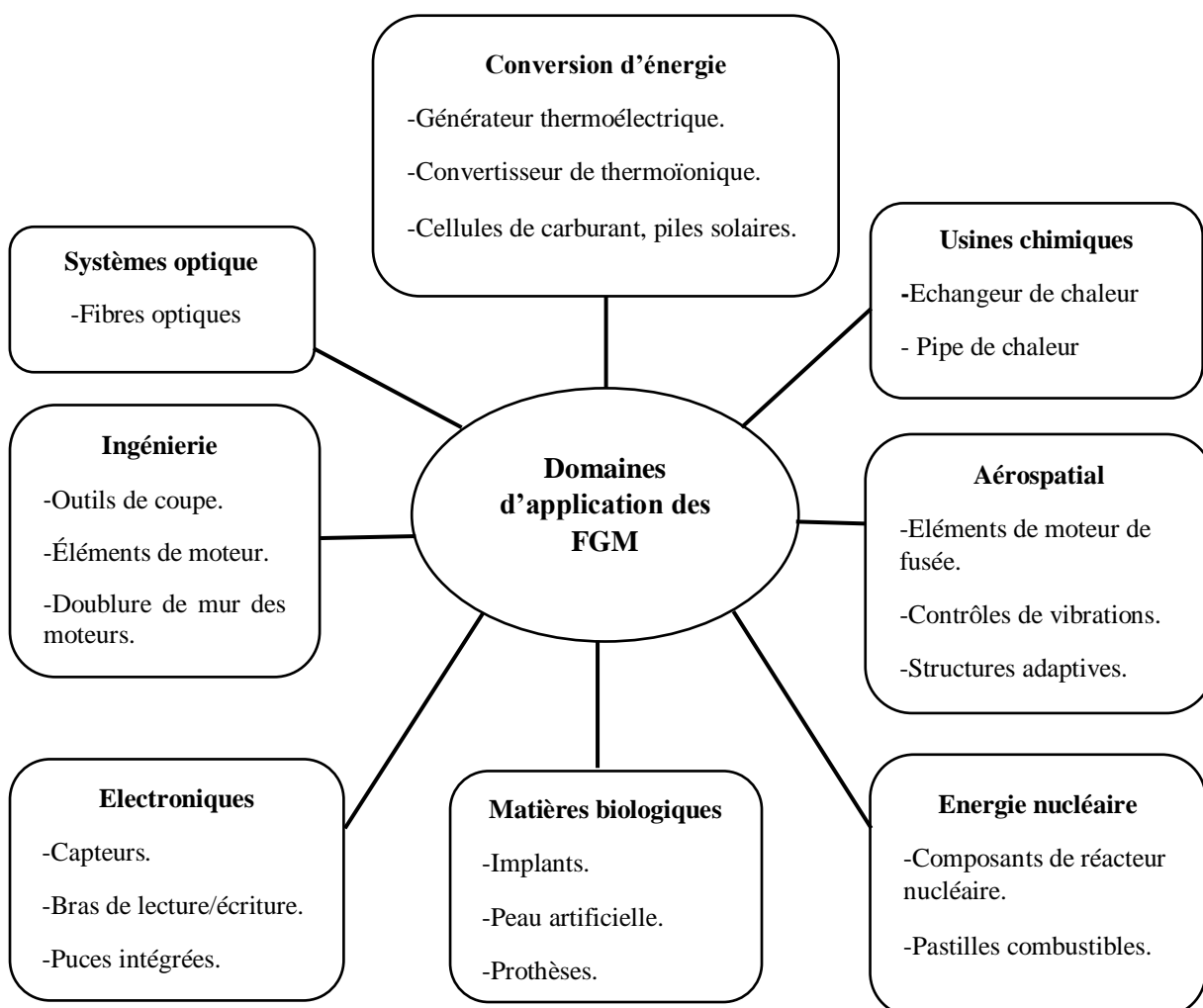


Figure I. 14 : Les principaux domaines d'application des FGM

1.7 Avantage et inconvénients de la FGM

Les matériaux fonctionnellement gradué présentent des avantages et des inconvénients

1.7.1 Avantages de la FGM

Outre l'accomplissement de son objectif principal, c'est à dire de fournir les différents requis des propriétés en divers points et des surfaces du futur produit qui, pourrait être réalisé par un simple revêtement et beaucoup d'autres soulignent divers avantages supplémentaires de la FGM. Ils énumèrent certains avantages qui en résultent principalement de la non-existence d'une interface forte FGM, tels que [15]

- Diminuer les contraintes thermiques causées par les différences de coefficients de dilatation thermique des matériaux utilisés
- Absence d'une interface nette devrait conduire à un contrôle d'ensemble mieux des contraintes
- Meilleure cohésion entre différents matériaux, par exemple un métal et une céramique
- Extension de la région fonctionnelle avant d'atteindre la valeur limite de la déformation plastique
- Suppression de délaminage
- Augmentation de la ténacité à la rupture
- Elimination des singularités des contraintes à divers endroits, tels que les surfaces libres, des coins, des racines de fissures, etc.

1.7.2 Inconvénients de la FGM

Le principal obstacle à une application plus large de la FGM est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes, par exemple, la température de fusion, des affinités différentes pour divers autres éléments, la taille des particules, la morphologie, etc ; un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Puis, si la température de fabrication est d'environ (T_1), la céramique est encore non fondue et la structure finale contient des particules de céramique non fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, une telle structure présente une grande porosité et une petite adhérence entre les différents composants et son application générale est limitée. Cependant, pour des applications spéciales, la présence de particules très dures (carbures) dans une matrice solide peut être souhaitable. [16]

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini les matériaux à gradient de propriétés « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leurs définitions, leurs propriétés et leurs domaines d'application. Les différentes lois de mélange ont été présentées et la variation spatiale et progressive des propriétés de ces matériaux permet de créer des structures innovantes.

Pour conclure, nous avons présenté les diverses lois possibles qui permettent de décrire la variation des propriétés matérielles, telles que le module de Young, la masse volumique et le coefficient de Poisson du matériau FGM en fonction de l'épaisseur de la structure. Ces lois pouvaient être de types sigmoïdes, exponentielles, ou même loi de puissance.

Références

- [1] ZAOUI FATIMA ZOHRA, Contribution à l'étude de la vibration libre des structures fonctionnellement graduées (FGM) par l'intermédiaire des théories de déformation de cisaillement avancées. 2020/2021, page 5
- [2] BENADOUDA Mourad Etude du comportement mécanique des structures épaisses en tenant compte de l'effet de la microstructure fonctionnellement gradué. 2018/2019
- [3] ABDELBARI Salima, Etude dynamique des structures à section en matériaux à gradient évalué FGM 2015/2016
- [4] Zemani KADA Sebakhi FAIZA, Etude des vibrations libres des plaques épaisses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur un support élastique de Winkler-Pasternak 2014/2015
- [5] ZARGA DJALOUL , Analyse élastique de la déformation thermomécanique des plaques épaisses non homogène 2019/2020
- [6] BENBAKHTI ABDELDJALIL, Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM (Functionally Graded Materials) 2017
- [7] CHITOUR Mourad, ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRUCTURES SANDWICH 2022/2023
- [8] YOUNSI Abderahman , Proposition d'une théorie de déformation de cisaillement 2D et 3D pour l'étude du comportement mécanique des plaques 2018/2019
- [9] MENASRIA Abderrahmane, Etude de l'effet de la Microstructure Sur le Flambement Thermique des Plaques Fonctionnellement Graduées 2018/2019
- [10] CHIKH ABDELBAKI , ÉTUDE ET ANALYSE DE LA STABILITÉ THERMIQUE DES PLAQUES ÉPAISSES EN UTILISANT LES THÉORIES NON LINÉAIRES 2015/2016
- [11] REFRAFI Salah , Etude des effets des conditions hygrothermiques sur la réponse mécanique des plaques sandwiches fonctionnellement graduées en utilisant une théorie avancée des plaques 2020
- [12] BOUSSOULA ABDERRAFIK , Modélisation du comportement thermomécanique des plaques sandwiches FGM en utilisant des théories d'ordre élevé avancé. 2019/2020
- [13] KACI Abdelhakim, ETUDE ET ANALYSE NON LINEAIRE DES PLAQUES MINCES NON HOMOGENE EN FLEXION CYLINDRIQUE 2011/2012

[14] BOULEFRAKH LAID , Etude Du Comportement Mécanique Des Structures Posées Sur Des Fondations Viscoélastique 2020/2021

[15] BOUKHLIF Zoulikha, Modélisation analytique de la vibration libre des plaques FGM posées sur fondation élastique 2019/2020

[16] ELLALI Mokhtar, Analyse du flambement thermique des matériaux FGM piézoélectriques 2018/2019

Chapitre 2

Analyses des structures FGM par les théories d'élasticités

2 Généralité sur les théories d'élasticité

Introduction

Les structures isotropes et composites sont largement employées en ingénierie mécanique, étant données qu'elles se retrouvent dans une multitude de constructions, y compris les carrosseries de véhicules, les conduits d'eau et de gaz, les réservoirs, entre autres. L'emploi fréquent de ces structures (plaque ou poutre) a incité les scientifiques à élaborer des théories aptes à dépeindre fidèlement leur comportement mécanique.

