

Université de ABBAS Laghrour KHENCHELA

# ***Fatigue des matériaux***

## ***Cours & Exercices***

***2<sup>ème</sup> année***

***Master***

***LMD***

***Engineering***

**B. Meddour**

**2016**

## **TABLE DE MATIERES**

<b>CHAPITRES</b>	<b>PAGES</b>
<b>CHAPITRE 1</b> <i>Notions préliminaires</i> .....	<i>1</i>
<b>CHAPITRE 2</b> <i>Essais d'endurance</i> .....	<i>10</i>
<b>CHAPITRE 3</b> <i>Approximation de la courbe de Wohler</i> .....	<i>15</i>
<b>CHAPITRE 4</b> <i>Facteurs affectant la limite d'endurance expérimentale</i> .....	<i>18</i>
<b>CHAPITRE 5</b> <i>Contrainte non complètement renversée</i> .....	<i>27</i>
<b>CHAPITRE 6</b> <i>Chargement combiné</i> .....	<i>37</i>
<b>CHAPITRE 1</b> <i>Contrainte à amplitude variable</i> .....	<i>41</i>

## **INTRODUCTION**

*Une structure est conçue dans le but d'accomplir une ou plusieurs fonctions, on distingue deux types : les unes qui sont soumises à des chargements mécaniques statiques et les autres qui sont soumises à des chargements dynamiques. Pratiquement les structures de la première catégorie durent plus longtemps ce qui justifie le dimensionnement en fonction de la résistance ou la rigidité lors la phase de conception.*

*Un chargement dynamique de causes variables peut se traduire par des variations cycliques de contraintes. Malheureusement la ruine d'un nombre important de structures a été souvent observée et l'est encore aujourd'hui, elle peut, même parfois, être catastrophique en termes de pertes humaines. Il est à constater que les sollicitations dynamiques qui sont à l'origine de ces ruines sont beaucoup inférieures à la limite d'élasticité du matériau constituant la structure, c'est le **phénomène de fatigue**.*

*Ce phénomène est caractérisé par l'apparition d'un défaut au niveau de la surface ou à l'intérieur de la pièce (la conception est l'une des causes favorisant l'endommagement).*

*Il est imprédictible en effet il se développe lentement (voire des années) dans le temps sans donner un signe, autrement dit on ne constate aucune modification macroscopique au niveau de la structure.*

*De ce fait la prise en considération de la résistance en fatigue lors de la phase de conception paraît indispensable. C'est dans ce cadre qu'entre le contenu de ce fascicule où on donne la possibilité aux étudiants d'apprendre la démarche et les outils nécessaires pour dimensionner les structures en fonction des chargements dynamiques auxquels sont elles assujetties.*

*En premier temps il est nécessaire de passer par des notions préliminaires pour parvenir à entrer directement dans le sujet commençant par le cas de contrainte complètement renversée par l'étude de la fameuse courbe de Wöhler qui constitue la base d'étude de la fatigue, suivi du cas de contrainte non complètement renversée (critère de Goodman). Ensuite c'est la généralisation pour le cas de changement complexe. Finalement on étudiera le cas de cumul d'endommagement décrit par la loi de Miner.*

## Chapitre 1 Notions préliminaires

### C'est quoi la fatigue ?

Pour comprendre ce phénomène prenons un fil d'acier entre deux mains en le coudant dans un sens et puis dans l'autre sens, en faisant cela plusieurs fois jusqu'à la rupture (Fig. 1).

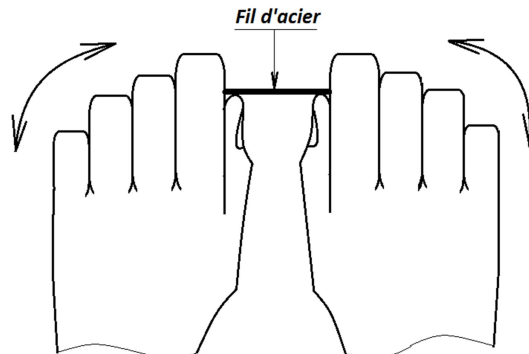


Figure 1. Rupture d'un fil d'acier sous l'effet d'une flexion cyclique aux mains

Le fil est rompu après 10 à 15 cycles, analysons le problème (Fig. 2) :

On assimile le fil d'acier à une poutre sur laquelle sont appliqués les efforts des deux mains, dans le premier sens la fibre AB est tirée (sens 1) contrainte positive, lorsqu'on inverse le chargement (sens 2) la fibre AB est comprimée et la contrainte est négative. En répétant plusieurs fois jusqu'à la rupture. C'est le phénomène de fatigue. (Voir Fig. 3 ; Fig. 4 ; Fig. 5 ; Fig. 6 ; Fig. 7 et Fig. 8)

En résumé la fatigue est **la rupture sous des sollicitations répétées**.

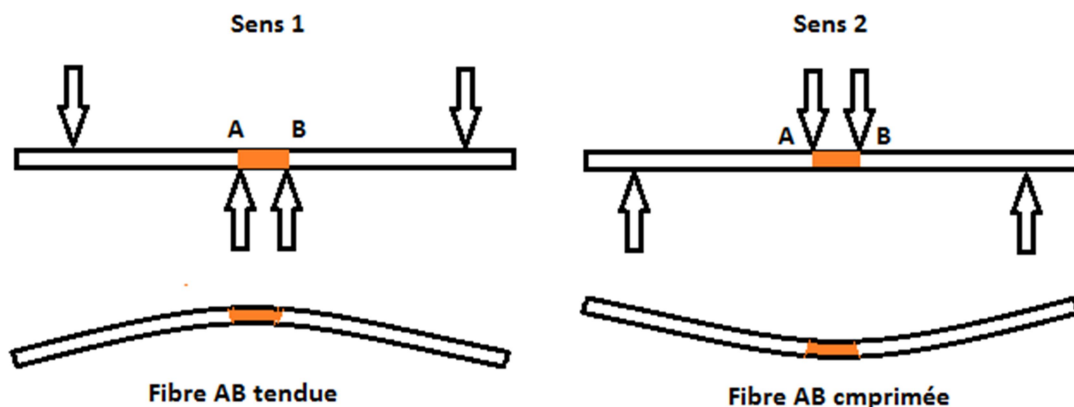


Figure 2. Modélisation du chargement appliqué par les mains sur le fil d'acier



Figure 3. Détachement d'une partie d'une roue dentée

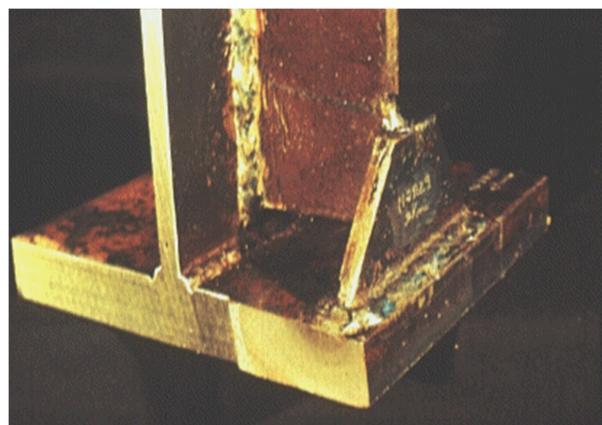


Figure 4. Rupture au niveau d'une charpente métallique



Figure 5. Fissuration d'un pont



Figure 6. Rupture d'un tirant



Figure 7. Rupture d'un arbre cannelé



Figure 8. Fissuration au niveau du mécanisme d'atterrissage d'un avion

### Comment agit la fatigue ?

Considérons une structure soumise à un effort cyclique agissant jusqu'à la rupture (après un nombre de cycles donné). (Fig. 10)

L'endommagement est imprévisible, il peut naître (à l'échelle microscopique) souvent à la surface de la pièce comme il peut naître à l'intérieur. En évoluant il passe par 3 stades :

#### 1) Amorçage :

A cause de la grande finesse du défaut initié, sa détection n'est possible que si on utilise de puissants équipements de laboratoire. Son initiation peut avoir lieu dans des endroits où l'accès est impossible.

Dans la figure (Fig. 10) la zone d'amorçage est repérée par zone 1.

#### 2) Propagation :

Sous l'effet du changement cyclique du chargement la fissure initiée commence à prendre des dimensions importantes menant finalement à la ruine.

A ce stade la fissure qui a grandi résultait de la propagation des microfissures causées par le défaut initié dans la première étape, c'est elle qui deviendra la fissure de la fatigue.

Sur la figure (Fig. 10) ce stade correspond à la zone 2.

#### 3) Rupture brutale : (Fig. 9)

Lorsque la fissure atteint une distance de telle façon que la section résiduelle est trop faible pour supporter de fortes contraintes résultant d'une concentration au fond de la fissure, sur la figure (Fig. 10) cette section correspond à la zone 3.

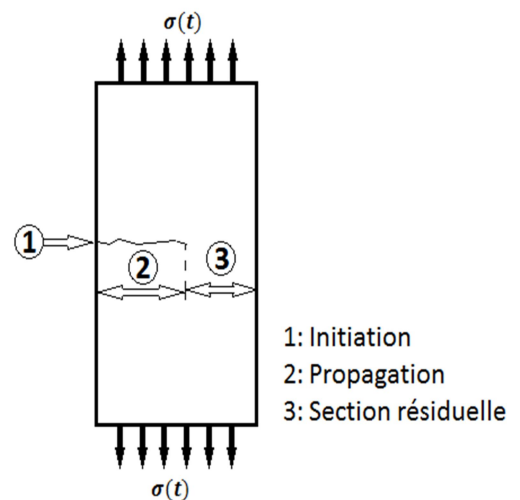


Figure 9. La section résiduelle

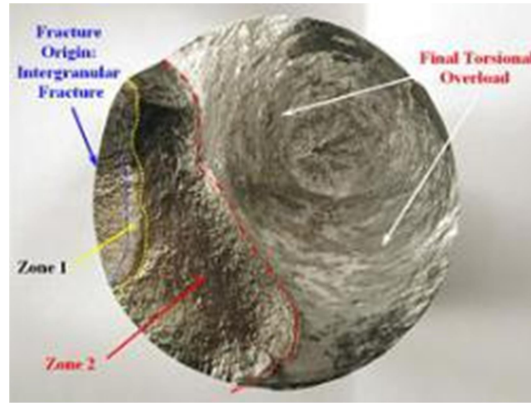


Figure 10. Faciès de rupture d'un arbre de transmission de voiture de course.

**Types de sollicitations en fatigue**

**1. Sollicitations axiales (Traction/Compression)**

Dans le système triangulaire ci-contre (Fig. 11) les barres AD, DE sont en compression, tandis que les barres AE et EB sont en traction

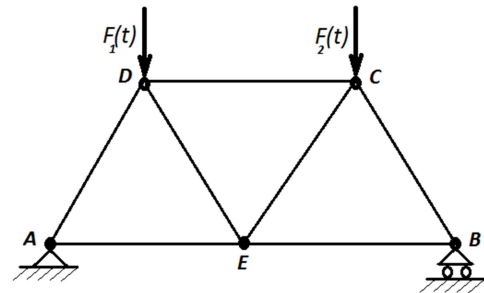


Figure 11. Système en treillis

**2. Flexion**

On distingue deux types de flexion :

**2.1. Flexion ondulée :**

Les contraintes de flexion sont de même signe durant les cycles de fatigue. Les figures (Fig. 12) et (Fig.13) illustrent deux exemples de structures en flexion ondulée.

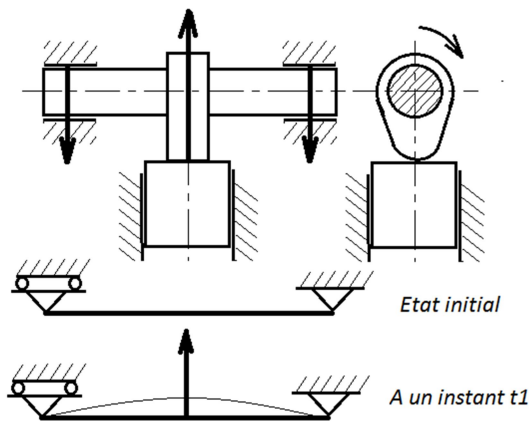


Figure 12. Arbre à came

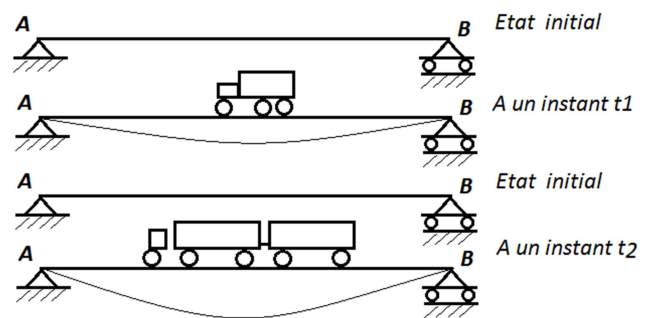


Figure 13. Pont

**2.2. Flexion alternée**

Dans ce cas de sollicitation les contraintes sont opposées en signes durant les cycles effectués. Une poutre vibrant sou l'effet d'un chargement dynamique est en flexion alternée, la fibre supérieure tantôt tirée tantôt comprimée.

### 2.3. Flexion rotative

Si on assimile la structure, soumise à une flexion rotative, à une poutre tournante par rapport à la direction de la charge (Fig. 14) la fibre A se trouve tantôt comprimée tantôt tendue.

Ce cas de flexion correspond au type purement alternée c.à.d. les contraintes de flexion sont égales mais opposées durant les cycles effectués (Fig. 15)

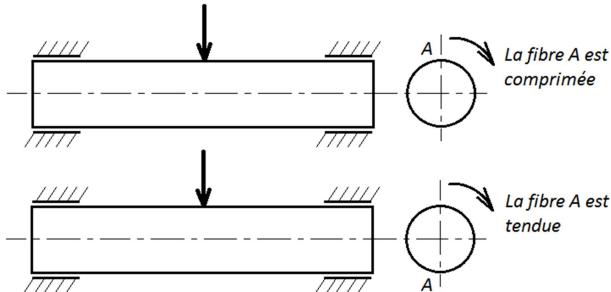


Figure 14. Flexion rotative

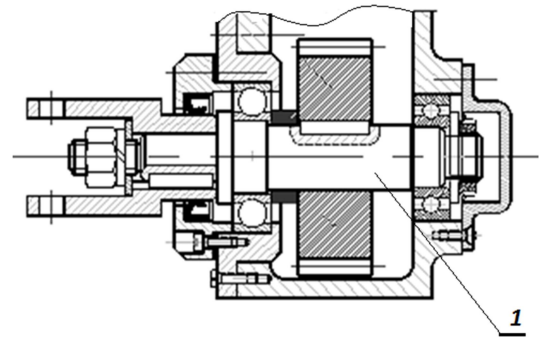


Figure 15. Arbre en flexion rotative

### 3. Torsion

Cette sollicitation est analogue à la flexion en effet on distingue :

#### 3.1. Torsion ondulée

Les contraintes tangentiels sont de même signes. Comme exemple on peut citer la barre de torsion de suspension arrière d'un véhicule (illustrée par la figure (Fig.16)

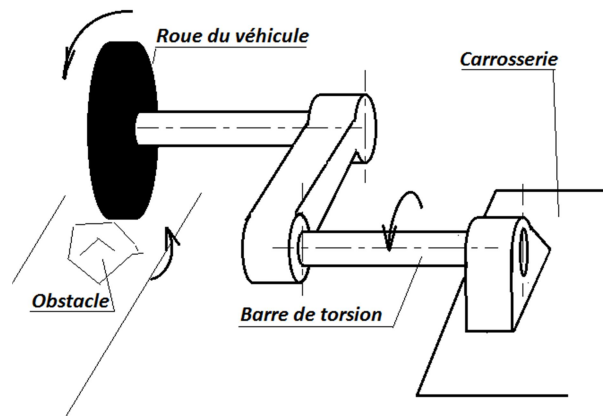


Figure 16. Barre de torsion d'un véhicule

#### 3.2. Torsion alternative

Les contraintes tangentiels sont de signes opposées. Dans la figure (Fig. 17) l'arbre tournant est en rotation continu et l'arbre oscillant est en rotation alternative, ce dernier est soumis à une torsion alternative .

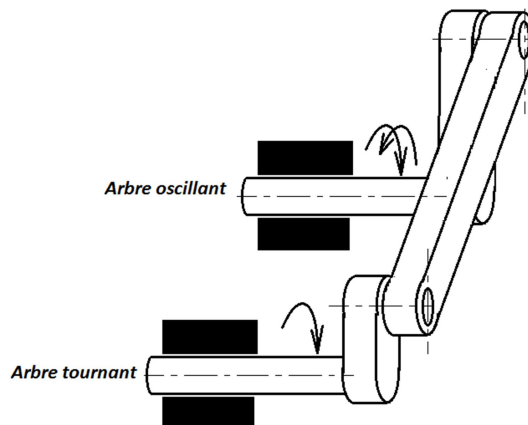


Figure 17. Mécanisme oscillant

#### 4. Sollicitation combinée

La sollicitation peut être la combinaison de traction, torsion ou de flexion. L'arbre 1 du réducteur de la figure (Fig. 15) est soumis à une flexion rotative et une torsion.

#### 5. Fatigue en contact

Au moment du contact le corps 1 exerce une pression de contact sur le corps 2 cela engendrera des contraintes maximales de cisaillement sous la surface de contact (Fig. 18). Une pression répétée pourrait entraîner une fissuration et une détérioration de la zone de contact c'est la fatigue de contact. Ce phénomène est très rencontré surtout dans les roulements, les engrenages et les chemins de fer. (Fig. 19)

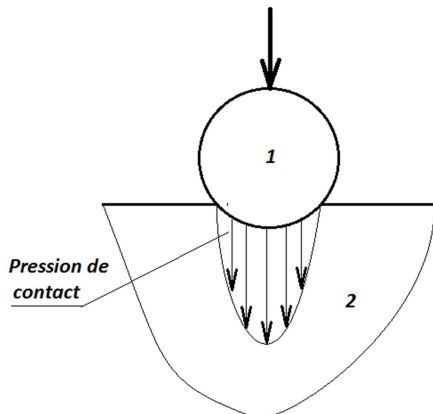


Figure 18. Contact de deux corps

Figure 19. Détérioration d'une bague de roulement

### Définitions et terminologie

#### 1. Types de variation des contraintes

Les sollicitations en fatigue peuvent être simples (traction, compression, torsion..) ou complexes (combinées). Les efforts répétés, varient en fonction du temps d'une façon périodique, dans ce cas on admet que leurs variations sont sinusoïdales, ou quelconque celle-ci posera des difficultés en calcul.

On peut distinguer :

##### 1.1. Contrainte sinusoïdale à amplitude constante

C'est la variation la plus simple elle est continue et à amplitude de contrainte constante. (Fig. 20)

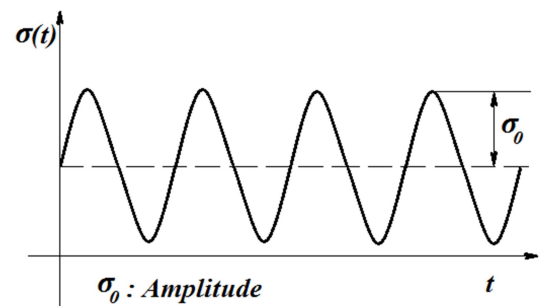


Figure 20. Contrainte sinusoïdale à amplitude constante

##### 1.2. Contrainte sinusoïdale à amplitude variable

(Fig. 21)

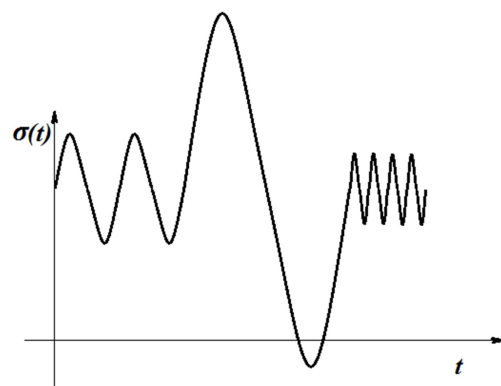


Figure 21. Contrainte sinusoïdale à amplitude variable

### 1.3. Contrainte aléatoire

La courbe de variation est d'allure quelconque (Fig. 22)

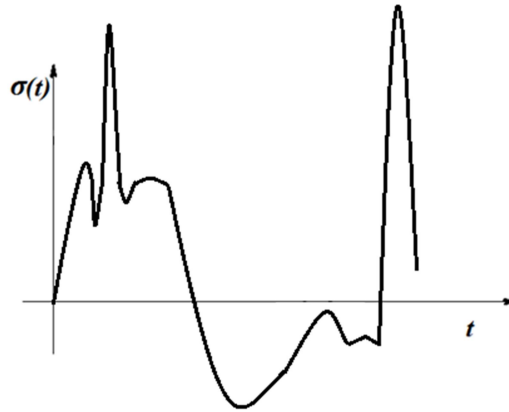


Figure 22. Contrainte aléatoire

Pour simplifier les calculs en fatigue nous considérons ici que les contraintes sont sinusoïdales à amplitude constante ou à amplitude variable.

