



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ABBES LAGHROUR KHENCHELA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



Département de Mathématiques et informatique

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Étude Qualitative d'une EDP Parabolique

Réalisés par :

GARET Bouthaina

ZEROUALI Sadika

Membres de jury :

M. KOUACHI Said

Prof. U. Khenchela

Président

M. BENHADID Ayache

MCB U. Khenchela

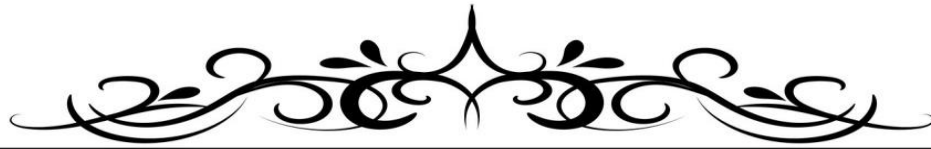
Examineur

M. SAOUDI Khaled

Prof. U. Khenchela

Encadreur

◇◇◇ Session : 2021 ◇◇◇



Remerciements



Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la bénédiction de dieu et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes.

Je voudrais tout d'abord remercier très vivement M. **K. Saoudi**, professeur à l'université de Khenchela, qui a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes.

Les mots de remerciements ne suffisent jamais pour lui exprimer notre gratitude.

Je remercie bien **M. S. Kouachi**, professeur à l'université de Khenchela, ainsi que M. **A. Benhadid**, maître de conférences à l'université de Khenchela, qui m'ont fait l'honneur de participer à mon jury, et aussi pour leurs soutiens et intérêt qu'ils ont portés à ce travail.

Nos remerciements s'adressent également à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve, malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Nous tenons à remercier pareillement tous ceux qui nous ont aidé de près et de loin pour l'élaboration de ce mémoire.

A tous ceux dont le soutien nous a été utile et nécessaire



Dédicace



Au début et avant tout, je rends grâce à Dieu tout puissant, qui m'a aidé à terminer ce travail.

Je dédie ce mémoire,

À mes chers parents pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études,

À ma chère grand-mère, chère à mon cœur, tout au long de mon parcours universitaire, elle m'a encouragée et poussée à aller de l'avant, et je n'oublie pas ses prières et ses prières pour l'excellence,

À ma chère sœur pour ses encouragements constants et son soutien moral,

À mes chers frères pour leurs soutiens et leurs encouragements,

À toute ma famille pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,

À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé à continuer et à exceller.

Garet Bouthaina



Dédicace



Tout d'abord je tiens à remercier dieu pour
m'avoir donné le courage avec la volonté afin
d'accomplir cette tâche.

Je dédie ce mémoire,

À mes très chers parents

qui veillent sans cesse sur moi avec leurs prières et leurs recommandations. Que Dieu le
tout puissant les protège et leur réserve une longue et meilleure vie.

À mes très chers frères et sœurs.

À toute ma famille.

À mes chères amies.

Zerouali Sadika

الملخص

اشتملت المذكرة دراسة نظرية و عددية لحلول معادلة تفاضلية جزئية مكافئة مع خصائصها. أهتمينا بجودتهم المتنوعة وخاصة ظاهرة الانفجار، حيث حاولنا تحديد وقت ومكان هذه الحادثة (مجموعة الانفجار).

يمكننا في الآفاق، التركيز في وجهات النظر على سلوك الظاهرة في وقت الانفجار، حيث تشكل هذه الدراسة نظرية الفوضى، وبعدها نرى الإجراءات التي يتعين القيام بها قصد التحكم في الانفجار، هنا نصادف دراسة نظرية السيطرة.

في الأخير، نحاول تعميم هذه الدراسة بالتطرق إلى التحليل الكسري !

Résumé

Dans ce mémoire, après une étude théorique et numérique des solutions d'une EDP parabolique, semi-linéaire avec leurs propriétés. On s'est intéressé à leurs qualités et en particulier au phénomène d'explosion, où on a essayé de déterminer le temps et le lieu de cette action.

Ainsi, nous pouvons dans les perspectives, examiner le comportement du phénomène autour du temps d'explosion, c'est la théorie du chaos, et ensuite voir les actions à mener pour contrôler l'explosion, c'est la théorie du contrôle. Enfin, nous essayons de généraliser cette étude en abordant l'analyse fractionnaire !

Abstract

In this memory, after a theoretical and numerical study of the solutions of a parabolic PDE, semi-linear with their properties. We are interested in their qualities, and in particular in the phenomenon of explosion, where an attempt was made to determine the time and place of this action.

So we can in the perspectives, study the behavior of the phenomenon around the explosion time, it's chaos theory, and then see the actions to be taken to control the explosion, it's control theory.

Finally, we try to generalize this study by bordering the fractional analysis!

Notations

Symboles	Significations mathématiques
I	Entier naturel strictement positif, représentant le nombre de subdivision
h	Pas d' espace
u_t	Dérivée partielle de u par rapport à t
u_{xx}	Dérivée partielle seconde de u par rapport à x
x_i	L'abscisse du $i + 1$ -ième point de la subdivision de l'intervalle
$u_i(t)$	Approximation semi-discrète de $u(x_i, t)$
T	Réel positif
T^n	$n+1$ -ième mesure du temps dans l'intervalle $[0, t]$
u_i^n	Approximation discrète de $u(x_i, t_n)$
S	L'ordre d'approximation de la méthode
CPU	Le temps d'exécution du programme par la machine pour chaque valeur de i
$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplacien du vecteur u
$U_h = (U_0, U_1, \dots, U_I)^T$	La transposée du vecteur U
H	Espace de Hilbert
k	k est le milieu de l'intervalle $[0, I]$

Table des matières

Notations	
Introduction	3
1 Préliminaires et Notions fondamentales	4
1.1 Espace fonctionnelle	5
1.1.1 Espace de Hilbert	5
1.1.2 Espace L^p	5
1.1.3 Espace de Sobolev	5
1.2 Certains concepts dans les équations différentielles partielles	6
1.2.1 Définition d'une équation aux Dérivée Partielle	6
1.2.2 Classification des équations aux dérivées partielles	6
1.2.3 Discrétisation des EDP	7
1.2.4 Méthode de différences finies	8
1.3 Semi-groupe	9
1.4 Solution classique et intégrale d'équation d'évolution non-linéaire	9
2 Étude d'une EDP Parabolique Semi-linéaire	11
2.1 Modélisation	12
2.2 Position de Problème " Cas d'une équation parabolique semi-linéaire localisée " ..	13
2.3 Existence et unicité	13
2.4 Points et ensemble d'explosion	14
3 Étude Qualitative des solutions	17
3.1 Position de problème	18
3.2 Problème semi-discrétisé	18
3.3 Existence et l'unicité de la solution du problème semi discrétise	20

3.4 Propriétés du schéma semi-discret	20
3.5 Explosion de solutions	23
3.6 Convergence	27
3.7 Discrétisation totale	30
3.7.1 Consistance et Stabilité du Schéma	30
3.7.2 Explosion Numérique	32
3.8 Résultats Numériques Sous Matlab	33
Conclusion & perspectives	49
Bibliographies	50

Introduction

Au fil du temps, on s'est rendu compte que les EDP pouvaient modéliser la plupart des phénomènes en physique, mécanique, chimie, biologie, économie et sociologie . . . etc.

Un intérêt particulier pour l'étude des EDP a été reconnu par de nombreux chercheurs contemporains car à travers eux, nous pouvons comprendre, expliquer et même prédire le comportement de certains phénomènes naturels et artificiels.

Selon le phénomène modélisé, la solution (potentielle) de l'EDP aura un profil différent, par exemple, on pourrait avoir une solution qui prend, en un temps fini, une valeur qui tend vers l'infini. On va dire que cette solution explose en un temps fini et qu'on a un phénomène d'explosion. Aussi, l'explosion démographique d'une population est un exemple vivant et tangible. Si la forte augmentation de la population conduit à l'apparition du phénomène d'explosion, et que l'un des résultats de ce phénomène est l'apparition du chaos, alors des solutions pratiques doivent être trouvées pour contrôler le phénomène d'explosion !

Le problème avec cette pensée réside dans l'importance des caractéristiques (Qualités) des solutions d'EDP.

Dans cette thèse, après l'étude théorique et numérique de solutions d'EDP, avec leurs propriétés ! Nous nous intéressons à leurs qualités et en particulier au phénomène de l'explosion, puisque nous essaierons de déterminer le moment et le lieu de cette action. Ainsi, dans les perspectives, on peut d'abord s'intéresser au comportement du phénomène au moment de l'explosion, c'est la théorie du chaos, et ensuite voir les démarches qu'il faut faire pour contrôler l'explosion, c'est la théorie de contrôle.

Enfin, nous tentons de généraliser cette étude en abordant l'analyse fractionnaire !

Notre mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques résultats préliminaires notamment d'analyse fonctionnelle et numérique, qui sont nécessaires pour traiter les chapitres suivants. Dans le deuxième chapitre, une étude approfondie (théorique et numérique) est effectuée pour un problème parabolique semi-linéaire.

Le troisième chapitre, l'objet (centre) de notre mémoire, est consacré à exposer toutes les qualités possibles des solutions de notre problème étudié.

En conclusion, nous présentons quelques observations importantes et quelques développements possibles.

Enfin, il est à noter que notre travail s'appuie principalement sur un ensemble de recettes déjà étudiées dans notre cursus.

CHAPITRE 1

Préliminaires et Notions fondamentales

Ce chapitre est consacré à un rappel des espaces fonctionnels les plus importants et quelques concepts de base liés aux équations aux dérivées partielles que nous utilisons dans les deux chapitres suivants.

1.1 Espace fonctionnelle

1.1.1 Espace de Hilbert

Définitions 1.1.1: Soit E un espace norme pour que E soit préhilbertien il faut et il suffit que E vérifie l'égalité de parallélogramme

$$\forall x, y \in E \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Définitions 1.1.2: On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet c'est-à-dire que toute suite de Cauchy $(x_n) \subset H$ converge vers un élément $x \in H$ donc H est un espace de Banach

1.1.2 Espace L^p

Définitions 1.1: Pour $1 \leq p < +\infty$

On définit $L^p(\Omega)$ par :

$L^p(\Omega) = \{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}; u \text{ mesurable telle que } \int |u|^p d\Omega < +\infty \}$ et on note $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ la norme sur $L^p(\Omega)$, dénotée par : $\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int |u|^p d\Omega)^{\frac{1}{p}}$.