L'objectif principal des théories élaborées est de calculer les déformations et les contraintes au sein d'une structure exposée à des charges, tout en simplifiant le problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel grâce à des hypothèses réductrices relatives à la cinématique des déformations et l'état des contraintes par rapport à l'épaisseur.

2.1 La théorie classique des plaques minces de Love-Kirchhoff (CPT)

Dans cette théorie on présente un modèle plus simple est le plus général qui se base sur les hypothèses de Love-Kirchhoff, dite aussi théorie des plaques minces avec une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur ou il y'a conservation des normales en négligeant ainsi le cisaillement transverse due à la faible épaisseur de la plaque. On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque. Il est noté que cette théorie n'est pas appliquée dans le cas des plaques modérément épaisses ou fortement épaisses. [1]

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (\text{II.1})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (\text{II.2})$$

$$w(x, y) = w_0(x, y) \quad (\text{II.3})$$

Avec : $(u_0 = v_0 = w_0)$ sont les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

2.2 La théorie classique des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT)

Ce modèle basé sur la théorie classique des poutres (CBT) satisfait l'hypothèse d'Euler-Bernoulli avec une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. La droite perpendiculaire à l'axe moyen avant déformation, reste droite après déformation. L'hypothèse d'Euler-Bernoulli néglige l'effet de cisaillement transversal et la déformation est entièrement due à la déformation de flexion. Une description détaillée de ces modèles, est donnée par Timoshenko et Woinowsky-Kreiger, Reddy [2]

Le champ de déplacement de ce modèle (CBT) est donné par l'équation suivante :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (\text{II.4})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{II.5})$$

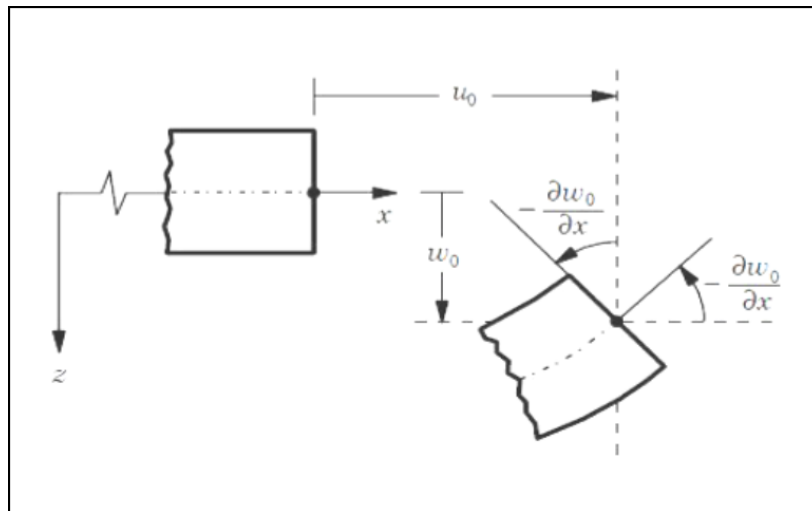


Figure II. 1 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté: Des Plaques selon les hypothèses de la théorie classique (CPT).

Des poutres selon les hypothèses de la théorie classique d'Euler-Bernoulli(CBT)

2.3 La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT -First Shear Deformation Theory)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) (First-Order Shear Deformation Plate Theory) a prolongé la théorie classique des plaques en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse.[3]

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) se base sur les hypothèses de Reissner-Mindlin, d'où :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque
- La contrainte normale (σ_z) est négligeable devant les autres composantes
- Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.
- L'effet de l'inertie de rotation est inclus

Dans la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, le champ de déplacement est exprimé sous la forme :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \quad (\text{II.6})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \quad (\text{II.7})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.8})$$

Avec : (u_0, v_0, w_0) et ϕ_x et ϕ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y, respectivement.

2.4 Théorie des poutres du premier ordre (Timoshenko TBT)

Ce modèle intègre les déformations de cisaillement transversales qui demeurent constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Timoshenko et Woinowsky-Kreiger, Reddy, ainsi que Miara et Podio-Guidugli ont réalisé des recherches concernant ce modèle.

La théorie du premier ordre se fonde sur le champ de déplacement, suivant les mêmes postulats et limitations que la théorie classique, toutefois, la poutre est considérée dans un état normal détendu.

$$u(x, y) = u_0(x) + z\phi(x) \quad (\text{II.9})$$

$$w(x, y) = w_0(x) \quad (\text{II.10})$$

Avec : (u_0, w_0) et $\phi(x)$ sont respectivement les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y (figure II.2). Le champ de déplacement défini dans l'expression ci-dessus permet de reprendre la théorie classique des poutres (CBT) décrite dans la dernière

section par le remplacement : $\phi(x) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$

La FSDT est donc une extension de la cinématique de la CBT par une déformation de cisaillement transversale de la poutre dans leur hypothèse cinématique

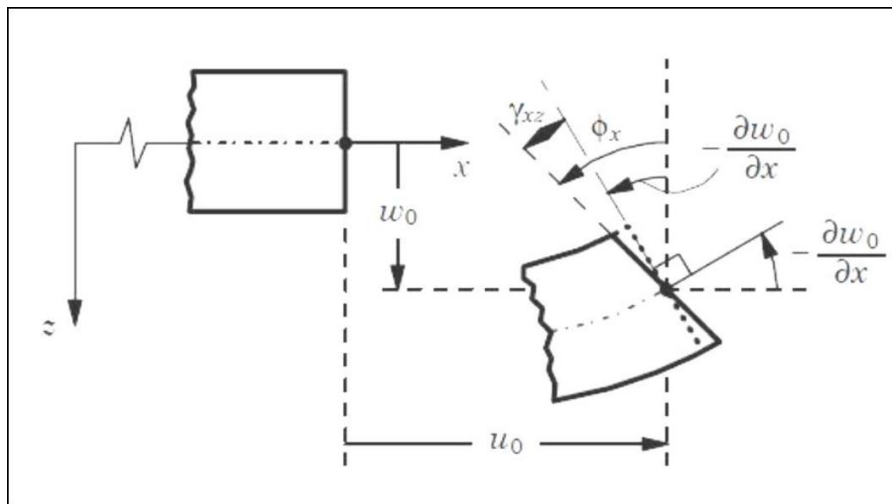


Figure II. 2 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté : Des Plaques selon les hypothèses de la théorie du premier ordre de Reissner-Mindlin - Des poutres selon l'hypothèse de la théorie du premier ordre de Timoshenko (TBT)

Les résultats fournis par la théorie de premier ordre sont globalement satisfaisants. Cependant, elle requiert l'utilisation de facteurs de correction pour représenter de manière adéquate les contraintes de cisaillement, notamment dans des situations générales et dans le cas des plaques épaisses. Afin de surmonter les limitations liées à ces corrections, des théories de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur ont été développées pour les poutres.

2.5 Théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT. High Shear deformation Theory)

2.5.1 Théorie des plaques d'ordre élevé

Afin d'éviter l'introduction de facteurs de correction et de dépasser les limitations inhérentes à la théorie classique des plaques (CPT) ainsi qu'à la théorie du premier ordre (FSDT), plusieurs auteurs ont développé des théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDT). Ces théories reposent sur une distribution non linéaire du champ de déplacement à travers l'épaisseur de la plaque, permettant de prendre en compte les effets du cisaillement transverse, et dans certains cas, ceux de la déformation normale transverse. Contrairement aux modèles de premier ordre, les théories HSDT ne nécessitent pas l'utilisation de facteurs de correction.[2].

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \quad (\text{II.11})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \quad (\text{II.12})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (\text{II.13})$$

Avec : u_0, v_0, w_0 et φ_x, φ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes x et y respectivement.