### 1.4. Cycle de contrainte

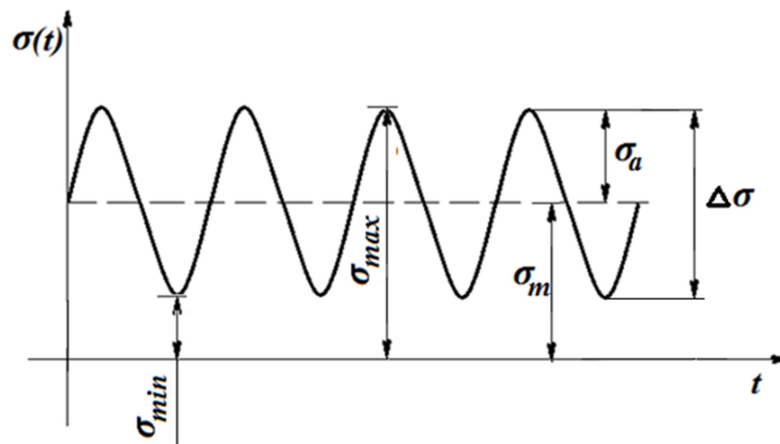


Figure 23. Cycle de contrainte sinusoïdale

$\sigma_a$  : Amplitude de contrainte

$\sigma_m$  : Contrainte moyenne

$\sigma_{max}$  : Contrainte maximale

$\sigma_{min}$  : Contrainte minimale

$\Delta\sigma$  : Etendue de contrainte

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\sigma_a$$

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$$

$$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a$$

Par considération des signes des termes  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_{min}$  et les termes  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$  les sollicitations peuvent être classées comme suit :

#### A) Sollicitation répétée

C'est le cas où les termes  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_{min}$  sont ou bien positifs ou bien négatifs (Fig. 24 et Fig. 25)

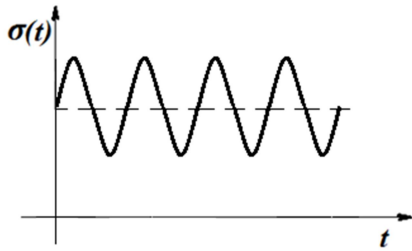


Figure 24. Sollicitation répétée ( $\sigma_m > 0$ )

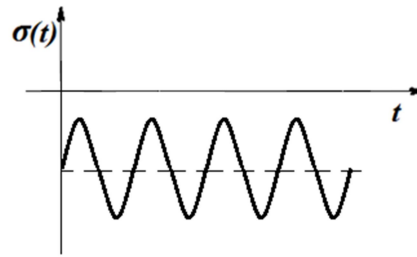


Figure 25. Sollicitation répétée ( $\sigma_m < 0$ )

B) Sollicitation alternée

Dans ce cas :  $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{mix}} < 0$

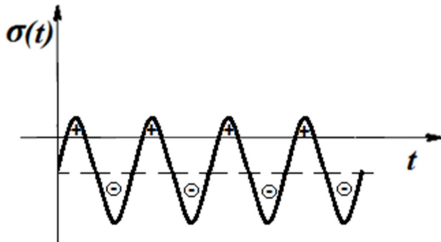


Figure 26. Sollicitation alternée ( $\sigma_m < 0$ )

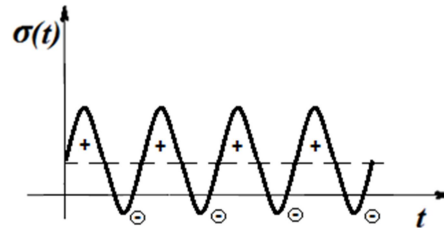


Figure 27. Sollicitation alternée ( $\sigma_m > 0$ )

Cas particulier :

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{mix}} = -1$$

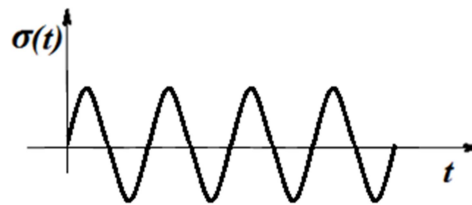


Figure 28. Sollicitation complètement renversée ( $\sigma_m = 0$ )

C) Sollicitation statique

C'est le cas où  $\sigma_a = 0$  et  $\sigma_m \neq 0$

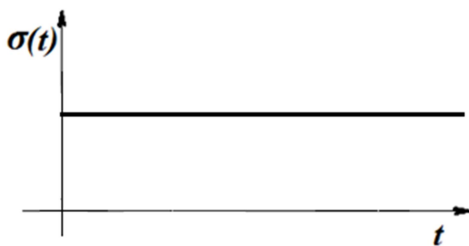


Figure 29. Sollicitation statique ( $\sigma_m > 0$ )

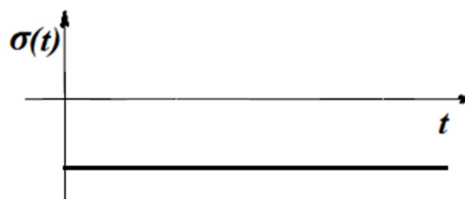


Figure 30. Sollicitation statique ( $\sigma_m < 0$ )

1.5. Coefficient de Steefhelter

$$\phi = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \text{ avec } -1 \leq \phi \leq +1$$

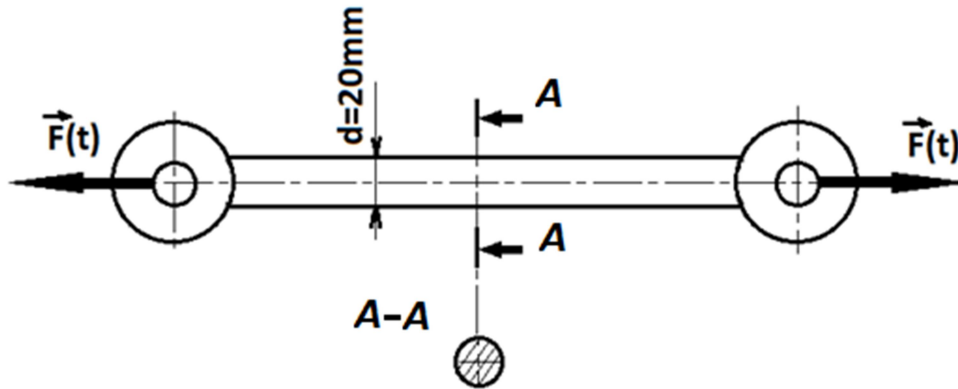
Ce coefficient est utilisé pour déterminer le type de sollicitation.

$\phi = -1$  : Contrainte complètement renversée

$\phi = 1$  : Sollicitation statique

$-1 < \phi < 0$  ou  $0 < \phi < +1$  : Sollicitation répétée

Exemple d'application :



La figure ci-dessus représente une bielle qui est soumise à une sollicitation cyclique (traction). L'effort variable a pour valeurs extrêmes :

$$F(t): \begin{cases} F_{max} = 157000N \\ F_{min} = 10000N \end{cases}$$

- 1) De quelle sollicitation s'agit-il ?
- 2) Calculer  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_m$

*Solution :*

- 1) Comme  $F_{max} > 0$  et  $F_{min} > 0$  la sollicitation est répétée

$$2) \sigma_{max} = \frac{4F_{max}}{\pi d^2} = 500MPa$$

$$\sigma_{min} = \frac{4F_{min}}{\pi d^2} = 31.84MPa$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 234.07MPa$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 265.92MPa$$

**Exercices****Exercice1 :**

Un axe est soumis à un cisaillement, les données sont :

$$\tau_m = 85 \text{ MPa} ; \Phi = -0.85$$

- 1) Déterminer le type de sollicitation
- 2) Calculer  $\tau_{max}$ ,  $\tau_{min}$  et  $\tau_a$

**Exercice2 :**

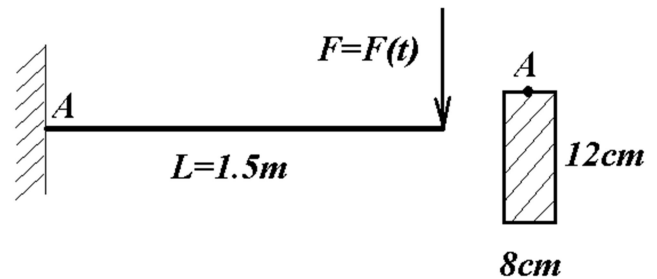
Une grue soulève du béton à une hauteur donnée en le faisant quinze fois par jour, le câble utilisé est de diamètre 20mm et la charge à soulever est 2.5 tonnes

- 1) Déterminer  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ ,  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$
- 2) Si le câble est conçu pour un service de  $10^6$  cycles et la fréquence 5jour par semaine et 11 mois par années calculer la durée de vie du câble

**Exercice3 :**

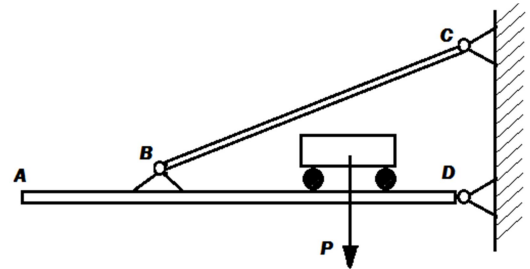
Une poutre soumise à un chargement dynamique tel que  $F(t) = F_0 \sin \omega t$  avec  $F_0 = 51 \text{ kN}$

- 1) Déterminer  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ ,  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$  à la section encastree au point A
- 2) De quelle type de sollicitation s'agit-il ? Calculer le coefficient de Steefhelner

**Exercice4 :**

La barre BC de la structure ci-dessus en traction cyclique est soumise à un chargement axial tel que :  $F_{max} = 2 \times 10^5 \text{ N}$  et  $F_{min} = 8.5 \times 10^3 \text{ N}$  de section  $425 \text{ mm}^2$

- 1) Calculer  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$ ,  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$  et  $\Phi$
- 2) Ce chargement s'applique 300 fois/heure quotidiennement de 8h00 à 17h00 tous les jours sauf Vendredi pendant 11 mois par année durant 3 ans calculer le nombre de cycles



## Chapitre 2 Essais d'endurance

Les essais de caractérisation ont pour but de déterminer les caractéristiques des matériaux utilisés en engineering, la résistance en fatigue ou la limite d'endurance est l'une des caractéristiques requises pour le dimensionnement des structures.

La diversité des essais de fatigue impose une classification en deux catégories : essais simples (basés sur des sollicitations simples et des éprouvettes normalisées) et essais spéciaux (Les échantillons peuvent être de différentes formes soumises à des sollicitations complexes). Dans ce chapitre on considère uniquement les essais simples suivants :

- 1) Essai de traction
- 2) Essai de Wöhler (Flexion en encastrement)
- 3) Essai de Moore (flexion 4 points)
- 4) Essai de torsion alternée

Le matériel exigé pour réaliser un essai de fatigue doit comporter:

- a) Une machine convenable (Fig. 2)
- b) Une série d'éprouvettes conformes aux normes (Fig.1)
- c) Un compteur de cycles

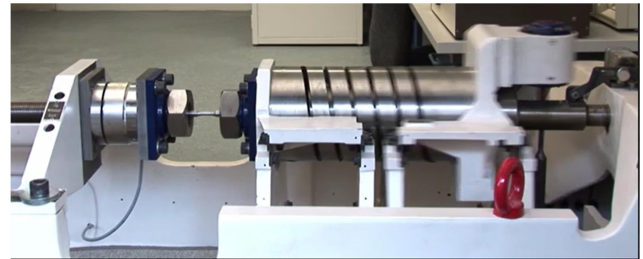


Figure 1. Série d'éprouvettes

Figure 2. Machine d'essai de fatigue en traction

### Conduite de l'essai de fatigue

Pour des raisons de simplification, dans les essais de fatigue on ne considère que le cas où la contrainte est complètement renversée c.à.d. ( $\sigma_m = 0$ ).

Pour chaque configuration de chargement (Amplitude  $\sigma_a$  ou étendue  $\Delta\sigma$ ) on enregistre le nombre de cycles à la rupture.

### Essai de fatigue en traction

La contrainte appliquée est complètement renversée ( $\sigma_m = 0$ ), l'éprouvette est maintenue fixe à un côté et tirée/comprimée à l'autre côté (Fig. 3)

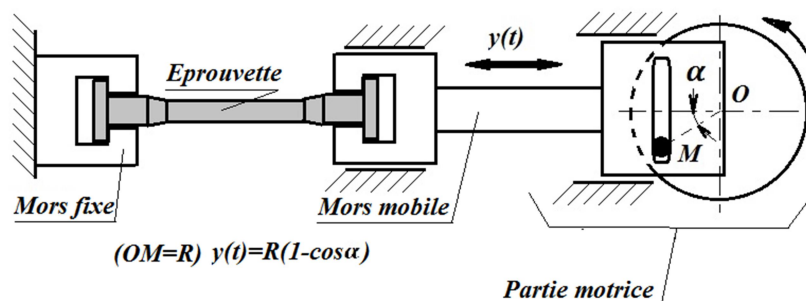


Figure 3. Schéma de principe de la machine d'essai de fatigue en traction

### Essai de Wöhler

L'éprouvette est encastree à un bout et soumise à un effort à l'autre bout donc on a une flexion rotative.

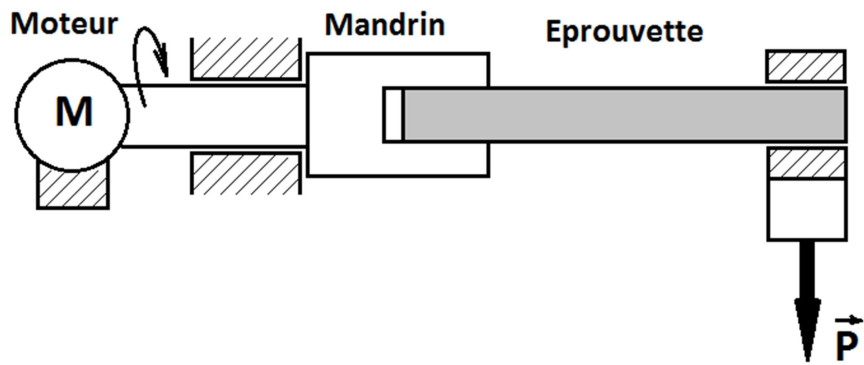


Figure 4. Principe de l'essai de Wöhler

**Essai de torsion**

L'éprouvette est fixée à un côté et l'autre côté est soumis à une rotation alternative imposée.

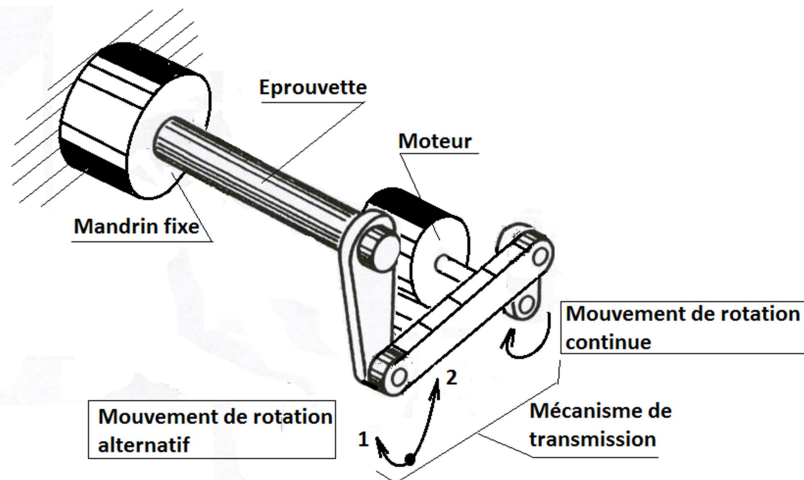


Figure 5. Principe de l'essai de torsion alternée

**Essai de Moore**

Dans cet essai l'éprouvette est soumise à une flexion rotative (4 points) mais l'avantage essentiel c'est la simplicité de la machine. L'éprouvette est en rotation continue mais soumise à des poids qu'on peut faire varier.

1. Schéma de principe de la machine

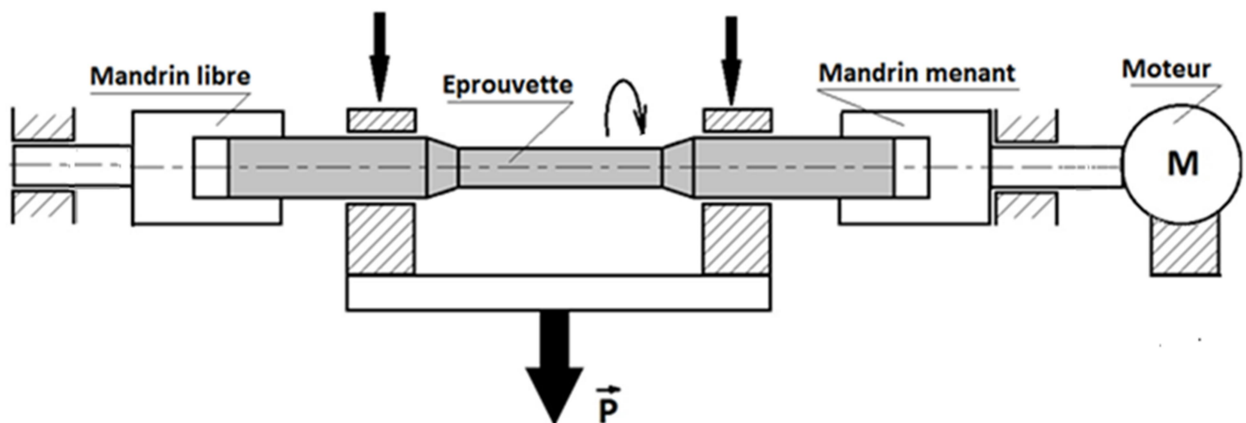


Figure 6. Schéma de principe de la machine d'essai de Moore



Figure 7. Machine à essai de Moore

2. Etude de l'essai de Moore

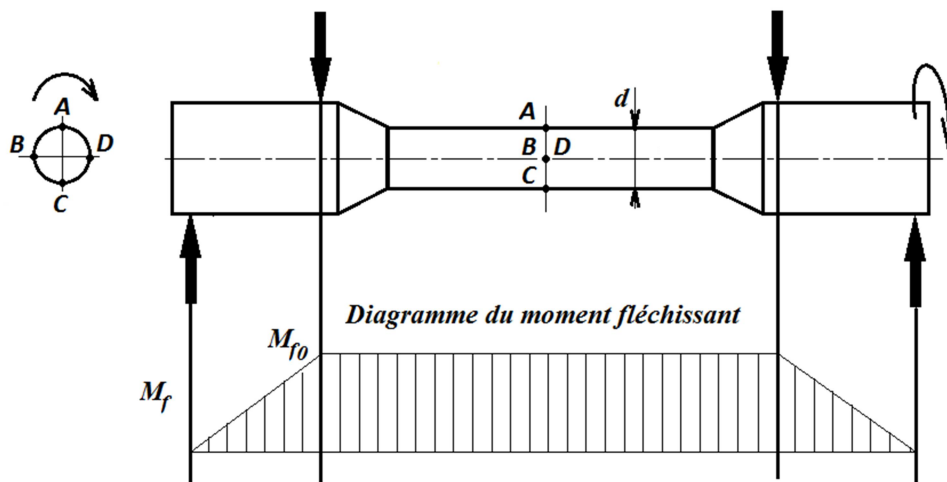


Figure 8. Diagramme du moment fléchissant  $M_f$

L'amplitude de contrainte normale de flexion a pour expression  $\sigma_{0A} = \frac{32 f_0}{\pi d^3}$  c.à.d. quand le point A est au dessus et  $\sigma_A(t) = -\frac{32M_{f0}}{\pi d^3}$  et quand il descend en bas  $\sigma_A(t) = +\frac{32M_{f0}}{\pi d^3}$  (Fig. 8)