Définitions 1.2 : On note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables, définie par :

$L^\infty(\Omega) = \{ u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } u \in M \exists c > 0 |u(x)| \leq c \text{ p.p dans } \Omega \}$. on note $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ la norme sur $L^\infty(\Omega)$, définie par : $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{c > 0 : |u(x)| \leq c \text{ p.p dans } \Omega\}$

1.1.3 Espace de Sobolev

Définitions 1.1: Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on définit l'espace de Sobolev suivant:

$H^1(\Omega) = \{ u/u \in L^2(\Omega) : D_i u \in L^2(\Omega) \forall i = \overline{1, n} \}$, dans cette définition, lorsqu'on dit $D_i u \in L^2$ sous entend il existe un fonction $g \in L^2$

$$\langle D_i \varphi, \varphi \rangle_{D'D} = - \int g \varphi dx$$

l'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int uv dx + \sum_{i=1}^n \int \frac{du}{dx_i} \frac{dv}{dx_i} dx \text{ et la norme } \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int \left| \frac{du}{dx_i} \right|^2 dx + \int |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définitions 1.2 : Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . L'espace $H_0^1(\Omega)$ est défini comme étant l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. $H_0^1(\Omega)$ se caractérise comme suit :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int \nabla u \nabla v dx$ et la norme $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = (\int |\nabla u|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

Définitions 1.3 Soit m un nombre entier, on définit l'espace de Sobolev d'ordre m , $H^m(\Omega) = \{u/u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}$ avec D^α la dérivée aux sens des distributions d'ordre m , cet espace est de Hilbert pour le produit scalaire : $\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$ et pour la norme : $\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Définitions 1.4 : Soit m et p deux nombres avec $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $W^{m,p}(\Omega) = \{u/u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall |\alpha| \leq m\}$, $W^{m,p}(\Omega)$ est de Banach pour $1 \leq p < \infty$.

$$\text{Pour la norme : } \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \text{ pour } p = +\infty \end{cases}$$

1.2 Certains concepts dans Equation aux Dérivées Partielles

1.2.1 Définition d'une Equation aux Dérivées Partielles:

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation qui contient des dérivées partielles, si dans les équations aux dérivées ordinaires (EDO), la fonction inconnue u dépend que d'une seule variable, dans les EDP's, la fonction inconnue dépend de plusieurs variables.

Une équation aux dérivées partielles pour la fonction u est une relation entre u , les variables x_1, x_2, \dots, x_d et un nombre fini de dérivées partielles u , cette équation est la forme :

$$G\left(u, x_1, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_1^n}, \dots\right) = 0 \quad (1.1)$$

1.2.2 Classification des équations aux dérivées partielles :

On donne ci-dessous, une EDP linéaire du second ordre portant sur des fonctions de deux variables réelles $u(x, y)$.

Une telle équation s'écrit :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = g \quad (1.2)$$

a, b, c, d, e, f, g sont supposés constants.

Les EDP linéaires du second ordre sont classées en trois grandes familles :

- Elliptique si $b^2 - 4ac < 0$
- Parabolique si $b^2 - 4ac = 0$
- Hyperbolique si $b^2 - 4ac > 0$

Les équations de type **elliptique** interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est-à-dire n'évoluant pas au cours du temps). La plus connue de ces équations est l'équation de poisson: $-\Delta u = f$ dans Ω .

Les équations de type **parabolique** modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion. Un exemple de ce type d'EDP. Sera étudié le long de ce mémoire.

Pour ce qui est des équations **hyperbolique**, elles modélisent le plus souvent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. Les exemples classiques sont l'équation d'advection ou de transport :

$$\partial_t u(x, t) + a \partial_x u(x, t) = f(x, t), (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^+,$$

où $a \in \mathbb{R}$ est la vitesse de transport.

L'équation des ondes :

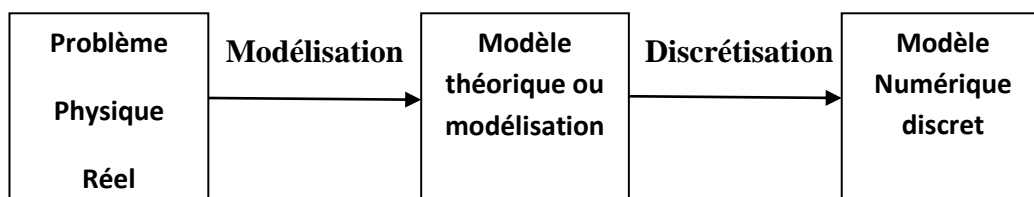
$$\partial_t^2 u(x, t) + a \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t), (x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+^+.$$

1.2.3 Discrétisation des EDP

Afin de passer d'un problème exact continu régi par une EDP à un problème approché discret, il existe trois grandes familles de méthodes :

- 1) Différences finies,
- 2) Volumes finis,
- 3) Éléments finis.

Dans notre mémoire, nous nous concentrerons sur la méthode des différences finies, nous rappelons le principe de la méthode avec ses avantages et inconvénients.



1.2.4 Méthode de différences finies

Pour l'étude numérique, on a deux approches du problème (P). La première est de discrétiser les EDP en espace et en temps, sur un maillage uniforme. La méthode transforme les EDP en un système algébrique, en remplaçant les dérivées partielles par les différences finies.

Une autre approche est appelée Méthode des lignes (MOL) ou méthode semi-discrète. Dans cette approche, on discrétise les EDP par rapport à une seule variable spatiale, ou temporelle. La discrétisation en espace amène à un système d'équations différentielles ordinaires avec des conditions initiales.

La méthode des différences finies (Méthode des Nœuds), est une technique courante de recherche des solutions approchées d'équations aux dérivées partielles, qui consiste à résoudre un système de relations liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

L'aspect de cette méthode apparaît comme étant la plus simple à mettre en œuvre car elle procède en deux étapes : d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de différenciation, d'autre part, la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

Avantages : Grande simplicité d'écriture et faible coût de calcul.

Inconvénients : Limitation à des géométries simples, difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

On a trois types de schémas pour approcher les dérivées.

1. Schéma progressif : On utilise l'opérateur de différence progressif : $\delta_x^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}$

2. Schéma régressif : On utilise l'opérateur de différence régressif : $\delta_x^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$

3. Schéma centré : On utilise l'opérateur de différence centré : $\delta_x = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$

1.4 Semi-groupe

Définitions 1.4.1: Soit $S : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{L}(E)$ un opérateur. On dit que la famille

$\{S(t) : t \geq 0\}$ est un semi-groupe, si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- 1) $S(0) = I$,
- 2) $S(t + e) = S(t)S(e) \forall t, e \geq 0$

Définitions 1.4.2 (Générateur infinitésimal) : Le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire A de domaine : $D(A) = \left\{ u \in E : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\}$, défini par :

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)u - u}{t}; u \in D(A)$$

Remarque 1.4.1 : A peut être un opérateur borné ou non borné !

Théorème 1.4.1 (Voir: [13]) : Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H , est dissipatif, si et seulement si :

$$\forall u \in D(A) : \langle Au, u \rangle \leq 0.$$

Dans le cas d'un espace de Hilbert complexe, la condition précédente est remplacée par :

$$\forall u \in D(A) \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \leq 0.$$

Théorème 1.4.2 (Voir [13]) : Soit A un opérateur dissipatif et de domaine dense dans H . Alors A est m -dissipatif, si et seulement si, A est fermé et A^* est dissipatif.

Exemple 1.4.1 : $X = L^2(\Omega)$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $Au = \Delta u$ (Δ est le Laplacien (Opérateur de la Chaleur)), pour tout $u \in D(A)$. $(A, D(A))$ est m -dissipatif dans $L^2(\Omega)$.

Théorème 1.4.3 : Si A est m -dissipatif, alors $D(A)$ est dense dans H .

Proposition 1.4.1 : Soit A un opérateur non borné dans H de domaine $D(A)$ dense dans l'espace H . On suppose en de plus :

- i. A est fermé et dissipatif,
- ii. A^* est dissipatif.

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction.

1.5 Solution classique et intégrale d'équation d'évolution non-linéaire

Définitions 1.5.1 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I \subset \mathbb{R} \text{ } -\infty < y < +\infty\}$ l'épigraphe de F .

On dit que F est lipchitzien, si seulement si :

$\forall (t, y_1), (t, y_2) \in D \mid F(t, y_1) - F(t, y_2) \mid \leq K \mid y_1 - y_2 \mid$, ou $K \in \mathbb{R}^{+*}$, appelé constante de Lipchitz.

Soit $(A, D(A))$ un opérateur linéaire dans H et F une application continue de H dans H qui sert à introduire la non-linéarité dans le problème.

On considère l'équation d'évolution non linéaire suivante :

$$U'(t) = AU(t) + F(U(t)), \quad t \in [0, T] \quad (1.3)$$

Considérons les hypothèses suivantes, avec H est un espace $L^2(\Omega)$.

- (H1) : A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ dans H
- (H2) : F est lipchitzien sur les bornés de H .

Définitions 1.5.2 (Voir [14]) : Soient $T > 0$ et $U \in C^0([0, T]; H)$. On dit que :

- U est une solution classique de (1.3), si $U \in C^1([0, T]; H) \cap C^0([0, T]; D(A))$ et vérifier (1.3).
- U est une solution intégrale de (1.3) avec donné initiale $U_0 \in D(A)$, si

$$\forall t \in [0, T], \quad U(t) = S(t)U_0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds.$$

CHAPITRE 2

Étude d'une EDP Parabolique Semi-Linéaire

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'explosion en temps fini de la solution du problème parabolique semi-linéaire.

Le phénomène d'explosion se produit dans divers type d'équations d'évolutions non-linéaires, où on le rencontre dans l'étude de plusieurs classes d'équations aux dérivées partielles, telles que les équations de Schrödinger, les équations hyperboliques, ainsi que les équations paraboliques, il y a une bibliographie assez importante consacrée au sujet de l'explosion, nous mentionnons [4, 6 et 12] qui comprennent la plupart des principales références liées à la théorie de l'explosion de solutions des équations paraboliques.

2.1 Modélisation

Le modèle mathématique de la diffusion de la chaleur repose sur trois étapes de base:

Première étape: Afin de définir l'équation différentielle partielle qui décrit le phénomène de propagation de la chaleur, considérons un domaine Ω de l'espace $\mathbb{R}^N, N \geq 1$ que l'on suppose occupé par un matériau homogène isotrope et un conducteur de la chaleur. On note x la variable d'espace et t la variable de temps dans Ω , les sources de chaleur (éventuellement non uniformes ou locales en espace et variables dans le temps), qui pourraient s'agir d'un fil électrique, représenté par une fonction donnée $f(u)$, tandis que la température est une fonction inconnue $u(x, t)$, exprimant la température à tout point $x \in \Omega$ et à l'instant $t > 0$.

La quantité de chaleur est proportionnelle à la température u et vaut cu où c est la chaleur spécifique ou la capacité thermique d'une substance mesurant la quantité d'énergie qui peut être stockée par l'EDP parabolique suivante :

$$c \frac{du}{dt} - k \Delta u = f(u) \quad (2.1)$$

Cette équation représente la distribution de la température dans Ω , où :

- Δu représente la convexité ou la concavité de la courbe de température, c'est la base de la mesure de la température entre un point et son voisin,
- $\frac{du}{dt}$ est le taux de changement de température par rapport au temps,
- k est le coefficient de conductivité thermique.

Deuxième étape: Décrire les conditions aux limites qui indiquent ce qui se passe à la frontière au bord $\partial\Omega$, où nous choisissons comme conditions aux limites :

$$u(x, t) = 0 \quad ; \quad x \in \partial\Omega \quad \text{et} \quad t > 0, \quad (2.2)$$

appelée conditions de Dirichlet homogène, ce qui signifie que la température est nulle en tous points de la frontières $\partial\Omega \forall t > 0$.

