MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE «Abbes LAGHROUR» DE KHENCHELA
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

Département Sciences de la matière

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité: physique

Option: physique des matériaux

Intitulé :

Solution Exacte De L'oscillateur De Klein –Gordon Avec Une Nouvelle Algèbre De Snydre-De Sitter

Réalisé par *:*

- *ABABSSA Warda*
- *NAILI Kenza*

Dirigé par *: Mr. HEMAME Zoubir*

Membres de jury *:*

- ***Président :*** BOUROUCHA Azzedine
- ***Examinateur*** *:* MOULLA Hafida

Promotion 2018

Remerciement

Avant toute personne, nous remercie DIEU pour nos avoir donne la santé et la patience et le courage tout au long du travail.

Nous remercie vivement Mr : HEMAME zoubir d'avoir accepte de nous encadrer et d'avoir mis son avoir à notre disposition, ses conseil et ses observations qui nou sont fortement aidées à finir ce travail .

Nous remercions également tous les membres du jury (BOUROUCHA Azzedine et MOULLA Hafida) qui nous guides dans ce travail.

Nous n'oublie pas remercier tous mes collègues de promotion 2017 /2018, Toute la famille de département de SM.

Et tous ce qui m'ont aidé de près ou de loin encours de ce travail.

Kenza et Warda

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

***M**a très chère mère, qui m'accompagnée durant ce long parcours de mon a vie et mon Education*

*A **m**es sœur : Nabila, Saliha, Nawal, Lamia*

Leur souhaitant bonheur et sucée dans leur vie personnelle et professionnelle

***M**on Ange : Anwar*

A toutes ma famille grande et petite

A tous mes amies

A toutes mes collègues de travail

A mon chère binôme Ababssa Warda

A tous ceux qui sont chèrs à mon cœur

Kenza

Dédicace

Je dédie ce MODEST travail

Mon père pour ses encouragement et son soutien moralaux, et qui est resté pur et qui vous êtes

Ma très chère mère, qui toujours présenté et continue de l'être mon bonheur et mon éducation

A mes sœur : iman,douaa nour el yakine

A toutes ma famille grande et petite

A tous mes amies : touta,Afaf,Imen,Hayat,Zakia

A ma chère binôme Naili Kenza

A tous ceux qui sont chèrs à mon coeur

Warda

Table des matières

Introduction

Historiquement, à l'échelle microscopique de haute énergie, plusieurs scénarios ont été proposés pour étudier les systèmes quantiques déformés à petite échelle. Notamment le modèle de Snyder, qui a suggéré que les mesures en mécanique quantique non commutative peuvent être gouvernées par un principe d'incertitude généralisée (GUP) admettant une échelle de longueur fondamentale supposée être dans l'ordre de la longueur de Planck proposée par Kempf conduit à une incertitude minimale non nulle dans la mesure de la position [1]. Cela a été motivé par des géométries non commutatives, relativité doublement spéciale, théories de la corde, et physique du trou noir[2][3][4][5].
D'autre part, il y a un grand intérêt pour les études spatio-temporelles incurvées qui ont d'importantes implications astrophysiques et cosmologiques en relativité générale, où la gravité est décrite comme une propriété de la géométrie de l'espace-temps. Cette implication était une grande avancé dans la compréhension de l'expansion de l'espace et de la forme de l'univers. De plus, à l'échelle atomique, l'étude des problèmes de mécanique quantique dans l'espace-temps courbé peut être considérée comme un nouveau type d'interaction entre la matière quantique et la gravitation dans le monde des microparticules. Dans cette situation, l'espace-temps courbe était une grande avancée dans la compréhension de la nature, traitant de la structure de l'espace-temps qui est perturbée par le champ gravitationnel. D'autre part, à de petites échelles d'une théorie de la relativité doublement spéciale (DSR), de nombreux arguments bien connus montrent que la gravité quantique implique également une longueur minimale mesurable dans l'ordre de la longueur de Planck comme dans le cas précédent de Snyder.
Pour cette raison, beaucoup d'efforts ont été consacrés à étendre l'étude de la mécanique quantique dans le modèle de Snyder à espace plat à une algèbre généralisée spatio-temporelle

incurvée. L'idée derrière cette extension est de prendre en compte la modification de l'algèbre de Heisenberg standard en ajoutant de petites corrections aux relations de commutation canoniques telles que la généralisation des relations d'incertitude (GUR) et le principe d'incertitude étendue (EUP) les géométries non commutatives et les effets de gravité, respectivement, en mécanique quantique. Récemment, au niveau de la mécanique quantique relativiste et non relativiste, certains problèmes ont été résolus dans ce cadre, par exemple, l'oscillateur harmonique de l'équation de Schrôdingerr a été résolue avec la particule libre, et l'oscillateur de Dirac dans le modèle courbe de Snyde[6], [8],[9], [7].

En d'autre, on peut noter que dans le modèle d'oscillateur harmonique qui contient des états liés avec une énergie résiduelle non nulle et qui a été expliqué par l'effet de confinement quantique, l'oscillateur de Schrôdingerest utilisé pour décrire le confinement des quarks dans les mésons et les baryons, L'oscillateur de Dirac est principalement motivé par son utilisation comme potentiel de confinement des quarks en chromodynamique quantique[10]. Outre ces oscillateurs fondamentaux de Schrôdinger et de Dirac,

Le problème de l'oscillateur harmonique est l'un des sujets qui ont été récemment étudiés en relation avec le formalisme de longueur minimale. Ce problème a d'abord été étudié par Kempf[2]qui a obtenu l'écart exact des niveaux d'énergie du système causé par la longueur minimale dans le cas unidimensionnel. Plus tard, Chang et al. Ont généralisé l'étude exacte à des dimensions arbitraires.[11] Le modèle d'oscillateur harmonique peut décrire parfaitement le mouvement de cyclotron d'un électron dans un piège de traçage.

il existe un autre oscillateur relativiste intéressant, l'oscillateur Klien-Gordon Ce cas qui est considéré comme une extension de l'oscillateur de Dirac au cas des Bosons pourrait également être un bon candidat pour le potentiel de confinement dans les systèmes de quarks lourds. De plus, il a également été souligné que les propriétés thermodynamiques de l'un[12]. Un oscillateur de Dirac-dimensionnel est pertinent pour la description d'un modèle de plasma quark-gluon qui a été produit par des collisions ultra-relativistes des ions lourds[11, 13, 14]. En effet, lors de ces collisions avec un refroidissement adiabatique unidimensionnel, un gaz hadronique chaud et subit une évolution vers un équilibre thermodynamique puis il se transforme (phase de déconfinement) en un plasma quark-gluon. Dans le contexte de la mécanique quantique déformée et au niveau de la température de phase de déconfinement ($Tc \simeq 180Mev$), l'étude de l'oscillateur de Dirac de longueur minimale dans un bain thermique a montré qu'il existe une limite supérieure pour la longueur minimale[15].

De plus, à notre connaissance, la liste des articles traitant les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur Klien-Gordon non commutatif est restreinte à quelques tentatives. Par exemple, le cas de l'oscillateur Kemmer unidimensionnel dans l'espace ordinaire et le traitement de l'oscillateur DKP (Duffin–Kemmer–Petiau)[16] . Par conséquent, il est important d'étudier les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur Klien-Gordon déformé avec l'algèbre Snyder-de Sitter. a une importance significative pour les systèmes de quarks lourds en physique nucléaire et des hautes énergies.