**A l'instant  $t=0$**

- Au point A on a une compression et  $\sigma_A < 0$
- Aux points B et D (fibre neutre)  $\sigma_B = \sigma_D = 0$
- Au point C on a une traction et  $\sigma_C > 0$

**A l'instant  $t=T/4$  (T période du cycle)**

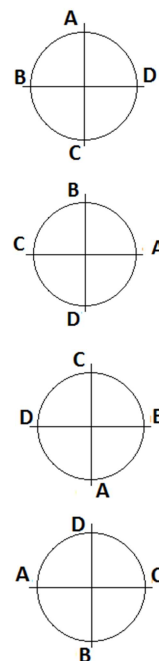
- Au points B on a une compression et  $\sigma_B < 0$
- Aux points A et C (fibre neutre) on a une compression et  $\sigma_A = \sigma_C = 0$
- Au point D on a une traction et  $\sigma_D > 0$

**A l'instant  $t=T/2$**

- Au point C on a une compression et  $\sigma_C < 0$
- Aux points D et B (fibre neutre) on a une compression et  $\sigma_D = \sigma_B = 0$
- Au point A on a une traction et  $\sigma_A > 0$

**A l'instant  $t=3T/4$**

- Au point D on a une compression et  $\sigma_D < 0$
- Aux points A et C (fibre neutre) on a une compression et  $\sigma_A = \sigma_C = 0$
- Au point B on a une traction et  $\sigma_B > 0$



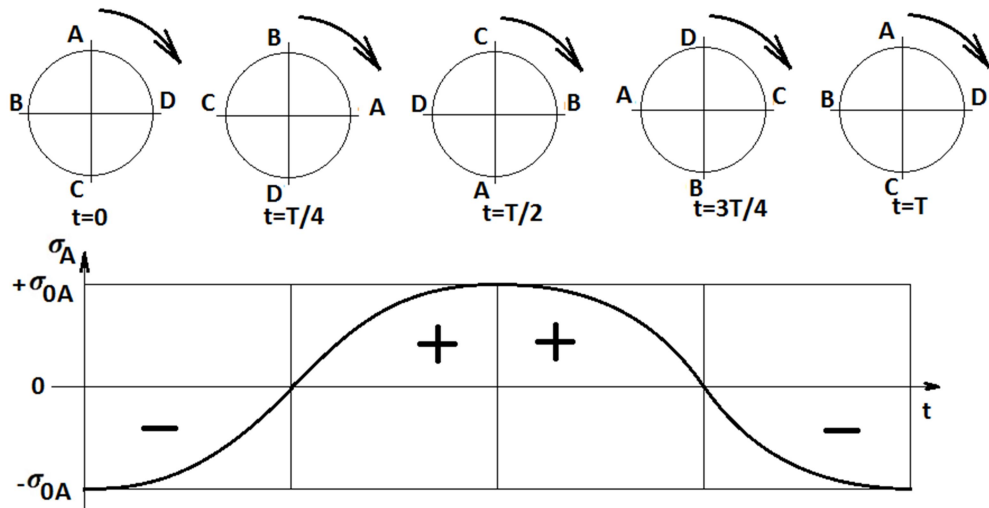


Figure 9. L'allure complètement renversée de la contrainte de flexion de l'essai de Moore

### Courbe de Wöhler

L'ensemble de résultats est représentée par une courbe  $\sigma$ -N (Contrainte-Nombre de cycles) appelée **courbe de Wöhler** (Fig. 10)

Les valeurs de contraintes et du nombre de cycles sont représentées en échelle semi-logarithmique.

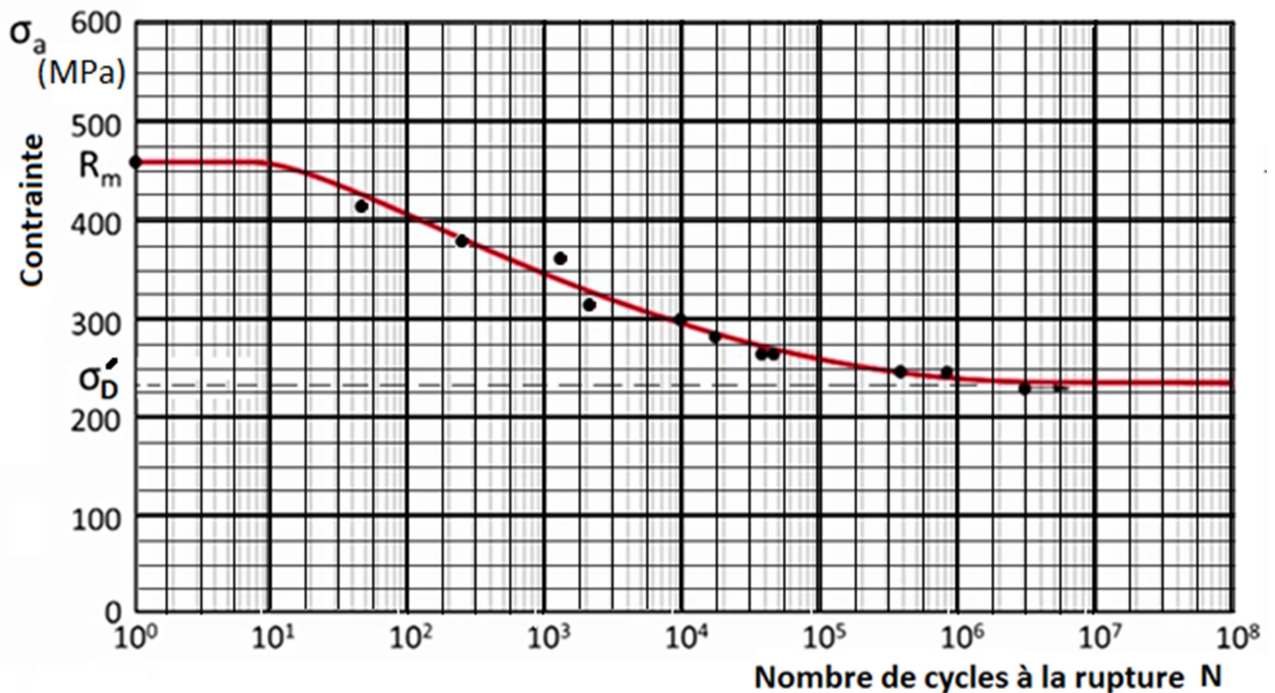


Figure 10. Courbe de Wöhler de l'acier S235JR

- Correspond à une éprouvette non rompue
- Correspond à une éprouvette rompue

### Etude de la courbe de Wöhler

La dispersion des résultats peut provenir de plusieurs sources, on en peut citer :

- La géométrie de l'éprouvette
- L'état de surface
- Les dimensions
- L'homogénéité du matériau des éprouvettes

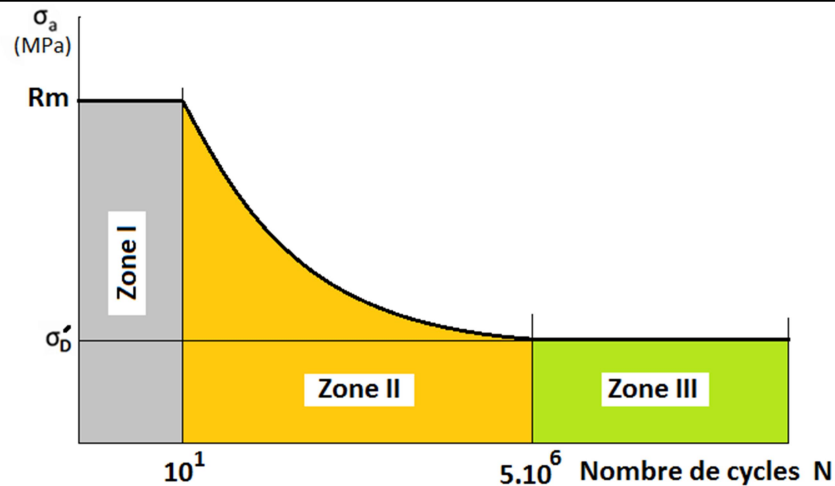


Figure 11. Partitionnement de la courbe de Wöhler

La courbe de Wöhler peut être divisée en 3 zones : (Fig. 11)

a) *Fatigue oligocyclique (Zone I)*

La contrainte  $\sigma_a$  est à la valeur de  $R_m$ , on observe la rupture des éprouvettes après quelques cycles (de 1 jusqu'à 10 cycles).

b) *Fatigue à vie finie (Zone II)*

Cette zone s'étale sur une étendue de 10 à  $5 \cdot 10^6$  cycles correspondant à une fourchette de contraintes  $R_m < \sigma_a < \sigma_D$  toutes les éprouvettes rompent après un nombre de cycles pour chacune c'est la vie finie de l'éprouvette.

c) *Vie infinie (Zone III)*

Au dessous d'un seuil  $\sigma_a \leq \sigma'_D$  les éprouvettes ne rompent plus c'est la vie infinie, le seuil de contrainte  $\sigma'_D$  est appelée **limite d'endurance**.

La figure (Fig. 12) représente une courbe de Wöhler de la fonte GC 70-2

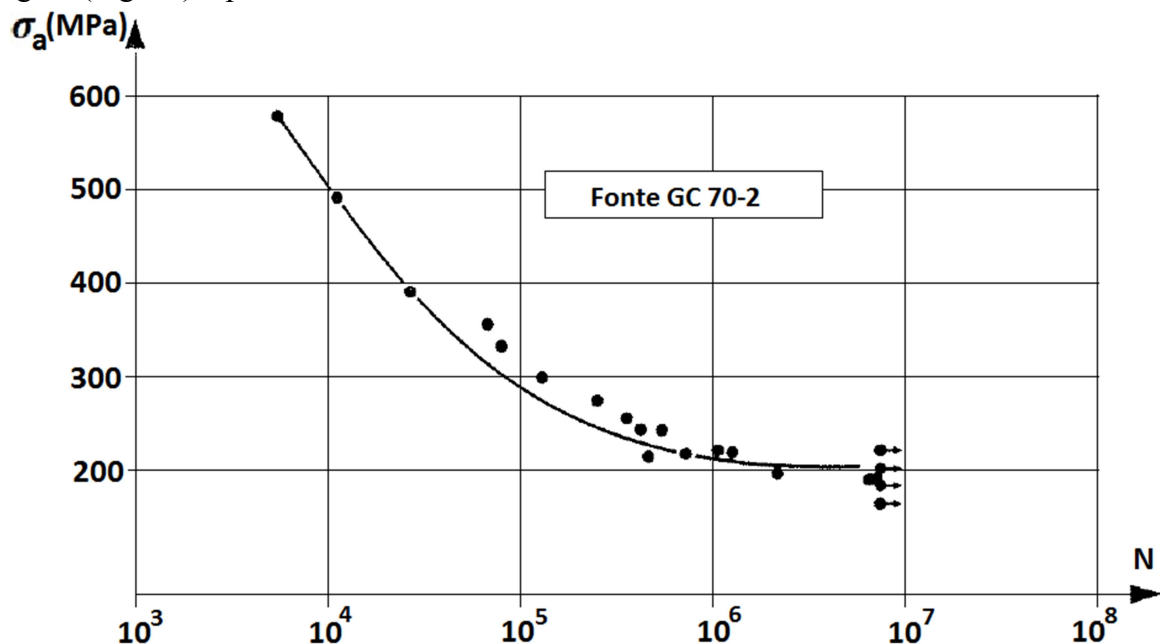


Figure 12. Courbe de fatigue de la fonte GC 70-2

## Chapitre 3 Approximation de la courbe de Wöhler

### 3.1. Approximation analytique de la courbe de Wöhler

Les résultats des essais de fatigue illustrés par la courbe de Wöhler ont un aspect statistique, pour permettre une exploitation de la courbe dans l'engineering on procède à une approximation linéaire de la courbe.

Par comparaison les courbes de Wöhler des alliages ferreux et non ferreux possèdent les limites pouvant être représentées par la figure suivante (Fig. 1) :

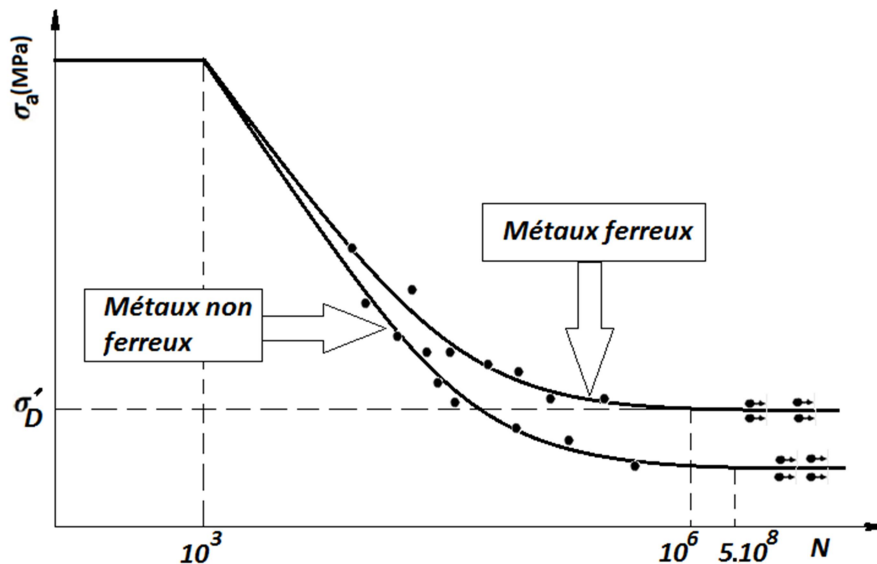


Figure 1. Forme générale des courbes de fatigue des métaux ferreux et non ferreux

En approximant linéairement la partie de la courbe ( $10^3 < N < 10^6$ ) et en utilisant l'échelle logarithmique on aura : (Fig. 2)

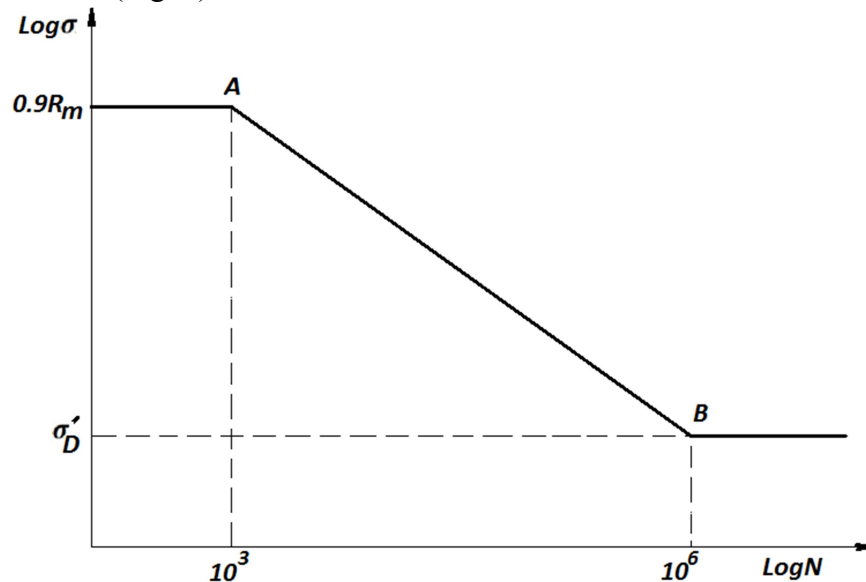


Figure 2. Courbe de Wöhler approximée

Les coordonnées des points A et B sont respectivement:  $(10^3, 0.9R_m)$  et  $(10^6, \sigma'_D)$  et la droite (AB)

aura pour équation :  $\text{Log} \sigma = \text{Log} a \cdot \text{Log} N + \text{Log} b$  (1)

Où Log représente le logarithme décimal et a et b sont positifs non nuls.

(1) peut s'écrire :

$$\text{Log} \sigma = \text{Log} a^{\text{Log} N} + \text{Log} b = \text{Log}(b \cdot a^{\text{Log} N})$$

D'où : 
$$\sigma = b \cdot a^{\text{Log}N} \quad (2)$$

Pour déterminer les constantes  $a$  et  $b$  de l'équation (2) on applique les conditions aux limites aux points  $A$  et  $B$  :

$$\begin{cases} \sigma'_D = ba^6 \\ 0.9R_m = ba^3 \end{cases}$$

Cela donne :

$$a = \left(\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ et } b = 0.9R_m \frac{0.9R_m}{\sigma'_D} \quad (3)$$

Remplaçons dans (2) :

$$\sigma = 0.9R_m \frac{0.9R_m}{\sigma'_D} \cdot \left(\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}\text{Log}N}$$

Par simplification (3) s'écrira :

$$\sigma = 0.9R_m \cdot \left(\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}\text{Log}N-1}$$

Ou autrement :

$$\sigma = 0.9R_m \cdot \left(\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}(\text{Log}N-3)} \quad (4)$$

L'expression (4) permet de connaître le niveau de contrainte lorsque le nombre de cycles  $N$  est connu.

En écrivant l'expression (4) inversement c.à.d.  $N = f(\sigma)$  on obtiendra :

$$N = 1000 \left(\frac{\sigma}{0.9R_m}\right)^{\left[\frac{3}{\text{Log}\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}}\right]} \quad (5)$$

L'expression (5) permet de connaître le nombre de cycles  $N$  lorsque le niveau de contrainte est connu.

### 3.2. Valeurs approximatives de la limite d'endurance

Précédemment on a effectué une approximation linéaire à la courbe expérimentale de fatigue, parmi les caractéristiques importantes déduites de la courbe il y a la limite d'endurance expérimentale  $\sigma'_D$ . Vu le coût des essais de fatigue, la diversité et l'aspect statistique des valeurs de cette caractéristique, on a intérêt à trouver des approximations à ses valeurs en fonction de l'une des caractéristiques mécaniques conventionnelles, soit la résistance mécanique  $R_m$ . Dans cette partie on continue avec l'approximation mais cette fois-ci avec la limite d'endurance.

#### 3.2.1 Valeurs de $R_m$ et $\sigma'_D$ de quelques matériaux connus

Ces valeurs sont données selon les normes américaines

Matériau	Résistance mécanique $R_m$ (MPa)	Limite d'endurance $\sigma'_D$ (MPa)
Alliages ferreux		
ASTM 1010, normalisé	364	186
ASTM 1025, normalisé	441	182
ASTM 1035, normalisé	539	238
ASTM 1045, normalisé	630	273
ASTM 1060, normalisé	735	315
ASTM 1060, trempé (huile) et	1295	574
ASTM 3325, trempé (huile) et	854	469

ASTM 4340, trempé (huile) et	952	512
ASTM 8640, trempé (huile) et	875	476
ASTM 9314, trempé (huile) et	812	476
ASTM 302, recuit	560	238
ASTM 316, recuit	560	245
ASTM 431, trempé et revenu	798	336
ASTM 20 fonte grise	140	70
ASTM 30 fonte grise	210	102
ASTM 60 fonte grise	420	168
Alliages d'aluminium		
AA 2011-T8	413	245
AA 2024, recuit	189	91
AA 6061-T6	315	98
AA 6063-T6	245	70
AA 7075-T6	581	161
AA 214 coulé	175	49
AA 380 coulé sous pression	336	140
Bronzes		
Bronze au phosphore, recuit	315	189
Bronze au phosphore, écroui	602	217
Bronze à aluminium $\frac{1}{4}$ dur	581	206

### 3.2.2. Valeurs approximatives de la limite d'endurance

#### 3.2.2.1. Aciers :

$$\sigma'_D \approx 0.5R_m \text{ si } R_m \leq 1400 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_D \approx 700 \text{ MPa si } R_m > 1400 \text{ MPa}$$

#### 3.2.2.2. Fontes et aciers coulés

$$\sigma'_D \approx 0.4R_m$$

#### 3.2.2.3. Alliages Aluminium-Magnésium

$$\sigma'_D \approx 0.4R_m \text{ Alliages forgés ou laminés}$$

$$\sigma'_D \approx 0.3R_m \text{ Alliages coulés}$$

#### 3.2.2.4. Traction/compression

$$\sigma'_D \approx 0.8R_m$$

#### 3.2.2.5. Torsion

$$\tau'_D \approx 0.6R_m \text{ pour les aciers}$$

$$0.8R_m < \tau'_D < R_m \text{ pour les fontes}$$

## Chapitre 4 Facteurs affectant la limite d'endurance expérimentale

La valeur expérimentale de la limite d'endurance  $\sigma'_D$  est obtenue dépend de l'éprouvette utilisée car celle-ci a été bien préparée du point de vue de géométrie, de dimensions, d'état de surface, absence de défauts et des conditions de l'essai. Or le cas d'une structure en service diffère complètement de celui de l'éprouvette en effet on distingue la finition, la grosseur, la température, et d'autres facteurs qui seront pris en considération dans ce chapitre. (Fig. 1)

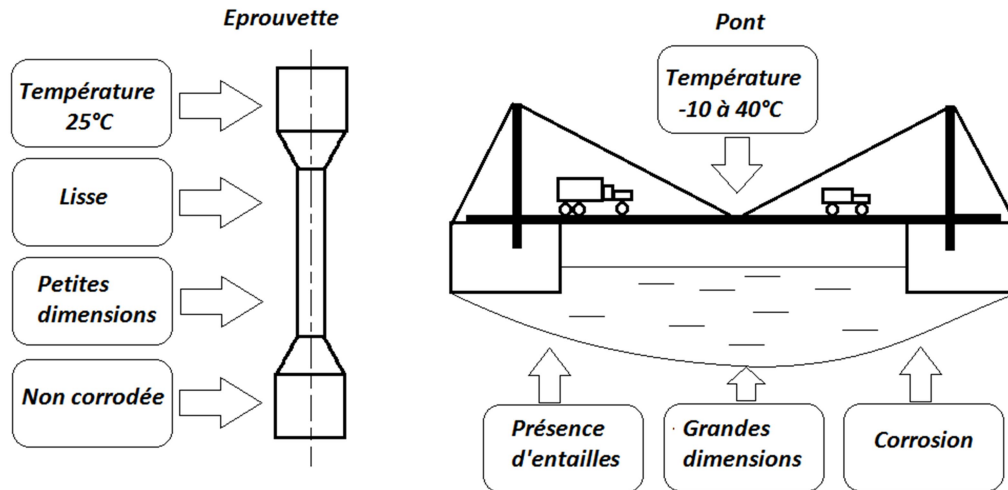


Figure 1. Comparaison entre les conditions d'essai de l'éprouvette et les conditions de service de la structure

### 4.1. Facteurs influençant la limite d'endurance expérimentale

#### 4.1.1. Température

De nombreuses études montrent que le rapport  $\frac{\sigma'_D}{R_m}$  en général ne varie pas c.à.d. que la limite d'endurance est affectée aussi que la limite de la résistance à la rupture  $R_m$ .