Troisième étape: Justifie les conditions initiales décrivant le phénomène de propagation de la chaleur au début de l'expérience, par convention on choisit le temps initial, l'instant $t = 0$ et comme condition de Cauchy, la donnée initiale représentant la répartition de la chaleur au

$$\text{moment initial : } u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (2.3)$$

Remarque 2.1 La modélisation mathématique utilisée n'est pas unique, elle est proportionnelle aux changements des conditions et des matériaux utilisés dans l'expérience.

Dans le problème (2.1)- (2.3), on normalise les coefficient k, c et nous nous intéresserons au cas particulier, où le terme source de chaleur f est localisé (Sources de chaleur).

2.2 Position de Problème: "Cas d'une Équation Parabolique Semi - Linéaire Localisée "

Soit le problème de Cauchy suivant:

$$(P) : \begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + f(u(x_0, t)) & ; \quad (x, t) \in \Omega \times]0, T[& (2.4) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & ; \quad t \in]0, T[& (2.5) \\ u(x, 0) = u_0(x) & ; \quad x \in \bar{\Omega} & (2.6) \end{cases}$$

Ω désigne un ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^n, u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{K} (\mathbb{R} \vee \mathbb{C})$ est l'inconnue, u_0 la donnée initiale du problème, x_0 un point fixe de Ω , f un terme source donné et $T > 0$.

On commence par établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (P), sous certaines conditions suffisantes.

2.3 Existence et unicité

Il y a plusieurs manières d'étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un tel problème différentiel, dans notre travail, on a choisit la théorie du **Semi-groupe**.

Dans cette partie, H définit un espace de Hilbert, $(A, D(A))$ un opérateur non borné,

m-dissipatif de domaine dense dans H et $(S(t))_{t \geq 0}$ désigne le Semi-groupe sur H engendré par A .

On cherche $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{K}$ satisfaisant (P) en un sens à préciser ? On veut transformer (P) comme un problème d'évolution dans un espace $H = L^2(\Omega)$ avec $f \in L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{K})$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$.

On pose, pour $t \in [0, T] : U(t) = u(t, \cdot)$ et $F(U(T)) = f(u(t, \cdot))$ ou F est lipchitzien

On définit $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ par :

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \forall u \in D(A): Au = \frac{d^2 u}{dx^2}, \end{cases}$$

Alors (P) se traduit par le problème d'évolution suivant :

$$(P') \begin{cases} U'(t) = AU(t) + F(U(t)), & t \in [0, T] \\ U(0) = u_0 \end{cases}$$

Ce problème il admet une unique solution maximale $U \in C^0([0, T[; H)$.

À partir de là, nous concluons que le problème (P) admet une unique solution maximale $u \in C^0([0, T[; H)$

Remarque 2.2 :

2. La condition $U(0) = u_0$ donne $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$

3. La condition $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $t \in [0, T]$ est dissimulée dans $D(A)$, car une solution U de (P') vérifie $U(t) \in D(A)$ pour $t \in [0, T]$,

Remarque 2.3 :

- 1- Si $T = +\infty$: on dit que la solution est globale,
- 2- Si $T < +\infty$: dans ce cas, $\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_\infty = +\infty$, on dit que la solution explose en temps fini.

2.4 Point et ensemble d'explosion

Définition 01 : On dit que la solution u de (2.4)-(2.6) explose en temps fini T , s'il existe un temps fini T , tel que : $\|u(\cdot, t)\|_\infty < +\infty$, pour $t \in [0, T[$, où $\lim_{t \rightarrow T} \|u(\cdot, t)\|_\infty = +\infty$.

Définition 02 : Un point $a \in \Omega$ est dit point d'explosion de u , si u n'est pas bornée au voisinage de $]a, T[$.

Définition 03 : On appelle ensemble d'explosion $S \subset \partial\Omega$, l'ensemble de tous les points d'explosion :

$$S = \{x \in \Omega : \exists (x_n, t_n) \subset \Omega \times]0, T[, t_n \rightarrow T, x_n \rightarrow x, u(x_n, t_n) \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\}$$

Exemple 1:

Considérons un exemple classique dans les équations différentielles ordinaires (EDO), qui illustre un phénomène d'explosion.

$$(E1) \begin{cases} \frac{du}{dt} = u^2 \text{ pour } t > 0 \\ u(0) = a > 0 \end{cases}$$

Ici, on se demande si la solution explose en temps, peut-on déterminer le temps de l'explosion T ?

Preuve :

Nous recherchons une solution à l'équation différentielle :

$$\begin{aligned}
 \text{On a :} \quad \frac{du}{dt} = u^2 &\Leftrightarrow \frac{du}{u^2} = dt \\
 &\Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int dt \Leftrightarrow \frac{-1}{u} + c = t \\
 &\Leftrightarrow \frac{-1}{u} = t - c \\
 &\Leftrightarrow u = \frac{-1}{t-c} \\
 &\Leftrightarrow u = \frac{1}{c-t}
 \end{aligned}$$

On constate que la solution de (E1), existe et est positif pour $t \in [0, c[$

On a :

$$u(0) = \frac{1}{c-0} = a \Rightarrow c = \frac{1}{a}$$

Donc la solution unique de problème est $u(t) = \frac{1}{T-t} / T = \frac{1}{a}$, où T est le temps de l'explosion, déterminé par l'expression suivante :

$$\int_a^{+\infty} \frac{du}{f(u)} = \int_a^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{a} = T$$

où $f(u) = u^2$.

Remarque 2.2 :

Par le biais de cet exemple, on peut d'écrire l'explosion comme étant le phénomène pour lequel la solution est non globale.

Le théorème suivant donne une condition du non explosion.

Théorème 2.2.1 (Voir [12]) : Si $\int_a^{+\infty} \frac{du}{f(u)} = +\infty$, alors u est bornée pour tout $t < +\infty$

Preuve : [12]

Le deuxième chapitre du mémorandum était consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de résolution du problème de la propagation de la chaleur, et le but de notre étude est d'étudier toutes les propriétés de la solution y compris l'unicité et régularité qui ont été déduits du deuxième chapitre.

Après avoir défini l'aire de la solution nous avons une nouvelle propriété qui est l'explosion de la solution au temps fini. L'exemple nous a donné plus d'explications sur ce phénomène.

Cependant, la question demeure, la solution au problème de la propagation de la chaleur n'a-t-elle que ces qualités, ou y a-t-il d'autres qualités ? Si l'explosion d'une solution à un temps fini est l'une de ses caractéristiques les plus marquantes, pouvons-nous donner une estimation numérique du temps de l'explosion ?

Par conséquent, nous consacrons le troisième chapitre à répondre à ces questions en prenant deux sources de chaleur différentes

CHAPITRE 3

Étude Qualitative des solutions

Dans ce chapitre, on étudie l'approximation d'un système différentiel par la méthode numérique des différences finies.

On introduit un schéma semi-discret associé à (P) et après on donne certaines propriétés pour étudier toutes les qualités possibles des solutions de notre problème étudié.

Quelques résultats numériques sous Matlab, ajustant la clarté, l'illustration et la compréhension de ce chapitre.

3.1 Position de Problème

Soit le problème différentielle suivant :

$$(P_1) \begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + u^p(0, t)(x, t) \in]-l, l[\times]0, T[& (3.1) \\ u(-l, t) = u(l, t) = 0 & t \in]0, T[& (3.2) \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0 & x \in]-l, l[& (3.3) \end{cases}$$

où $p > 1$, $l = \frac{1}{2}$ et $u_0(x)$ est une fonction bornée symétrique, non décroissante sur $]-l, 0[$, vérifiant :

$u''_0(x) + u^p(0, t) \geq 0$ et $]0, T[$ l'intervalle d'existence maximale de la solution .

L'existence et l'unicité de ce genre de problèmes est déjà étudié dans le chapitre précédent, qui représente un modèle mathématique de la propagation de la chaleur en un seul endroit, pour un certain phénomène physique (Processus de propagation de réactions chimiques, système biologiques, ...etc).

3.2 Problème semi-discrétisé

Soit $I > 0$, un entier naturel et soit un réel positif $h = \frac{1}{I}$, le pas de discrétisation de l'espace.

Ici, $\Omega =]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, soit la subdivision $(x_i)_{i=0..I}$ sur un maillage uniforme où $x_i = -\frac{1}{2} + ih$,

$i = \overline{0, I}$, avec $x_0 = -\frac{1}{2}$ et $x_I = \frac{1}{2}$.

Premièrement on remplace (3.1) -(3.3) par :

$$(P_1) \begin{cases} u_t(x_i, t) = u_{xx}(x_i, t) + u^p(x_i, t) \forall 1 \leq i \leq I - 1 & (3.4) \\ u(x_0, t) = u(x_I, t) = 0 & t \in]0, T[& (3.5) \\ u(x_i, 0) = u_0(x_i) \geq 0 & \forall 0 \leq i \leq I & (3.6) \end{cases}$$

Supposons que la dérivée d'ordre quatre (4) de la fonction u est continue sur $[0, 1]$ suivant la première composante.

Le développement de Taylor de la fonction $u(x, t)$ suivant la composante x permet d'obtenir la discrétisation suivante :

Pour $i = 1, 2, \dots, I - 1$, on a :

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t) &= u(x_i + h, t) \\ &= u(x_i, t) + hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i, t) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_i, t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec $\theta_i \in]x_i, x_{i+1}[$

et $u(x_{i-1}, t) = u(x_i - h, t)$

$$= u(x_i, t) - hu_x(x_i, t) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i, t) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\gamma_i, t) \quad (3.8)$$

avec $\gamma_i \in]x_{i-1}, x_i[$

En additionnant (3.7) et (3.8), on exprime $u_{xx}(x_i, t)$ comme suit :

$$u_{xx}(x_i, t) = \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2} + \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_i, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\gamma_i, t) \right)$$

On remplace ce dernier dans l'équation(3.4) on trouve :

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t) &= \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2} + \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_i, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\gamma_i, t) \right) + u^p(x_N, t) \\ &= \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2} + u^p(x_N, t) + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour h suffisamment petit, $O(h^2)$ tend vers 0. Donc l'approximation de (P_1) est donnée par:

$$(P_1^m) \begin{cases} u_t(x_i, t) \approx \frac{u(x_{i+1}, t) - 2u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{h^2} + u^p(x_k, t) \\ u(x_0, t) = u(x_I, t) = 0 \\ u(x_i, 0) = u_0(x_i) \geq 0 \end{cases} \quad t \in (0, T)$$

Soit $U_i(t)$ la composante du vecteur $U_h = (U_0, U_1, \dots, U_I)^T \in \mathbb{R}^{I+1}$, tel que pour chaque $U_i(t)$ de U_h approche $u(x_i, t)$ pour $i = 0, \dots, I$.

Donc le problème semi- discrétisé obtenu est le suivant:

$$(P_1^m) \begin{cases} \frac{dU_i}{dt} = \delta^2 U_i(t) + U_k^p & i = 1, \dots, I-1, t \in]0, T[& (3.10) \\ U_0(t) = 0, U_I(t) = 0 & t \in]0, T[& (3.11) \\ U_i(0) = \varphi_i \geq 0 \quad i = 0, \dots, I & & (3.12) \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} \delta^2 U_i(t) &= \frac{U_{i+1}(t) - 2U_i(t) + U_{i-1}(t)}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq I-1 \\ \varphi_0 &= 0, \varphi_I = 0, \varphi_i = \varphi_{I-i}, \quad 0 \leq i \leq I \\ \delta^+ \varphi_i &= \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{h} > 0, \quad 0 \leq i \leq k-1 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant étudier l'existence et l'unicité de la solution de problème semi-discrétisé à partir d'un système différentiel non linéaire autonome qui converge vers la solution de problème (P).