Le but de travail est de résoudre l'oscillateur exacte de Klien-Gordon unidimensionnel dans l'espace déformé obéissant à l'algèbre de Snyder-de Sitter qui donne lieu à l'apparition de l'incertitude minimale en position ainsi que dans impulsion et aussi de voir l'effet de la déformation sur les propriétés thermodynamiques dans les systèmes relativistes .

On présente dans le premier chapitre de ce manuscrit un rappel sur l'oscillateur harmonique, avec une partie consacrée aux rappels sur longueur minimal et le principe d'incertitude d'Heisenberg (GUP) et une autre partie consacrée l'oscillateur de Dirac et l'équation de Schrôdinger. Notamment un accent particulier a été mis sur les relations de Commutation Canonique l'outil central utilisé dans ce travail. Dans un deuxième chapitre on présente le traitement de L'oscillateur harmonique de Klein-Gordon l'espace déformé obéissant à l'algèbre de Snyder-de Sitter et une partie sur les propriétés thermodynamique. Enfin on a résumé les principaux résultats obtenus dans ce manuscrit dans une conclusion générale et on a aussi proposé quelques perspectives susceptibles d'être étudiées dans un travail future.

Chapitre 1

Rappel sur oscillateur harmonique

1.1 longueur minimal

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, l'hypothèse de l'existence d'une longueur élémentaire a été faite, dépuis longtemps en physique, pour des raisons aussi bien conceptuelles que techniques Dans ce contexte, des études récentes en théorie des cordes et en théorie de la gravitation quantique proposent des petites corrections à la relation d'incertitude de Heisenberg qui impliquent une incertitude minimale non nulle $(\Delta x)_{\min}$ sur la position correspondant à cette longueur élémentaire[2].

Cette incertitude minimale peut être vue comme étant une conséquence du caractère "flou" (fuzzy) de l'espace temps à des échelles de distances de l'ordre de la longueur de Planck $l_p = 10^{-35}m$, ou aussi comme une limite naturelle exprimant la nature non ponctuelle des particules élémentaires . En effet, le caractère ponctuel des particules est un postulat de base en mécanique quantique ; l'une des conséquences fondamentales, qui en découle est la localisabilité des particules : à des énergies suffisamment grandes, la position d'une particule peut être mesurée avec une incertitude arbitrairement petite. Ce ci est traduit parla relation d'incertitude de Heisenberg habituelle . En fait, cette description est idéaliste ; une relation d'incertitude généralisée, menant à une incertitude minimale non nulle, serait plus proche de la réalité physique. C'est ce dernier point qui a poussé les physiciens ces dernières années à s' intéresser à cette notion de longueur élémentaire en essayant de l'introduire dans le traitement des problèmes physiques, en mécanique quantique, via des corrections aux relations de commutation canoniques. Le formalisme général de cette nouvelle algèbre de Heisenberg modifiée a été étudié par Kempf et ses collaborateurs Dans la section qui suit, nous allons présenter une approche qui généralise le principe d'incertitude de Heisenberg en tenant compte de cette notion [15].

1.2 principe d'incertitude d'Heseinbrg(GUP)

Nous considérons la réalisation unidimensionnelle simple suivante de la position et les opérateurs de quantité de mouvement [1, 7] :

$$M = i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p} \tag{1.1}$$

où $\beta > 0$ est un petit paramètre. Cette représentation conduit à la généralisation suivante commutateur et relations d'incertitude :
Avec :

$$[X, P] = i\hbar\left(1+\beta p^2\right) \tag{1.2}$$

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}\left[1+\beta\left(\Delta p\right)^2\right] \tag{1.3}$$

La particularité de est qu'il présente le phénomène de mélange UV / IR qui nous permet de sonde la physique à courte distance (UV) de la longue distance (IR). Une minimisation de(1.3) en ce qui concerne P donne la longueur minimale suivante :

$$\left(\Delta X\right)_{\min} = \hbar\sqrt{\beta} \tag{1.4}$$

Cette échelle, comme le mélange UV / IR, révèle le caractère non local des modèles basés sur équations (1.1) et (1.3). Ensuite, nous n'avons pas de fonctions propres localisées dans l'espace X.Donc, toute valeur propre le problème peut être résolu en allant dans l'espace de dynamique.
Le choix de la constante γ ne détermine que le degré de compression de l'impulsion
mesure de l'espace :

$$\int \frac{dp}{\left(1+p\beta^2\right)^{1-\frac{\gamma}{\beta}}} \mid p >< p \mid = 1 \tag{1.5}$$

Avant de terminer cette section, signalons que les valeurs propres d'énergie restent inchangées si nous utilisons la représentation suivante des opérateurs de position et de quantité de mouvement

$$X = i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p}+\gamma f\left(p\right) \tag{1.6}$$

et $P = p$, puis nous utilisons dans la suite l'algèbre simple avec$\gamma = 0$.

1.3 Mécanique quantique avec algèbre Heisenberg généralisée

Dans les dimensions D, l'algèbre de Heisenberg modifiée que nous allons étudier est définie par les relations de commutation suivantes[1, 10, 6].

$$[X_i, P_j] = i\hbar\left(\delta_{ij}+\beta \hat{P}^2\delta_{ij}+\overset{/}{\beta}\hat{P}_i\hat{P}_j\right) \tag{1.7}$$

Avec : $\overset{/}{\beta} = 0$ et

$$\delta_{ij=}\begin{cases} 1 \ \text{ si} & i=j \\ 0 \ \text{ si} & i\neq j \end{cases}$$

Alors :

$$[X_i, P_j] = i\hbar\left(\beta P_i^2\right) \tag{1.8}$$

Dans la représentation de l'espace de mouvement, ces opérateurs sont réalisés comme :

$$\hat{X}_i = i\hbar\left[\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p_i}+\overset{/}{\beta}\hat{p}_i\hat{p}_j\frac{\partial}{\partial p_j}+\gamma p_i\right],\ \hat{P}_i = p_i \tag{1.9}$$

qui devient :

$$\hat{X}_i = i\hbar\left(1+\beta p^2\right)\frac{\partial}{\partial p_i}+\gamma p \tag{1.10}$$

Par conséquent, les opérateurs de position pour les coordonnées différentes ne peuvent plus se déplacer et nous avons affaire à une algèbre de Heisenberg non commutative. Nous pouvons également vérifier que cette algèbre respecte l'identité de Jacobi. Les opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_j$ agissent sur l'espace de Hilbert des fonctions normalisables par rapport au produit scalaire.

$$\langle \Phi / \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^D \mathbf{P}}{\left[1 + \left(\beta + \beta'\right) p^2\right]^{1-\eta}} \Phi^* (\mathbf{P}) \Psi (\mathbf{P}) \tag{1.11}$$

avec

$$\eta = \frac{\gamma - \beta' \left(\frac{D-2}{2}\right)}{\beta + \beta'} \tag{1.12}$$

On notera que la constante arbitraire γ n'affecte pas les grandeurs observables, son choix ne détermine que la fonction de pondération dans la définition ci-dessus du produit scalaire.
Une conséquence de l'existence d'une longueur minimale $(\Delta r)_{\min}$ est que la notion d'états localisés dans l'espace de position disparaît puisque les coordonnées spatiales ne peuvent plus être sondées avec une précision supérieure à $(\Delta r)_{\min}$. L'espace de mouvement est alors plus commode pour résoudre n'importe quel problème de valeur propre.