On pose aussi : $\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$ et $\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y$

La fonction $f(z)$ représente la distribution du cisaillement transverse à travers l'épaisseur de la plaque et caractérise les différentes théories de plaque. Dans le cas de la théorie classique des plaques (CPT), on considère $f(z)=0$, ce qui implique que les effets de cisaillement transverse sont négligés. En revanche, la théorie du premier ordre (FSDT) introduit une variation linéaire du déplacement selon l'épaisseur, correspondant à $f(z)=z$

2.5.2 Théorie des poutres d'ordre élevé

Contrairement aux théories de Bernoulli (CBT) et de Timoshenko (TBT), qui reposent sur des hypothèses de distribution linéaire des déplacements à travers l'épaisseur, la théorie de la déformation de cisaillement d'ordre supérieur pour les poutres adopte une distribution non linéaire des champs de déplacement au sein de la section. Cette approche permet de prendre explicitement en compte les effets de la déformation de cisaillement transverse.[2]

Le champ de déplacement est généralement écrit comme suit :

$$u(x, y) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x) \quad (\text{II.14})$$

$$w(x, y) = w_0(x) \quad (\text{II.15})$$

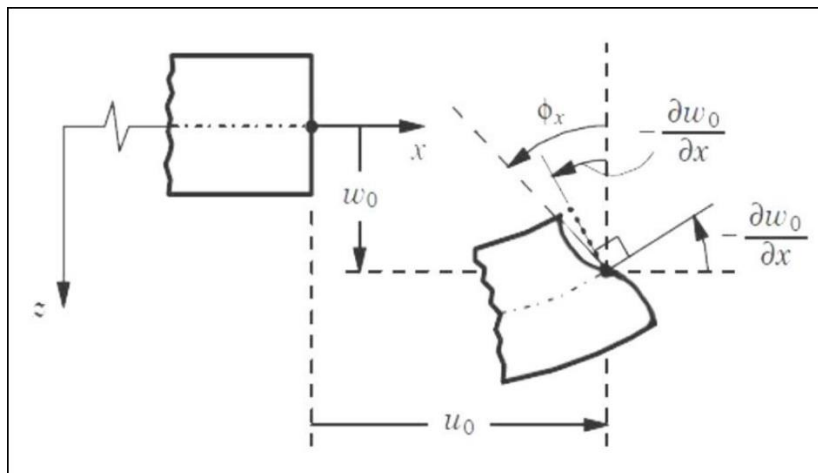


Figure II. 3 : Géométrie déformée et non déformée d'un côté - Des Plaques et des poutres selon l'hypothèse de la théorie d'ordre élevé

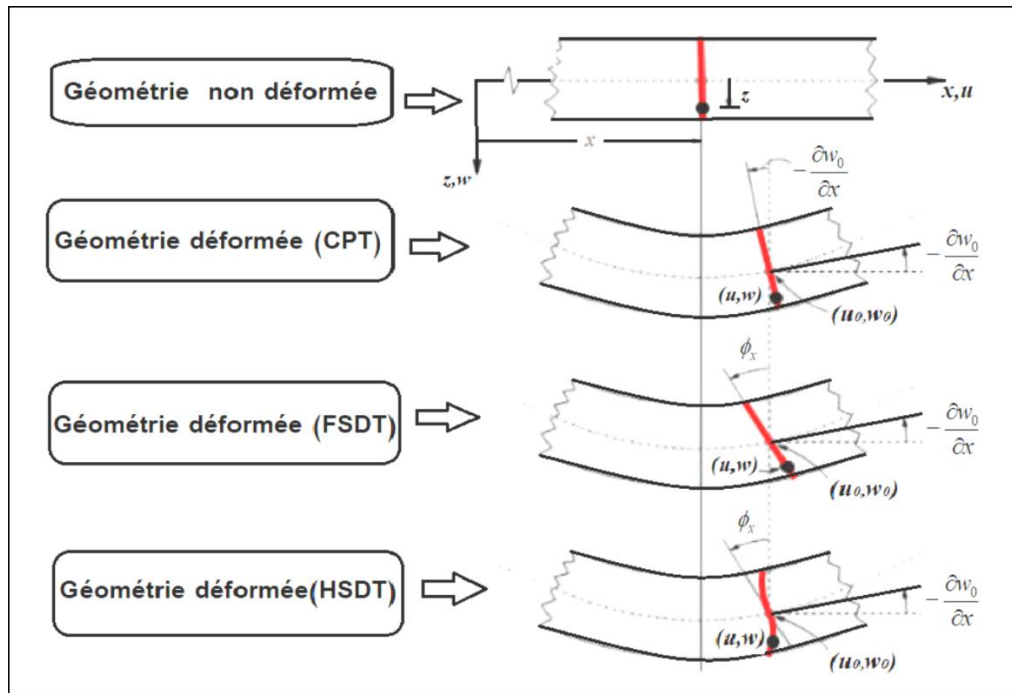


Figure II. 4 : Comparaison des différentes théories d'ordre élevé (HSDT) avec (FSDT) et (CPT)

2.6 Les différentes théories (fonction de cisaillement $f(z)$)

- Approche de Reddy

Parmi les théories les plus communément utilisées par la communauté scientifique, celle du Reddy où le champ de cisaillement est cubique, sur un tel modèle la distribution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur est parabolique, ainsi les conditions sur les surfaces libres sont satisfaites, la fonction de cisaillement dite (Three Shear Déformation Theory –TSDT) [4] s'écrit dans un tel modèle comme suit :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (\text{II.16})$$

- Approche de Touratier

Dite de déformation de cisaillement sinusoïdal (Sinusoidal Shear Déformation Theory SSDT), a pour objet de modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{z}{h} \right) \quad (\text{II.17})$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par les modèles (sinus) prennent une

forme sinusoïdale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy [5]

- Approche de Karama et al.

Elle est développée par (Karama, Afaq, and Mistou 2003), elle propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche et permet aussi un développement en puissance pair et impair de la variable z , alors que la fonction (sinus) de (Touratier,1991) ne permet qu'un développement en puissance impair.[6]

$$f(z) = ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (\text{II.18})$$

- Approche de Ambartsumyan

Une approche proposée par Ambartsumyan [7] pour écrire le champ des déplacements de la théorie de déformation d'ordre supérieur est donnée comme suit :

$$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right) \quad (\text{II.19})$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (The hyperbolic shear deformation plate theory HSDPT) développée par (Ait Atmane et al.) est obtenue en prenant [18] :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1\right]} \quad (\text{II.20})$$

D'autres théories d'ordre élevé ont été développées en utilisant des différentes fonctions de cisaillement transverse. Le Tableau II.1 montre les différentes fonctions caractérisant chaque théorie.

Tableau II. 1 : Quelques modèles de fonction de forme $f(z)$ présentées par la littérature pour la théorie HDST

AUTEURES	FONCTION DE CISAILLEMENT
Reddy	$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Ait Atmane et al	$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\left[\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right]}$
Tounsi et al	$f(z) = z \left[\frac{1}{4} - \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right]$
Ambartsumyan	$f(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$
Karama et al.	$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$
Touratier	$f(z) = \frac{z}{2} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$
Nguyen	$f(z) = \left[\sinh^{-1}\left(\frac{3z}{h}\right) \right] - z \left[\frac{6}{h\sqrt{13}} \right]$
Reissner	$f(z) = \frac{5z}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$
Zenkour	$f(z) = \left[h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) \right] - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$
Refrafi	$f(z) = (0.1212\pi z \left[\pi - (0.135)^{1/3} \cosh\left(\frac{\pi z}{h}\right) \right])$
Chikh et al.	$f(z) = \frac{2z \sinh\left(\frac{z^2}{h^2}\right)}{\left[2 \sinh\left(\frac{1}{4}\right) + \cosh\left(\frac{1}{4}\right) \right]}$

2.7 Les théories tridimensionnelles (3D et quasi-3D)

Pour les plaques épaisses où l'effet de l'étirement de l'épaisseur est plus prononcé, les théories bidimensionnelles de déformation de cisaillement (HSDT 2D) ne sont pas adoptées à ce type de plaques. Pour cela, de nouvelles théories 3D et quasi-3D ont été développées pour pouvoir introduire l'effet de déformation normale et cela en modifiant le champ de déplacement dans l'équation (II.20), en ajoutant des termes d'ordre supérieur au déplacement transversal comme il est représenté dans le champ des déplacements suivant [8] :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + f(z)\varphi_x(x, y) \quad (\text{II.20})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + f(z)\varphi_y(x, y) \quad (\text{II.21})$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\theta(x, y) \quad (\text{II.22})$$

Où $\theta(x, y)$ est une fonction de déplacement qui tient compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur; et $g(z)$ est une fonction de forme qui est déterminée à partir des conditions limites sans contrainte sur les surfaces supérieure et inférieure de la plaque.

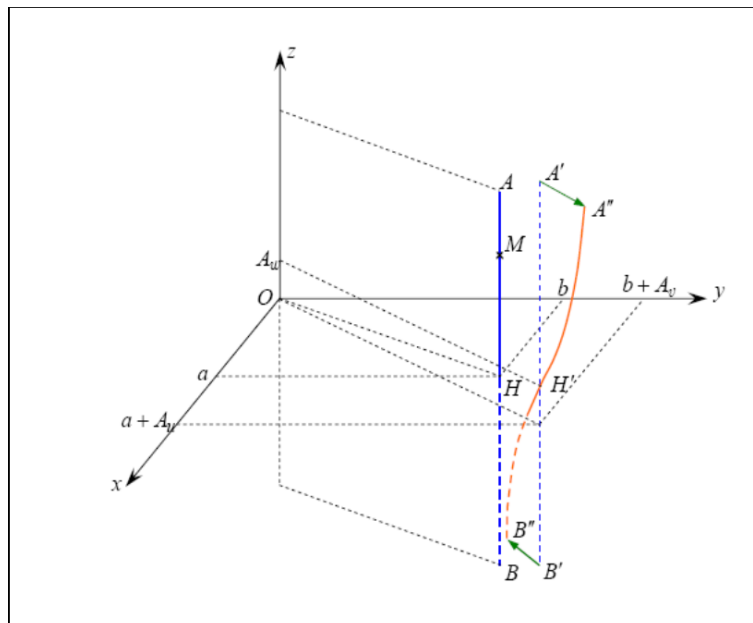


Figure II. 5: Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur

2.8 Théorie raffinée de déformation des plaques (RPT)

Afin de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations des théories à ordre élevé, Shimpi [9] a pu développer en 2002, un modèle nommé la théorie raffinée de déformation des plaques RPT (Refined Plate Theory). Cette théorie est variationnelle, elle n'exige pas de facteur de correction de cisaillement, et donne une description parabolique de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur.