3.3 Existence et l'unicité de la solution du problème semi-discrétisé

Définition 3.3.1: (Voir [10]) On appelle système différentiel non linéaire autonome du premier degré, tout système de la forme:

$$\frac{d}{dt}W(t) = F(W(t)) \quad (3.13)$$

où t est une variable réelle,

$$W(t) = (W_0(t), W_1(t), \dots, W_l(t))^T, \quad F(W) = (f_0(W), f_1(W), \dots, f_l(W))^T$$

Les $f_i, i \in \{0, \dots, l\}$ sont des fonctions de la variable X défini est continu sur un ouvert \mathbb{E} de \mathbb{R}^{l+1} dans \mathbb{R} .

Définition 3.3.2: Une solution de (3.13) sur $J \subseteq \mathbb{R}$ est une fonction dérivable

$W: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ tel que :

- 1) Pour tout $t \in J, W(t) \in \mathbb{E}$
- 2) Pour tout $t \in J, \frac{d}{dt}W(t) = F(W(t))$

Théorème 3.3.1(Voir [10]) : (Théorème de Cauchy Lipchitz) Soit $F : \mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ une fonction. On considère le problème de Cauchy (PC) suivant :

$$(PC): \begin{cases} \frac{d}{dt}W(t) = F(W(t)) \\ W(t_0) = W_0 \end{cases}$$

Si F est de classe C^1 sur \mathbb{E} , alors :

Le problème (PC) admet une unique solution maximale (J_{max}, w_{max}) .

Théorème 3.3.2: Le problème semi-discrét (3.9) – (3.11) admet une unique solution maximale $[0, T_{max}^h[$, où $T_{max}^h > 0$, désignant le temps d'existence maximale de la solution U_h .

3.4. Propriétés du schéma semi-discrét

Dans cette section, nous donnons des lemmes qui seront utilisés.

Le lemme suivant est une version semi-discrét du principe maximum.

Lemme 3.4.1 (Voir [5]) : Soient $a_h(t) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ et $V_h(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ tels que :

$$\frac{d}{dt} V_i(t) - \delta^2 V_i(t) + a_k(t) V_k(t) \geq 0 \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad 1 \leq k \leq I-1, t \in]0, T[\quad (3.14)$$

$$V_0(t) \geq 0, V_I(t) \geq 0, t \in]0, T[\quad (3.15)$$

$$V_i(0) \geq 0, 0 \leq i \leq I \quad (3.16)$$

Alors on a : $V_i(t) \geq 0, 0 \leq i \leq I, t \in]0, T[$

Preuve : [5]

Lemme 3.4.2 : [5] Soit $V_h(t), U_h(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ et $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que pour $t \in]0, T[$,

$$\frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i(t) + f(V_k(t), t) \geq \frac{dU_i(t)}{dt} - \delta^2 U_i(t) + f(U_k(t), t), \quad 1 \leq i \leq I-1 \quad (3.17)$$

$$V_0(t) \geq U_0(t), V_I(t) \geq U_I(t) \quad (3.18)$$

$$V_i(t) \geq U_i(t), \quad 0 \leq i \leq I \quad (3.19)$$

Alors on a $V_i(t) \geq U_i(t), 0 \leq i \leq I, t \in]0, T[$

Preuve :

Introduisons le vecteur $Z_h(t) = V_h(t) - U_h(t)$. Un calcul direct de (3.17) – (3.19) donne

$$\frac{dZ_i(t)}{dt} - \delta^2 Z_i(t) + f_y(V_k(t), t) - f_y(U_k(t), t) \geq 0$$

$$Z_0(t) \geq 0, \quad Z_I(t) \geq 0$$

$$Z_i(0) \geq 0$$

Comme $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe θ_k , valeur intermédiaire entre U_k et V_k , tel que $f(V_k(t), t) - f(U_k(t), t) = f_y(\theta_k(t), t)Z_k(t)$ où f_y est la dérivée partielle de f par rapport à la deuxième variable. Nous obtenons alors :

$$\frac{dZ_i(t)}{dt} - \delta^2 Z_i(t) + f_y(\theta_k(t), t)Z_k(t) \geq 0$$

$$Z_0(t) \geq 0, \quad Z_I(t) \geq 0$$

$$Z_i(0) \geq 0$$

Comme $f \in C^1$, alors $f_y \in C^0$. D'après le Lemme 3.4.1, on a :

$$Z_i(t) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in]0, T[$$

Donc :

$$V_i(t) \geq U_i(t), \quad 0 \leq i \leq I, \quad t \in]0, T[$$

Lemme 3.4.3 [5] Soit U_h la solution de problème (3.10) – (3.12). Alors, on a

$$U_i > 0, \quad 1 \leq i \leq I - 1$$

Preuve :

Soit $\beta = \min_{1 \leq i \leq I-1} \varphi_i$ et prenons le vecteur V_h défini par

$$V_i = \beta e^{-t\lambda_h} \sin(i\pi h), \quad 0 \leq i \leq I, \text{ où } \lambda_h = \frac{2-2\cos(h\pi)}{h^2}. \text{ Ainsi,}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_i(t)}{dt} - \delta^2 V_i &= -\beta \lambda_h e^{-\lambda_h t} \sin(i\pi h) - \frac{\sin((i-1)\pi h) + \sin((i+1)\pi h) - 2\sin(i\pi h)}{h^2} \beta e^{-t\lambda_h} \\ &= \beta e^{-t\lambda_h} \left(-\lambda_h \sin(i\pi h) - \frac{2}{h^2} (\sin(i\pi h) \cos(\pi h) - \sin(i\pi h)) \right) \end{aligned}$$

En remplaçant λ_h par sa valeur $\frac{2-2\cos(h\pi)}{h^2}$, on obtient :

$$-\lambda_h \sin(i\pi h) - \frac{2}{h^2} (\sin(i\pi h) \cos(\pi h) - \sin(i\pi h)) = 0$$

D'où :

$$\frac{dV_i}{dt} - \delta^2 V_i = 0$$

U_h étant solution de (3.10) – (3.12), nous avons :

$$\frac{dU_i}{dt} - \delta^2 U_i \geq \frac{dV_i}{dt} - \delta^2 V_i = 0, \quad 1 \leq i \leq I - 1$$

$$U_0(t) = V_0(t); \quad U_I(t) = V_I(t)$$

$$U_i(0) = V_i(0), \quad 1 \leq i \leq I - 1$$

On déduit du lemme 3.4.2 que $U_i(t) \geq \beta e^{-t\lambda_h} \sin(i\pi h), 0 \leq i \leq I$. Cela implique que :

$$U_i(t) > 0, \quad 1 \leq i \leq I - 1,$$

Lemme 3.4.4. (Voir [5]) : Soit U_h la solution de problème (3.10) – (3.12). Alors pour tout $t \in]0, T_b^h[$, on a : $U_{I-i}(t) = U_i(t), 0 \leq i \leq I, \delta^+ U_i(t) > 0, 0 \leq i \leq K - 1$ (3.20)

Preuve : (Voir [5])

Lemme 3.4.5. (Voir [5]) : Soit $U_h(t) \in C^0([0, T], \mathbb{R}^{I+1})$ telle que $U_h \geq 0$. Alors on a

$$\delta^2 U_i^p \geq p U_i^{p-1} \delta^2 U_i, \quad 1 \leq i \leq I-1 \quad (3.21)$$

Preuve : (Voir [5])

Lemme 3.4.6. (Voir [5]) : Soient $U_h(t)$ et $V_h(t)$ deux vecteurs $U_0(t) = 0, U_I(t) = 0$ et $V_0(t) = 0, V_I(t) = 0$. Alors, on a :

$$\sum_{i=1}^{I-1} h U_i \delta^2 V_i = \sum_{i=1}^{I-1} h V_i \delta^2 U_i \quad (3.22)$$

Preuve : (Voir [5])

3.5 Explosion de solution

Dans cette section, nous expliquons que sous certaines conditions, la solution du problème semi-discret explose en temps fini et estimons son temps d'explosion.

Définition 3.5.1 : On dit que la solution U_h du problème semi-discret (3.10) – (3.12) explose en temps fini, s'il existe un temps fini T_b^h tel que : $\|U_h(t)\|_{+\infty} < +\infty$ pour $t \in [0, T_b^h[$, mais

$$\lim_{t \rightarrow T_b^h} \|U_h(t)\| = +\infty$$

où

$$\|U_h(t)\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq I} |U_i(t)|$$

Le temps T_b^h est appelé temps d'explosion de la solution U_h .

Théorème 3.5.1 (Voir [12]) : Supposons qu'il existe une constante positive A telle que la condition initiale (3.12) vérifie :

$$\delta^2 \varphi_i + \varphi_i \geq A \varphi_i^p, \quad 0 \leq i \leq I. \quad (3.23)$$

Alors la solution U_h explose en un temps fini T_b^h avec l'estimation suivante :

$$T_b^h \leq \frac{1}{A} \frac{\|\varphi_h\|_{\infty}^{1-p}}{(p-1)} \quad (3.24)$$

Preuve :

Comme $]0, T_b^h[$, est l'intervalle de temps maximal sur lequel $\|U_h(t)\|_{\infty}$ est fini, notre but est de montrer que T_b^h est fini et satisfait l'inégalité (3.24) ci-dessus.