Considérant la variation de la température la limite  $R_m$  augmente quand la température est basse d'où une augmentation de la limite  $\sigma'_D$ . De l'autre côté un accroissement considérable de température entraînerait une chute de la valeur de la limite  $R_m$ .

Pour le cas aciers usuels on admet qu'au dessous de  $150^\circ\text{C}$  il n'y a aucun effet de température sur la limite  $\sigma'_D$ .

On adopte qui le facteur tient en compte de la température et qu'on note  $K_d$  :

$$K_d = \begin{cases} \frac{344}{273+T} & \text{si } T > 71^\circ\text{C} \\ 1 & \text{si } T \leq 71^\circ\text{C} \end{cases} \quad T \text{ en } (^\circ\text{C})$$

#### 4.1.2. Corrosion

La corrosion est un facteur important, même en absence des chargements dynamiques, accompagnée par l'effet des sollicitations statiques peut causer une fissuration dans la structure. C'est ce qu'on appelle corrosion sous contrainte.

Dans le cas de chargements dynamiques la corrosion entraîne une apparition de piqûres qui constituent un milieu favorable à l'effet d'entaille, progressivement s'amorçant et provoquant ainsi une rupture brutale.

Donc la résistance à la fatigue  $\sigma'_{D_{corrodée}}$  d'une pièce corrodée est inférieure à celle d'une pièce non corrodée  $\sigma'_{D_{noncorrodée}}$ .

L'effet de la corrosion sur la structure peut être pris en compte par un facteur de divers  $K_f$

4.1.3. Fréquence du chargement dynamique

Selon des études réalisées au dessous de 200 Hertz la fréquence du chargement dynamique n'a aucun effet sur la limite d'endurance  $\sigma'_D$ . L'effet est inverse dans le cas où la fréquence atteint des valeurs importantes, on observe une amélioration de  $\sigma'_D$ .

Donc l'effet de fréquence ne sera pas pris en considération tant qu'elle n'a pas d'effet négatif sur  $\sigma'_D$

4.1.4. Rugosité (état de surface) (Fig. 2)

Généralement le défaut s'initie depuis la surface extérieure de la pièce, plus la surface est rugueuse plus les crêtes sont importantes et plus l'effet d'entaille est intense. Pour cela il faut considérer l'état de surface de la pièce en adoptant le facteur fini de surface  $K_a$  :

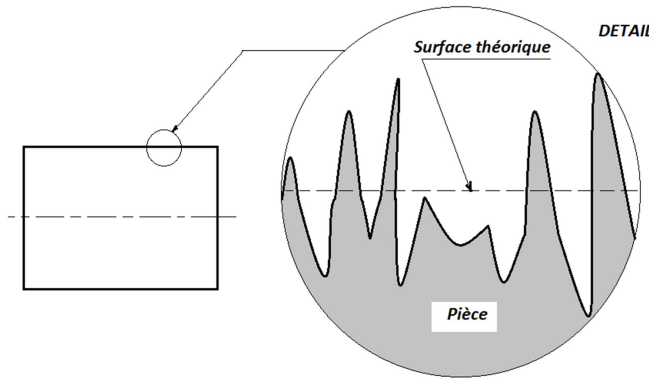


Figure 2. Etat de surface réel

$$K_a = \frac{\sigma'_{DS}}{\sigma'_D} \begin{cases} \sigma'_{DS} : \text{Limite d'endurance de la structure} \\ \sigma'_D : \text{Limite d'endurance de l'éprouvette à rugosité référence} \end{cases}$$

Il est pratique d'utiliser des abaques pour déterminer  $K_a$ , pour l'exploiter il faut se disposer des valeurs de la rugosité et la résistance  $R_m$

L'exemple utilisé : Une pièce en acier ( $R_m=900\text{MPa}$ ) avec une rugosité  $Ra=11\mu\text{m}$  on obtient :  $K_a \approx 0.88$

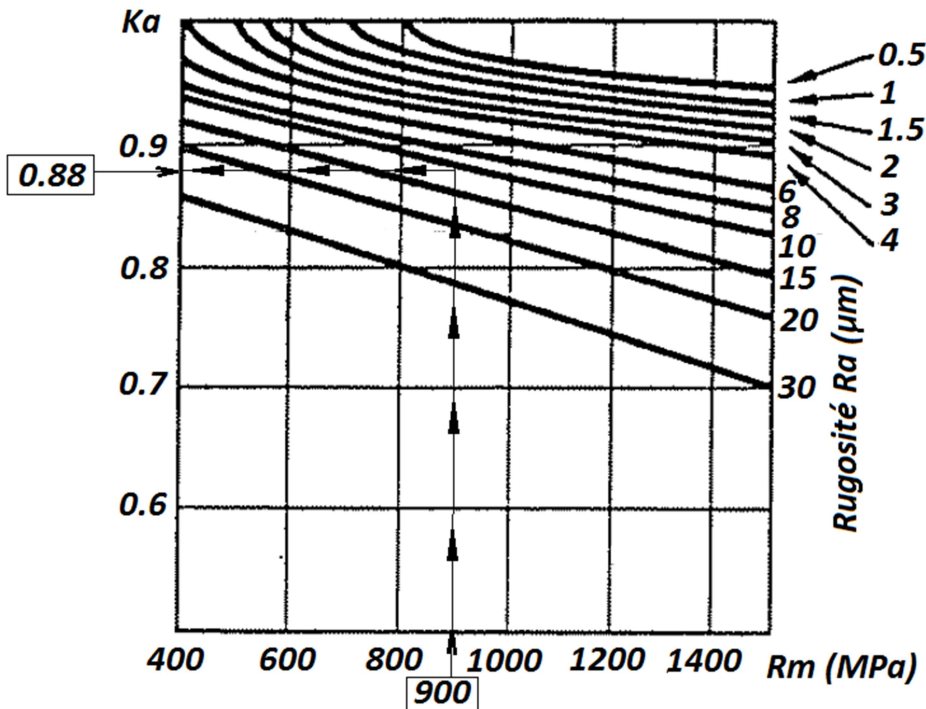
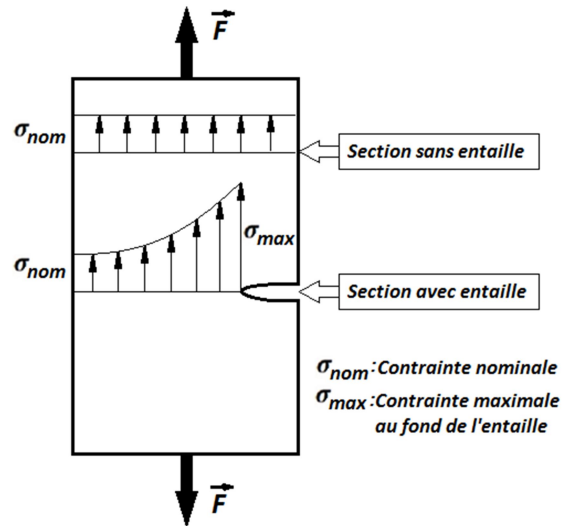


Figure 3. Abaque pour déterminer le facteur  $K_a$  pour les aciers

4.1.5. Concentration de contraintes (effet d'entaille)

Lorsque la section d'une pièce soumise à une sollicitation ne présente pas d'entaille la distribution de contraintes est régulière alors que dans la présence d'entaille provoque un déséquilibre dans la distribution des contraintes engendrant une concentration de celles-ci dans fond de l'entaille. La figure (Fig. 4) présente une pièce soumise à une traction simple, la distribution des contraintes est uniforme  $\sigma_{nom} = \frac{F}{S}$  à chaque section mais au fond de l'entaille on observe une hausse de contrainte atteignant la valeur  $\sigma_{max}$



le

Le rapport  $K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$  est appelé coefficient théorique de concentration de contraintes.

Pour déterminer  $K_t$  on utilise des abaques (Fig. 5 ; Fig. 6 et Fig. 7)

Figure 4. Effet d'entaille

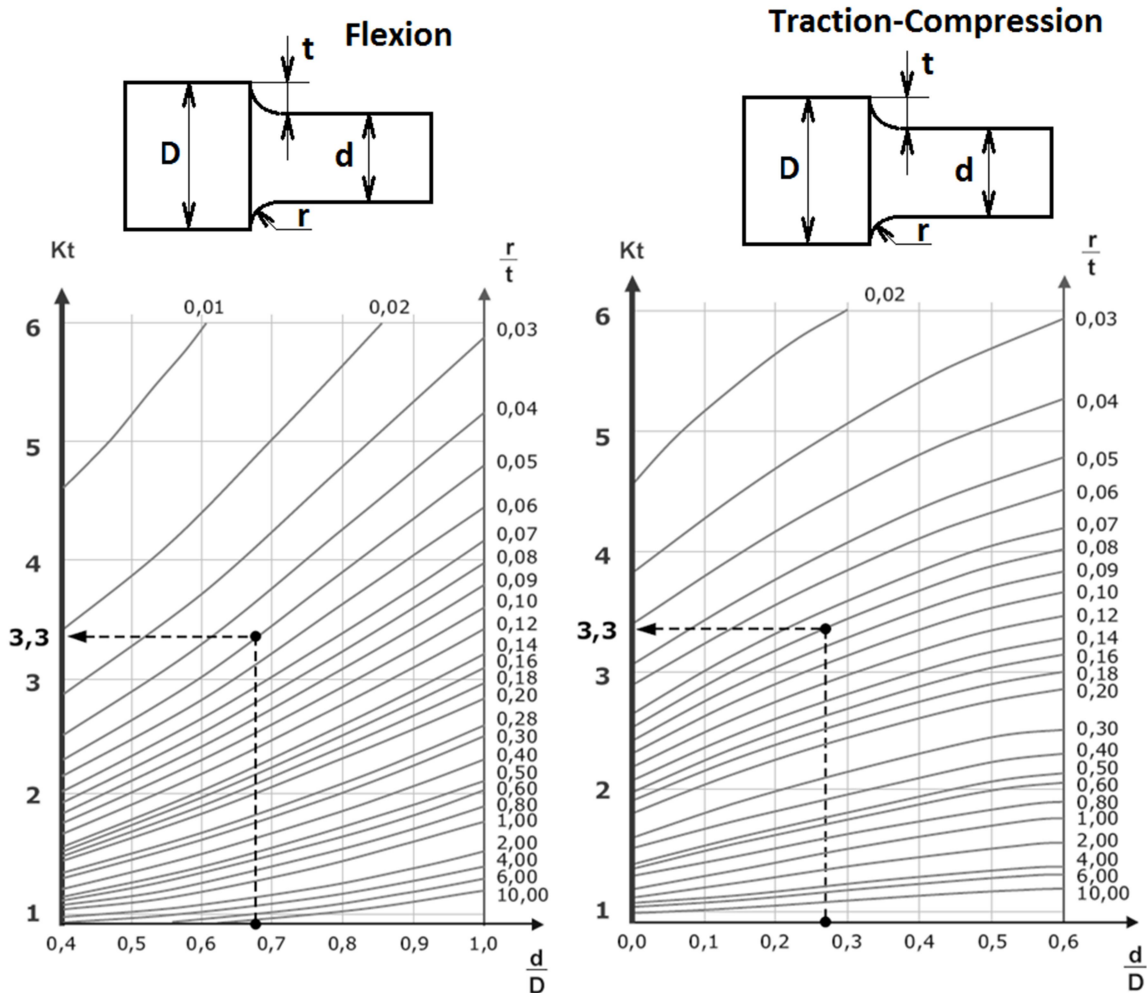


Figure 5. Abaque de  $K_t$  (Flexion)

Figure 6. Abaque de  $K_t$  (Traction/Compression)

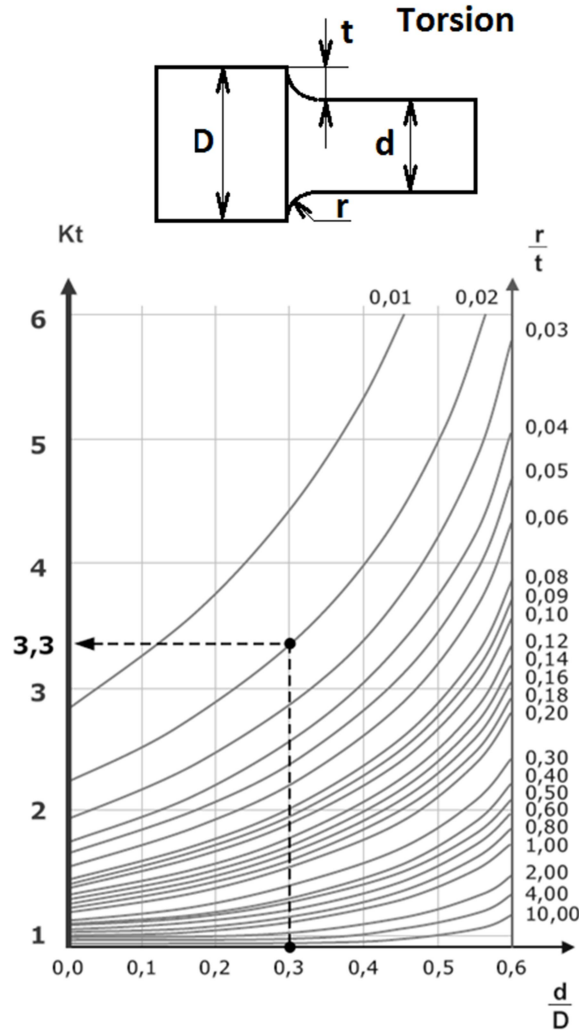


Figure 7. Abaque de  $K_t$  (Torsion)

On définit le facteur de concentration de contraintes en fatigue

$$K_f' = \frac{\sigma_D' \text{EprouvLisse}}{\sigma_D' \text{EprouvEntaille}}$$

Et en même temps ce facteur s'écrit :

$$K_f' = q(K_t - 1)$$

$q$  : indice de sensibilité aux effets d'entaille

Selon Peterson l'indice de sensibilité aux effets d'entaille peut s'écrire :

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{r}}$$

$a$  : constante telle que :

$$a = \left(\frac{270}{R_m}\right)^{1.8}$$

$R_m$  : Résistance à la rupture (MPa)

$r$  : Rayon du fond de l'entaille

On peut également utiliser l'abaque suivant (Fig. 8):

Comme exemple soit à déterminer  $K_f'$  d'un arbre ayant un épaulement pour lequel on a déterminé  $K_t = 3$ , l'arbre est fabriqué d'un acier  $R_m = 700 \text{ MPa}$  en joignant les droites avec l'abaque

$K_t = 3$  on obtiendra  $\frac{K_f'}{K_t} = 0.67$ , d'où  $K_f' = 3 * 0.67 = 2.01$

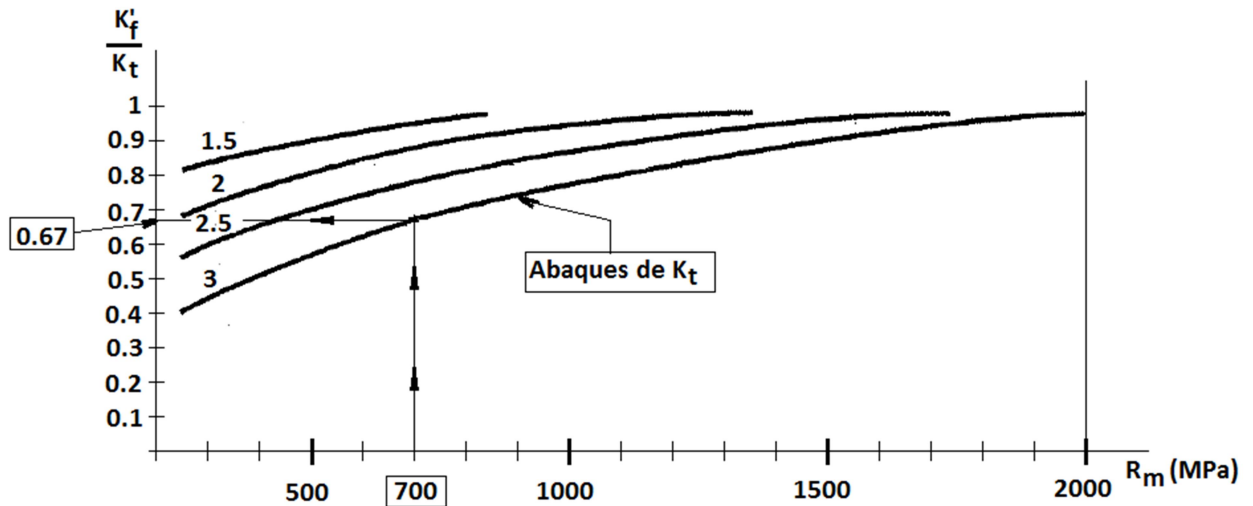


Figure 8. Abaques pour déterminer le facteur de concentration de contraintes en fatigue  $K'_f$

Finalement le facteur de concentration de contraintes  $K_e$  s'écrira :

$$K_e = \frac{1}{K'_f}$$

#### 4.1.6. Effet de grosseur

Statistiquement plus les dimensions de la structure sont importantes plus sont probables les défauts et moins est sa résistance à la fatigue.

Pour ce fait on adopte le facteur de grosseur  $K_b$  qui peut être déterminé par :

$$K_b = \begin{cases} 1 & \text{si } d \leq 7.6\text{mm} \\ 0.85 & \text{si } 7.6 \leq d \leq 50\text{mm} \\ 0.75 & \text{si } d \geq 50\text{mm} \end{cases}$$

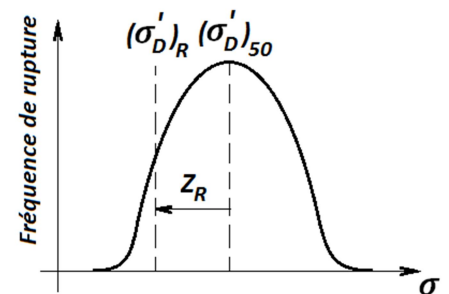
$d$  : signifie la dimension caractéristique de la structure.

#### 4.1.7. Fiabilité

On entend par la fiabilité, la probabilité que la structure soit en service pour une durée de vie déterminée. Rappelons que la fatigue admet un aspect statistique ce qui justifie la considération de la fiabilité. On introduit donc le facteur  $K_c$ .