1.4 l'oscillateur harmonique en physique classique

l'oscillateur harmonique en physique jeu un rôle de premier plan. le plus souvent,se systeme apparait le premier fois a proprs d'une masses$(ponctuelle) m$ à l'extremitée d'un ressort parfait de raideur k .en l'absence de frottement ,on sait que à partir d'un etat initial hors l'equilibre (vitesse initiale non nulle et/ou position d'equilibre),le point materiel effectue des oscillations à une fréquence ν_0 bien determinée reliée à la pulsation
$\omega_0 = (K/m)^{\frac{1}{2}}$par $\nu_0 = w/2\pi$.En présence de frottement ,les oscillations sont amorties, le caractére épheméne du mouvement étant une simple.conséquence de la non-cerservation de l''energie mécanique du système constitué par la masse et le ressort,le milieu exterieur absorbant peu à peu l'energie mécanique initialement disponible sous forme et/ou cinétique ;l'amortissement est caractérisé par une echelle de temps τ que l'on peut appeler durée de vie.on distingue usuelle ,deux type de régimes(facilement mis en evidence théoriquement lorsque la force de freinage est proportionnelle à la vitesse) :le régime sous amortis,pour la

quel le petite masse effectue un grand nombre d'oscillation durant le temps $\tau(\omega_0^{-1} \ll \tau)$et le régime sur-amorti ou,le frottement atant très fort,la masse n'a guère le temps d'osciller et perd très vite toutes son énergie mécanique$(\omega_0^{-1} \gg \tau)$ .on caractérisé souvent la nature du régime par la valeur du facteur de qualité Q est très grand pour le régime sous amorti,très petit dans le cas contraire.lorsque τ est très grand par rapport à toute autre échelle de temps déjà présente par ailleurs,le système physique considéré peut ,de fait ,etre assimilé à un oscillateur idéal ,non -dissipatif [16].

1.5 Equation de Schrôdinger

L'équation de Schrôdinger, fondé par le physicien autrichien Erwin Schrôdinger en 1925,est l'équation de base de la mécanique quantique non relativiste[5]. Elle a la même importance centrale pour la mécanique quantique que les lois du mouvement de Newton ont pour les phénomènes à grande échelle de la mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit la forme des ondes de probabilité (ou des fonctions d'onde) qui régissent le mouvement des petites particules et spécife comment ces ondes sont modifées par des in‡uences externes.

Selon la mécanique classique, si une particule de masse m est soumise à une force telle que son énergie potentielle soit
$V\left(\vec{r}\right)$, alors la somme de $V\left(\vec{r}\right)$ et l'énergie cinétique $\vec{p}^{\,2}/2m$ est égaleà une constante, l'énergie totale E de la particule. Ainsi :

$$E = \vec{p}^{\,2}/2m + V\left(\vec{r}\right) \tag{1.13}$$

En mécanique quantique l'énergie totale est substituée par un opérateur $\hat{H}$ appelé hamiltonien qui est propriétaire d'une
expression similaire à l'expression de l'énergie classique.L'équation de Schrodinger est donnée par la loi suivante :

$$\hat{H}\Psi\left(\vec{r},t\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(\vec{r},t\right) \tag{1.14}$$

encore :

$$\left(\vec{p}^{\,2}/2m + V\left(\vec{r}\right)\right)\Psi\left(\vec{r},t\right) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left(\vec{r},t\right) \tag{1.15}$$

L'opérateur hamiltonien peut être obtenu à partir d'hamiltonien de la mécanique classique par le principe de correspondance ; Si $H\left(\vec{r},\vec{p}\right)$ est l'hamiltonien classique $\vec{r}$, l'hamiltonien quantique est obtenu en substituant aux variables classiques $\vec{r}$ (coordonnées) et $\vec{p}$ (impulsions) lesopérateurs $\hat{r}$ et $\hat{p}$. Dans la représentation en coordonnées, les règles de correspondance pour l'énergie et les composantes p_x ;p_y ;p_z ; [6].

$$E = \hat{H} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, p_x = \hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \tag{1.16}$$

$$p_y = \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}, p_z = \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.17}$$

En mécanique quantique, les solutions de l'équation de Schrôdinger d'un système physique sont appelées des fonctions d'onde qui doivent être interprétées en termes probabilistes. Le carré de la fonction d'onde, cependant, a une signification physique : la probabilité dp de trouver la particule à un moment donné t dans un volume élémentaire $d\,^3\vec{r}$ est :

$$dp = \left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2 d^3\vec{r} \tag{1.18}$$

$\left|\psi\left(\vec{r},t\right)\right|^2$ s'interprété donc comme une densité de probabilité de présence.

1.6 l'Oscillateur de Dirac

Dans le cas unidimensionnel,prend une forme plus simple[8, 9, 12]

$$[X, P] = i\left(1 + \alpha X^2 + \beta P^2 + \sqrt{\alpha\beta}\,(PX + XP)\right) \tag{1.19}$$

Nous notons que l'algèbre déformée unidimensionnelle similaire a été examinée dans le travail mais dans leur cas au lieu du facteur $\sqrt{\alpha\beta}$ dans le quatrième terme du côté droit un paramètre indépendant a été utilisé [16].

Il est facile de montrer que l'algèbre (7) donne lieu à une relation d'incertitude :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2}\left|1+\gamma+\alpha\left(\Delta X\right)^2+\beta\left(\Delta P\right)^2+\sqrt{\alpha\beta}\langle XP+PX\rangle\right| \tag{1.20}$$

où $X = X - \langle X\rangle, P = P - \langle P\rangle$ et $\gamma = \sqrt{\alpha}\langle X\rangle + \sqrt{\beta}\langle P\rangle \geq 0$
de à la curiosité $|\langle AB+BA\rangle| \leq 2\sqrt{\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle}$ce qui est valable pour deux opérateurs A et B il s'ensuit que .

Depuis paramètres et sont positifs, cela mène à la curiosité $1+\gamma+\alpha\left(\Delta X\right)^2+\beta\left(\Delta P\right)^2 > o$.
En utilisant ces remarques, nous pouvons réécrire la relation d'incertitude (8) sous la forme :

$$1+\gamma+\alpha\left(\Delta X\right)^2+\beta\left(\Delta P\right)^2-\sqrt{\alpha\beta}\Delta X\Delta P \tag{1.21}$$

Cette dernière relation d'incertitude apporte une incertitude minimale de la position et d'impulsion :

$$\Delta X \geq \left(\Delta X\right)_{\min} = \sqrt{\frac{\beta\left(1+\gamma\right)}{1+2\sqrt{\alpha\beta}}}; \Delta P \geq \left(\Delta P\right)_{\min} = \sqrt{\frac{\alpha\left(1+\gamma\right)}{1+2\sqrt{\alpha\beta}}} \tag{1.22}$$

Il est important de souligner que ces incertitudes minimales n'apparaissent pas si les paramètres sont négatifs. Ayant fait redimensionner les incertitudes et les paramètres de déformation, nous pouvons représentent la relation d'incertitude sous la forme bien connue obtenue par Kempf [2] .