Le nombre des inconnues dans la présente théorie d'ordre élevé à deux variables est seulement quatre, par contre, égale à cinq ou plus pour les autres théories d'ordre élevé

[10,11,12,13]

Le champ de déplacement de cette théorie est généralement écrit comme suit:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (\text{II.23})$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (\text{II.24})$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (\text{II.25})$$

Où (u_0, w_0) sont les déplacements dans les directions x et y d'un point situé sur le plan médian de la plaque et (w_b, w_s) sont respectivement les composantes de la flexion et du cisaillement du déplacement transversal et $f(z)$ est une fonction de cisaillement transverse.

Conclusion

on a présenté les différentes théories de déformation des plaques soit celles qui se basent sur la théorie tridimensionnelle d'élasticité ou sur les théories des plaques monocouches en commençant à savoir la théorie classique et la théorie du premier ordre, en passant par les théories d'ordre élevé. A la fin du chapitre, on a eu l'occasion dévoilé une nouvelle théorie de déformation en cisaillement des plaques quasi 3D qui prend en considération l'effet de l'étirement de l'épaisseur cette théorie permet de réduire le nombre d'inconnus à cinq réduisant ainsi les temps de calcul.

Références

- [1] BELAROUCI ABDELGHANI , ETUDE COMPARATIVE DU COMPORTEMENT DES PLAQUES EPAISSES P-FGM ET S-FGM 2020/2021
- [2] CHITOUR Mourad, ETUDE DU COMPORTEMENT MECANIQUE DES STRUCTURES SANDWICH 2022/2023
- [3] BENAHMED Abdelkrim , Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre réduit de variable 2017/2018.
- [4] SOLTANI Kheira Etude du comportement mécanique des structures épaisses en matériaux non homogènes 2018/2019
- [5] BACHIR BOUIADJRA Rabbab , Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques épaisses en Composite sur Fondations Elastiques 2014/2015
- [6] MEKSI RAFIK , INVESTIGATION SUR LES DIFFERENTS COMPORTEMENTS MECANQUES DES STRUCTURES EN MATERIAUX COMPOSITES AVANCES 2018/2019
- [7] Ambartsumyan S.A.(1969). « Theory of anisotropic plate ». Tech Publishing Co.
- [8] ZAOUÏ FATIMA ZOHRA, Contribution à l'étude de la vibration libre des structures fonctionnellement graduées (FGM) par l'intermédiaire des théories de déformation de cisaillement avancées. 2020/2021,
- [9] **S. Refrafi et al., (2020).** « Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations ». Computers and Concrete, An International Journal 25(4), 311-325.
- [10] Reddy J.N. (1984). « Simple higher-order theory for laminated composite plates ». J Appl Mech 1984; 51:745–52.
- [11] Touratier, (1991). « An efficient standard plate theory ». International Journal of Engineering
- [12] M. Karama., K.S. Afaq., S. Mistou, (2003). « Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity ».Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546.

[13] Ait Atmane H., Tounsi A., Mechab I., Adda Bedia E.A. (2010), « Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory ». Int. J. Mech. Mater. Design; 6 (2): 113-121.

Chapitre 3

Etude analytique de la flexion
des poutres poreuses en FGM
<<Résultats, Validation et
Interprétations>>

3 Etude analytique de la flexion des poutres poreuses en FGM

Introduction

La composition et la microstructure distinguent les matériaux à gradient de propriétés (FGMs) des matériaux composites conventionnels, qui possèdent généralement des couches distinctes avec des transitions abruptes de propriétés. Les FGMs peuvent être conçus pour répondre aux exigences spécifiques de diverses applications, allant des composants résistant à haute température dans l'aéronautique aux surfaces résistantes à l'usure dans les applications tribologiques.

Les propriétés uniques des matériaux à gradient fonctionnel (FGMs) ont suscité un intérêt de recherche considérable concernant leur comportement en flexion sous diverses conditions de chargement. Cela inclut la flexion statique, l'analyse des vibrations libres et le comportement au flambement des poutres, plaques et coques en FGM [2, 3]. La littérature suggère que l'analyse des plaques en FGM peut être abordée selon divers cadres théoriques, notamment la théorie classique des plaques (CPT) [4], la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) [5, 6], et la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT).

Selon la littérature, des recherches utilisant une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) utilisant des termes intégraux pour déterminer le comportement des plaques en FGM ont été publiées. Dans [9], les auteurs ont proposé une nouvelle théorie simple de déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) pour analyser la stabilité thermique des plaques sandwich à gradient fonctionnel (FG). Cette analyse vise à déterminer la température critique de flambage de la plaque sandwich FG sous l'effet des charges thermiques. Messaoudi et al. [10] ont adopté une approche simplifiée du problème en utilisant un nouveau champ de déplacement avec moins d'inconnues que les théories existantes de déformation par cisaillement quasi-3D. Chitour et al. [11] ont proposé un cadre théorique pour dériver les équations d'équilibre régissant le comportement des poutres sandwich à gradient fonctionnel (FG). Ce cadre leur a permis d'obtenir des solutions analytiques aux problèmes de flexion de ces poutres. Plusieurs travaux de recherche récents sur les poutres en FGM utilisant différents types de matériaux, de chargements et de conditions aux limites ont été publiés.[12-16]

Plusieurs publications ont exploré l'effet de la porosité sur le comportement des poutres FGM. Ghazwani et al. [17] ont étudié les vibrations forcées non linéaires de poutres sandwich fabriquées à partir de matériaux FGM poreux avec une couche centrale viscoélastique. Leur

analyse utilise des théories en zigzag d'ordre supérieur pour les déformations normales et de cisaillement au sein du noyau viscoélastique. L'étude examine comment ces poutres vibrent sous l'effet de forces externes en tenant compte de la porosité des faces FGM et de la nature viscoélastique de la couche centrale. La théorie en zigzag d'ordre supérieur intègre les effets des déformations de flexion et de cisaillement au sein du matériau central. [18-20]

Ce travail vise à développer une théorie originale de déformation de cisaillement HSDT 2D et quasi-3D incluant des termes intégraux, pour étudier le comportement en flexion statique et au flambement des poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FG) présentant des porosités. La poutre proposée présente quatre types de distribution poreuse et est étudiée en flexion et flambement statiques avec diverses conditions aux limites. Pour analyser le comportement de la poutre, les équations d'équilibre sont dérivées en utilisant le principe des travaux virtuels, puis résolues à l'aide de la technique de Navier. Afin de valider la précision et l'efficacité de cette nouvelle théorie, les résultats calculés sont comparés à ceux obtenus à partir d'autres théories établies. De plus, le chapitre présente et analyse un ensemble complet d'études paramétriques visant à explorer l'influence de divers paramètres sur le comportement du système.

3.1 Propriétés matérielles imparfaites des poutres FGM

La poutre en matériau à gradient fonctionnel (FG) est soumise à des conditions aux limites variables en longueur (l), en épaisseur (h) et en largeur (b), où les propriétés du matériau d'une composition P-FGM varient le long de la direction z, selon un indice de gradient fonctionnel k(Fig.1) :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V(z) \quad \text{Et} \quad V(z) = \left(\frac{1+z}{2h}\right)^k \quad (\text{III.1})$$

$P(z)$ est la variation des propriétés mécaniques à travers l'épaisseur et $V(z)$ est la fraction volumique de la céramique.

Quatre modèles de porosité sont utilisés. (Fig. III.1), [18].