- Fiabilité = 50% correspond à  $K_c = 1$
- Fiabilité est au voisinage de 100% pour des valeurs de  $K_c$  basses (voisinage de 0.5)
- Si Fiabilité augmente  $K_c$  diminue (Voir tableau ci-dessous)

Fiabilité	Variable normalisée $Z_R$	Facteur de fiabilité
0,50	0,000	1,000
0,90	1,288	0,897
0,95	1,645	0,868
0,99	2,326	0,814
0,999	3,091	0,753
0,9999	3,719	0,702
0,99999	4,265	0,659
0,999999	4,753	0,620
0,9999999	5,199	0,584
0,99999999	5,612	0,551
0,999999999	5,997	0,520



$(\sigma'_D)_{50}$  :  $\sigma'_D$  lorsque la fiabilité = 50%

#### 4.2. Correction de la valeur de $\sigma_D$

$$\sigma_D = K_a \cdot K_b \cdot K_c \cdot K_d \cdot K_e \cdot K_f \cdot \sigma'_D$$

$\sigma_D$  : Valeur de la limite d'endurance utilisée dans les calculs de structures

$\sigma'_D$  : Valeur de la limite d'endurance déterminée expérimentalement en utilisant une éprouvette normalisée.

$K_a$  : Facteur de fini de surface

$K_b$  : Facteur de grosseur

$K_c$  : Facteur de fiabilité

$K_d$  : Facteur d'effet de température

$K_e$  : Facteur de concentration de contraintes

$K_f$  : Facteur de divers effets

#### 4.3. Critère de résistance en cas de contrainte complètement renversée

Dans le cas de contrainte complètement renversée le critère de résistance à la fatigue (Fig. 9) est simple et donné par:

$\sigma_a \leq \sigma_D$  dans le cas de vie infinie

$\sigma_a \leq \sigma_f$  dans le cas de vie finie

$\sigma_D$  : Limite d'endurance

$\sigma_f$  : Contrainte limite correspondant à une durée de vie donnée  $N_f$

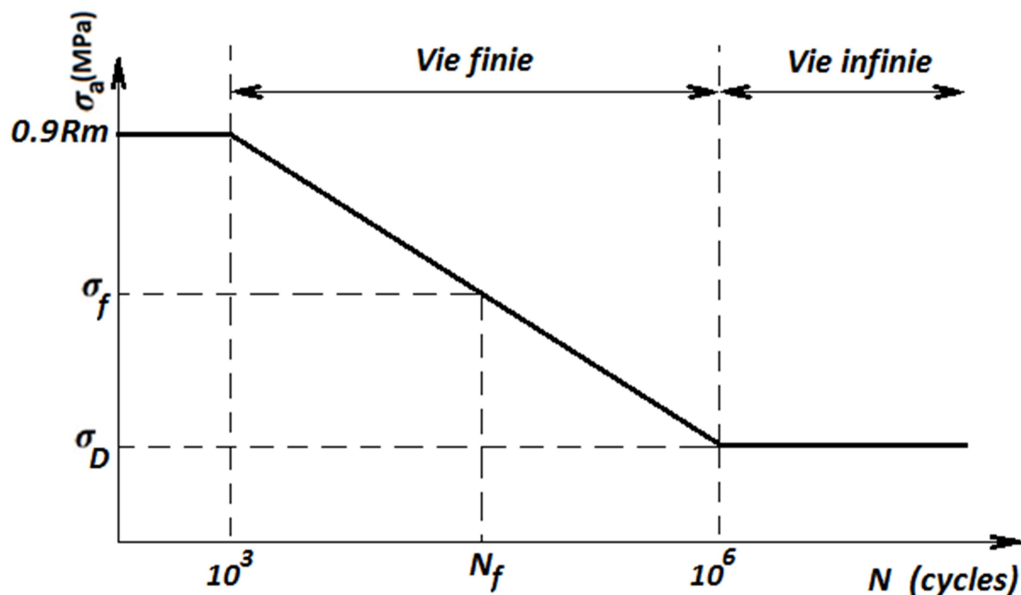


Figure 9. Les limites de résistances à la fatigue dans les deux cas de vies finie et infinie

#### Exemple d'application :

La figure ci-dessous représente un arbre soumis à une flexion rotative, fabriqué d'un acier ayant les caractéristiques suivantes :

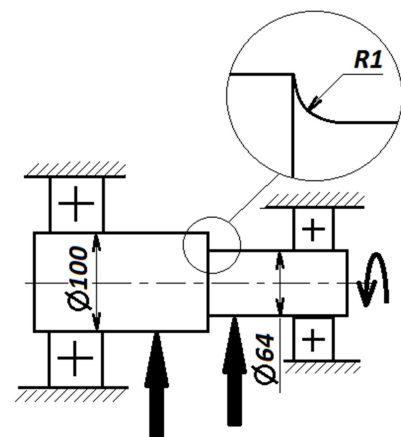
La résistance de fatigue expérimentale  $\sigma'_D = 500 \text{ MPa}$

La limite de résistance à la rupture  $R_m = 1200 \text{ MPa}$ .

Sa rugosité moyenne est de  $2 \mu\text{m}$

Sachant que cet arbre fonctionne dans un milieu où règne une température  $T=80^\circ\text{C}$ . On admet une fiabilité de 95%

Calculer l'amplitude de contrainte admissible  $\sigma_{a(adm)}$  pour



effectuer  $N=10^6$  cycles

**Solution :**

1) Correction de la valeur de la résistance à la fatigue :

- Facteur d'effet de température :

$$K_d = \frac{344}{80 + 273} = 0.97$$

- Facteur de fini de surface :

De l'abaque on tire ( $R_m = 1200MPa$  et  $Ra=2\mu m$ ) :

$$K_a = 0.95$$

- Facteur de grosseur ( $D=100mm$ ):

$$K_b = 0.75$$

- Facteur de concentration de contraintes :

$\frac{d}{D} = \frac{64}{100} = 0.64$  et  $\frac{r}{t} = \frac{1}{18}$  de l'abaque on tire :

$$K_t = 3.2$$

$$K'_f = q(K_t - 1)$$

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a}{r}}$$

$$a = \left(\frac{270}{R_m}\right)^{1.8} = \left(\frac{270}{1200}\right)^{1.8} = 0.068$$

$$q = \frac{1}{1 + \frac{0.068}{1}} = 0.936$$

$$K'_f = 0.936(3.2 - 1) = 2.0592$$

Finalement le facteur de concentration de contraintes :

$$K_e = \frac{1}{K'_f} = \frac{1}{2.0592} = 0.485$$

Facteur de fiabilité :

Une fiabilité de 95% correspond à  $K_c = 0.868$

$$\sigma_D = K_a \cdot K_b \cdot K_c \cdot K_d \cdot K_e \cdot K_f \cdot \sigma'_D = 0,95 \cdot 0,75 \cdot 0,868 \cdot 0,97 \cdot 0,485 \cdot 500 = 145.47MPa$$

En remplaçant dans l'équation approximative de la courbe Wöhler :

$$\sigma = 0.9R_m \cdot \left(\frac{\sigma_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}(\text{Log } N)} = 0,9 \cdot 1200 \cdot \left(\frac{145.47}{0.9 \cdot 1200}\right)^{\frac{1}{3}(\text{Log } 10^6 - 3)} = 19.6MPa$$

Donc l'amplitude admissible  $\sigma_{a(adm)}$  vaut  $19.6MPa$

**Remarque :**

Dans l'exemple précédent le calcul a été réalisé dans le cas où la contrainte est complètement renversée c.à.d.  $\sigma_m = 0$

Nous verrons dans le chapitre prochain la démarche dans le cas où  $\sigma_m \neq 0$

**Exercices**

**Exercice1 :**

Une barre en acier soumise à une traction variable  $R_m=1450MPa$ , la température de service est  $T=85^\circ C$ , la rugosité est  $Ra=1\mu m$

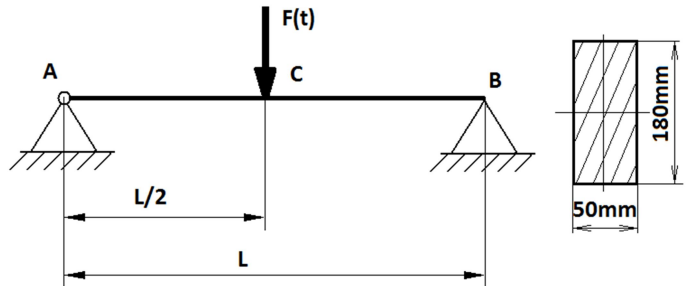
Calculer la limite d'endurance

**Exercice2:**

Une poutre (Figure ci-contre) est soumise à un chargement variable

$$\begin{cases} F_{\max} = 6000KN \\ F_{\min} = -6000KN \end{cases}$$

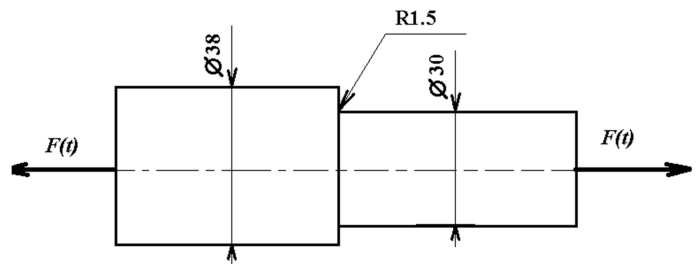
$L=60cm$ , la poutre est fabriquée d'un acier  $R_m=1200MPa$



Calculer le nombre de cycles pouvant être supportés avant de rompre

**Exercice3 :** Un support cylindrique en acier est en traction dynamique

$F(t) = F_0 \sin \omega t$   $R_m = 950 MPa$  sous une température  $T=120^\circ C$ , admettant une rugosité  $Ra=1\mu m$

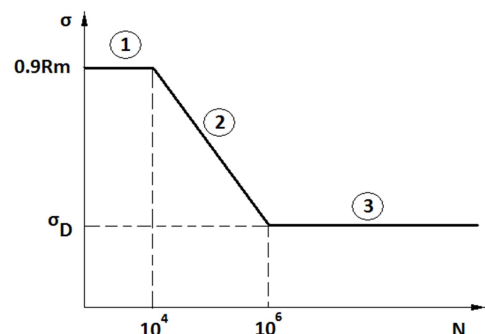


Si le câble rompt à  $\sigma_a = 80MPa$  On souhaite que ce support mène une durée de vie de  $10^6$  cycles, calculer l'amplitude maximale qu'il peut supporter.

**Exercice 4:**

Soit une structure soumise à une contrainte totalement renversée (Figure ci-contre)

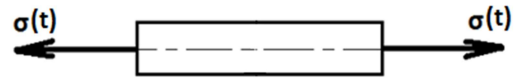
Ecrire les critères de ruine pour chacune des régions de la courbe



**Exercice 5 :**

Une tige cylindrique en traction dynamique

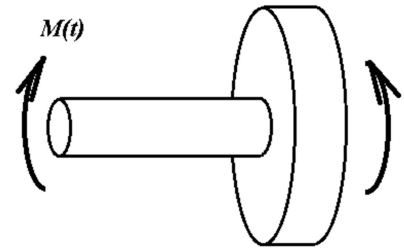
$$\begin{cases} F_{max} = 100KN \\ F_{min} = -100KN \end{cases} (\sigma_D = 100MPa \text{ et } R_m = 950 MPa)$$



- 1) De quel type de sollicitation s'agit-il ?
- 2) Si le cable rompt à  $\sigma_a = 80MPa$  quel serait le nombre de cycles correspondant à cette rupture

**Exercice6 :**

Un arbre soumis à un couple variable  $\begin{cases} M_{max} = 35N - m \\ M_{min} = -35N - m \end{cases}$   
 ( $\tau_D = 15MPa$  et  $\tau_{Rm} = 180 MPa$ )



- 1) Déterminer le diamètre au moment où la rupture ait lieu à  $\tau_a = 25MPa$
- 2) Calculer le nombre de cycles effectués avant la rupture

## Chapitre 5 Contrainte non complètement renversée

### 5.1. Introduction

Le critère de résistance à la fatigue vu dans le chapitre précédent ne sera plus valide dans le cas où  $\sigma_m$  n'est pas nul (contrainte non complètement renversée), il faut adopter un autre critère. C'est le but de ce chapitre.

Une sollicitation à contrainte non complètement renversée peut être considérée la superposition de deux sollicitations l'une à contrainte complètement renversée et l'autre statique (Fig. 1).

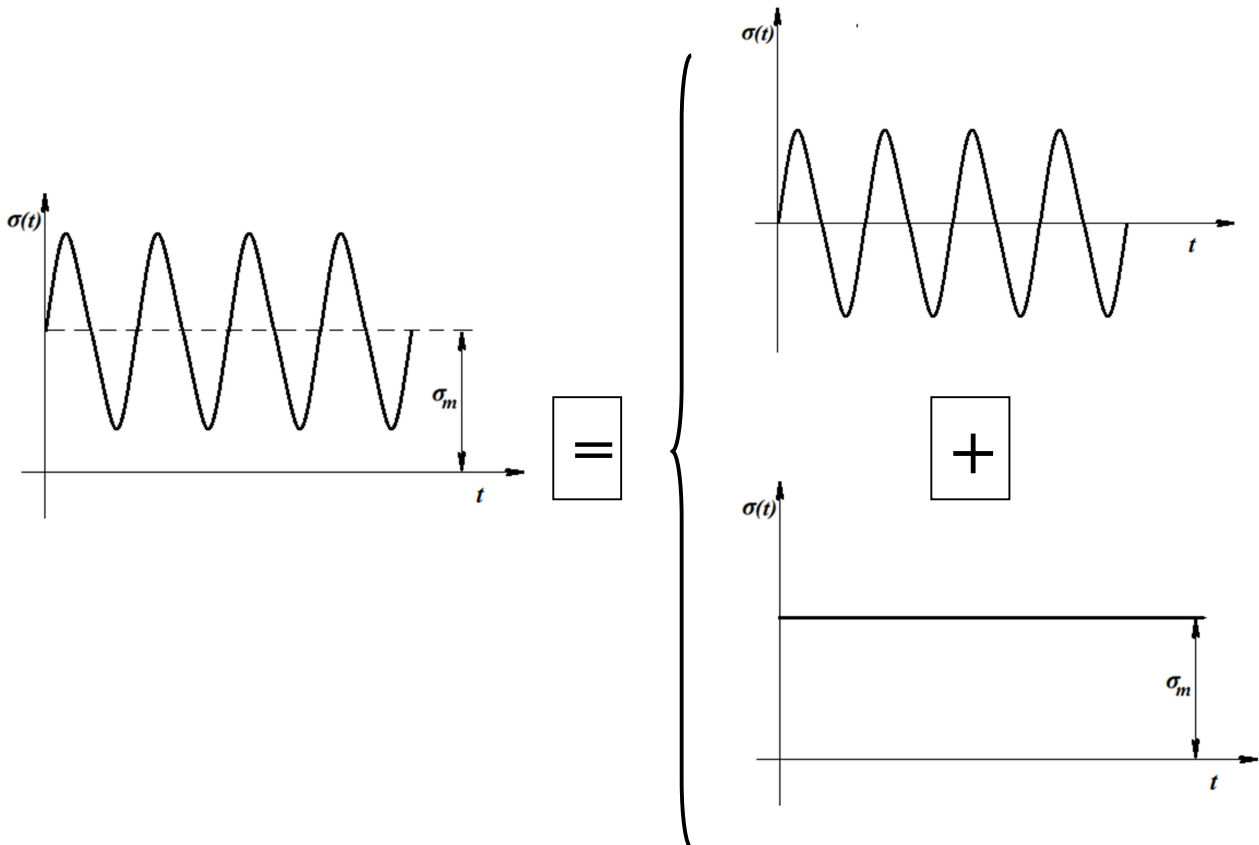
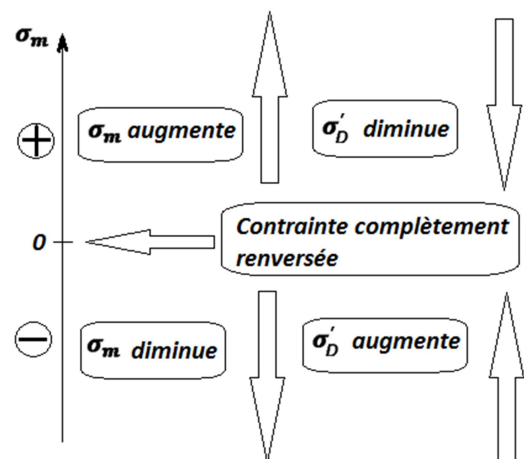


Figure 1. La contrainte non complètement renversée est la résultante de deux contraintes l'une complètement renversée et l'autre constante

### 5.2. Influence de la contrainte moyenne $\sigma_m$

La figure (Fig. 3) montre que lorsque la contrainte moyenne est négative (compression) la limite d'endurance augmente. De l'autre part lorsque  $\sigma_m$  est positive son augmentation entrainerait un baissment de la valeur de la limite d'endurance. Ces résultats peuvent être interprétés par la figure ci –contre.



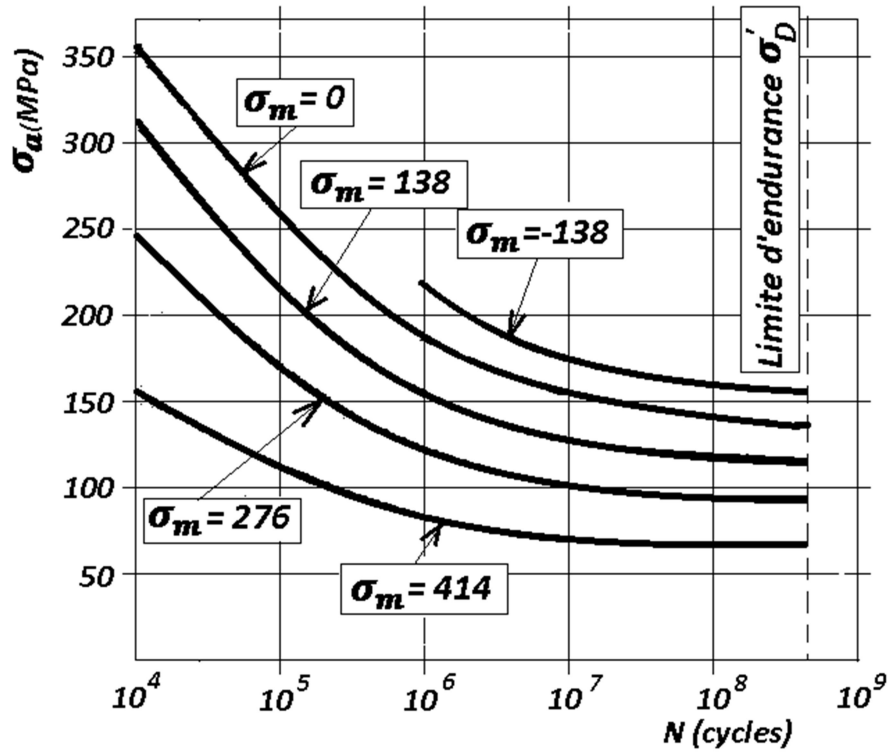


Figure 2. Influence de la contrainte moyenne sur la limite d'endurance AlZn5.5MgCu ( $R_m=550\text{MPa}$ )

### 5.3. Approche pour l'obtention du critère de Goodman

Les résultats illustrés par la figure (Fig. 2) sont représentés dans le plan  $(\sigma_a, N)$  pour considérer en même temps les deux paramètres  $\sigma_a$  et  $\sigma_m$  c.à.d. les représenter dans le plan  $(\sigma_m, \sigma_a)$  utilisons le tableau (Tab.1)

Ce tableau permet de construire les courbes  $\sigma_a = f(\sigma_m)$  en fonction de  $N$  (nombre de cycles) dans le plan  $(\sigma_m, \sigma_a)$  (Voir Fig. 3)

