

Examen Final de : Fonction de la variable complexe (MATH4)

17-5-2025 / Prof:B.Bahri



Exercice n=1

4 points

- Calculer l'intégrale suivante en utilisant la formule intégrale de Cauchy :

$$\int_C \frac{e^{\pi z}}{2z^2 - 3iz - 1} dz, \quad C : \text{le cercle d'équation } |z - 1 + \frac{i}{2}| = \frac{11}{6}.$$



Exercice n=2

8 points

- Soit $P(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 - y$.

- 1) Démontrer que cette fonction P est harmonique.
- 2) Trouver la fonction Q telle que f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} donnée par sa forme algébrique

$$f(z) = f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

où $z = x + iy$, $P = \text{Re}(f)$ et $Q = \text{Im}(f)$



Exercice n=3

8 points

Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels et soit les fonctions K et T

$$k(z) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy$$

$$T(z) = |z|^2 + 3z^2$$

1. Trouver les parties réelles et imaginaires des fonctions K et T .
2. Vérifier si les fonctions suivantes sont holomorphes dans \mathbb{C} ?



Examen Final de : Fonction de la variable complexe (MATH4)

17-5-2025 / Prof: Bahri

Correction de l'Examen Final

Solution de l'exercice N° 1:

Pour calculer l'intégrale il faut factoriser $2z^2 - 3iz - 1$.

$$2z^2 - 3iz - 1 = 0 \implies \Delta = (-3i)^2 + 8 = -9 + 8 = -1 = i^2 \implies \begin{cases} z_0 = \frac{3i - i}{4} = \frac{i}{2}, \\ z_1 = \frac{3i + i}{4} = i. \end{cases}$$

$$\implies 2z^2 - 3iz - 1 = 2(z - z_0)(z - z_1) = 2(z - \frac{i}{2})(z - i).$$

$$i, \frac{i}{2} \in \text{int}(C); C = |z - 1 + \frac{i}{2}| = \frac{11}{6} ?$$

$$\begin{cases} |i - 1 + \frac{i}{2}| = |-1 + \frac{3i}{2}| = \sqrt{1 + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} < \frac{11}{6} \implies i \in \text{int}(C). \\ |\frac{i}{2} - 1 + \frac{i}{2}| = |-1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} < \frac{11}{6} \implies i/2 \in \text{int}(C). \end{cases}$$

Donc il faut décomposer $\frac{1}{(z - \frac{i}{2})(z - i)}$ en éléments simples.

$$\frac{1}{(z - \frac{i}{2})(z - i)} = \frac{a}{z - \frac{i}{2}} + \frac{b}{z - i} = \frac{(a + b)z - i(a + \frac{b}{2})}{(z - \frac{i}{2})(z - i)} \implies \begin{cases} a + b = 0, \\ -i(a + \frac{b}{2}) = 1. \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2i, \\ b = -2i. \end{cases}$$

$$\implies I = \int_C \frac{e^{\pi z}}{2(z - \frac{i}{2})(z - i)} dz = \int_C e^{\pi z} \frac{1}{2} \left(\frac{2i}{z - \frac{i}{2}} - \frac{2i}{z - i} \right) dz = i \left(\int_C \frac{e^{\pi z}}{z - \frac{i}{2}} dz - \int_C \frac{e^{\pi z}}{z - i} dz \right)$$

On sait que $f(z) = e^{\pi z}$ est holomorphe car $f'(z) = \pi e^{\pi z}$ dans l'intérieur de C

qui est un chemin fermé (cercle). Donc :

$$\begin{aligned} I &= i \left(\int_C \frac{e^{\pi z}}{z - \frac{i}{2}} dz - \int_C \frac{e^{\pi z}}{z - i} dz \right) \\ &= i \left[2\pi i (e^{\pi \frac{i}{2}} - e^{\pi i}) \right] \\ &= i \left[2\pi i (i - (-1)) \right] \\ &= \boxed{-2\pi - 2\pi i}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice N° 1: Soit $P(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2 - y$.

1) Montrons que P est harmonique sur \mathbb{R}^2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 2x \\ \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = 6x + 2. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = -6xy - 2y - 1 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -6x - 2. \end{array} \right. \quad \implies \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

2) Puisque f est holomorphe sur \mathbb{C} alors le couple (P, Q) vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \dots\dots (1) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \dots\dots (2) \end{array} \right.$$

De l'équation (1) on tire $\frac{\partial Q}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 2x$, d'où

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \int (3x^2 - 3y^2 + 2x) dy \\ &= 3x^2y - y^3 + 2xy + C(x). \end{aligned}$$

d'une part d'autre part on a :

$$(2) \implies -6xy - 2y - 1 = -\overbrace{(6xy + 2y + C'(x))} \iff \overbrace{C'(x)} = 1 \implies \overbrace{C(x)} = x + c ; c \in \mathbb{R}.$$

Finalement :

$$\boxed{Q(x,y)=3x^2y - y^3 + 2xy + x + c} ; c \in \mathbb{R}.$$

Solution de l'exercice N° 3:

$$1) f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2y - 2xy)$$

$$g(z) = |z|^2 + 3z^2 = x^2 + y^2 + 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = (4x^2 - 2y^2) + i(6xy)$$

$$\Re(f(z)) = x^2 - y^2 + 2x \quad \text{et} \quad \Im(f(z)) = 2y - 2xy$$

$$\Re(g(z)) = 4x^2 - 2y^2 \quad \text{et} \quad \Im(g(z)) = 6xy$$

2) on vérifié les conditions de Cauchy - Riemann (avec P et Q sont les parties réelles et imaginaires)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{array} \right.$$

a) Pour la fonction $f(z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x + 2 \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2 - 2x \implies \frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \implies \frac{\partial P}{\partial y} \neq -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{array} \right.$$

\implies Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées alors $f(z)$ n'est pas holomorphe sur \mathbb{C}

b) Pour la fonction $g(z)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 8x \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 6x \implies \frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -8y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y \implies \frac{\partial P}{\partial y} \neq -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{array} \right.$$

\implies Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées alors $g(z)$ n'est pas holomorphe sur \mathbb{C} .

Solution de l'exercice N° 1:

$$1) f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2y - 2xy)$$

$$g(z) = |z|^2 + 3z^2 = x^2 + y^2 + 3(x^2 - y^2 + 2ixy) = (4x^2 - 2y^2) + i(6xy)$$

$$\Re(f(z)) = x^2 - y^2 + 2x$$

$$\text{et } \Im(f(z)) = 2y - 2xy$$

$$\Re(g(z)) = 4x^2 - 2y^2$$

$$\text{et } \Im(g(z)) = 6xy \dots$$

2) on vérifié les conditions de Cauchy – Riemann (avec P et Q sont les parties réelles et imaginaires)

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

a) Pour la fonction $f(z)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 2x + 2 & \frac{\partial Q}{\partial y} = 2 - 2x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -2y & \frac{\partial Q}{\partial x} = -2y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

⇒ Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées alors $f(z)$ n'est pas holomorphe sur \mathbb{C}

b) Pour la fonction $g(z)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 8x & \frac{\partial Q}{\partial y} = 6x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} \neq \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -8y & \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

⇒ Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées alors $g(z)$ n'est pas holomorphe sur \mathbb{C}