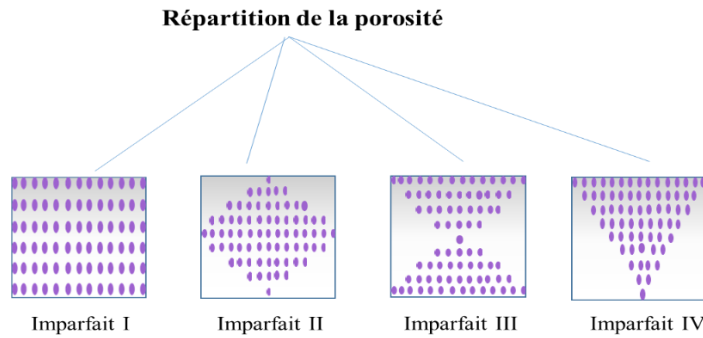


Figure III. 1 : Géométrie et système de coordonnées de la poutre FG imparfaite

Les propriétés des matériaux poreux pour différents profils de porosité et coefficients de porosité (Ω) sont données par

$$\text{Imparfait I (Motif en H)} : P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m - \frac{\Omega}{2}(P_c + P_m)$$

$$\text{Imparfait II (Motif en O)} : P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m - \frac{\Omega}{2}(P_c + P_m) \left(1 - \frac{2|z|}{h}\right) \quad (\text{III.2})$$

$$\text{Imparfait III (Motif en X)} : P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m - \frac{\Omega}{2}(P_c + P_m) \left(\frac{1+z}{2h}\right)$$

$$\text{Imparfait III (Motif en V)} : P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m - \frac{\Omega}{2}(P_c + P_m) \left(\frac{2|z|}{h}\right)$$

3.2 Formulations théoriques de la poutre à gradient fonctionnel (FG)

3.2.1 Cinématique et déformations

Le champ de déplacement du HSDT conventionnel est donné par :

$$u(x,z)=u_0(x) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + k_a f(z) \int \theta(z) dx \quad (\text{III.3})$$

$$w(x,z)=w_0(x) + g(z)\theta(x)$$

Où u_0 , w_0 et θ sont les trois déplacements inconnus du plan médian de la poutre. Par une méthode de type Navier, les intégrales utilisées dans les équations ci-dessus peuvent être données :

$$\int \theta dx = A' \frac{\partial \theta}{\partial x}, A' = -\frac{1}{\alpha^2}, k_a = -\alpha^2, \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{m\pi}{l} \quad (\text{III.4})$$

Où le coefficient A' est exprimé en fonction du type de solution utilisé, dans ce cas via la méthode de Navier.

$f(z)$ représente la fonction de forme est représentée comme :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad \text{Et} \quad g(z) = \frac{2}{15} \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.5})$$

n est un nombre réel défini comme : $n = 0$ pour le cas 2D et $n = 1$ pour le cas quasi-3D.

Les composantes de déformation linéaire non nulle obtenues à partir des équations (3) et (4) sont :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x^b + f(z)k_x^s, \{\gamma_{xz}\} = f'(z)\{\gamma_{xz}^0\} + g(z)\{\gamma_{xz}^1\}, \varepsilon_z = g'(z)\varepsilon_z^0 \quad (\text{III.6a})$$

$$\{\varepsilon_x^0\} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\}, \left\{ k_x^b \right\} = \left\{ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right\}, \{\gamma_{xz}^0\} = \{k_1 \int \theta dx\}, \{\gamma_{xz}^1\} = \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right\}, \varepsilon_z^0 = \theta \quad (\text{III.6b})$$

Les équations constitutives élastiques linéaires à un point sont les suivantes :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.7})$$

Les expressions de C_{ij} ($i, j = 1, 3, 5$) en termes de constantes d'ingénierie :

- Cas 2D ($\varepsilon_z = 0$), alors C_{ij} sont :

$$C_{ij} = E, (i = 1); \quad C_{ii} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}, (i = 5) \quad (\text{III.8a})$$

- Cas quasi-3D ($\varepsilon_z \neq 0$), alors C_{ij} sont :

$$C_{ii} = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)}, (i = 1, 3); \quad C_{ij} = \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu^2(z)}, (i, j = 1, 3); \quad C_{ii} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}, (i = 5) \quad (\text{III.8b})$$

3.2.2 Équations régissant

En utilisant le principe du travail virtuel, on peut l'exprimer comme suit :

$$\delta U - \delta V = \left(\int_A \left[N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_x \delta \varepsilon_z^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_x^s \delta k_x^s + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0 + S_{xz} \delta \gamma_{xz}^1 \right] dA \right) \quad (\text{III.9})$$

$$- \left(\int_A q \delta w_0 dA - \int_A q g(z) \delta \theta dA - \int_A N_0 \frac{d(w_0 + g(z)\theta(x))}{dx} \frac{d\delta(w_0 + g(z)\theta(x))}{dx} dA \right) = 0$$

Où A est la surface, et les résultantes de contrainte N, M, Q et S sont les composantes de force et de moment représentées sous les formes suivantes.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz, \quad N_z = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z g'(z) dz, \quad \begin{Bmatrix} S_{xz} \\ Q_{xz}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}) \begin{Bmatrix} g(z) \\ f'(z) \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.10})$$

De l'équation (6) à l'équation (9), on obtient les équations gouvernantes suivantes :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0$$

$$\delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + q + N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.11})$$

$$\delta\theta : -N_z k_1 M_x^s + k_1 A' \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + qg(z) + N_0 g(z)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

En utilisant les équations (6), (7) et (8b), les résultantes de contrainte sont obtenues comme suit

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x^b \\ M_x^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & B^s \\ B & D & D^s \\ B^s & D^s & H^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^b \\ k_x^s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} L \\ L^a \\ R \end{bmatrix} \varepsilon_z^0 \quad (\text{III.12a})$$

$$\begin{Bmatrix} Q \\ S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F^s & X^s \\ X^s & A^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \end{Bmatrix}, N_z = R^a \varepsilon_z^0 + L(\varepsilon_x^0) + L^a(k_x^b) + R(k_x^s) \quad (\text{III.12b})$$

$$\{A \ B \ D \ B^s \ D^s \ H^s\} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) [1, z, z^2, f(z), zf(z), f^2(z)] \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu}{\nu} \\ 1 \\ \frac{1-2\nu}{2\nu} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{III.13a})$$

$$S = \{S_{xz}\}, Q = \{Q_{xz}\}, \begin{Bmatrix} L \\ L^a \\ R \\ R^a \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \\ g'(z) \frac{1-\nu}{\nu} \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (\text{III.13b})$$

$$(F_{44}^s, X_{44}^s, A_{44}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{E(z)}{2(1+\nu)} [f'^2(z), f'(z)g(z), g^2(z)] \right) dz \quad (\text{III.13c})$$

$$F^s = F_{44}^s, A^s = A_{44}^s, X^s = X_{44}^s$$

En substituant les équations (6), (12) et (13) dans l'équation (11), les équations de stabilité sont définies par

$$\delta u_0 : A \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (B^s k_1 + L) \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

$$\delta w_0 : B \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (D_{11}^s k_1 + L^a) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q + N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$\delta \theta : -(L + k_1 B_{11}^s) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (L^a + k_1 D_{11}^s) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (k_1^2 H_{11}^s + 2k_1 R + R^a) \theta +$$

$$(k_1^2 A'^2 F_{44}^s + k_1 A' X_{44}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + (A_{44}^s + k_1 A' X_{44}^s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + qg(z) + N_0 g(z)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{III.14})$$

3.2.3 Solution exacte pour diverses conditions limites de la poutre FG :

La solution exacte des équations (14) pour les poutres FGM dans diverses conditions aux limites peut être construite en utilisant les fonctions admissibles répertoriées dans le tableau 1

Tableau III. 1 : Fonctions admissibles X_m, Y_n

Conditions aux limites	Fonctions admissibles X_m et Y_n	
	X_m	Y_n
SS	$\sin(\alpha x)$	$\sin(\lambda x)$
CC	$\sin(\alpha x) \cos(\alpha x)$	$\sin(\lambda x) \sin(\lambda x)$
CF	$\cos^2(\alpha x)(\sin^2(\alpha x) + 1)$	$\sin^2(\lambda x)$

Avec : $\alpha = m\pi / l$ et $\lambda = n\pi / b$

$$\begin{Bmatrix} u_0(x, y) \\ w_0(x, y) \\ \theta(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_m \frac{\partial X_m(x)}{\partial x} Y_n(x) \\ W_m X_m(x) Y_n(x) \\ \theta_m X_m(x) Y_n(x) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Où U_m, W_m et θ_m sont les coefficients de déplacement inconnus

En remplaçant les extensions de U_m, W_m et θ_m des équations (14) dans les équations d'équilibre (12), les solutions analytiques peuvent être obtenues à partir de :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} + N_{cr} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ W_{mn} \\ \theta_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.16})$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= A_{11} L_{12}, \quad a_{21} = -BL_{13}, \quad a_{12} = -BL_{12}, \quad a_{22} = DL_{13}, \quad a_{13} = B^s k_1 L_{12} - LL_{12} \\
 a_{31} &= B^s k_1 L_{13} - LL_{13}, \quad a_{23} = -D^s k_1 L_{13} + L_a L_{13}, \quad a_{32} = -D^s k_1 L_{13} + L_a L_{13} \quad (\text{III.17}) \\
 a_{33} &= H_{11}^s k_1^2 L_9 - 2kRL_{13} + R - A^2 F_{44}^s k_1^2 L_{13} - 2AX_{44}^s k L_{13} - A_{44}^s L_{13}, \quad N_{cr} = N_0 L_9
 \end{aligned}$$

La charge transversale $q(x)$ est également développée en série de Fourier comme :

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (\text{III.18})$$

Les coefficients de Fourier (q_m) pour les charges sinusoïdales et uniformes sont les suivants

$$q = \left\{ \begin{array}{ll} q_0 & \text{Charge sinusoidal} \quad (m = 1) \\ \frac{4q_0}{m\pi} & \text{charge uniforme} \quad (m = 1,3,5 \dots \infty) \end{array} \right\} \quad (\text{III.19})$$

Pour le problème de flexion, posez $N_0 = 0$; pour le problème de flambage, posez $q = 0$.