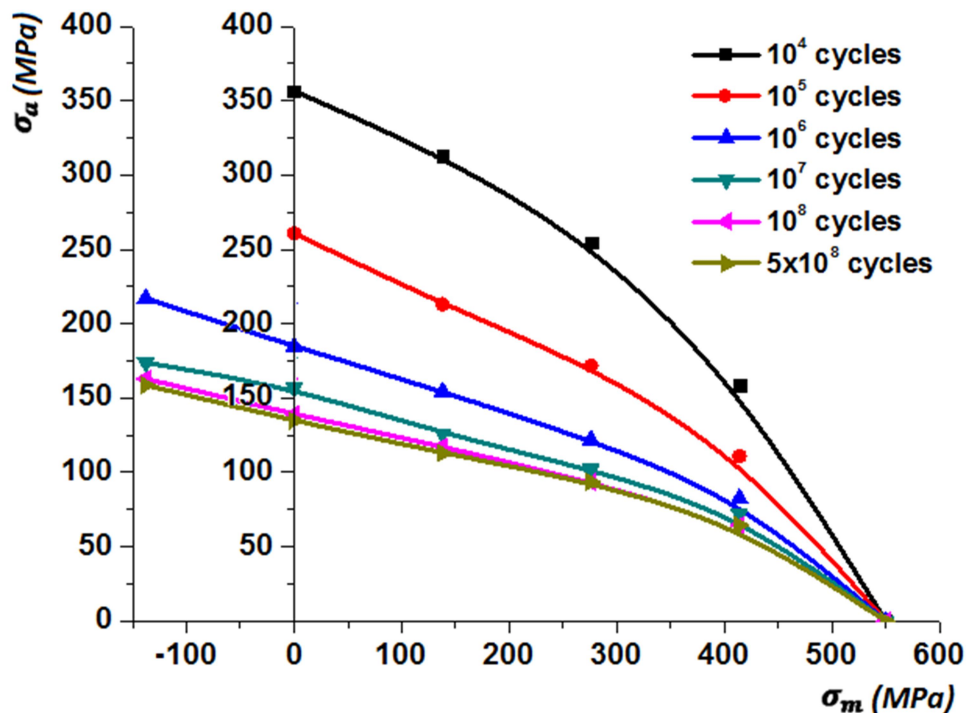


Figure 3. Représentation des résultats dans le plan  $\sigma_m - \sigma_a$

$\sigma_m$ (MPa)	$N$ (cycles)	$\sigma_a$ (MPa)	
-138	$10^4$	-	
	$10^5$	-	
	$10^6$	217	
	$10^7$	173,9	
	$10^8$	163	
	$5 \cdot 10^8$	158,7	
0	$10^4$	356,5	$\sigma_{f1} = 356.5 MPa$
	$10^5$	260,8	$\sigma_{f2} = 260.8 MPa$
	$10^6$	184,8	$\sigma_{f3} = 184.8 MPa$
	$10^7$	156,6	$\sigma_{f4} = 156.6 MPa$
	$10^8$	139,1	$\sigma_{f5} = 139.1 MPa$
	$5 \cdot 10^8$	134,8	$\sigma'_D = 134.8 MPa$
138	$10^4$	313	
	$10^5$	213	
	$10^6$	154,3	
	$10^7$	126	
	$10^8$	117,4	
	$5 \cdot 10^8$	113	
276	$10^4$	254,6	
	$10^5$	171,7	
	$10^6$	121,7	
	$10^7$	102,1	
	$10^8$	93,5	
	$5 \cdot 10^8$	93,5	
414	$10^4$	158,7	
	$10^5$	110,9	
	$10^6$	82,6	
	$10^7$	71,7	
	$10^8$	64,4	
	$5 \cdot 10^8$	64,4	

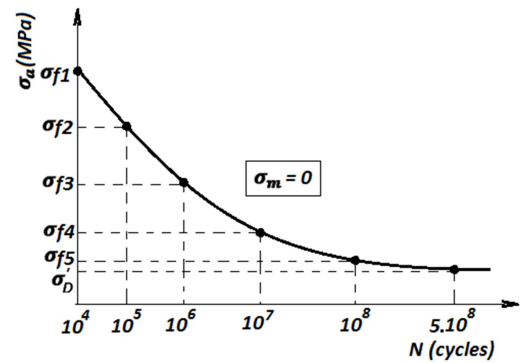


Tableau 1. Résultats extraits des courbes de la figure (Fig. 2)

Dans la dernière étape divisons les valeurs de  $(\sigma_a)_i$  correspondant à  $(\sigma_m)_j$  par les valeurs  $(\sigma_f)_i$  (vie finie) ou  $\sigma'_D$  (vie infinie) et mettons les dans le tableau (Tab. 2)

Finalement représentons ces résultats sur un système de coordonnées où les valeurs  $(\sigma_m)_j$  sont portées sur l'axe des abscisses et les valeurs d'amplitudes normalisées sur l'axe des ordonnées  $(\sigma_a/\sigma_f)_i$  ou  $(\sigma_a/\sigma'_D)_i$  (Fig. 3)

$\sigma_m$ (MPa)	$N$ (cycles)	$\sigma_a$ (MPa)	$(\sigma_a/\sigma_f)$ ou $(\sigma_a/\sigma'_D)$
-138	$10^4$	-	-
	$10^5$	-	-
	$10^6$	217	1,17424242
	$10^7$	173,9	1,11047254
	$10^8$	163	1,17181884
	$5.10^8$	158,7	1,1772997
0	$10^4$	356,5	1
	$10^5$	260,8	1
	$10^6$	184,8	1
	$10^7$	156,6	1
	$10^8$	139,1	1
	$5.10^8$	134,8	1
138	$10^4$	313	0,87798036
	$10^5$	213	0,81671779
	$10^6$	154,3	0,83495671
	$10^7$	126	0,8045977
	$10^8$	117,4	0,84399712
	$5.10^8$	113	0,83827893
276	$10^4$	254,6	0,7141655
	$10^5$	171,7	0,6583589
	$10^6$	121,7	0,65854978
	$10^7$	102,1	0,65197957
	$10^8$	93,5	0,67217829
	$5.10^8$	93,5	0,69362018
414	$10^4$	158,7	0,44516129
	$10^5$	110,9	0,42523006
	$10^6$	82,6	0,4469697
	$10^7$	71,7	0,45785441
	$10^8$	64,4	0,46297628
	$5.10^8$	64,4	0,47774481

Tableau 2. Représentation des rapports  $(\sigma_a/\sigma_f)$  ou  $(\sigma_a/\sigma'_D)$ 

Les résultats illustrés par le tableau (Tab. 2) montrent une certaine constance du rapport  $(\sigma_a/\sigma_f)$  ou de  $(\sigma_a/\sigma'_D)$  pour chaque valeur de la contrainte  $\sigma_m$  donc une superposition de valeurs est observée sur la figure (Fig. 3).

C'est le principe de l'approche de Goodman, en rapprochant cette configuration non linéaire des résultats à une autre plus simple (linéaire) on obtient une droite appelée **droite de Goodman**.

**Remarque :**

A cause de l'influence positive de la contrainte moyenne en compression ( $\sigma_m < 0$ ) sur la limite d'endurance on peut négliger cet effet dans les calculs en considérant  $\sigma_m = 0$

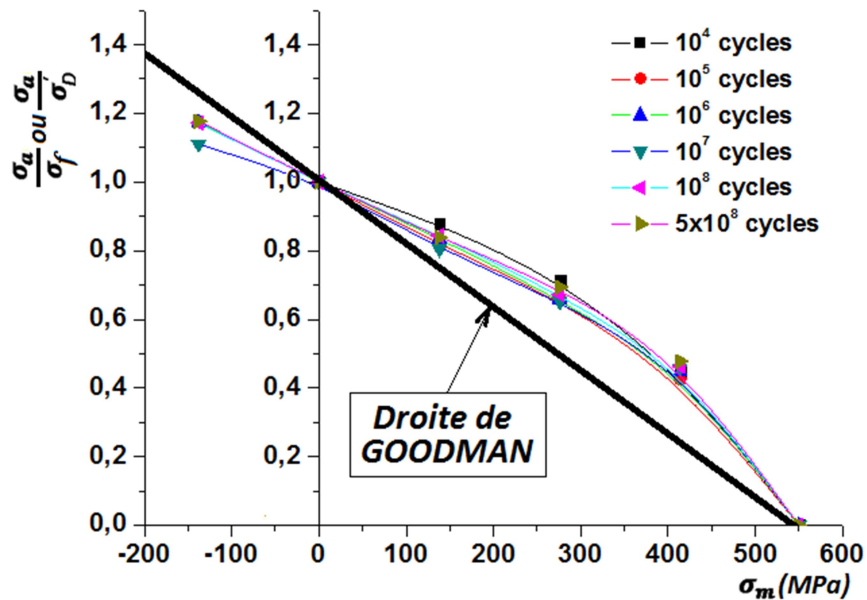


Figure 3. Superposition des valeurs normalisées des amplitudes et obtention de la droite de Goodman

#### 5.4. Equation de la droite de Goodman

Soient les deux points  $(\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = 1, \sigma_m = 0)$  et  $(\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = 0, \sigma_m = R_m)$  (Fig. 4)

L'équation de la droite est de la forme:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = a\sigma_m + b$$

En remplaçant les coordonnées des deux points :

$$\begin{cases} b = 1 \\ aR_m + b = 0 \end{cases}$$

Cela donne :

$$a = \frac{-1}{R_m}$$

Finalement l'équation aura la forme suivante :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \quad \text{Cas de vie infinie}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \quad \text{Cas de vie finie}$$

#### Remarque :

L'équation de la droite de Goodman peut s'écrire sous une autre forme (Voir figure ci-contre) :

$$\sigma_a = -\frac{\sigma_D}{R_m} \sigma_m + \sigma_D \quad (\text{Vie infinie})$$

$$\sigma_a = -\frac{\sigma_D}{R_m} \sigma_m + \sigma_f \quad (\text{Vie finie})$$

Le système de coordonnées  $(\sigma_m, \sigma_a)$  et la droite de Goodman forment le **diagramme de Goodman**

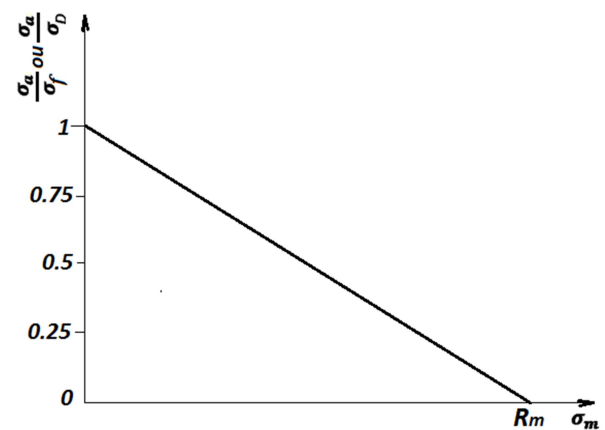


Figure 4. Droite de Goodman

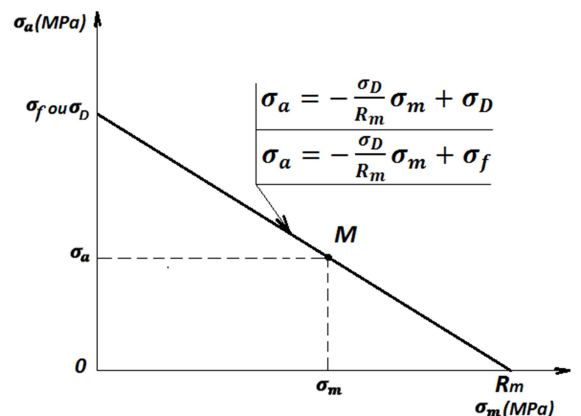


Figure 5. Diagramme de Goodman

**5.5. Analyse du diagramme de Goodman** (Fig. 5)

Soit le point M de coordonnées  $(\sigma_m, \sigma_a)$  situé sur la droite de Goodman et considérons le cas de vie infinie (ou vie finie) par conséquent la condition  $\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1$  est vérifiée.

Le point M étant sur la droite veut dire qu'on est sur la limite de résistance de fatigue dans le cas de contrainte non complètement renversée.

*Cas particuliers*

1) Le point M est sur l'axe des ordonnées :  $(\sigma_m = 0, \sigma_a = \sigma_D)$

L'équation de la droite de Goodman devient :

$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = 1$  cela donne  $\sigma_a = \sigma_D$  c'est la condition ultime de résistance en fatigue en cas de contrainte complètement renversée.

2) Le point M est sur l'axe des abscisses :  $(\sigma_m = R_m, \sigma_a = 0)$

On aura :

$\frac{\sigma_m}{R_m} = 1$  ou  $\sigma_m = R_m$  c'est la condition ultime de résistance en cas statique

**5.6. Coefficient de sécurité**

Le point M étant sur la droite est la limite de la sécurité d'équation :

$$\frac{\sigma_{aM}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{mM}}{R_m} = 1$$

Si on se situe à l'intérieur du triangle formé par la droite de Goodman et les axes soit le point N. Au point N la structure est plus sûre.

Pour cela introduisons le coefficient de sécurité  $F_s = \frac{OM}{ON}$

Pour déterminer le coefficient de sécurité  $F_s$  au point N c.à.d. à  $\sigma_m = \sigma_{mN}$  et  $\sigma_a = \sigma_{aN}$  traçons la droite passant par N et parallèle à la droite de Goodman passant par M

Cette nouvelle droite aura pour équation :

$$\frac{\sigma_{aN}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{mN}}{R_m} = c \text{ avec } c < 1$$

On a :

$$\frac{OM}{ON} = \frac{1}{c} = \frac{1}{\frac{\sigma_{aN}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{mN}}{R_m}}$$

Donc le coefficient de sécurité s'écrira pour une situation quelconque  $(\sigma_m, \sigma_a)$  :

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m}}$$

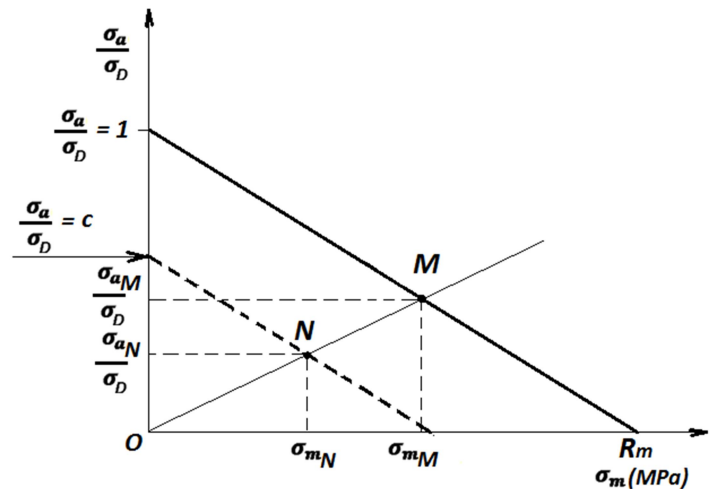
Dans le cas de vie finie :

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{R_m}}$$

*Discussion des valeurs de  $F_s$*

1)  $F_s > 1$  veut dire  $OM > ON$  et la structure est hors zone de sécurité

2)  $F_s = 1$   $OM=ON$  ou  $\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1$  la structure est sur la limite de résistance



3)  $F_s < 1$   $OM < ON$  la structure se trouve dans la zone de sécurité

**5.7. Critère de résistance de fatigue de Goodman**

De ce qui précède on peut écrire le critère de résistance de Goodman

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} \leq 1 \quad \text{Cas de vie infinie}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{R_m} \leq 1 \quad \text{Cas de vie finie}$$

**Exercice de compréhension du cours :**

On souhaite vérifier l'influence de la contrainte moyenne  $\sigma_m$  sur la valeur de la limite d'endurance  $\sigma_D$  par l'approche de Goodman.

**Solution :**

Dans le cas de contrainte non complètement renversée le critère de résistance limite s'écrit :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = 1 \quad (1)$$

Soit le cas d'une contrainte non complètement renversée, considérons la limite de résistance c.à.d. la droite de Goodman :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \quad (1)$$

Cela permet d'écrire :

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D(1 - \frac{\sigma_m}{R_m})} = 1 \quad (2)$$

L'équation (2) est analogue à l'équation (1)

Posons  $\sigma_D \left(1 - \frac{\sigma_m}{R_m}\right) = (\sigma_D)_{nouv}$

On voit que :  $(\sigma_D)_{nouv} = f(\sigma_m)$

$$\frac{(\sigma_D)_{nouv}}{\sigma_D} = 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} < 1 \quad \text{ou autrement :}$$

$$(\sigma_D)_{nouv} < \sigma_D$$

Conclusion :

L'approche de Goodman prend en considération l'influence de la contrainte moyenne sur la limite d'endurance

**Exemple d'application :**

Une bielle en acier ( $\sigma_D = 120MPa$  et  $R_m = 680MPa$ ) est soumise à un chargement dynamique induisant les contraintes :

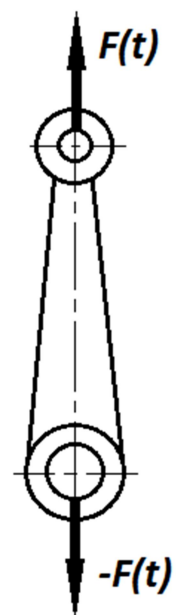
$$\begin{cases} \sigma_m = 120MPa \\ \sigma_a = 65MPa \end{cases}$$

On demande de :

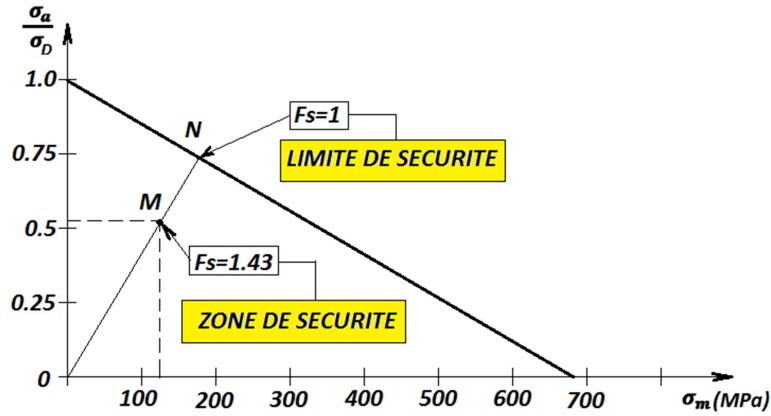
- 1) Calculer le coefficient de sécurité
- 2) Tracer le diagramme de Goodman
- 3) Si on considère le chargement  $\begin{cases} \sigma_m = 180MPa \\ \sigma_a = 100MPa \end{cases}$  calculer alors la durée de vie.