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2}\left(1+\alpha\left(\Delta X\right)^2+\beta\left(\Delta P\right)^2\right) \tag{1.23}$$

où

$$\Delta X^{'} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1+\gamma}}\Delta X;\ \Delta P^{'} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1+\gamma}}\Delta P, \alpha^{'} = \frac{\alpha}{1+\sqrt{\alpha\beta}}, \beta^{'} = \frac{\beta}{1+\sqrt{\alpha\beta}} \tag{1.24}$$

Dans les relations de commutation de cas multidimensionnelles (1.19) apporte à la relation d'incertitude :

$$\Delta X_i \Delta P_j \geq \frac{1}{2}\left|\delta_{ij} + \gamma_{ij} + \alpha\langle X_i X_j\rangle + \beta\langle P_j P_j\rangle + \sqrt{\alpha\beta}\langle P_i X_j + X_j P_i\rangle\right| \tag{1.25}$$

où de la même manière qu'il a été utilisé dans un cas à une dimension :
$X_i = X_i - \langle X_i\rangle, P_i = P_i - \langle P_i\rangle$ et $\gamma_{ij} = \alpha\langle X_i\rangle\langle X_j\rangle + \langle P_i\rangle\langle P_j\rangle + 2\sqrt{\alpha\beta}\langle P_i\rangle\langle X_j\rangle$. Il est facile de voir cela au cas où $i = j$Impossible de se connecter à Internet Impossible de se connecter à Internet
Pour résoudre l'équation de Dirac (1) représentation des opérateurs X_i,P_j qui a obéi aux relations de commutation (4) devrait être défini. L'algèbre (4) na pas de représentation de position ou de quantité de mouvement en raison de la non-commutativité des opérateurs correspondants. Pour construire la représentation des opérateurs de position et d'impulsion (4), on a proposé la transformation projective qui introduit une relation entre les relations de commutation(1.19)et l'algèbre de Snyder[1]. Comme il a été noté une telle transformation est non-symplectique. Les opérateurs de position et d'impulsion peuvent être représentés comme suit[1] :

$$X_i = i\sqrt{1-\beta p^2}\frac{\partial}{\partial p_i} + \lambda\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\frac{p_i}{\sqrt{1-\beta p^2}} \tag{1.26}$$

$$P_i = i\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{1-\beta p^2}\frac{\partial}{\partial p_i} + (1-\lambda)\frac{p_i}{\sqrt{1-\beta p^2}} \tag{1.27}$$

ici $P^2 = P_k P_k$ et λ est paramèter réel arbitraire .depuis ,$\beta \succ 0$ il conduit à la restriction pour la valeur absolue du carré de la variable :βp

1.7 Relation de Commutaion Canonique

Dans la description quantique du mouvement d'une particule, il est clair que les opérateurs de coordonnées $\hat{r}_i = \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ et de quantités de mouvement $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$; ne commutent pas, et leurs relations de commutation sont données par[6] :

$$\left[\hat{r}_i, \hat{p}_j\right] = \hat{r}_i\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{r}_i = i\hbar\delta_{ij} \tag{1.28}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

OÙ :

$$\delta_{ij=} \begin{cases} 1 \text{ si} & i = j \\ 0 \text{ si} & i \neq j \end{cases} \tag{1.29}$$

est le symbole de Kronecker nous avons en partéculier :

$$\left[\hat{x}, \hat{p_x}\right] = \left[\hat{y}, \hat{p_y}\right] = \left[\hat{z}, \hat{p_z}\right] = i\hbar \tag{1.30}$$

$$\left[\hat{x}, \hat{p_y}\right] = \left[\hat{x}, \hat{p_z}\right] = \left[\hat{y}, \hat{p_z}\right] = \left[\hat{z}, \hat{p_x}\right] = \left[\hat{z}, \hat{p_y}\right] = 0 \tag{1.31}$$

1.7.1 Dynamique de l'espace courbée du modèle de Snyder non-relativiste

L'espace de Snyder est une formulation de la mécanique quantique sur un espace-temps quantifié Hartland S. Snyder proposé en 1947 [1] .

La signification de ce travail à été réalisée que récemment ; cependant, l'autre travail de Snyder a longtemps été apprécié pour son importance théorique. Pour plus d'informations sur

Hartland Snyder et ses contributions à la physique, La version non relativiste du modèle SdS, c'est-à-dire le modèle de Snyder limité à une sphère tridimensionnelle, peut être étudiée au moyen d'une transformation non linéaire reliant les variables d'espace de phase canoniques de SdS, permettant d'étudier à la fois la dynamique d'une particule libre. et le cas de l'oscillateur harmonique .

Le point de départ qui est générée par la position X_μ, le moment P_μ et les générateurs de Lorentz $\mathrm{J}_{\mu\nu}$, qui satisfontt :

$$\left[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu\right] = i\beta^2 j_{\mu\nu}, \left[\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu\right] = i\alpha^2 j_{\mu\nu} \tag{1.32}$$

$$\left[\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu\right] = i\left(\eta_{\mu\nu} + \alpha^2\hat{X}_\mu\hat{X}_\nu + \beta^2\hat{P}_\mu\hat{P}_\nu + \alpha\beta\left(\hat{X}_\mu\hat{P}_\nu + \hat{P}_\mu\hat{X}_\nu - \hat{J}_{\mu\nu}\right)\right) \tag{1.33}$$

$$\left[\hat{J}_\mu, \hat{X}_\nu\right] = i\left(\eta_{\mu\lambda}\hat{X}_\nu - \eta_{\nu\lambda}\hat{X}_\mu\right) \tag{1.34}$$

$$\left[\hat{J}_\mu, \hat{P}_\lambda\right] = i\eta_{\mu\lambda}\hat{P}_\nu - \eta_{\nu\lambda}\hat{P}_\mu \tag{1.35}$$

et les relations habituelles de commutation d'algèbre de Lorentz satisfaites par le $\hat{J}_\mu$. Le J et P génère une sous-algèbre de Sitter ou anti-Sitter (en fonction du signe de α^2) qui décrit les symétries de l'espace-temps du modèle. Les constantes de couplage α et β ont des dimensions respectivement de longueur inverse et de masse inverse et sont généralement identifiées à la racine carrée de la constante cosmologique (α) et à l'inverse de la longueur de Planck (β) . Dans ce qui suit, il est nécessaire que $\alpha\beta \ll 1$.

La limite $\alpha \longrightarrow 0$ donne le modèle plat Snyder, tandis que la limite $\beta \longrightarrow 0$ donne l'algèbre de Heisenberg de la mécanique quantique dans un contexte de Sitter doté de coordonnées projectives .

les composantes de position et de quantité de mouvement ne commutent pas entre elles. Alors que la non-commutativité des coordonnées de position

1.7.2 Mécanique classique

En mécanique classique, le mouvement dans le modèle SdS non-relativiste peut être décrit par postuler une structure symplectique non-canonique de l'espace de phase, avec fondamentale Crochets de Poisson donnés par [18].

Où je ; . Ces parenthèses de Poisson sont obtenues à partir de(1.19)en introduisant expression standard pour les générateurs de rotation.