- Analyse de flexion

$$[K] \{\Delta\} = \{f\} \quad (\text{III.20})$$

- Analyse de flambage

$$\{[K] - N_0[N]\} \{\Delta\} = \{0\} \quad (\text{III.21})$$

Où $[K]$ est la matrice de rigidité, $[N]$ est la matrice géométrique due aux forces axiales,

$\{f\}$ est le vecteur de force, $\{\Delta\}$ est le vecteur des inconnues et N_0 est la force axiale

3.3 Résultats numériques et discussion

3.3.1 Étude de convergence et de validation

Dans ce chapitre, les propriétés des matériaux utilisés sont les suivantes : pour la céramique (Pc : alumine, Al_2O_3) $E_c = 380 \text{ GPa}$; $\nu_c = 0,3$; pour le métal (Pm : aluminium, Al) : $E_m = 70 \text{ GPa}$; $\nu_m = 0,3$.

Par souci de simplicité, les déplacements, les contraintes et les charges critiques de flambement sont présentés sous forme adimensionnelle :

$$\bar{w} = \frac{100E_m h^3}{q_0 l^4} w \left(x = \frac{l}{2}, z = 0 \right), \quad \bar{u} = \frac{100E_m h^3}{q_0 l^4} u \left(x = 0, z = -\frac{h}{2} \right), \quad (\text{III.22})$$

$$\bar{\sigma}_{xx}(z) = \frac{h}{q_0 l} \sigma_x \left(x = \frac{l}{2}, z = \frac{h}{2} \right), \quad \bar{\tau}_{xz}(z) = \frac{h}{q_0 l} \tau_{xz} (x=0, z=0), \quad N_{cr} = N_0 \frac{12l^2}{E_m h^3}$$

Le tableau 2 présente les déplacements et contraintes adimensionnés maximaux de la poutre pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance, avec un rapport longueur sur épaisseur (L/h) égal à 5. Pour faciliter la comparaison, nous avons généré des résultats numériques pour une poutre fonctionnellement graduée (FG) supportée, en utilisant différentes théories. Il est observé à partir du tableau 2 que le déplacement transversal atteint sa valeur $k = \infty$ maximale lorsque, tandis qu'il est minimisé lorsque $k = 0$. Ce comportement est attribué à la flexibilité accrue des poutres FG ayant des indices de loi de puissance plus élevés.

Tableau III. 2 : Déplacements et contraintes adimensionnels des poutres fonctionnellement graduées ($L = 5h$)

k	Théorie	Modèle	Charge uniforme			
			\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0 Céramique	Présente 2D	HSDT	0.9398	3.1653	3.8020	0.7333
	Présente 3D	HSDT	0.9080	2.8951	3.4120	0.6599
	Sayyad&Ghugal[20]	RSDT	0.9420	3.1635	3.8084	0.7764
	Reddy [21]	HSDT	0.9397	3.1654	3.8028	0.7305
	Timoshenko [22]	FSDT	0.9210	3.1057	3.7501	0.4922
	Bernoulli-Euler [23]	CBT	0.9210	2.8783	3.7501	–
5	Présente 2D	HSDT	3.7101	9.8280	8.1100	0.7398
	Présente 3D	HSDT	3.4893	8.6286	7.1326	0.7000
	Sayyad&Ghugal[20]	RSDT	3.7179	9.8414	8.1331	0.7654
	Reddy [21]	HSDT	3.7098	9.8281	8.1127	0.8114
	Timoshenko [22]	FSDT	3.6496	9.4987	7.9430	1.5373
	Bernoulli-Euler [23]	CBT	3.6496	8.7508	7.9430	–
10	Présente 2D	HSDT	3.8861	10.938	9.7128	0.6715
	Présente 3D	HSDT	3.6709	9.	8.5406	0.6353
	Sayyad&Ghugal[20]	RSDT	3.9858	10.	9.7345	0.6947
	Reddy [21]	HSDT	3.8861	10.	9.7141	0.6448
	Timoshenko [22]	FSDT	3.8096	10.	9.5231	1.9050
	Bernoulli-Euler [23]	CBT	3.8096	9.	9.5231	–
∞ Métal	Présente 2D	HSDT	5.1018	17	3.8020	0.7482
	Présente 3D	HSDT	4.9290	15.	3.4120	0.7079
	Sayyad&Ghugal[20]	RSDT	5.1133	17.	3.8084	0.7741
	Reddy [21]	HSDT	5.1021	17.	3.8028	0.7305
	Timoshenko [22]	FSDT	5.0000	15.912	3.7501	0.4922
	Bernoulli-Euler [23]	CBT	5.0000	15.625	3.7501	–

L'analyse du tableau 3 montre que les résultats obtenus selon la théorie actuelle sont en étroite concordance avec ceux d'autres théories établies. Parmi les différentes conditions aux limites, les poutres encastées à leurs deux extrémités (C-C) présentent les charges critiques de flambement les plus élevées, tandis que les poutres en porte-à-faux (C-F) affichent les plus faibles. De plus, une augmentation de l'indice de loi puissance entraîne une diminution des charges de flambement normalisées. Ces résultats confirment la précision et la fiabilité de la théorie actuelle pour prédire le comportement critique au flambement des poutres en matériaux à gradient de propriétés (P-FGM) sous diverses conditions aux limites.

Tableau III. 3 : Comparaison des charges de flambement normalisées de poutres fonctionnellement graduées avec différentes conditions limites ($L/h = 5$)

BC's	Théorie	k					
		0	1	2	5	10	∞
SS	Présent 2D	48.	24.5837	19.0709	15.6436	14.0512	8.95187
	Présent 3D	49.	25.372	19.8365	16.4111	14.6969	9.14408
	Sayyad&Ghugal[20]	48.	24.5966	19.0738	16.622	14.0485	8.95730
	Kahya&Turan [24]	48.	24.5815	19.1617	15.9417	14.3445	8.95100
	Nguyen et al [25]	48.	24.6894	19.1577	15.7355	14.1448	–
CC	Présent 2D	15.	79.4832	60.8785	46.8871	40.9883	28.0272
	Présent 3D	17.	89.382	69.6172	55.9988	49.4489	31.6159
	Sayyad&Ghugal[20]	15.	79.739	61.9488	49.5646	42.7493	27.9160
	Kahya&Turan [24]	151.943	79.3903	61.7449	49.5828	43.5014	27.9890
	Nguyen et al [25]	154.561	80.5940	61.7666	47.7174	41.7885	–
CF	Présent 2D	13.0542	6.5362	5.0958	4.2906	3.8527	2.3807
	Présent 3D	14.2703	6.8319	5.2547	4.4028	3.9351	2.3945
	Sayyad&Ghugal[20]	13.0719	6.557	5.0986	4.2931	3.8512	2.3819
	Kahya&Turan [24]	13.0594	6.5352	5.0981	4.2926	3.897	2.4057
	Nguyen et al [25]	13.0771	6.5427	5.0977	4.2772	3.882	–

3.3.2 Étude paramétrique et discussions – effet de porosité

La figure 2 indique l'effet du rapport épaisseur/longueur l/h et des modèles de porosité sur les déflexions centrales w des poutres poreuses FG de fraction volumique $k = 2$ et de coefficient de porosité Ω de 0,2. Les déflexions centrales (w) diminuent avec l'augmentation du rapport épaisseur/côté pour les différents modèles poreux.

La figure 3 présente la variation de la contrainte de cisaillement transversale τ_{xz} et de la contrainte axiale σ_{xx} à travers l'épaisseur des poutres FG pour différents modèles poreux de fraction volumique $k = 2$ et de rapport épaisseur/longueur $l/h = 10$. La figure 3b prédit une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversale sur toute la profondeur des poutres poreuses FG. Dans l'ensemble, les résultats présentés concordent parfaitement avec les théories d'ordre supérieur. De plus, l'amplitude des contraintes de traction indiquées dans la figure 3a est supérieure à l'amplitude des contraintes de compression dans les poutres poreuses FG.