**Solution :**

1)  $F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m}} = \frac{1}{\frac{65}{120} + \frac{120}{680}} = 1.43$  La bielle est en sécurité en vie infinie



2)



3) Déterminer la durée de vie est équivalent à calculer le nombre de cycles avant la rupture (vie finie) dans ce cas on considère  $\sigma_f$  :

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_f R_m}} = 1 \Rightarrow \sigma_f = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_m}{R_m}} = \frac{65}{1 - \frac{120}{680}} = 136 \text{ MPa}$$

Calculons la durée de vie:

$$N = 1000 \left( \frac{\sigma_f}{0.9 R_m} \right)^{\frac{3}{\log \frac{\sigma_D}{0.9 R_m}}} = 1000 \left( \frac{136}{0.9 \cdot 680} \right)^{\frac{3}{\log \frac{120}{0.9 \cdot 680}}} = 588208.10 \text{ cycles}$$

### 5.8. Diagramme de Goodman modifié

#### 5.8.1. Cas d'écoulement plastique

Dans le cas où la contrainte moyenne  $\sigma_m$  est très importante et l'amplitude est relativement réduite il faut vérifier l'écoulement plastique c.à.d. la limite d'écoulement plastique  $\sigma_p$  :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \\ \frac{\sigma_a}{\sigma_p} + \frac{\sigma_m}{\sigma_p} = 1 \text{ ou } \frac{\sigma_{max}}{\sigma_p} = 1 \end{cases} \quad (\text{Vie infinie})$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \\ \frac{\sigma_a}{\sigma_p} + \frac{\sigma_m}{\sigma_p} = 1 \text{ ou } \frac{\sigma_{max}}{\sigma_p} = 1 \end{cases} \quad (\text{Vie finie})$$

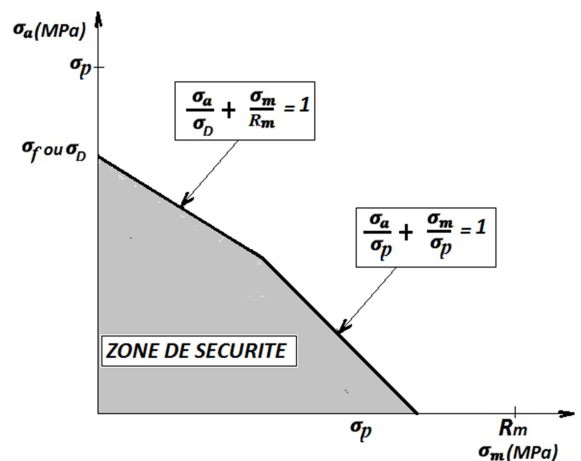
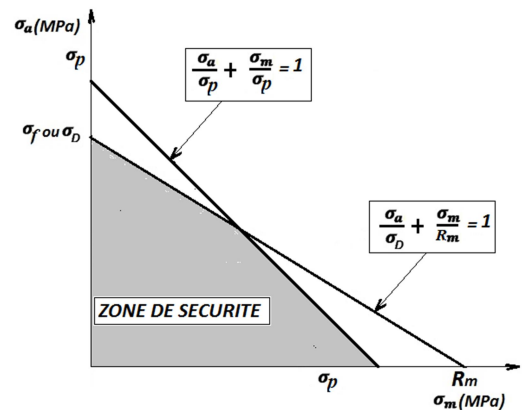
La zone de sécurité est l'intersection des deux surfaces délimitées par les deux droites

Donc le diagramme de Goodman prend l'allure (figure ci-contre) :

Les coefficients de sécurité s'écrivent :

$$\begin{cases} F_{s1} = \frac{1}{\frac{\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_D R_m}} \\ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_p \sigma_p}} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{max}} \end{cases} \quad (\text{Vie infinie})$$

$$\begin{cases} F_{s1} = \frac{1}{\frac{\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_f R_m}} \\ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_p \sigma_p}} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{max}} \end{cases} \quad (\text{Vie finie})$$



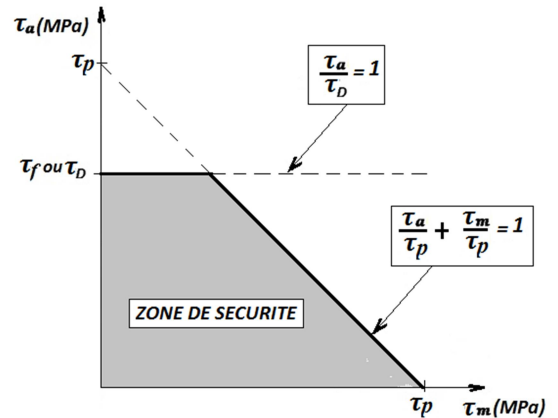
5.8.2. Cas de cisaillement

La contrainte moyenne de cisaillement  $\tau_m$  n'a pas d'effet sur la limite d'endurance  $\tau_D$ . Si on tient compte de l'écoulement plastique on aura :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau_a}{\tau_D} = 1 \\ \frac{\tau_a}{\tau_p} + \frac{\tau_m}{\tau_p} = 1 \text{ ou } \frac{\tau_{max}}{\tau_p} = 1 \end{array} \right. \text{ (Vie infinie)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau_a}{\tau_f} = 1 \\ \frac{\tau_a}{\tau_p} + \frac{\tau_m}{\tau_p} = 1 \text{ ou } \frac{\tau_{max}}{\tau_p} = 1 \end{array} \right. \text{ (Vie finie)}$$

Dans ce cas le diagramme de Goodman aura la forme (figure ci-contre) :



Les coefficients de sécurité s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{s1} = \frac{1}{\frac{\tau_a}{\tau_D}} = \frac{\tau_D}{\tau_a} \\ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\tau_a + \tau_m}{\tau_p}} = \frac{\tau_p}{\tau_{max}} \end{array} \right. \text{ (Vie infinie)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{s1} = \frac{1}{\frac{\tau_a}{\tau_f}} = \frac{\tau_f}{\tau_a} \\ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\tau_a + \tau_m}{\tau_p}} = \frac{\tau_p}{\tau_{max}} \end{array} \right. \text{ (Vie finie)}$$

Exemples d'application

Exemple 1

La figure ci-contre montre un tirant soumis à un chargement variable en traction caractérisé par les efforts extrêmes suivants :

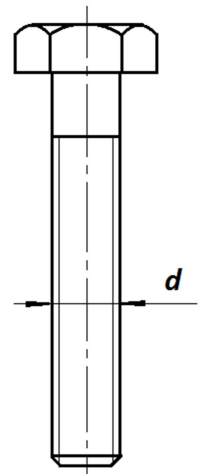
$$\begin{cases} F_{max} = 120KN \\ F_{min} = -20KN \end{cases}$$

Le matériau du tirant est un acier de caractéristiques :

$$\begin{cases} R_m = 785MPa \\ \sigma_p = 590MPa \\ \sigma_D = 250MPa \end{cases}$$

On adopte un coefficient de sécurité en fatigue  $F_s = 1.5$

Tenant compte de l'écoulement plastique du matériau du tirant déterminer le diamètre minimal pour satisfaire les conditions signalées ci-dessus.



Solution :

$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} = \frac{120 - 20}{2} = 50KN$$

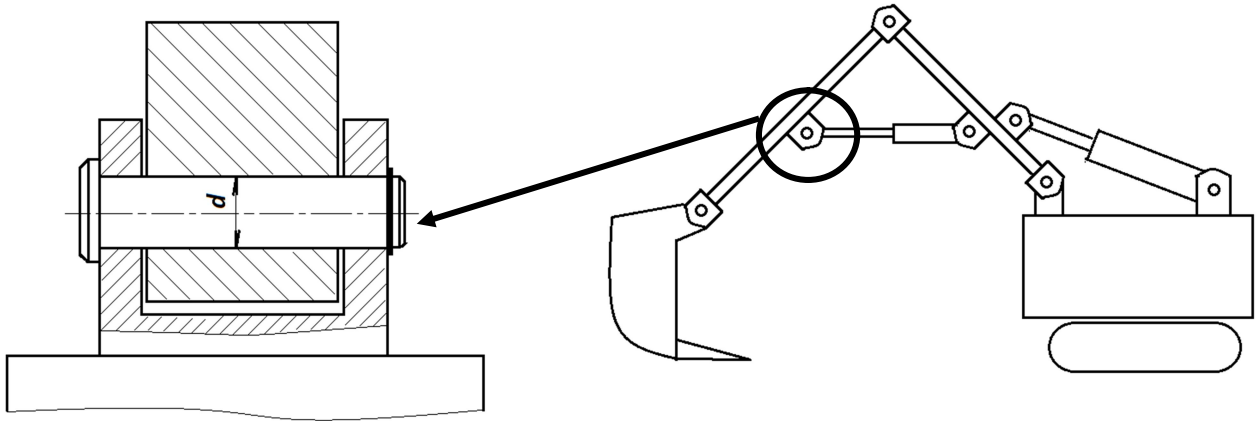
$$F_a = \frac{F_{max} - F_{min}}{2} = \frac{120 + 20}{2} = 70KN$$

$$F_s = \frac{1}{\frac{4F_a}{\pi d^2 \sigma_D} + \frac{4F_m}{\pi d^2 R_m}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4F_s}{\pi} \left( \frac{F_a}{\sigma_D} + \frac{F_m}{R_m} \right)} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,5}{3,14} \left( \frac{70000}{250} + \frac{50000}{785} \right)} = 23,5mm$$

$$F_s = \frac{\sigma_p}{\sigma_{max}} = \frac{\pi d^2 \sigma_p}{4F_{max}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{F_s \cdot 4F_{max}}{\pi \sigma_p}} = \sqrt{\frac{1,5 \cdot 4 \cdot 12000}{3,14 \cdot 590}} = 19,71mm$$

Donc  $d=23,5mm$

Exemple2



Un axe d'une articulation (Figure ci-dessus) est soumis au cisaillement avec effort dynamique variant entre  $-50KN$  et  $105KN$ , l'axe est fabriqué d'un acier ayant une limite de rupture  $R_m=610MPa$ , une limite d'écoulement plastique  $\sigma_p = 256MPa$  et une limite d'endurance  $\sigma_D = 295MPa$

La limite d'endurance en cisaillement  $\tau_D \approx 0.58 \sigma_D$  ainsi que la limite d'écoulement  $\tau_p \approx 0.58 \sigma_p$

- 1) Calculer le diamètre minimal pour assurer une sécurité évaluée par un coefficient  $F_s = 2.25$
- 2) Quelles seraient les valeurs extrêmes de l'effort appliqué pour que l'axe puisse effectuer 125000 cycles avant de rompre en utilisant un diamètre  $d = 108mm$  et le même coefficient de sécurité?

**Solution :**

1) L'effort de cisaillement aura pour amplitude et valeur moyenne :

$$\begin{cases} F_m = 27.5KN \\ F_a = 77.5KN \end{cases}$$

$$\tau_a = \frac{4}{3} \cdot \frac{4F_a}{\pi d^2} \quad \text{et} \quad \tau_m = \frac{4}{3} \cdot \frac{4F_m}{\pi d^2}$$

$$\begin{cases} F_s = \frac{\tau_D}{\tau_a} = \frac{0.58\sigma_D}{\tau_a} = \frac{0.58 \cdot \pi d^2 \cdot \sigma_D}{16 F_a} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{16 F_a \cdot F_s}{0.58 \cdot \pi \cdot \sigma_D}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 77500 \cdot 2.25}{0.58 \cdot 3.14 \cdot 295}} = 72.06mm \\ F_s = \frac{\tau_p}{\tau_{max}} = \frac{0.58\sigma_p}{\tau_{max}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{16 F_{max} \cdot F_s}{0.58 \cdot \pi \cdot \sigma_p}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 150000 \cdot 2.25}{0.58 \cdot 3.14 \cdot 256}} = 107.62mm \end{cases}$$

Donc  $d = 107.62mm$

2) Calculons la limite de résistance en fatigue correspondant à une vie finie

$$\sigma_f = 0.9R_m \cdot \left( \frac{\sigma_D}{0.9R_m} \right)^{\frac{1}{3}(\log N - 3)} = 0.9 \cdot 610 \cdot \left( \frac{295}{0.9 \cdot 610} \right)^{\frac{1}{3}(\log 125000 - 3)} = 355.65MPa$$

En remplaçant dans les expressions de coefficients de sécurité de résistance et d'écoulement :

$$\begin{cases} F_s = \frac{\tau_f}{\tau_a} = \frac{0.58\sigma_f}{\tau_a} = \frac{0.58 \cdot \pi d^2 \cdot \sigma_f}{16 F_a} \Rightarrow F_a = \frac{0.58 \cdot \pi d^2 \cdot \sigma_f}{16 \cdot F_s} = \frac{0.58 \cdot 3.14 \cdot 108^2 \cdot 355.65}{16 \cdot 2.25} = 209769.45N \\ F_s = \frac{\tau_p}{\tau_{max}} = \frac{0.58\sigma_p}{\tau_{max}} \Rightarrow F_{max} = \frac{0.58 \cdot \pi d^2 \cdot \sigma_p}{16 \cdot F_s} = \frac{0.58 \cdot 3.14 \cdot 108^2 \cdot 256}{16 \cdot 2.25} = 151057.61N \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} F_{min} &= F_{max} - 2F_a = 151057.61 - 2 \cdot 209769.45 = -268481.3N \\ &\begin{cases} F_{max} = 151057.61N \\ F_{min} = -268481.3N \end{cases} \end{aligned}$$

## Chapitre 6 Chargement combiné

Dans les chapitres précédents seul le chargement unidimensionnel a été considéré, ce chapitre sera consacré à étendre le calcul aux cas complexes où le chargement est combiné c.à.d. sollicitations composées (flexion+torsion ; traction+cisaillement ; etc.... )

### 6.1. Etat de contrainte dans le cas général

Le tenseur de contraintes de Cauchy s'écrit comme suit :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$\bar{\sigma}$  est symétrique

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

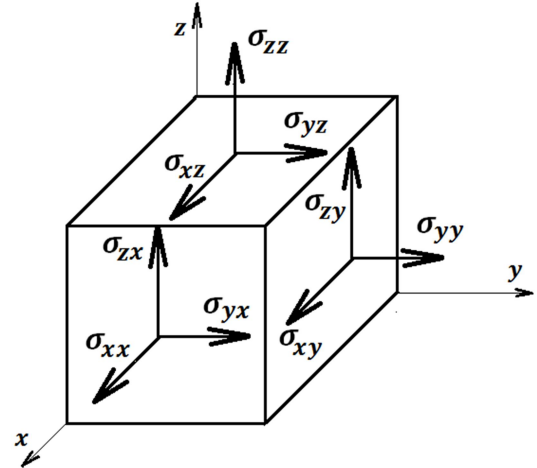


Figure 1. Etat de contraintes

Les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont les contraintes normales

Les contraintes  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{yz}$  et  $\sigma_{xz}$  sont les contraintes tangentielles

### 6.2. Contrainte équivalente de Von Misés

Dans les calculs on utilise la contrainte équivalente de Von Misés pour la comparer aux valeurs ultimes, cette contrainte s'écrit :

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 \right] + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)}$$

Ou écrite autrement :

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}$$

### 6.3. Application aux calculs de fatigue

Contrainte équivalente moyenne  $\sigma_{Vm}$

Soient les contraintes normales moyennes :

$$\sigma_{xm} = \frac{\sigma_{xmax} + \sigma_{xmin}}{2} ; \sigma_{ym} = \frac{\sigma_{ymax} + \sigma_{ymin}}{2} \text{ et } \sigma_{zm} = \frac{\sigma_{zmax} + \sigma_{zmin}}{2}$$

Et soient les contraintes tangentielles moyennes :

$$\tau_{xym} = \frac{\tau_{xymax} + \tau_{xymin}}{2} ; \tau_{yzm} = \frac{\tau_{yzmax} + \tau_{yzmin}}{2} \text{ et } \tau_{xzm} = \frac{\tau_{xzmax} + \tau_{xzmin}}{2}$$

La contrainte équivalente moyenne s'écrit :

$$\sigma_{Vm} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xm} - \sigma_{ym})^2 + (\sigma_{ym} - \sigma_{zm})^2 + (\sigma_{zm} - \sigma_{xm})^2 \right] + 3(\tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{xzm}^2)}$$

Contrainte équivalente amplitude  $\sigma_{Va}$

Les contraintes normales amplitudes s'écrivent:

$$\sigma_{xa} = \frac{\sigma_{xmax} - \sigma_{xmin}}{2} ; \sigma_{ya} = \frac{\sigma_{ymax} - \sigma_{ymin}}{2} \text{ et } \sigma_{za} = \frac{\sigma_{zmax} - \sigma_{zmin}}{2}$$

De même les contraintes tangentielles moyennes s'écrivent :

$$\tau_{xya} = \frac{\tau_{xy\max} - \tau_{xy\min}}{2}; \tau_{yza} = \frac{\tau_{yz\max} - \tau_{yz\min}}{2} \text{ et } \tau_{xza} = \frac{\tau_{xz\max} - \tau_{xz\min}}{2}$$

La contrainte équivalente amplitude s'écrit :

$$\sigma_{Va} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2] + 3(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{xza}^2)}$$

**6.4. Cas de contraintes planes**

Les composantes suivantes s'annulent  $\sigma_z = \tau_{yza} = \tau_{xza} = 0$

Les contraintes équivalentes moyenne et amplitude s'écrivent:

$$\sigma_{Vm} = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + \sigma_{ym}^2 - \sigma_{xm}\sigma_{ym} + 3\tau_{xym}^2}$$

$$\sigma_{Va} = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + \sigma_{ya}^2 - \sigma_{xa}\sigma_{ya} + 3\tau_{xya}^2}$$

**6.5. Critères de résistance**

1) *Contrainte complètement renversée* ( $\sigma_{Vm} = 0$ )

$\sigma_{Va} \leq \sigma_D$  dans le cas de vie infinie

$\sigma_{Va} \leq \sigma_f$  dans le cas de vie finie

$\sigma_D$  : Limite d'endurance

$\sigma_f$  : Contrainte limite correspondant à une durée de vie donnée  $N_f$

2) *Contrainte non complètement renversée (Critère de Goodman)*

(Voir figure ci-contre)

$$\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_f} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m} = 1 \text{ (Vie finie)}$$

$$\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m} = 1 \text{ (Vie infinie)}$$

Le coefficient de sécurité :

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_f} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m}} \text{ (Vie finie)}$$

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m}} \text{ (Vie infinie)}$$

3) *Critère de Goodman modifié*

Si l'écoulement est considéré le diagramme Goodman sera modifié (figure ci-contre)

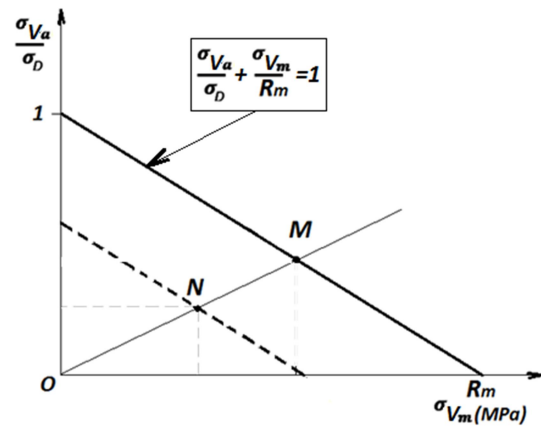
Les coefficients de sécurité :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{s1} = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m}} \\ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_p} + \frac{\sigma_{Vm}}{\sigma_p}} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{Vmax}} \end{array} \right. \text{ (Vie infinie)}$$

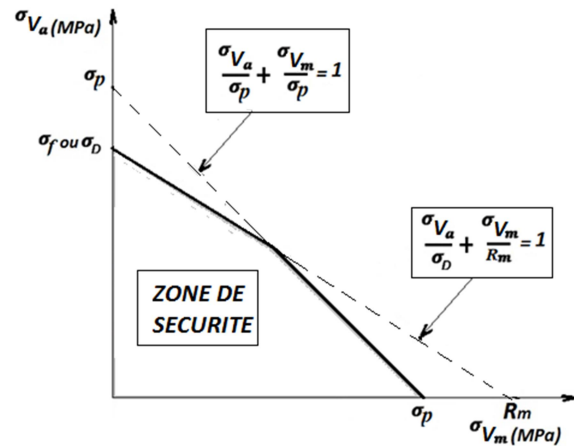
$$\left\{ \begin{array}{l} F_{s1} = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_f} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m}} \\ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_p} + \frac{\sigma_{Vm}}{\sigma_p}} = \frac{\sigma_p}{\sigma_{Vmax}} \end{array} \right. \text{ (Vie finie)}$$

**Exemple d'application :**

Une analyse dynamique par simulation numérique d'un vilebrequin (Fig. 2) a montré les résultats regroupés dans le tableau (tab. 1)



de



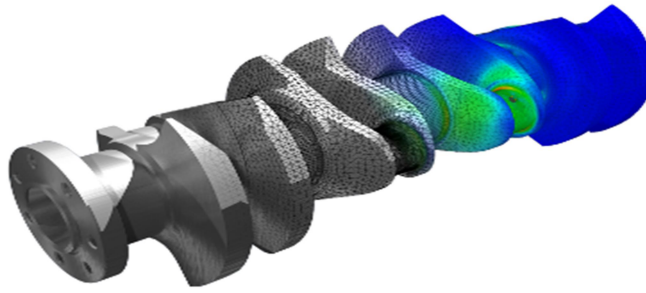


Figure 2. Simulation numérique d'un vilebrequin

Contraintes	Valeurs max et min (MPa)	
$\sigma_{xx}$	Max	250
	Min	-125
$\sigma_{yy}$	Max	300
	Min	-205
$\sigma_{zz}$	Max	-100
	Min	-220
$\sigma_{xy}$	Max	75
	Min	-25
$\sigma_{yz}$	Max	75
	Min	-25
$\sigma_{xz}$	Max	32
	Min	15

Tableau 1. Valeurs extrêmes de contraintes

Le vilebrequin est en acier de caractéristiques suivantes :  $R_m = 1200\text{MPa}$  et  $\sigma_D = 650\text{MPa}$ . On demande de vérifier la sécurité.

**Solution :**

Utilisons les formules suivantes pour calculer les contraintes équivalentes de Von Misés moyenne et amplitude et mettons les résultats dans le tableau (Tab. 2):

$$\sigma_{Vm} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xm} - \sigma_{ym})^2 + (\sigma_{ym} - \sigma_{zm})^2 + (\sigma_{zm} - \sigma_{xm})^2] + 3(\tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{xzm}^2)}$$

$$\sigma_{Va} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2] + 3(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{xza}^2)}$$

On obtient :

$$\sigma_{Vm} = 227.59\text{MPa} \text{ et } \sigma_{Va} = 209.72\text{MPa}$$

Le coefficient de sécurité se calcule par :

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_{Va}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{Vm}}{R_m}} = \frac{1}{\frac{209.72}{650} + \frac{227.59}{1200}}$$

$$F_s = 1.95$$

Le service est en zone de sécurité.