Dans la notation qui est adoptée, 2 et 2 sont autorisés à être négatifs, mais, dans l'ordre pour que les identités Jacobi tiennent, ils doivent avoir le même signe. Quand ils sont tous les deux négatif, est également considéré comme négatif, tandis que pour les expressions linéaires et il est défini Le cas des constantes de couplage positives correspond à le modèle de Snyder sur un fond sphérique, tandis que le modèle avec 2 et 2 négatifs donne naissance au modèle anti-Snyder sur une pseudosphère, le soi-disant anti-Snyder-de Sitter

(aSdS). Les parenthèses de Poisson(1.20) peuvent être obtenues à partir de celles du modèle plat de Snyder, avec

variables de position xi et variables de quantité pi obéissant

en effectuant une transformation linéaire unimodulaire, mais non symplectique de l'espace de phase coordonnée

où est un paramètre libre, qui peut être choisi arbitrairement.

On peut montrer que les variables d'espace de phase x_i et p_i peuvent être écrites en termes de les coordonnées et , qui satisfont les parenthèses de Poisson canoniques, à travers le non linéaire transformation

Chapitre 2

Traitement de L'oscillateur Harmonique de Klein-Gordon

2.1 les relations de la mécanique quantique déformée

Dans le modèle non relativiste de Snyder-de Sitter, l'algèbre de Heisenberg déformée dans un cas unidimensionnel est définie par la relation de commutation suivante [8, 9].

$$[X, P] = i\hbar \left(1 + \alpha_1 X^2 + \alpha_2 P^2 + \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\,(XP + PX)\right) \tag{2.1}$$

où α_1, α_2 sont de petits paramètres positifs de déformation.
De la même manière que dans le cas de la mécanique quantique ordinaire, cette relation de commutation(2.1)donne lieu à l'incertitude relation Heisenberg :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} \left(1 + \gamma + \alpha_1 (\Delta X)^2 + \alpha_2 (\Delta P)^2 - 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\Delta X \Delta P\right) \tag{2.2}$$

où

$$\gamma = \left(\sqrt{\alpha_1}\, \langle X \rangle + \sqrt{\alpha_2}\, \langle P \rangle\right)^2 \geqslant 0$$

La relation (2.2) implique l'apparition d'une longueur minimale non nulle dans les incertitudes de position et de moment :

$$\Delta X_{\min} = \sqrt{\frac{\alpha_2 (1 + \gamma)}{1 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}}, \quad \Delta P_{\min} = \sqrt{\frac{\alpha_1 (1 + \gamma)}{1 + 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}}. \tag{2.3}$$

X et P sont réalisés dans l'espace de mouvement par :

$$X = i\hbar\sqrt{1-\alpha_2 p^2}\partial_p + \lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2 p^2}}, \tag{2.4}$$

$$P = -i\hbar\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\sqrt{1-\alpha_2 p^2}\partial_p + (1-\lambda)\frac{p}{\sqrt{1-\alpha_2 p^2}}, \tag{2.5}$$

où p qui appartient $\left]-\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}\right[$ et λ est une constante réelle arbitraire.

2.2 polynôme de Gengenbauer(ou ultrasphérique)

Intervalle fondamental :$[-1, 1]$

Mesure :

$$d\mu(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx, \alpha \succ -\frac{1}{2} \tag{2.6}$$

Normalisation standart $(si\ \alpha \neq 0)$:

$$C_n^{(\alpha)}(1) = \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{n!\Gamma(2\alpha)} \tag{2.7}$$

coefficient A_n de la relation de récurrence avec cette normalisation :

$$\frac{2(n+2\alpha)}{n+1} \tag{2.8}$$

carré de la norme du polynôme normalisé :

$$\frac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)(\Gamma(\alpha))^2} \tag{2.9}$$

Équation différentielle :

$$\left(1-x^2\right)y^{''} - (2\alpha+1)xy^{'} + n(n+2\alpha)y = 0 \tag{2.10}$$

les premiers de ces polynômes sont :

$$C_0^{(\alpha)} = 1 \tag{2.11}$$

$$C_1^{(\alpha)} = 2\alpha x \tag{2.12}$$

$$C_2^{(\alpha)} = -\alpha + 2\alpha(1+\alpha)x^2 \tag{2.13}$$

$$C_3^{(\alpha)} = -2\alpha(1+\alpha)x + \frac{4}{3}\alpha(1+\alpha)(2+\alpha)x^3 \tag{2.14}$$

les polynômes de Gengebbauer sont un cas particulier ($\alpha = \beta$) des polynômes de Jacobi.

2.3 L'oscillateur Klein-Gordon unidimensionnel

Dans cette section, nous nous intéressons à la résolution de l'oscillateur de Klein - Gordon unidimensionnel , dans un espace de moment avec des relations de commutation déformées.L'équation stationnaire décrivant l' oscillateur de Klein - Gordon dans un espace à une dimension est donnée par :

$$[c^2(\mathbf{P}_x + im\omega\mathbf{X})(\mathbf{P}_x - im\omega\mathbf{X}) + m^2c^4 - E^2]\Psi = 0 \tag{2.15}$$

où m est la masse au repos de la particule, ω c'est la fréquence classique de l'oscillateur. En utilisant la relation de commutation(2.1), nous réécrivons l'équation ci-dessus comme :

$$[m^2\omega^2c^2\mathbf{X}^2 + c^2\mathbf{P}_x^2 + im\omega\,[X,P] + m^2c^4 - E^2]\Psi = 0 \tag{2.16}$$

En substituant la réalisation de l'espace de quantité de mouvement (2.4) des opérateurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{P}_X$ on obtient l'équation suivante :

$$\{(m^2\omega^2 - m\omega\hbar\alpha_1)X^2 + (1 - m\omega\hbar\alpha_2)P^2 -$$

$$m\omega\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2}(PX + XP) - m\omega\hbar - \frac{m^2c^4 - E^2}{c^2}\}\Psi = 0 \tag{2.17}$$

en pose que :

$$\xi = -m\omega\hbar + \frac{m^2c^4 - E^2}{c^2} \tag{2.18}$$

L'équation devient :

$$\{(m^2\omega^2 - m\omega\hbar\alpha_1)X^2 + (1 - m\omega\hbar\alpha_2)P^2 - m\omega\hbar\sqrt{\alpha_1\alpha_2}(PX + XP) + \xi\} = 0 \tag{2.19}$$

On remplace les valeurs X^2 , P^2, PX et XP l'équation devienne :

$$\{[-\hbar^2(1 - \alpha_2P^2)(m^2\omega^2 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2})]\frac{\partial^2}{\partial P^2} + [\hbar^2(\alpha_1 + \alpha_2m^2\omega^2)+$$

$$2i\hbar[m^2\omega^2\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} - (1-\lambda)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}]P\frac{\partial}{\partial P} + i\hbar(1 + \alpha_2\frac{P^2}{1-\alpha_2P^2})$$

$$[m^2\omega^2\lambda\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} - (1-\lambda)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}] + \frac{P^2}{1-\alpha_2P^2}$$

$$[m^2\omega^2\lambda^2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + (1-\lambda)^2] - m\omega\hbar\frac{\alpha_2P^2}{1-\alpha_2P^2} + \xi\}\Psi = 0 \tag{2.20}$$

on pose que :

$$\gamma = 1 + im\omega\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \tag{2.21}$$