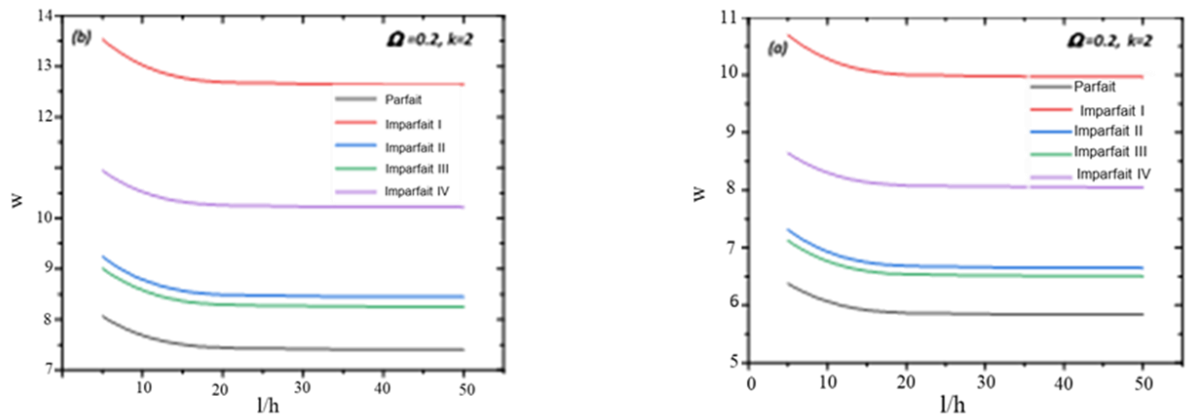


Figure III. 2: Variation de la déflexion centrale adimensionnelle w en fonction de l/h des poutres parfaites et imparfaites ($k=2$) : a) charges distribuées sinusoïdalement, b) charge distribuées uniformément

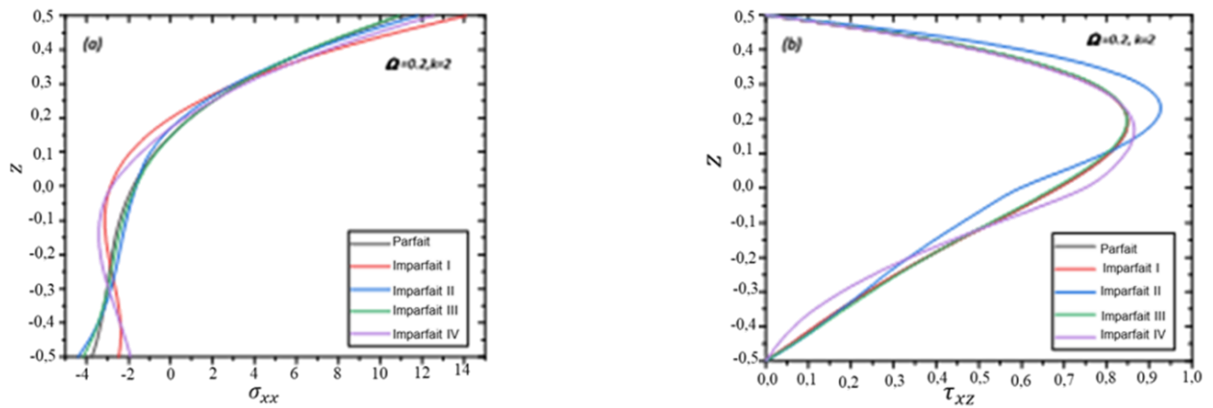


Figure III. 3 : Variation de la contrainte dans l'épaisseur des poutres parfaites et imparfaites $l/h = 10$ ($k = 2$) sous des charges uniformément réparties : a) contrainte axiale σ_{xx} b) contrainte transversale τ_{xz}

La figure 4 illustre la variation de la charge critique de flambement adimensionnelle des poutres poreuses FG supportées (SS) et encastées (CC) selon les rapports l/h . La charge critique de flambement N_{cr} est quasiment constante après $l/h = 20$ pour tous les modèles poreux.

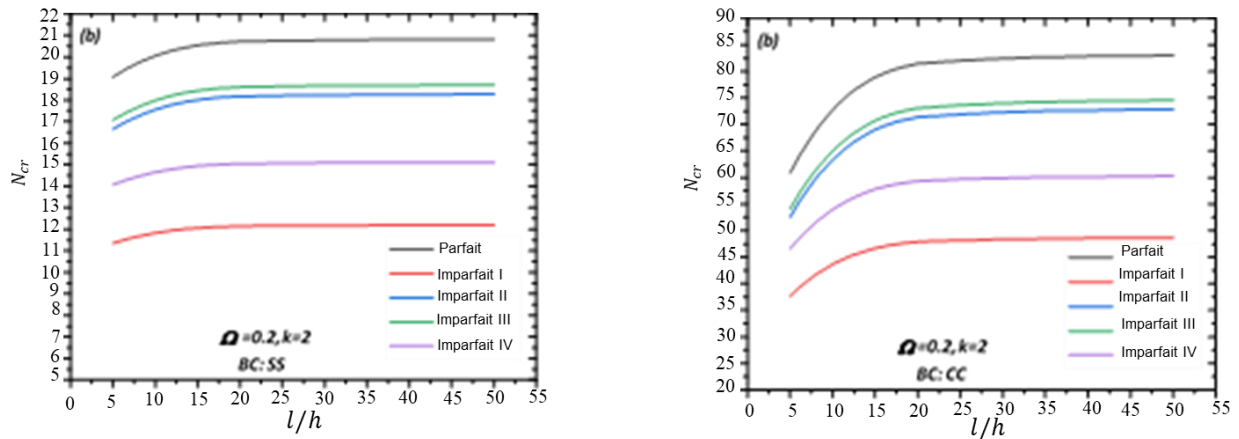


Figure III. 4 : La variation des charges de flambement en fonction du rapport l/h des poutres parfaites et imparfaites ($k=2, \Omega=0.2$) : a) Condition limite SS, b) Condition limite CC

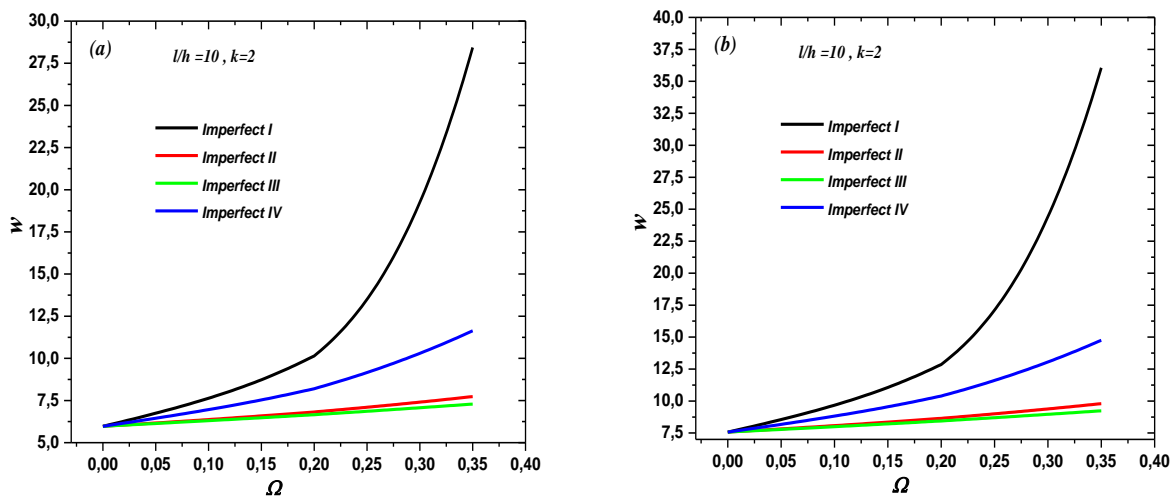


Figure III. 5 : Effet du coefficient de porosité sur la flèche centrale adimensionnée w des poutres à gradient de matériau (FG) ($k=2, l/h=10$) – (a) soumises à des charges réparties sinusoïdales – (b) soumises à des charges réparties uniformes

L'effet du coefficient de porosité sur la flèche centrale adimensionnée w des poutres à gradient de matériau (FG) est illustré dans les figures 5. L'augmentation du coefficient de porosité entraîne une augmentation des flèches centrale adimensionnée w . Il est clair que la différence entre les poutres parfaites et imparfaites augmente avec l'accroissement du rapport de forme.

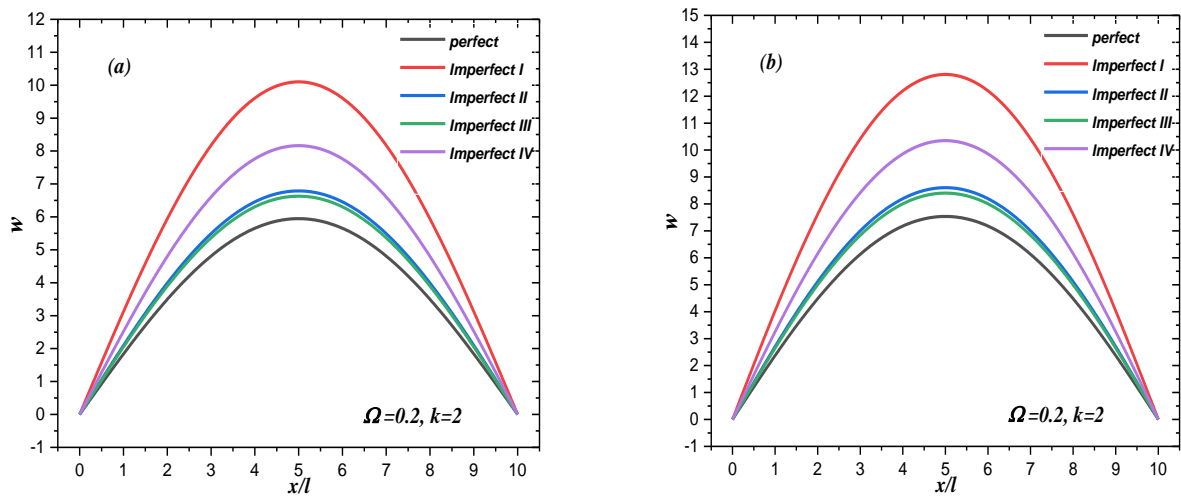


Figure III. 6 : Variation of the non-dimensional central deflection w versus non-dimensional length x/l of perfect and imperfect beams $l/h=10$ ($k=2$) – (a)- subjected to sinusoidal distributed loads-(b)- subjected to uniform

La figure 6 illustre la variation du déplacement transversal non dimensionnel (\bar{w}) en fonction de la longueur normalisée x/l pour des poutres parfaites et imparfaites avec un rapport $l/h=10$ (et un paramètre de forme $k=2$) dans des poutres à gradient fonctionnel (FGM). Les résultats montrent que les poutres parfaites présentent des flèches plus faibles que celles des poutres imparfaites, en raison de l'effet de la porosité.