Introduisons le vecteur $J_h(t)$ défini comme suit :

$$J_i(t) = \frac{d}{dt}U_i - AU_i^p; \quad 0 \leq i \leq l. \quad (3.25)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i}{dt} - \delta^2 J_i &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}U_i - AU_i^p \right) - \frac{d}{dt} \delta^2 U_i + A \delta^2 U_i^p \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right) - A \frac{dU_i^p}{dt} + A \delta^2 U_i^p \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right) - ApU_i^{p-1} \frac{d}{dt}U_i + A \delta^2 U_i^p. \end{aligned}$$

D'après le lemme (3.4.5), $\delta^2 U_i^p \geq pU_i^{p-1} \delta^2 U_i$, alors :

$$\frac{dJ_i}{dt} - \delta^2 J_i \geq \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right) - ApU_i^{p-1} \left(\frac{d}{dt}U_i - \delta^2 U_i \right) \quad ; \quad 1 \leq i \leq l-1.$$

En utilisant la relation (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_i}{dt} - \delta^2 J_i &\geq pU_k^{p-1} \frac{d}{dt}U_k - ApU_i^{p-1} U_k^p \\ &\geq pU_k^{p-1} (J_k + AU_k^p) - ApU_i^{p-1} U_k^p \\ &\geq pU_k^{p-1} J_k + ApU_k^p (U_k^{p-1} - U_i^{p-1}). \end{aligned}$$

Du lemme 3.4.4, nous avons $U_k \geq U_i$, il s'en suit que :

$$\frac{dJ_i}{dt} - \delta^2 J_i \geq pU_k^{p-1} J_k, \quad 1 \leq i \leq l-1$$

Puisque $U_0(t) = U_l(t) = 0$, $J_0(t) = 0$ et $J_l(t) = 0$. En utilisant la relation (3.23), on prouve que $J_i(0) \geq 0$. De ce qui précède, on a :

$$\frac{dJ_i}{dt} - \delta^2 J_i - pU_k^{p-1} J_k \geq 0, \quad 1 \leq i \leq l-1$$

$$J_0(t) \geq 0,$$

$$J_l(t) \geq 0,$$

$$J_i(0) \geq 0, \quad 0 \leq i \leq l$$

Et d'après le lemme 3.4.1, nous avons :

$$J_i(t) \geq 0$$

Ce qui implique que :

$$\frac{dU_i}{dt} \geq AU_i^p, \quad 0 \leq i \leq I$$

d'où :

$$\frac{dU_i}{U_i^p} \geq Adt, \quad 0 \leq i \leq I$$

En intégrant cette dernière inégalité sur $]t, T_b^h[$, on a :

$$\begin{aligned} \int_t^{T_b^h} \frac{dU_i(t')}{U_i^p(t')} &\geq \int_t^{T_b^h} Adt' \\ \frac{1}{p-1} \left[\frac{1}{U_i^p(t')} \right]_t^{T_b^h} &\geq A(T_b^h - t) \\ T_b^h - t &\leq \frac{1}{A} \frac{(U_i(t))^{1-p}}{p-1} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Puisque $\|U_h(t)\|_\infty = U_k(t)$, si nous remplaçons dans la relation (3.27) i par k et t par 0, nous obtenons l'estimation suivante :

$$T_b^h \leq \frac{1}{A} \frac{\|U_h(0)\|_\infty^{1-p}}{p-1}$$

ce qui implique que T_b^h est fini et vérifie la relation (3.24) du théorème. Remarquons que l'inégalité (3.26) implique :

$$T_b^h - t_0 \leq \frac{1}{A} \frac{(U_i(t))^{1-p}}{p-1} \text{ pour } 0 \leq t_0 \leq T_b^h \quad (3.27)$$

Cette remarque est concluante quant-à la preuve de la convergence du temps semi-discret. Bien que le théorème précédant nous ait permis d'avoir une estimation du temps d'explosion semi-discret, celui qui suit nous donne beaucoup plus de précision.

Théorème 3.5.2(Voir [12]) : Supposons que la donnée initiale du schéma semi-discret vérifie :

$$v(0) > \lambda_h^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{où} \quad v(0) = \sum_{i=1}^{I-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h) \varphi_i \text{ et } \lambda_h = \frac{2-2\cos(\pi h)}{h^2}.$$

alors la solution $U_h(t)$ de (3.10) – (3.12) explose en temps fini avec l'estimation suivante :

$$T_b^h \leq \frac{1}{(p-1)((v(0))^{p-1} - \lambda_h)}$$

Preuve :

Comme $]0, T_b^h[$ est l'intervalle maximal sur lequel $\|U_h(t)\|_{+\infty}$ est fini, notre objectif est de montrer que T_b^h est fini et satisfait l'inégalité ci-dessus.

Soit la fonction $v(t)$ définie par :

$$v(t) = \sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h) U_i(t).$$

En dérivant v par rapport à t , et en utilisant la relation (3.10), nous obtenons :

$$\begin{aligned} v'(t) &= \sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h) \frac{d}{dt} U_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h) (\delta^2 U_i(t) + U_k^p(t)) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$v'(t) = \sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h) \delta^2 U_i(t) + U_k^p(t) \sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h).$$

En utilisant le lemme 3.4.6, on a :

$$v'(t) = \sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) U_i(t) \delta^2 \sin(i\pi h) + U_k^p(t) \sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h).$$

Or

$$\begin{aligned} \delta^2 \sin(i\pi h) &= \frac{\sin((i+1)\pi h) - 2\sin(i\pi h) + \sin((i-1)\pi h)}{h^2} \\ &= \frac{2\sin(i\pi h) \cos(\pi h) - 2\sin(i\pi h)}{h^2} \\ &= -\lambda_h \sin(i\pi h) \end{aligned}$$

Donc,

$$v'(t) = -\lambda_h v(t) + U_k^p(t) \sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h)$$

En raison du fait que U_k^p soit plus grand que $v^p(t)$ et que $\sum_{i=1}^{l-1} \tan\left(\frac{\pi}{2}h\right) \sin(i\pi h)$ soit égale à 1, nous obtenons $v'(t) \geq v^p(t) \left(1 - \frac{\lambda_h}{v^{p-1}(t)}\right)$. Nous pouvons voir par là que la fonction v est croissante. En effet, supposons que t_0 le premier temps $t > 0$ tel que :
 $v'(t) > 0$

Pour $t \in [0, t_0[$ mais $v'(t_0) = 0$. Cela implique $0 \geq v^p(t_0) \left(1 - \frac{\lambda_h}{v^{p-1}(t_0)}\right) > 0$, ce qui est impossible. On conclut que $v'(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_b^h[$. Ainsi, on a $v(t) \geq v(0)$ et $v'(t) \geq v^p(t) \left(1 - \frac{\lambda_h}{v^{p-1}(0)}\right)$. Cette dernière inégalité peut être réécrite sous la forme $\frac{dv}{v^p} \geq \left(1 - \frac{\lambda_h}{v^{p-1}(0)}\right) dt$. En intégrant cette inégalité sur $]0, T_b^h[$, nous avons :

$$T_b^h \leq \frac{1}{(p-1)\left((v(0))^{p-1} - \lambda_h\right)}, \text{ d'où } T_b^h \text{ est fini.} \quad \text{C.q.f.d}$$

3.6 Convergence :

Dans cette section, nous expliquons que sous certaines hypothèses, la solution semi-discrète converge vers celle du problème continu.

Théorème 3.6.1 : Soit u solution du problème continu (3.1) – (3.3) telle que :

$u \in C^{4,1} \left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [0, T] \right)$ et φ_h la donnée initiale en (3.12) du schéma semi-discret vérifiant :

$$\| \varphi_h - u_h(0) \|_{+\infty} = o(1) \text{ quand } h \rightarrow 0, \quad (3.28)$$

où $u_h(t) = (u(x_0, t), \dots, u(x_I, t))^T$. Alors, pour h suffisamment petit, (3.10) – (3.12) admet une unique solution $U_h \in C^1([0, T] \times \mathbb{R}^{I+1})$ telle que :

$$\max_{0 \leq t \leq T} \| U_h(t) - u_h(t) \|_{\infty} = O(\| \varphi_h - u_h(0) \|_{\infty} + h^2) \quad (3.29)$$

Preuve :

Comme $u \in C^{4,1}$ sur le compact $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [0, T]$, alors il existe deux constant K et M telles que :

$$\frac{\| u_{xxxx} \|_{\infty}}{12} \leq K, \| u \|_{\infty} \leq K, p(K+1)^{p-1} \leq M \quad (3.30)$$

Pour chaque pas d'espace h , le problème (3.10) – (3.12) admet une unique solution

$U_h \in C^1([0, T_b^h[\times \mathbb{R}^{I+1})$. Soit $t(h)$ le plus grand des $t > 0$ tel que :

$$\| U_h(t) - u_h(t) \|_{\infty} < 1, \text{ Pour } t \in]0, t(h)[\quad (3.31)$$

La relation (3.28) implique que $t(h) > 0$ pour h suffisamment petit.

Soit $t^*(h) = \min\{t(h), T\}$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\|U_h(t)\|_\infty \leq \|u(x, t)\|_\infty + \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty, t \in]0, t^*(h)[.$$

D'après cette dernière inégalité et la relation (3.30) et (3.31), on obtient :

$$\|U_h(t)\|_{+\infty} \leq K + 1.$$

Notons $e_h(t) = u_h(t) - U_h(t)$, e_h est appelée l'erreur de discrétisation ou de convergence.

Des relations (3.9) et (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{de_i(t)}{dt} &= u_t(x_i, t) - \frac{dU_i(t)}{dt} \\ &= \delta^2 u(x_i, t) - \delta^2 U_i(t) + u^p(x_k, t) - U_k^p(t) + \frac{h^2}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_i, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\gamma_i, t) \right) \\ &= \delta^2 e_i + p\mu_k(t)^{p-1} e_k + \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_i, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\gamma_i, t) \right), \quad 1 \leq i \leq I-1 \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{de_i(t)}{dt} - \delta^2 e_i = p\mu_k(t)^{p-1} e_k + \frac{h^2}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\theta_i, t) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\gamma_i, t) \right), \quad 1 \leq i \leq I-1, t \in]0, t^*(h)[$$

avec $\mu_k(t)$ une valeur intermédiaire entre $U_h(t)$ et $u(x_k, t)$,

θ_i une valeur intermédiaire entre x_i et γ_i une valeur intermédiaire entre x_{i-1} et x_i ,

(On obtient la dernière égalité ci-dessus en appliquant le théorème des accroissements finis à f , où $f(u) = u^p$).

En tenant compte de (3.30), on obtient :

$$\frac{de_i(t)}{dt} - \delta^2 e_i \leq p\mu_k(t)^{p-1} e_k(t) + kh^2, \quad 1 \leq i \leq I-1, t \in]0, t^*(h)[\quad (3.32)$$

Construisons un vecteur Z_h telle que :

$$Z_h = (Z_0(t), Z_1(t), \dots, Z_I(t))^T \text{ et } Z_i(t) = (\| \varphi_h(t) - u_h(0) \|_\infty + kh^2) e^{(M+1)t}.$$

Après dérivation et développement des $Z_i(t)$, on obtient les inégalités suivantes :

$$\frac{dZ_i(t)}{dt} - \delta^2 Z_i(t) > p\mu_k(t)^{p-1} Z_i(t) + kh^2, \quad 1 \leq i \leq I-1, t \in]0, t^*(h)[,$$

$$Z_0(t) > e_0, \quad Z_I(t) > e_I$$

$$Z_i(0) > e_i(0) \quad 0 \leq i \leq I.$$

En utilisant le lemme(3.4.2), il vient que $Z_h(t) \geq e_h(t) \forall t \in]0, t^*(h)[$.

De même, on montre que : $Z_h(t) \geq -e_h(t); \forall t \in]0, t^*(h)[$, en remplaçant $e_i(t)$ par $(-e_i(t))$ dans la démarche précédente. Finalement, nous avons :

$$Z_h(t) \geq |e_h(t)| ; \forall t \in]0, t^*(h)[,$$

Ce qui implique que :

$$\|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + kh^2)e^{(M+1)t}.$$

À présent, montrons que $t^*(h) = T$.

Supposons que $T > t(h)$. Alors on obtient de la relation (3.31)

$$1 = \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq (\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty + kh^2)e^{(M+1)T} \quad (3.33)$$

Sachant que le terme de droite de (3.33) tend vers 0 quand h tend vers 0, on en déduit que : $1 \leq 0$, ce qui est impossible. Par conséquent, $t^*(h) = T$ et le théorème est prouvé.

Maintenant, nous sommes en mesure de prouver le théorème principal de cette section qui donne les conditions de convergence du temps d'explosion semi-discret vers le temps d'explosion continu.