Avec le conjuguée :

$$\gamma^* = 1 - im\omega\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \tag{2.22}$$

$$\gamma\gamma^* = 1 + m^2\omega^2\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{2.23}$$

l'équation devienne :

$$\{-\hbar^2\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(1-\alpha_2P^2)\gamma\gamma^*\frac{\partial^2}{\partial P^2} + [\alpha_1\hbar^2\gamma\gamma^* + \frac{2i\hbar}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\Omega]P\frac{\partial}{\partial P}$$

$$+i\hbar(1 + \alpha_2\frac{P^2}{1-\alpha_2P^2})\frac{\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}} + \frac{P^2}{1-\alpha_2P^2}[\frac{\Omega\lambda}{\alpha_1} + (1-\lambda)]$$

$$-m\omega\hbar\frac{\alpha_2 P^2}{1-\alpha_2 P^2}+\xi\}\Psi=0 \tag{2.24}$$

où

$$\Omega=\alpha_1\left(\gamma\gamma^*\lambda-1\right)=\left(m^2\omega^2\alpha_2+\alpha_1\right)\lambda-\alpha_1 \tag{2.25}$$

Maintenant, afin de résoudre l'équation , nous utilisons les transformations suivante :

Avec l'aide du changement variable

$$\rho=\frac{1}{k}\arcsin(\sqrt{\alpha_2}P) \tag{2.26}$$

où :

$$K=\hbar\sqrt{\alpha_1\gamma\gamma^*} \tag{2.27}$$

$P\in\{-\infty,+\infty\}$à $\rho\in\left\{-\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha_2}},+\frac{\pi}{2\sqrt{\alpha_2}}\right\}$

$1^{ére}transformation$:

l'équation devient :

$$\{\frac{-K^2}{\alpha_2}[(1-\alpha_2P^2)\frac{\partial^2}{\partial P^2}+\alpha_2P\frac{\partial}{\partial P}]+(\frac{2i\hbar}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\Omega)\frac{\sin\rho k}{\sqrt{\alpha_2}}\frac{\partial}{\partial P}+\frac{i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}+$$

$$[\frac{(1-\lambda)}{\alpha_2}+\frac{\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}(i\hbar+\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}})-m\omega\hbar]\tan^2\rho+k+\xi\}\Psi=0 \tag{2.28}$$

donc on trouve finalement :

$$\{-\frac{\partial^2}{\partial P^2}+\frac{2i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\frac{1}{k}\tan\rho k\frac{\partial}{\partial P}+\frac{i\hbar\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}+$$

$$[\frac{(1-\lambda)}{\alpha_2}+\frac{\Omega}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}(i\hbar+\frac{\lambda}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}})-m\omega\hbar]\tan^2\rho k+\xi\}\Psi=0 \tag{2.29}$$

À ce stade, afin d'éviter les valeurs propres complexes ξ de l'équation différentielle(2.10), nous devons imposer une condition pour éliminer le terme imaginaire en définissant $\Omega = 0$ dans l'équation(2.29)qui fixe la valeur du paramètre arbitraire λ

$$\lambda = \frac{1}{\gamma\gamma^*} = \frac{\alpha_1}{m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1} \tag{2.30}$$

donc :

$$\{-\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + [\frac{(1-\lambda)}{\alpha_2} - m\omega\hbar] \tan^2\rho k + \xi\}\Psi(\rho) = 0 \tag{2.31}$$

$2^{éme} transformation$:

où nous avons utilisé les notations

$$u = \sin k\rho \tag{2.32}$$

$$v = \cos k\rho \tag{2.33}$$

Maintenant, nous introduisons un changement de fonction défini par

$$\Psi(P) = v^{\upsilon} f(u) \tag{2.34}$$

où υ est une constante à déterminer. Alors l'équation obtenue pour $\Psi(P)$ est

$$\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + [m\omega\hbar - \frac{(1-\lambda)}{\alpha_2}]\frac{u^2}{v^2} + (-\xi)\}\Psi(\rho) = 0 \tag{2.35}$$

on à :

$$\frac{\partial\Psi(\rho)}{\partial\rho} = \frac{\partial\Psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial\rho} + \frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial\rho} \tag{2.36}$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = kv \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\rho} = -ku \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} = \frac{\partial}{\partial\rho}(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}) \tag{2.39}$$

on remplace les equation (2.37) et (2.38)dans l'equation (2.35)

ona :

$$(1-u^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (-u\upsilon - u(\upsilon+1))\frac{\partial f}{\partial u} + (\upsilon(\upsilon-1)$$

$$+\left[\upsilon(\upsilon-1) + \frac{1}{k^2}(m\omega\hbar - \frac{1-\lambda}{\alpha_2})\right]\frac{u^2}{\upsilon^2}f(u) + (\frac{(-\xi)}{k^2} - \upsilon)f(u) = 0 \tag{2.40}$$

La variable est maintenant $-1 \prec u \prec +1$ Nous choisissons υ pour éliminer le terme proportionnel à $\frac{u^2}{\upsilon^2}$ en exigeant

$$\upsilon(\upsilon-1) + \frac{1}{k^2}(m\omega\hbar - \frac{1-\lambda}{\alpha_2}) = 0 \tag{2.41}$$

La fonction d'onde devrait être non singulière à $\upsilon = 0$, cela conduit à l'expression suivante de υ

$$\upsilon = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{k^2}(m\omega\hbar - \frac{1-\lambda}{\alpha_2})} \tag{2.42}$$

Cela simplifie l'equation (2.40)

$$(1-u^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (2\upsilon+1)u\frac{\partial f}{\partial u} + (\frac{(-\xi)}{k^2} - \upsilon)f(u) = 0 \tag{2.43}$$

De même, $f(u)$ devrait être non singulier à $u = \pm 1$. Nous avons donc besoin d'une solution polynomiale à l'equation (2.40). Cette exigence impose la condition suivante sur le coefficient de $f(u)$.c' est obtenu en imposant la condition suivante

$$-\upsilon + \frac{(-\xi)}{k^2} = n(n+2\upsilon) \tag{2.44}$$

où n est un nombre entier non négatif . l'Equation (2.40) devient

$$(1-u^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (2\upsilon+1)u\frac{\partial f}{\partial u} + n(n+2\upsilon)f(u) = 0 \tag{2.45}$$

dont la solution est donnée par le polynôme de Gegenbauer :

$$f(u) = RC_n^{\upsilon}(u) \tag{2.46}$$

où R est une constante de normalisation. Le spectre d'énergie est extrait de l'équation(2.45). En insérant les expressions de υ et ξ nous obtenons

$$\frac{(-\xi)}{k^2} = n(n + 2\upsilon) + \upsilon \tag{2.47}$$

on remplace les equation (2.42) et (2.44)dans l'equation (2.48)

$$E^2 = m^2c^4 - m\omega\hbar c^2 + c^2k^2[n(n + 2\upsilon) + \upsilon] \tag{2.48}$$

on remplace l'expression de υ dans l'equation (2.48) on trouve le specter :

$$E = \pm mc^2\sqrt{[1 + \frac{2\omega\hbar}{mc^2}n + \frac{\hbar^2(\alpha_1 + m^2\omega^2\alpha_2)}{m^2c^2}n^2]} \tag{2.49}$$