Contraintes	Valeurs max et min (MPa)		$\sigma_{vm}$	$\sigma_{va}$
	Max	Min		
$\sigma_{xx}$	Max	250	62.5	187.5
	Min	-125		
$\sigma_{yy}$	Max	300	47.5	252.5
	Min	-205		
$\sigma_{zz}$	Max	-100	-160	60
	Min	-220		
$\sigma_{xy}$	Max	75	25	50
	Min	-25		
$\sigma_{yz}$	Max	75	25	50
	Min	-25		
$\sigma_{xz}$	Max	32	23.5	8.5
	Min	15		

Tableau 2. Résultats des contraintes équivalentes moyennes et amplitudes

## Chapitre 7 Contrainte à amplitude variable (Loi de Miner)

Ce chapitre traitera le cas où la contrainte est à amplitude variable qui est un cas très fréquent en pratique

### 7.1. Cas de contrainte complètement renversée

Pour comprendre la démarche considérons le cas le plus simple de la contrainte à amplitude variable où la contrainte est complètement renversée (Fig. 1)

Considérons une structure soumise à un chargement à plusieurs régimes :

Régime 1  $\longrightarrow$   $(\sigma_{a1}; N_1)$

Régime 2  $\longrightarrow$   $(\sigma_{a2}; N_2)$

.....

Régime n  $\longrightarrow$   $(\sigma_{an}; N_n)$

Tels que les  $\sigma_{ai}$  sont les amplitudes et les  $N_i$  sont les nombres de cycles à la rupture correspondant à chaque  $\sigma_{ai}$  appliquée (Fig. 2)

Considérons qu'en service la structure a effectué les nombres de cycles suivants :

Régime 1  $\longrightarrow$   $n_1$  ( $n_1 < N_1$ )

Régime 2  $\longrightarrow$   $n_2$  ( $n_2 < N_2$ )

.....

Régime n  $\longrightarrow$   $n_3$  ( $n_n < N_n$ )

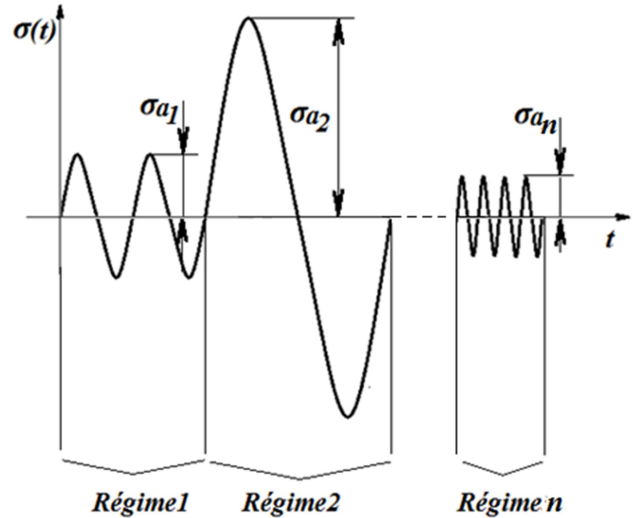


Figure 1. Contrainte à amplitude variable

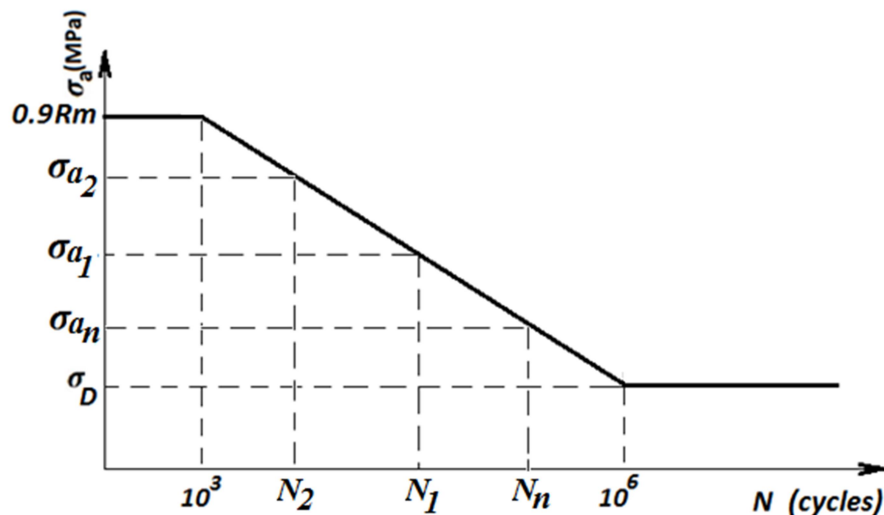


Figure 2. Situation des régimes sur la courbe  $\sigma - N$  (vie finie)

Ecrivons les rapports pour chaque régime :

Régime 1 :  $\frac{n_1}{N_1}$  correspond au pourcentage d'endommagement sous le régime 1

Régime 2 :  $\frac{n_2}{N_2}$  correspond au pourcentage d'endommagement sous le régime 2

.....

Régime n :  $\frac{n_n}{N_n}$  correspond au pourcentage d'endommagement sous le régime n

Lorsque la somme de ces  $n$  pourcentages d'endommagement est égale à 100% la structure rompt ou autrement :

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_n}{N_n} = 1 \text{ c'est la loi de Miner}$$

Ou 
$$\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = 1$$

Les rapports  $\frac{n_i}{N_i}$  sont appelés coefficients d'endommagement

### 7.2. Cas de contrainte non complètement renversée

La loi de Miner est valable pour le cas de contrainte complètement renversée seulement il faut appliquer le critère de Goodman pour les calculs nécessaires (Fig. 3)

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} + \dots + \frac{n_n}{N_n} = 1$$

### 7.3. Cas particulier

Si le chargement ne se compose que d'un seul régime on tombe sur le cas de contrainte à amplitude constante et la loi de miner se réduit comme suit :

$$\frac{n_1}{N_1} = 1$$

Ce qui est vrai car lorsque  $n_1$  atteint la valeur  $N_1$  c'est la ruine

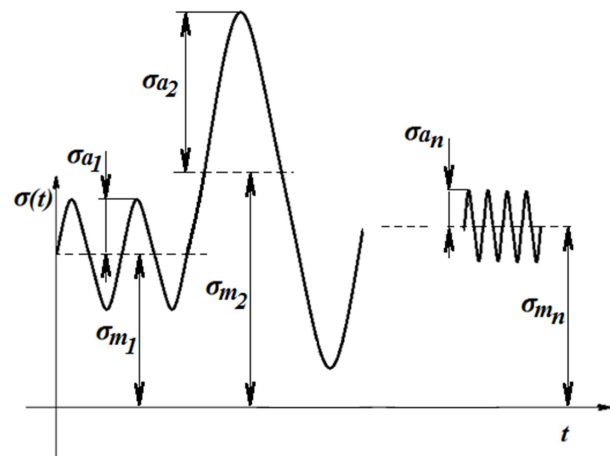
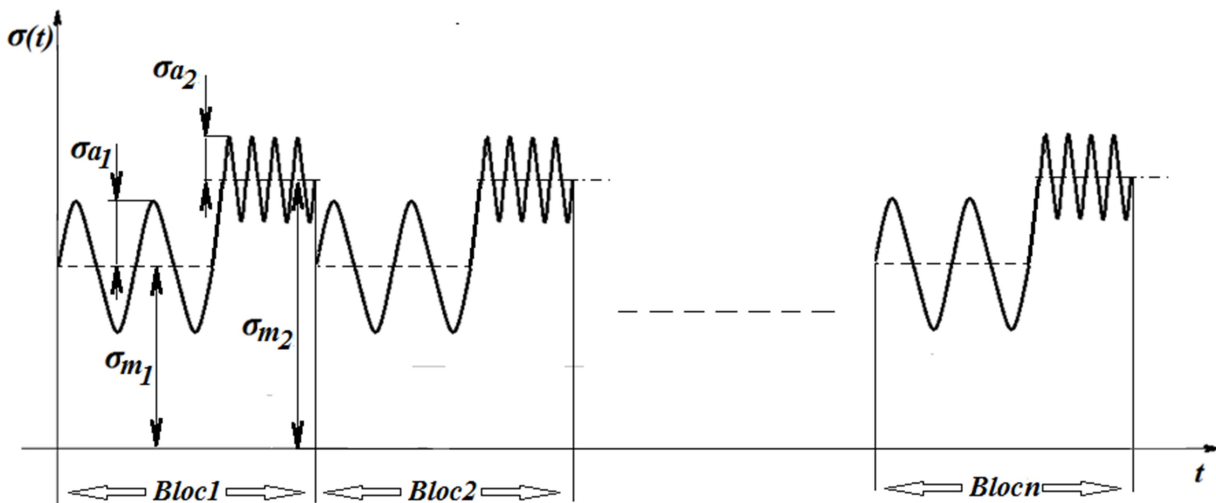


Figure 3. Chargement à plusieurs régimes à contrainte non complètement renversée.

#### Remarque

De ce qui précède on constate que sous un seul régime de chargement appliqué sur la structure en effectuant un cycle, un endommagement est créé plus le nombre de cycles augmente plus l'endommagement augmente jusqu'à la ruine. C'est le cumul d'endommagement.

#### Exemple d'application



Le chargement dynamique illustré par la figure ci-dessus est appliqué sur une structure en acier ( $R_m = 550MPa$  et  $\sigma_D = 95MPa$ ), sa périodicité est caractérisée par des blocs. Chaque bloc est composé de deux régimes différents :

$$\text{Régime 1} \begin{cases} \sigma_{a1} = 92MPa \\ \sigma_{m1} = 185MPa \end{cases} ; \text{Régime 2} \begin{cases} \sigma_{a2} = 65MPa \\ \sigma_{m2} = 235MPa \end{cases}$$

Si on souhaite que la structure effectue 3000 cycles en régime 1 et 7000 cycles quel serait le nombre maximal de blocs avant rupture ?

**Solution :**

Calculons les nombres de cycles pour chaque régime :

Le critère de Goodman à la rupture permet d'écrire :

$$\frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{f1}} + \frac{\sigma_{m1}}{R_m} = 1 \Rightarrow \sigma_{f1} = \frac{\sigma_{a1}}{1 - \frac{\sigma_{m1}}{R_m}} = \frac{92}{1 - \frac{185}{550}} = 138.63 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_{a2}}{\sigma_{f2}} + \frac{\sigma_{m2}}{R_m} = 1 \Rightarrow \sigma_{f2} = \frac{\sigma_{a2}}{1 - \frac{\sigma_{m2}}{R_m}} = \frac{65}{1 - \frac{235}{550}} = 113.49 \text{ MPa}$$

Les nombres de cycles seront calculés d'après :

$$N_1 = 1000 \left( \frac{\sigma_{f1}}{0.9R_m} \right)^{\left[ \frac{3}{\text{Log} \frac{\sigma_D}{0.9R_m}} \right]} = 1000 \left( \frac{138.63}{0.9 \cdot 550} \right)^{\left[ \frac{3}{\text{Log} \frac{92}{0.9 \cdot 550}} \right]} = 205652.14 \text{ cycles}$$

$$N_2 = 1000 \left( \frac{\sigma_{f2}}{0.9R_m} \right)^{\left[ \frac{3}{\text{Log} \frac{\sigma_D}{0.9R_m}} \right]} = 1000 \left( \frac{113.49}{0.9 \cdot 550} \right)^{\left[ \frac{3}{\text{Log} \frac{92}{0.9 \cdot 550}} \right]} = 866292.08 \text{ cycles}$$

Appliquons la loi de Miner pour p blocs :

$$\underbrace{\left( \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} \right) + \left( \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} \right) + \left( \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} \right) \dots + \left( \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} \right)}_{p \text{ fois}} = 1$$

Ou autrement :

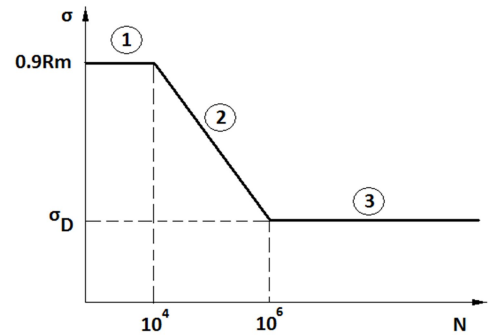
$$p \cdot \left( \frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} \right) = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2}} = \frac{1}{\frac{3000}{205652.14} + \frac{7000}{866292.08}} = 44.11$$

Soit  $p = 44$  blocs

Exercices

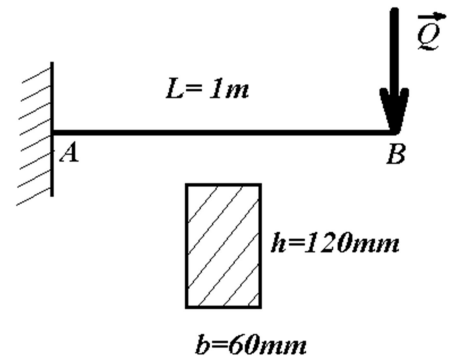
Exercice N°1:

On suppose qu'une structure est soumise à une contrainte totalement renversée.  
 En utilisant la figure ci-contre, écrire les critères de ruine ou de résistance en fatigue pour chacune des régions de la courbe



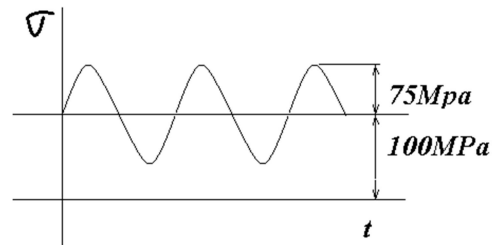
Exercice N°2 :

Une poutre encastrée (Voir ci-contre) est soumise à un chargement dynamique ( $F_{max}=40KN$  et  $F_{min}=1KN$ )  
 On désire utiliser un acier pour lequel  $R_{max}<1400MPa$  comme matériau de la poutre  
 Identifier  $R_{max}$  pour avoir un coefficient de sécurité  $FS=1.1$  à la section A



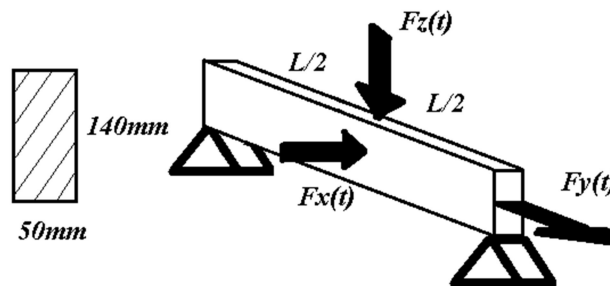
Exercice N°3 :

Un câble de soutien est assujéti à une charge variable assimilée à un signal sinusoïdal (voir figure ci-contre) Le câble est fabriqué d'un matériau ( $\sigma_D = 120MPa$  et  $R_m = 810 MPa$ )



Calculer le nombre de cycles avant la rupture

Exercice N°4



Une poutre de longueur 2m soumise à un chargement complexe :

$$F_x(t): \begin{cases} F_{xmax} = 10KN \\ F_{xmin} = 0.5KN \end{cases} ; F_y(t): \begin{cases} F_{ymax} = 5KN \\ F_{ymin} = 0.1KN \end{cases} ; F_z(t): \begin{cases} F_{zmax} = 12KN \\ F_{zmin} = 2KN \end{cases}$$

Le matériau est de l'acier ( $R_m=1100 MPa$  et  $\sigma_D=350 MPa$ )

- 1) Calculer le coefficient de sécurité
- 2) Calculer la durée de vie si la structure est en service 10h/24, 6j/7, 11m/an avec une fréquence 1 cycle chaque 5min

**Exercice N°5**

Une structure (Figure ci-contre) composée de 2 barres identiques AB et BC articulées en B est soumise à un chargement variable basculant entre deux régimes :

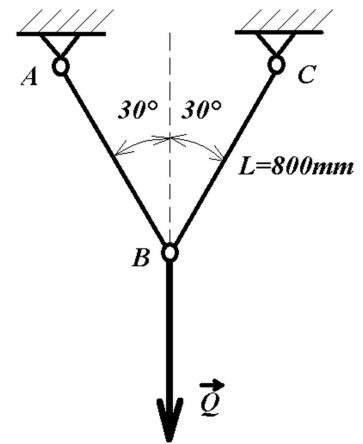
Regime 1 :  $0 \leq Q \leq 250KN$

Regime 2 :  $10 \leq Q \leq 150KN$

Les deux barres sont en acier ( $\sigma_D = 85MPa$  et  $R_m = 620 MPa$ )

1) Si les 2 barres sont soumises en régime 1 à un nombre de cycles total  $n_1=100000$  cycles quel serait le nombre total de cycles  $n_2$  en régime 2 ?

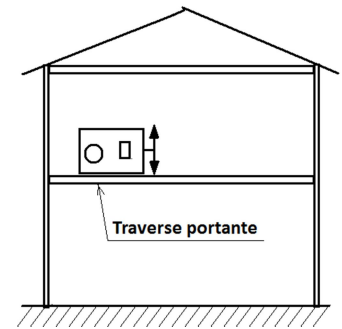
2) Si on suppose que la structure est soumise uniquement en régime 1 quel serait le nombre de cycles possible si on impose un facteur de sécurité  $FS=1.2$



**Exercice N°6**

Une machine vibrante fixée au premier étage d'un immeuble en charpentes métalliques fabriquées d'un acier ( $\sigma_D = 76MPa$  et  $R_m = 535 MPa$ ), fonctionne le dimanche et le lundi avec un régime induisant  $\sigma_{m1}$  et  $\sigma_{a1}$  24h/24h avec une fréquence de 5 cycles/min et le mardi, mercredi et jeudi avec un régime  $\sigma_{m2}$  et  $\sigma_{a2}$  24h/24h avec une fréquence de 8 cycles/min

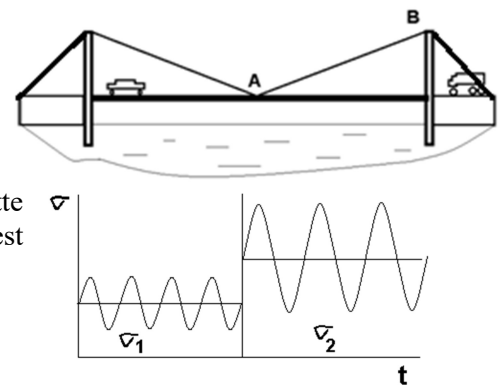
Si on désire que la traverse portante ait une vie de 200 semaines calculer  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$  pour les deux régimes en conservant le rapport  $\frac{\sigma_m}{\sigma_a} = 0.74$  dans les deux cas



**Exercice N°7**

Le câble AB du pont ci-contre s'est rompu après 4 années de son installation c.a.d un nombre de  $2.10^5$  de cycles. L'enquête menée par les experts a révélé que le câble a subi un chargement fluctuant entre  $\sigma_1 = 300.(\sin\omega t) + 120$  à un nombre de cycles  $n_1$  et  $\sigma_2 = 450.(\sin\omega t) + 200$  à un nombre de cycles  $n_2$ . Cette fluctuation est due au passage de gros et petits véhicules. Ce câble est fabriqué d'un acier ( $\sigma_D = 275MPa$  et  $R_m = 1100 MPa$ )

- 1) Déterminer les nombres de cycles  $n_1$  et  $n_2$  relatifs aux chargements  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .
- 2) Si on impose un facteur de sécurité 1.1 pour les deux chargements quelles seront les valeurs de  $n_1$  et  $n_2$ ?

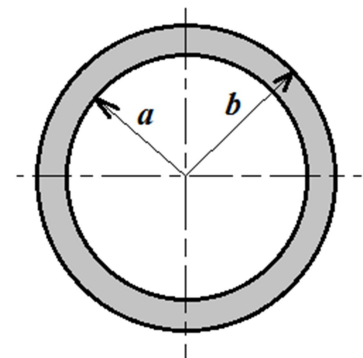


**Exercice N°8**

Un reservoir sphérique destiné à recevoir de l'air comprimé de pression variable entre 10 et 200 bars est fabriqué d'un acier ( $\sigma_D = 450MPa$  et  $R_m = 1420 MPa$ ) de rayon extérieur  $b=15cm$  et d'épaisseur  $e=5mm$ .

On désire connaître la durée de vie de ce reservoir si on utilise un coefficient de sécurité égal à 1.2

On donne :



$$\sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r^3} ; \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^3}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$$

$$A = \frac{P_i a^3 - P_e b^3}{b^3 - a^3}$$

$$B = \frac{(P_i - P_e) a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)}$$

$P_i$  et  $P_e$  sont respectivement les pressions interne et externe.