Théorème 3.6.2 : Supposons que le problème continu (3.1) – (3.3) admet une unique solution u qui explose en un temps fini T_b , telle que $u \in C^{4,1} \left(\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times [0, T_b] \right)$ et φ_h la donnée initiale en (3.12) vérifiant :

$$\|\varphi_h - u_h(0)\|_\infty = o(1) \text{ quand } h \rightarrow 0,$$

sous les mêmes conditions que le théorème 3.6.2 , le problème (3.10) – (3.12) admet une unique solution $U_h(t)$ qui explose en un temps fini T_b^h et $\lim_{h \rightarrow 0} T_b^h = T_b$.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe une constante positive N telle que :

$$\frac{1}{A} \frac{x^{1-p}}{(p-1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{pour } x \in [N, +\infty[\quad (3.34)$$

Puisque u explose au temps T_b , alors il existe un temps T_1 tel que $|T_1 - T_b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $\|u(x, t)\|_\infty \geq 2N$ pour $t \in [T_1, T_b[$.

Posons $T_2 = \frac{T_1 + T_b}{2}$. Il est clair que u est bornée sur $[0, T_2]$. En utilisant le théorème (3.6.1), on trouve que U_h vérifie : $\sup_{t \in [0, T_2]} \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty \leq N$ et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\|U_h(t)\|_\infty \geq \|u_h(t)\|_\infty - \|U_h(t) - u_h(t)\|_\infty.$$

On en déduit que : $\|U_h(t)\|_\infty \geq N, \forall t \in [0, T_2]$. Alors, d'après le théorème (3.5.1),

$U_h(t)$ explose en un temps fini T_b^h . De la relation (3.27), nous avons ;

$$|T_b - T_b^h| \leq |T_b - T_2| + |T_b^h - T_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{A} \frac{\|U_h(T_2)\|_\infty^{1-p}}{(p-1)} \leq \varepsilon, \text{ D'où le résultat souhaité.}$$

3.7 Discrétisation totale

La discrétisation totale comprend non seulement la discrétisation par rapport à l'espace (la semi-discrétisation), mais aussi par rapport au temps.

Soit $n > 0$, un entier naturel et soit Δt_n un réel positif. Dans notre étude, nous subdivisons l'intervalle $[0, T]$ avec un pas de subdivision Δt_n tel que $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$, on obtient un schéma dont la solution est $U_h^{\Delta n} = (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, \dots, U_I^{(n)})^T$. Cette solution est une approximation de la solution u du problème continu (3.1) – (3.3).

Le schéma suivant est appelé schéma explicite :

$$\frac{U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}}{\Delta t_n} = \frac{U_{i+1}^{(n)} - 2U_i^{(n)} + U_{i-1}^{(n)}}{h^2} + (U_k^{(n)})^p, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad n \geq 0 \quad (3.35)$$

$$U_0^{(n)} = 0, \quad U_I^{(n)} = 0, \quad n \geq 0 \quad (3.36)$$

$$U_i^{(0)} \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I. \quad (3.37)$$

3.7.1 Consistance et Stabilité du schéma

La consistance caractérise la façon dont l'équation aux différences finies (EDF) approche l'équation aux dérivées partielles (EDP)

Un schéma aux différences finies est consistant à l'équation exacte, si l'EDF tends vers l'EDP lorsque les pas de discrétisations en temps et en espace tendent vers zéro indépendamment.

Soit u la solution du problème (3.1) – (3.3). On sait que $u(x, 0) > 0$, entraîne, d'après le principe du maximum que $u(x, t) > 0$, pour $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, $\forall t > 0$. Ainsi, dans cette sous-section, nous donnons des conditions sur le pas de discrétisation du temps Δt_n pour que le schéma discret soit stable et que sa solution soit positive lorsque la donnée initiale est positive.

Théorème 3.7.1 (Voir [1]) : Soit $U_h^{\Delta t_n} = (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, \dots, U_l^{(n)})^T$ la solution du problème(3.1) – (3.3).

Si $\Delta t_n = \min \left\{ \frac{h^2}{2}, \frac{h^2}{\|U_h^{(n)}\|_{\infty}^{p-1}} \right\}$; $\forall n > 0$, et $U_i^{(0)} \geq 0$, alors $U_i^{(n)} \geq 0, n \geq 0$.

Preuve :

En réécrivant le schéma explicite, on obtient :

$$\begin{cases} U_i^{n+1} = \frac{\Delta t_n}{h^2} U_{i+1}^{(n)} + \frac{\Delta t_n}{h^2} U_{i-1}^{(n)} + \left(1 - 2 \frac{\Delta t_n}{h^2}\right) U_i^{(n)} + \Delta t_n \left(U_k^{(n)} \right)^p, & 1 \leq i \leq l-1, n \geq 0 & (i) \\ U_0^n = 0, U_l^n = 0, & n \geq 0 & (ii) \\ U_i^{(0)} \geq 0, & 0 \leq i \leq l. & (iii) \end{cases}$$

D'après l'hypothèse du théorème 3.7.1 sur Δt_n , on a : $\Delta t_n \leq \frac{h^2}{2}$, donc : $\left(1 - 2 \frac{\Delta t_n}{h^2}\right) \geq 0$ (*)

Montrons par récurrence sur n que $U_i^{(n)} \geq 0$.

* Pour $n = 0$, on a d'après (iii), $U_i^{(0)} \geq 0$

* Supposons $U_i^{(n)} \geq 0$ pour un entier $n \geq 1$ et $0 \leq i \leq l$.

D'après (i) et (ii), et le fait que $\left(1 - 2 \frac{\Delta t_n}{h^2}\right) \geq 0$, on a :

$$U_i^{n+1} = \frac{\Delta t_n}{h^2} U_{i+1}^{(n)} + \frac{\Delta t_n}{h^2} U_{i-1}^{(n)} + \left(1 - 2 \frac{\Delta t_n}{h^2}\right) U_i^{(n)} + \Delta t_n \left(U_k^{(n)} \right)^p \geq 0, \quad 1 \leq i \leq l-1,$$

$$U_0^n = 0, U_l^n = 0,$$

$$\text{Ainsi, } U_i^{(n+1)} > 0, \quad 0 \leq i \leq l.$$

$$\text{On conclut: } \forall n \geq 0, U_i^{(n)} \geq 0, 0 \leq i \leq l.$$

Définition 3.7.1 : un schéma aux différences finies est stable pour la norme L^p ,

$1 \leq p \leq +\infty$, s'il existe une constante $C > 0$, indépendante des pas de discrétisation

(lorsque ces pas tendent vers zéro) telle que $\|U_i^n\|_{L^p} < C \|U_i^0\|_{L^p}; \forall n > 0$.

Théorème 3.7.2 : Soit $U_h^{\Delta n} = (U_0^{(n)}, U_1^{(n)}, \dots, U_I^{(n)})^T$ solution du problème (3.35) – (3.37).

Si $\Delta t_n = \min\left\{\frac{h^2}{2}, \frac{h^2}{\|U_h^{(n)}\|_{\infty}^{p-2}}\right\}; \forall n > 0$, alors le schéma (3.35) – (3.37) est stable pour la norme L^{∞} .

Preuve :

D'après l'hypothèse du théorème sur Δt_n , on a $\Delta t_n \leq \frac{h^2}{\|U_h^{(n)}\|_{\infty}^{p-2}}$, donc :

$$0 < \Delta t_n \|U_h\|_{\infty}^{p-1} \leq h^2 \quad (**)$$

Posons $i_0 \in \{0, \dots, I\}$, tel que : $U_{i_0}^n = \max_{0 \leq i \leq I}(U_i^n)$.

Considérons (i) – (iii) et (**), on a : pour $i \in \{0, \dots, I\}$,

$$U_i^{(n+1)} \leq \frac{\Delta t_n}{h^2} U_{i_0}^{(n)} + \frac{\Delta t_n}{h^2} U_{i_0}^{(n)} + \left(1 - 2 \frac{\Delta t_n}{h^2}\right) U_{i_0}^{(n)} + \Delta t_n \left(U_{i_0}^{(n)}\right)^p \leq (1 + h^2) U_{i_0}^{(n)}.$$

On en déduit que : $\max_{0 \leq i \leq I} U_i^{(n+1)} \leq (1 + h^2) \max_{0 \leq i \leq I} U_i^n$, et par récurrence, on obtient : $\max_{0 \leq i \leq I} U_i^n \leq (1 + h^2)^n \max_{0 \leq i \leq I} U_i^0$, c'est-à-dire $\|U_i^n\|_{L^{\infty}} \leq (1 + h^2)^n \|U_i^0\|_{L^{\infty}}$

En posant $C = (2 + h^2)$, on a : $\|U_i^n\|_{L^{\infty}} \leq C \|U_i^0\|_{L^{\infty}}; \forall n > 0$. On conclut que le schéma numérique est stable.

3.7.2 Explosion numérique

$$\text{Posons } \Delta t_n = \min\left\{\frac{h^2}{2}, \frac{h^2}{\|U_h^{(n)}\|_{\infty}^{p-2}}\right\}; \forall n > 0.$$

Définition 3.7.2 : La solution $U_h^{\Delta n}$ du problème discrétisé (3.35) – (3.37) explose en temps fini, si $\|U_h^{\Delta n}\|_{\infty} < +\infty, \forall n > 0$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|U_h^{\Delta n}\|_{\infty} = +\infty$.

Le temps d'explosion de $U_h^{\Delta n}$ noté $T(\infty)$ est : $T(\infty) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta t_j < +\infty$.

Les résultats obtenus avec la forme explicite sont possibles avec le schéma (3.38) – (3.40) suivant, appelé schéma implicite, obtenu grâce à l'approximation suivante :

$$u_t(x_i, t_n) \simeq \frac{u(x_i, t_n + \Delta t_n) - u(x_i, t_n)}{\Delta t_n} = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\Delta t_n}$$

$$\frac{U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)}}{\Delta t_n} = \frac{U_{i+1}^{(n+1)} - 2U_i^{(n+1)} + U_{i-1}^{(n+1)}}{h^2} + \left(U_k^{(n)} \right)^p, \quad 1 \leq i \leq I-1, \quad (3.38)$$

$$U_0^{(n+1)} = 0, \quad U_I^{(n+1)} = 0, \quad (3.39)$$

$$U_i^{(0)} = \varphi_i \geq 0, \quad 0 \leq i \leq I. \quad (3.40)$$

Où $n \geq 0$ et $\Delta t_n = \frac{h^2}{\|U_h^{(n)}\|_\infty^{p-1}}$

Soit la matrice tridiagonale $A_h^{(n)}$ définie par : $A_h^{(n)} = \begin{pmatrix} d_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & d_1 & c_1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & d_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{I-2} & c_{I-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{I-1} & d_{I-1} & c_{I-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_I & d_I \end{pmatrix}$

Avec :

$$d_i = 1 + \frac{2\Delta t_n}{h^2} \text{ Pour } 0 \leq i \leq I,$$

$$b_i = -\frac{\Delta t_n}{h^2} \text{ Pour } 1 \leq i \leq I,$$

$$c_i = -\frac{\Delta t_n}{h^2} \text{ Pour } 1 \leq i \leq I-1.$$

Alors le problème (3.38) – (3.40) sous la forme matricielle est :

$$A_h^{(n)} U_h^{\Delta n+1} = f(U_h^{\Delta n})$$

$$\text{avec } f(U_h^{\Delta n}) = \left(f(U_0^{\Delta n}), \dots, f(U_I^{\Delta n}) \right)^t$$

$$\text{où } f(U_i^{\Delta n}) = U_i^{\Delta n} + \Delta_n (U_i^{\Delta n})^p \text{ Pour } 1 \leq i \leq I-1, \text{ et } f(U_0^{\Delta n}) = 0, f(U_I^{\Delta n}) = 0.$$

3.8 Résultats numériques

Les tests sont faits avec les deux formes de discrétisation. Pour être dans les conditions des théorèmes énoncés ci-dessus, nous fixons : $U_i^{(0)} = 20 \times \sin(3.141592 \times i \times h)$, $0 \leq i \leq I$.