$$n = 0, 1, 2......$$

Il est remarquable que l'expression du spectre d'énergie du système considéré contienne un terme de correction supplémentaire qui dépend des paramètres de déformation $\alpha_1$et α_2 , et sa déviation croît rapidement avec n. Cet effet est dû à la modification de l'algèbre de Heisenberg standard. Il est à noter que ce résultat explique le confinement dans la zone à haute énergie. D'autre part, cette expression est connue dans la théorie non commutative, où la déformation de l'espace affecte les résultats de la physique [23-23]. Cependant, la forme du spectre d'énergie peut être testée ; en utilisant la limite$\alpha_1 \to 0$, nous obtenons le même résultat de l'oscillateur de Klien-Gordon avec la présence de longueur minimale [chargui] et lorsque nous étudions la limite$\alpha_1, \alpha_2 \to 0$, nous obtenons le résultat exact de l'oscillateur de Klien-Gordon ordinaire. A ce stade, un autre test intéressant pour l'expression (spectre) est que le niveau d'énergie devient constant pour de grandes valeurs de n.

$$\lim_{n\to\infty} |E_n| = \hbar c\sqrt{(m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1)} \tag{2.50}$$

Comme dans le cas non-relativiste, en mettant $E = mc^2 + E_{nr}$ avec l'hypothèse $mc^2 \gg E_{nr}$, l'énergie de l'oscillateur de Klien-Gordon non relativiste dans l'espace déformé avec la relation de commutation (2.1) est obtenue par

$$E_{nr} = \hbar \boldsymbol{\omega} n \left(1 + \frac{\hbar \left(m^2\omega^2\alpha_2 + \alpha_1\right) n}{2m\omega}\right) \tag{2.51}$$

$$\int \frac{dp}{\left(1+\beta p^2\right)^{1-\lambda}} \left|\psi\left(p\right)^2\right| = 1 \tag{2.52}$$

2.4 la constante de normalisation

la solution de l'équation peut être exprimée en termes de polynômes de Gegenbauer

$$f\left(u\right) = RC_n^{\nu}\left(u\right) \tag{2.53}$$

où R est une constante de normalisation.

Pour déterminer la constante R en appliquant la formule :

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1-\alpha_2 p^2}} \psi^*\left(p\right)\psi\left(p\right) = 1 \tag{2.54}$$

Puis en utilisant l'identité suivante [1]

$$\int dq \left(1-q^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} \left[C_n^{\nu}\left(u\right)\right]^2 = \frac{\pi 2^{1-2\nu}\Gamma\left(2\nu-n\right)}{n!\left(n+\nu\right)\left[\Gamma\left(\nu\right)\right]^2} \tag{2.55}$$

on a :

$$R = \frac{2^{\nu-1}\alpha_2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3\pi}} \left[\frac{\Gamma\left(2\nu-n\right)}{n!\left(n+\nu\right)\left[\Gamma\left(\nu\right)\right]^2}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{2.56}$$

Nous obtenons pour la fonction d'onde énergétique normalisée l'expression :

$$\psi\left(p\right)_n = \frac{2^{\nu-1}\alpha_2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{3\pi}} \left[\frac{\Gamma\left(2\nu-n\right)}{n!\left(n+\nu\right)\left[\Gamma\left(\nu\right)\right]^2}\right]^{-\frac{1}{2}} C_n^{\nu}\left(u\right) \tag{2.57}$$

Ou

$$u = \sin k\rho \tag{2.58}$$

$$\nu = \cos k\rho \tag{2.59}$$

2.5 les Proprietes thermodynamique

Afin obtenir les proprietes thermodynamiques de le oscillateur Klein Gordon dé-formées avec des relation de commutation Snyder-de Sitter à température fnie T ,nous considérons la fonction de partition d'un tel systeme en

fonction K_B du facteur de Boltzmann comme suit :

$$Z = \sum e^{-\frac{E_n}{K_B T}} = \sum \exp\left(-\frac{mc}{K_B T}\sqrt{1 + \frac{2\hbar w n}{mc^2} + \frac{\hbar^2\left(m^2c^2\alpha_2 + \alpha_1\right)n^2}{m^2c^2}}\right) \tag{2.60}$$

ou est la constante de Boltzmann Maintenant, pour la valuer cette fonction, nous utilisons la formule d'EulerMacLaurin qui est donnée par :

$$\sum f(n) = \frac{1}{2} f(n) + \int f(x)\, dx - \sum \frac{1}{(2p)!} B_{2p}^{2p-1} f^{2p-1}(0) \tag{2.61}$$

où $B_{2p}^{2p-1}(0)$ sont les nombres de Bernoulli, sont les nombres f^{2p-1} de Bernoulli $(2p-1)$, et les termes intégraux I sont

données comme suits :

$$I = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar w}\right)}{\sqrt{1-\alpha_2 m^2c^2}} \sum (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{\alpha_2 m^2c^2}{1-\alpha m c}\right)^n$$

$$\left[\left(\frac{\Gamma(2n+2)}{\delta^{2n+2}} - \frac{e^{-\delta}}{(2n+2)}\Phi(1, 2n+2, \delta)\right)\right] \tag{2.62}$$

ou nous avons utilisé $\delta = \frac{mc}{K_B T}$le changement de variable $y = \sqrt{1 + \frac{2\hbar w n}{mc^2} + \frac{\hbar^2(m^2c^2\alpha_2+\alpha_1)n^2}{m^2c^2}}$ et la serie de puissance de racine carrée de l'integral suivant :

$$I = \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar w}\right)}{\sqrt{1 - m^2c^2\left(\frac{\alpha_1}{m_2c_2} + \alpha_2\right)}} \int dydy \left(1 + \frac{m^2c^2\left(\frac{\alpha_1}{m_2c_2} + \alpha_2\right)}{1 - m^2c^2\left(\frac{\alpha_1}{m_2c_2} + \alpha_2\right)}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\delta y} \tag{2.63}$$

à des températures élevées, nous notons que les contributions du premier et du troisième termes dans l'expression(2.62)ecelle du second terme de l'expression(2.63)devenir négligeable par rapport au terme $\frac{1}{\delta^{2n+2}}$. Par conséquent, la fonction de
partition peut entre écrite comme :

$$Z \simeq \frac{\left(\frac{mc^2}{\hbar w}\right)}{\left(\frac{mc^2}{\hbar w}\right)^2 \sqrt{1 - \alpha_2 m^2 c^2}} \sum (-1)^n \Gamma(2n+2) \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \upsilon^n \tag{2.64}$$

Avec :

$$\upsilon = \left(\frac{K_BT}{mc^2}\right)\left[\frac{m^2c^2\left(\frac{\alpha_1}{m_2c_2} + \alpha_2\right)}{1 - m^2c^2\left(\frac{\alpha_1}{m_2c_2} + \alpha_2\right)}\right] \tag{2.65}$$

En conservant les contributions dominantes de l'ordre En retenant les contributions dominantes d'ordre 0 et 1 en α_1 et α_2, on déduit la forme simplifie :

$$Z \simeq \left(\frac{K_BT}{mc^2}\right)^2 - \frac{3\alpha_2 (K_BT)^4}{\hbar w m c^4}\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{\hbar w}\right)^2\right) - \frac{3\alpha_1 (K_BT)^4}{\hbar w^3 m^3 c^4} \tag{2.66}$$

En utilisant l'approximation$\left(1 - \frac{1}{6}\left(\frac{mc^2}{\hbar w}\right)^2\right) \simeq 1$, nous obtenons finalement l'expansion à haute température de la fonction de partition :

$$Z \simeq \left(\frac{K_BT}{mc^2}\right)^2 - \frac{3(K_BT)^4}{\hbar w m c^4}\left(\frac{\alpha_1}{m_2c_2} + \alpha_2\right) \tag{2.67}$$

Nous notons que le premier terme est la fonction de partition pour l'oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnel habituel , tandis que les deuxième et troisième termes représentent la contribution provenant de la perturbation de l'espace par les paramétres de déformation 1 et 2 de l'algébre de Snyder-de Sitter.