Conclusion

Ce chapitre présente une étude numérique de l'analyse de la flexion et du flambement de poutres fonctionnellement graduées, utilisant une théorie de déformation de cisaillement intégrale simple en 2D et quasi-3D. La poutre proposée présente quatre types de distribution poreuse et a été étudiée en flexion et flambement statiques avec diverses conditions aux limites selon des distributions P-FGM en loi de puissance. Cette théorie réduit le nombre d'inconnues et d'équations gouvernantes tout en intégrant les effets de l'allongement d'épaisseur dans le terme intégral. Des solutions analytiques pour diverses conditions aux limites pour les poutres poreuses et parfaites peuvent être obtenues en dérivant les équations gouvernantes obtenues à partir de la version statique du principe du travail virtuel. De nombreux exemples de validation sont présentés, et les résultats numériques de la théorie quasi-3D actuelle prédisent avec précision les réponses en flexion et en flambement de différentes poutres poreuses FG. La théorie satisfait les conditions d'absence de traction sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre sans utiliser le facteur de correction de cisaillement. Des solutions de forme fermée pour la flexion et le flambement statiques de poutres avec diverses conditions aux limites sont obtenues.

Références

- [1] Zhang, N., Khan, T., Guo, H., Shi, S., Zhong, W., & Zhang, W. (2019). Functionally graded materials: An overview of stability, buckling, and free vibration analysis. *Adv. Mater. Sci.Eng.*,2019(5), 1-18.
- [2] Dhuria, M., Grover, N., & Goyal, K. (2021). Influence of porosity distribution on static and buckling responses of porous functionally graded plates. *Structures*, 34, 1458-1474.
- [3] Bouhadra, A., Menasria, A., & Rachedi, M.A. (2021). Boundary conditions effect for buckling analysis of porous functionally graded nanobeam. *Adv. Nano Res.*, 10(4), 313-325.
- [4] Reissner, E., & Stavsky, Y. (1961). Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates. *J. Appl. Mech.*, 28(3), 402-408.
- [5] Della Croce, L., & Venini, P. (2004). Finite elements for functionally graded Reissner-Mindlin plates. *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, 193(9-11), 705-725.
- [6] Trabelsi, S., Frikha, A., Zghal, S., & Dammak, F. (2018). Thermal post-buckling analysis of functionally graded material structures using a modified FSDT. *Inter. J. Mech. Sci.*, 144, 74-89.
- [7] Zaitoun, M.W., Chikh, A., Tounsi, A., Al-Osta, M.A., Sharif, A., Al-Dulaijan, S.U., & Al-Zahrani M.M. (2022). Influence of the visco-Pasternak foundation parameters on the buckling behavior of a sandwich functional graded ceramic-metal plate in a hydrothermal environment. *Thin-Walled Structures*, 170, 108549.
- [8] Slimani, R., Menasria, A., Ali Rachedi, M., Mourad, C., Refrafi, S., Nimer, A.A., Bouhadra, A., & Mamen, B. (2024). A novel quasi-3D refined HSDT for static bending analysis of porous functionally graded Plates. *J. Comp. Appl. Mech.*, 55, 3, 519-537.
- [9] Tounsi, A., Bouhadra, A., Bousahla, A.A., & Mahmoud, S. (2017). A new and simple HSDT for thermal stability analysis of FG sandwich plates. *Steel Comp. Struct., An International Journal*,25(2), 157-175.
- [10] Messaoudi, A., Bouhadra, A., Menasria, A., Mamen, B., Boucham, B., Benguediab, M., Tounsi, A., & Al-Osta, M. (2023). Impact of the shear and thickness stretching effects on the free vibrations of advanced composite plates. *Mech. Comp. Mater.*, 59(5), 1001-1018.
- [11] Chitour, M., Bouhadra, A., Benguediab, S., Saoudi, A., Menasria, A., & Tounsi, A. (2022). Effect of phase contrast and geometrical parameters on bending behavior of sandwich beams with FG isotropic face sheets. *Journal of Nano- and Electronic Physics*, 14(5).

- [12] Tien, D.M., Thom, D.V., Minh, P.V., Tho, N.C., Doan, T.N., & Mai, D.N. (2024). The application of the nonlocal theory and various shear strain theories for bending and free vibration analysis of organic nanoplates. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 52(1), 588-610.
- [13] Tuan, L.T., Dung, N.T., Van Thom, D., Van Minh, P., & Zenkour, A.M. (2021). Propagation of non-stationary kinematic disturbances from a spherical cavity in the pseudo-elastic cosserat medium. *Europ. Phys. J. Plus*, 136, 1-16.
- [14] Duong, V.Q., Tran, N.D., Luat, D.T., & Thom, D.V. (2022). Static analysis and boundary effect of FG-CNTRC cylindrical shells with various boundary conditions using quasi-3D shear and normal deformations theory. *Structures*, 44, 828-850.
- [15] Duc, D.H., Thom, D., & Phuc, P. (2022). Buckling analysis of variable thickness cracked nano plates considering the flex electric effect. *Trans. Commun. Sci. J.*, 73(5), 470-485.
- [16] Vu, V.T., Thom, D.V., & Tran, T.D. (2024). Identification of damage in steel beam by natural frequency using machine learning algorithms. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 09544062241255570.
- [17] Ghazwani, M.H., Alnujaie, A., Youzera, H., Meftah, S.A., & Tounsi, A. (2024). Nonlinear forced vibration investigation of the sandwich porous FGM beams with viscoelastic core layer. *Acta Mech.*, 5, 1-16.
- [18] Patil, R., Joladarashi, S., & Kadoli, R. (2023). Effect of porosity and viscoelastic boundary conditions on FG sandwich beams in thermal environment: Buckling and vibration studies. *Structures*, 56, 105001.
- [19] Daikh, A.A., & Zenkour, A.M. (2019). Effect of porosity on the bending analysis of various functionally graded sandwich plates. *Mater. Res. Exp.*, 6(6), 065703.
- [20] Sayyad, A.S., & Ghugal, Y.M. (2018). Analytical solutions for bending, buckling, and vibration analyses of exponential functionally graded higher order beams. *Asian J. Civil Eng.*, 19, 607-623.
- [21] Timoshenko, S.P. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Phil. Mag.*, 41, 744-746.
- [22] Reddy, J.N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.*, 51(4), 745-752.
- [23] Bernoulli, J. (1694). *Curvatura laminae elasticae*. *Acta Eruditorum Lipsiae*, 1694(34), 262-276.

- [24] Kahya, V., & Turan, M. (2017). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Compos. Part B: Eng.*, 109,108-115.
- [25] Nguyen, T.-K., Vo, T.P., & Thai, H.-T. (2013). Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory. *Compos. Part B: Eng.*, 55, 147-157.

Conclusion générale

Les matériaux à gradient de propriétés fgm représentent une avancée technologique majeure dans le domaine des matériaux composites grâce à leur capacité à combiner de manière continue les avantages de différents matériaux en particulier la céramique et le métal cette combinaison permet d'optimiser les propriétés mécanique et thermiques tout en réduisant les contraintes aux interfaces ce qui ouvre la voie à des applications exigeantes telles que l'aéronautique la biomécanique ou l'ingénierie thermique .

Au cours de ce travail , nous avons d'abord présenté les concepts fondamentaux des fgm, leur structure leur fabrication ainsi que leurs avantages par rapport aux composites traditionnels , ensuite nous avons abordé les différentes théories d'élasticité utilisées pour modéliser le comportement mécanique des structures fgm allant de la théorie classique aux théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur en mettant en évidence les améliorations qu'elles apportent en termes de précision

Enfin , une étude numérique approfondie a été menée en appliquant une nouvelle formulation HSDT 2D et quasi 3D intégrale capable de prendre en compte les effets de la porosité dans les poutres fgm cette approche a permis d'analyser efficacement le comportement en flexion et u flambement sous diverses conditions aux limites et a montré de très bons accords avec les résultats de la littérature de plus l'étude paramétrique a mis en évidence l'influence significative de la porosité et de l'indice de gradient fonctionnel sur la réponse mécanique des structures

Ainsi ce travail confirme l'intérêt croissant pour les fgm et met en avant l'importance de théories de modélisation avancées pour prédire avec précision leur comportement contribuant ainsi à leur intégration dans des applications industrielles complexes