$T^n = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i$ où T^n est le temps approximatif d'explosion.

Nous enregistrons dans les tableaux ci-après, les temps d'explosion numérique, le nombre d'itérations nécessaires pour l'explosion numérique, les temps machine pour effectuer les calculs (*CPU*) et les ordres (s) de l'approximation correspondant aux grilles de 16, 32, 64, 128, 256, 512 et 1024.

Le temps d'explosion numérique T^n est calculé, tel que : $|T^{n+1} - T^n| \leq 10^{-16}$.

L'ordre de (s) est :

$$s = \frac{\log(((T_{4h} - T_{2h}) / T_{2h} - T_h))}{\log(2)}$$

Algorithme du schéma explicite

pour $I = 16$ et $p = 2$

$I \leftarrow 16$ % nombre de pas d'espace

$h \leftarrow 1/16$ % le pas d'espace

$n \leftarrow 0$ % initialisation

$n_{max} \leftarrow 10^{10}$ % nombre maximum d'itération

$err \leftarrow 2 * 10^{-16}$

$U^0 \leftarrow 20 * \sin(\pi * x)$ % donnée initiale

$\Delta_{t_0} \leftarrow \min \{h^2/2, h^2 / \|U^0\|_{\infty}^{p-1}\}$

$S_0 \leftarrow \Delta_{t_0}$

$k_0 \leftarrow I/2$ % le milieu de l'intervalle $[0, I]$

Tant que $(n \leq n_{max})$ et $(|err| \geq 10^{-16})$ faire

$n \leftarrow n + 1$

 pour $k \leftarrow 1$ à $I - 1$ faire

$$U_k^{n+1} \leftarrow (\Delta_{t_0}/h^2)(U_{k+1}^n - 2U_k^n + U_{k-1}^n) + \Delta_{t_0}(U_{k_0}^n)^p + U_k^n$$

 fin pour

$U_k^{n+1} \leftarrow 0$

$U_I^{n+1} \leftarrow 0$

$\Delta_{t_1} \leftarrow \min \{h^2/2, h^2 / \|U^{n+1}\|_{\infty}^{p-1}\}$

$S_1 \leftarrow S_0 + \Delta_{t_1}$

$err \leftarrow |S_1 - S_0|$

$\Delta_{t_0} \leftarrow \Delta_{t_1}$

$S_0 \leftarrow S_1$

Fin tant que

Afficher S_0, n

Programmation Matlab du schéma explicite

pour $I = 16$ et $p = 2$

```
clear all; clc; debut = cpu time; duree = 0;
```

```
 $I = 16; h = 1/I; p = 2; n = 0;$ 
```

```
 $n_{max} = 10^{10}; err = 2 * 10^{(-16)}; H = h^2;$ 
```

```
 $i = [1:I + 1]; U(i, 1) = [20 * \sin(\pi * (i - 1) * h)];$ 
```

```
 $t0 = \min ( H/2, H/(\text{norm}(U(i, 1), \text{inf}) )^{(p - 1)} ) ;$ 
```

```
 $S0 = t0; k0 = I/2 + 1;$ 
```

```
while ( $n \leq n_{max}$ ) & ( $\text{abs}(err) \geq 10^{(-16)}$ ),
```

```
 $n = n + 1; b0 = t0/(h^2) ;$ 
```

```
for  $k = 2 : I,$ 
```

```
 $U(k, n + 1) = b0 * (U(k + 1, n) - 2 * U(k, n) + U(k - 1, n)) + t0 * (U(k0, n))^p + U(k, n)$ 
```

```
end,
```

```
 $U(1, n + 1) = 0;$ 
```

```
 $U(I + 1, n + 1) = 0;$ 
```

```
 $t1 = \min ( H/2, H/(\text{norm}(U(i, n + 1), \text{inf}) )^{(p - 1)} ) ;$ 
```

```
 $S1 = S0 + t1;$ 
```

```
 $err = \text{abs}(S1 - S0); t0 = t1; S0 = S1; duree = \text{cputime} - \text{debut};$ 
```

```
end
```

```
format long
```

```
 $S0, n, duree,$ 
```

```
 $i = 1:I + 1; [i, n] = \text{meshgrid} (i, n);$ 
```

$M = U$; mesh(M); grid on; hold on; xlabel ('n'); ylabel ('i'); zlabel ('U(n,i)');

Algorithme du schéma implicite

pour $I = 16$ et $p = 2$

$I \leftarrow 16$ % nombre de pas d'espace

$h \leftarrow 1/16$ % le pas d'espace

$n \leftarrow 0$ % initialisation

$n_{max} \leftarrow 10^{10}$ % nombre maximum d'itération

$err \leftarrow 2 * 10^{-16}$

$U^0 \leftarrow 20 * \sin(\pi * x)$ % donnée initiale

$\Delta_{t_0} \leftarrow h^2 / \|U^0\|_{\infty}^{p-1}$

$S_0 \leftarrow \Delta_{t_0}$

tant que ($n \leq n_{max}$) et ($|err| \geq 10^{-16}$) faire

$n \leftarrow n + 1$

$A \leftarrow$ la matrice tridiagonale du système

$F \leftarrow$ le second membre du système

$U^n \leftarrow \text{inverse}(A) * F$

$\Delta_{t_1} \leftarrow h^2 / \|U^n\|_{\infty}^{p-1}$

$S_1 \leftarrow S_0 + \Delta_{t_1}$

$err \leftarrow |S_1 - S_0|$

$\Delta_{t_0} \leftarrow \Delta_{t_1}$

$S_0 \leftarrow S_1$

fin tant que

Afficher S_0, n

Progammation Matlab du schéma implicite

pour $I = 16$ et $p = 2$

```
clear all; clc; debut = cpu time; duree = 0;
I = 16; h = 1/I; p = 2; n = 0;
n_max = 10^10; err = 2 * 10^(-16); H = h^2;
i = [1:I + 1]; U(i, 1) = [20 * sin(pi * (i - 1) * h)];
t0 = H/(norm(U(i, 1), inf) )^(p - 1);
S0 = t0; k0 = I/2 + 1;
while (n <= n_max) & (abs(err) >= 10^(-16)),
    n = n + 1; b0 = -t0/(h^2); a0 = 1 - 2 * b0
    bi = b0 * ones(I, 1); ai = a0 * ones(I + 1, 1); ci = b0 * ones(I, 1);
    bi(I) = 0; ai(I + 1) = 1; ci(1) = 0; ai(1) = 1;
    D0 = diag(bi, -1) + diag(ai) + diag(ci, 1);
    F(i, n) = U(i, n) + t0 * (U(k0, n) )^p;
    F(1, n) = 0; F(I + 1, n) = 0;
    U(i, n + 1) = D0 \ (F(i, n));
    t1 = H/(norm(U(i, n + 1), inf) )^(p - 1);
    S1 = S0 + t1; err = abs(S1 - S0); t0 = t1; S0 = S1; duree = cputime - debut;
end
format long
S0, n, duree,
i = 1:I + 1; [j, n] = meshgrid (i, n);
```

$M = U$; mesh(M); grid on; hold on; xlabel ('n'); ylabel ('i'); zlabel ('U(i,n)');

Premier cas $p = 2$

Tableau 1 : Temps d'explosion numériques, nombres d'itérations, temps CPU (secondes), et ordres des approximations obtenues avec un schéma explicite

I	T^n	n	CPU	S
16	0,061364261185095	7343	0.125	-
32	0.061150272535890	27905	0.421875	-
64	0.061096670066479	105895	1.03125	1.99
128	0.061083262742994	400822	4.484375	1.99
256	0.061079910486441	1512395	27.109375	1.99

Tableau 2 : Temps d'explosion numériques, nombres d'itérations, temps CPU (secondes), et ordres des approximations obtenues avec un schéma implicite

I	T^n	n	CPU	S
16	0,061384999024187	7343	1.3125	-
32	0.061155277863659	27905	2.734375	-
64	0.061097910101002	105895	10.625	2.00
128	0.061083572043942	400822	327.328125	2.00
256	0.061079987767425	1512396	1476.640625	2.00

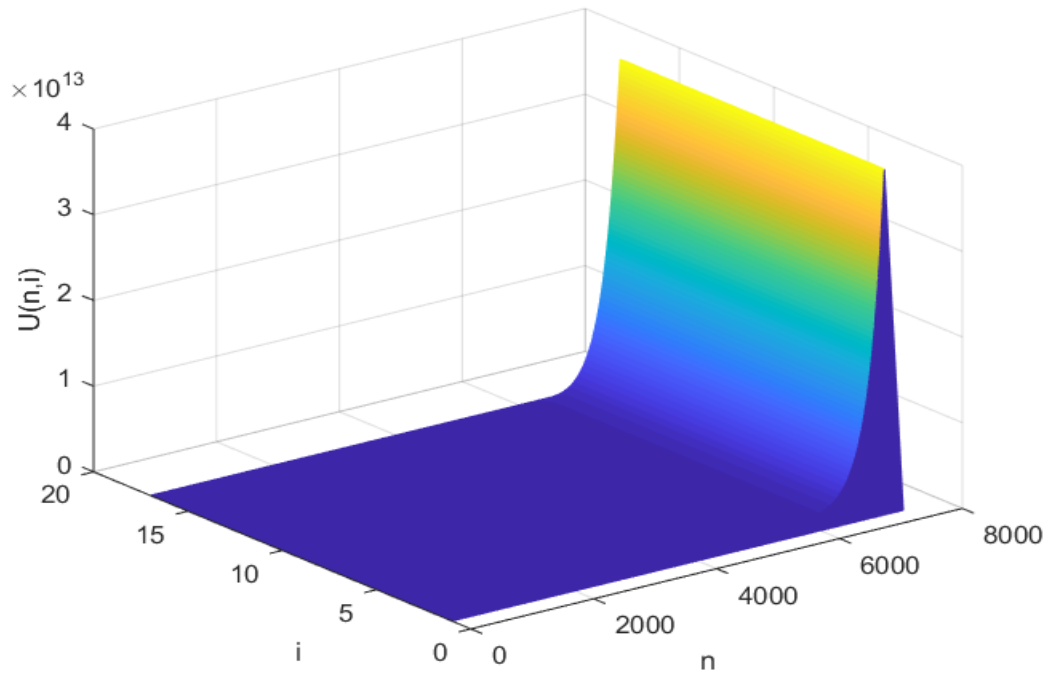


Figure 1 évaluation de la solution discrète pour $l = 16$ et $p = 2$ (schéma explicite)