à cette étape, en mettant $\theta \approxeq \left(\frac{\alpha_1}{m_2c_2} + \alpha_2\right)$ dans la fonction de partition () et selon les définitions mentionnées ci-dessous ,nous pouvons déterminer les propriétés thermodynamiques de notre systeme physique, telles que l'énergie libre F, l'énergie moyenne U, la chaleur spécifique C et l'entropie S, comme suit :

$$F = -K_B T \ln\left(\frac{(K_B T)^2}{\hbar w m c^2}\left(1 - 3\theta (K_B T)^2\right)\right) \tag{2.68}$$

,

$$u = 4K_B T\left[1 - \frac{1}{2\left(1 - 3\theta (K_B T)^2\right)}\right] \tag{2.69}$$

,

$$C = 4K_B\left[1 - \frac{\left(1 - 3\theta (K_B T)^2\right)}{2\left(1 - 3\theta (K_B T)^2\right)^2}\right] \tag{2.70}$$

$$S = K_B\left[\frac{2 - 12\theta (K_B T)^2}{\left(1 - 3\theta (K_B T)^2\right)} + \ln\left(\frac{(K_B T)^2}{\hbar w m c^2}\left(1 - 3\theta (K_B T)^2\right)^2\right)\right] \tag{2.71}$$

OÙ

$F = -K_B T \ln Z, U = K_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}, C = \frac{\partial U}{\partial T}$,et $\quad S = \frac{\partial F}{\partial T}$

Il est remarquable de noter que ces expressions prédites peuvent entre testées.Utiliser la limite $\theta \longrightarrow 0\,(i.e.\alpha_1 \longrightarrow 0$et $\alpha_2 \longrightarrow 0)$, nous obtenons les résultats thermodynamiques pour l'oscillateur de Klien-Gordon ordinaire .D'autre part, à haute température, ces résultats thermodynamiques déformés sont plus faibles que dans le cas ordinaire sans incertitude minimale.

Conclusion

Nous étudions un calcul explicite de l'oscillateur de Klein-Gordon déformé unidimensionnel dans l'espace des moments avec des relations de commutation Snydre-de Sitter qui conduisent à une incertitude minimale non nulle dans la mesure de la position ainsi que de l'impulsion pour une particulr de spin 0.la solution exacte est obtenue lorsque lesfonctions d'onde sont exprimées en termes de polynômes de Gengenbauer

Le spectre d'énergie du système est déduit avec une correction supplémentaire, qui dépend des paramètres de déformation α_1 et α_2, et sa déviation croît rapidement avec n qui peut être liée au confinement. Par la suite, dans le régime des températures élevées, nous montrons que les propriétés thermodynamiques de notre système ont également été influencées par cette déformation de l'espace. De plus, nos résultats pour les grandeurs thermodynamiques sont étudiés et discutes en fonction de le paramètre de déformation θ. Ce fait n'est pas surprenant puisque l'introduction de l'algèbre de Snyder-de Sitter affecte les résultats physiques.

Ce travail a permis d'ouvrir quelques perspectives théoriques en particulier l'étude de l'oscillateur harmonique de Klein-Gordon à D- dimension dans l'algèbre de Snyder- De Sitter et l'oscillateur harmonique de l'équation de Schrodinger dans l'algèbre de Snyder- De Sitter .

Bibliographie

[1] H. S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947).

[2] A. Kempf, J. Math. Phys. 35, 4483 (1994) ; A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995).

[3] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73, 977 (2001).

[4] G. Amelino-Camelia, Phys. Le

[5] tt. B 510, 255 (2001) ; Int. J. Mod. Phys. D 11, 35 (2002).

[6] S. Capozziello, G. Lambiase, and G. Scarpetta, Int. J. Theor. Phys. 39, 15 (2000).

[7] S. Mignemi, Phys. Rev. D 84, 025021 (2011).

[8] S. Ghosh and S. Mignemi, Int. J. Theor. Phys. 50, 1803 (2011).

[9] S. Mignemi, Classical Quantum Gravity 29, 215019 (2012).

[10] M. M. Stetsko, J. Math. Phys. 56, 012101 (2015).

[11] M. Moreno and A. Zentella, J. Phys. A : Math. Gen. 22, 821 (1989) ; J. Benitez, Y. Martinez, R. P. Romero, H. N. Nunez-Yepez, and A. L. Salas-Brito, Phys. Rev. Lett. 64, 1643 (1990) ; Y. Martinez, R. P. Romero, H. N. Nunez-Yepez, and A. L.Salas-Brito, Eur. J. Phys. 16, 135 (1995).

[12] J. Beckers, N. Debergha, and A. G. Nikitin, J. Math. Phys 33, 3387 (1992) ; M. Bednar, J. Ndimubandi, and A. G. Nikitin,
Can. J. Phys. 75, 283 (1997).

[13] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A 22, 817 (1989).

[14] F. Ravndal, Phys. Lett. B 113, 57 (1982).

[15] M. H. Pacheco, R. R. Landim, and C. A. S. Almeida, Phys. Lett. A 311, 93 (2003).

[16] Kh. Nouicer, J. Phys. A 39, 5125 (2006).

[17] M Falek, M Merad, T Birkandan - Journal of Mathematical Physics, 2017 - aip.scitation.org

[18] S.Mignemi, class quoutu grav 26(2009) 013 arxivi 1006,0478

Résumer

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de système d'oscillateur de Klein –Gordon unidimensionnel relativiste avec le modèle de Snyder-de Sitter, où la fonction propre de l'énergie est déterminée. Les fonctions d'onde peuvent être données en termes de polynômes de Gengenbauer. Nous commenterons également les propriétés thermodynamiques du système.

ملخـــــــص

إن العمل المقدم في هذه الرسالة هو جزء من نظام المذبذبات Klein-Gordon النسبي ذي البعد الواحد مع نموذج Snydre –de Sitter،حيث يتم تحديد وظيفة الطاقة الذاتية .

يمكن إعطاء وظائف الموجة من حيث الحدود Gengenbauer، وسنعلق أيضا على الخصائص الديناميكية –الحرارية للنظام المتعددة

Abstract

The work presented in this dissertation is part of the relativistic one-dimensional Klein -Gordon oscillator system with the Snyder-de Sitter model, where the proper function of energy is determined. Wave functions can be given in terms of Gegenbauer polynomials. We will also comment on the thermodynamic properties of the system.