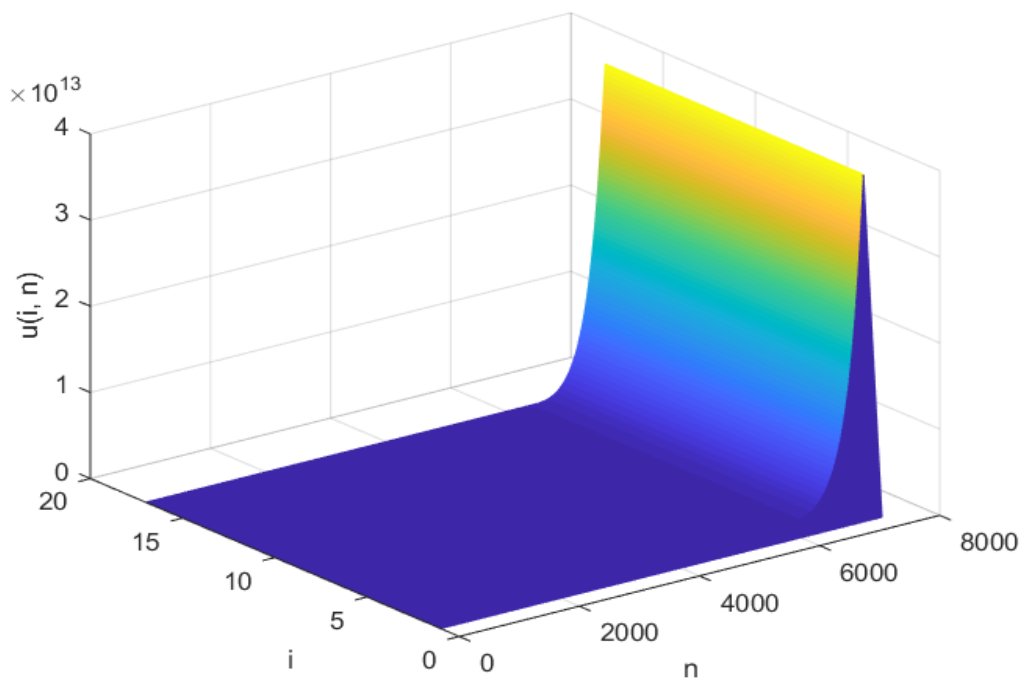


Figure 2 évaluation de la solution discrète pour $l = 16$ et $p = 2$ (schéma implicite)

la solution discrète de schéma explicite figure 1 pour $l = 16$ et $p = 2$ et $n = 7343$

$$U_h^{\Delta n} = 1.0e + 13 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3.890715412739644 \\ 3.890715413355523 \\ 3.890715413366406 \\ 3.890715413369527 \\ 3.890715413370876 \\ 3.890715413371551 \\ 3.890715413371880 \\ 3.890715413371979 \\ 3.890715413371880 \\ 3.89071541337151 \\ 3.890715413370876 \\ 3.890715413369527 \\ 3.890715413366406 \\ 3.890715413369527 \\ 3.890715413370876 \\ 3.890715413371551 \\ 3.890715413371880 \\ 3.890715413371979 \\ 3.890715413371880 \\ 3.89071541337151 \\ 3.890715413370876 \\ 3.890715413369527 \\ 3.890715413366406 \\ 3.890715413355523 \\ 3.890715412739644 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la solution discrète de schéma implicite figure 2 pour $l = 16$ et $p = 2$ et $n = 7343$

$$U_h^{\Delta n} = 1.0e + 13 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3.887141823039119 \\ 3.887141823657318 \\ 3.887141823668244 \\ 3.887141823671378 \\ 3.887141823672731 \\ 3.887141823673409 \\ 3.887141823673738 \\ 3.887141823673838 \\ 3.887141823673409 \\ 3.887141823672731 \\ 3.887141823671378 \\ 3.887141823673409 \\ 3.887141823672731 \\ 3.887141823671378 \\ 3.887141823668244 \\ 3.887141823657318 \\ 3.887141823039119 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si nous appliquons le même algorithme avec la même fonction pour $l = 16$ et $p = 3$ On obtient la courbe suivant avec la solution discrète pour $l = 16$ et $p = 3$ et $n = 7343$

Deuxième cas $p = 3$

Tableau 3 : Temps d'explosion numériques, nombres d'itérations, temps CPU (secondes), et ordres des approximations obtenues avec un schéma explicite

I	T^n	n	CPU	S
16	0.001269846148320	3248	0.265625	-
32	0.001264324935730	12261	0.6875	-
64	0.001262945410701	46184	2.671875	2.00
128	0.001262600577605	173362	71.265625	2.00
256	0.001262514370074	648006	1070.625	2.00

Tableau 4 : Temps d'explosion numériques, nombres d'itérations, temps CPU (secondes), et ordres des approximations obtenues avec un schéma implicite

I	T^n	n	CPU	S
16	0.001269847024611	3248	0.046875	-
32	0.001264325154301	0.250000	0.421875	-
64	0.001262945465312	46184	0.921875	2.00
128	0.001262600591256	173362	4.625000	2.00
256	0.001262514373486	648006	35.15625	2.00

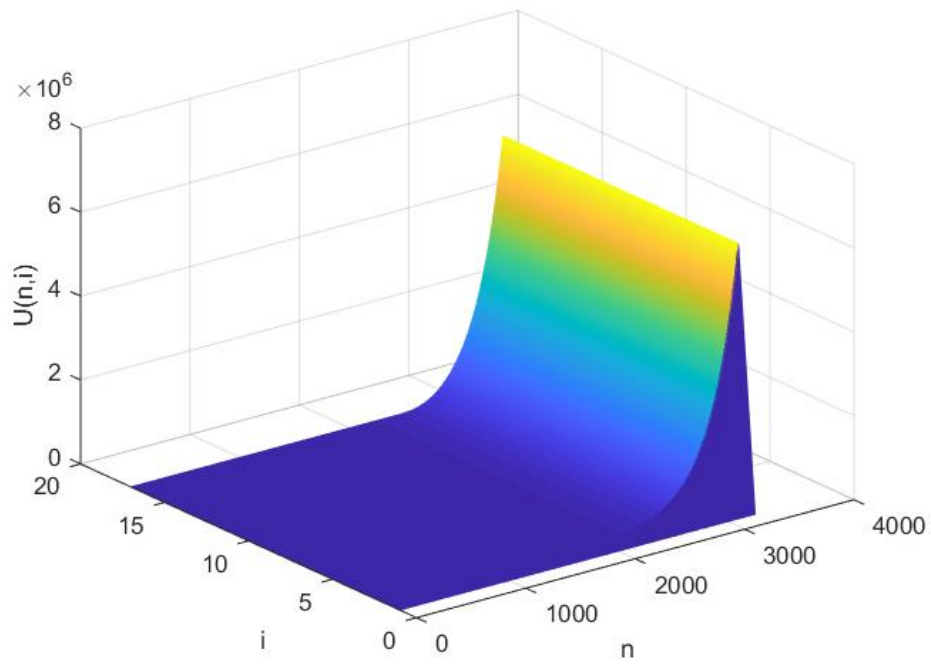


Figure 3 évaluation de la solution discrète pour $l = 16$ et $p = 3$ (schéma explicite)

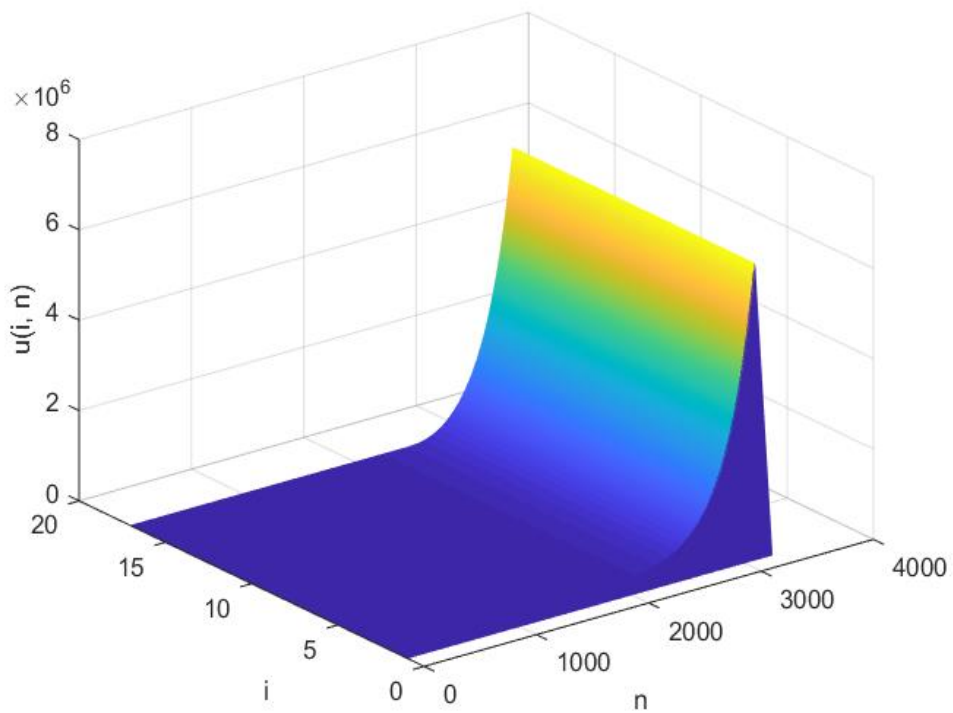


Figure 4 évaluation de la solution discrète pour $l = 16$ et $p = 3$ (schéma implicite)

la solution discrète de schéma explicite figure 3 pour $I = 16$ et $p = 3$ et $n = 7343$

$$U_h^{\Delta n} = 1.0e + 6 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 6.263322276217490 \\ 6.263331574170759 \\ 6.263335247272341 \\ 6.263338255715490 \\ 6.263340712928141 \\ 6.263342538220853 \\ 6.263343662207516 \\ 6.26334404173.854 \\ 6.263343662207516 \\ 6.263342538220853 \\ 6.263340712928141 \\ 6.263338255715490 \\ 6.263335247272341 \\ 6.263335247272341 \\ 6.263331574170759 \\ 6.263322276217490 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution discrète de schéma implicite figure 4 pour $I = 16$ et $p = 3$ et $n = 7343$

$$U_h^{\Delta n} = 1.0e + 6 \times \begin{bmatrix} 0 \\ 6.263325285414591 \\ 6.263334616518543 \\ 6.263338294089014 \\ 6.263341303092984 \\ 6.263343760360646 \\ 6.263345585658525 \\ 6.263346709646128 \\ 6.263347089169711 \\ 6.263346709646128 \\ 6.263345585658525 \\ 6.2633437603606446 \\ 6.263341303092984 \\ 6.263338294089014 \\ 6.263334616518543 \\ 6.263325285414591 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 3.7.3.1 : Les figure 1,2,3 et 4, nous les avons avec le terme de réaction locale $(U_k^{(n)})^p$.

Sur la base des résultats du tableau, nous avons vu que le temps d'explosion de notre problème est plus petit que celui où le terme de réaction n'est pas local. Afin de vérifier cette assertion, nous faisons les expériences lorsque le terme de réaction n'est pas local et remplacé par le terme de réaction source $(U_i^{(n)})^p$.

Premier cas $p = 2$

Tableau 5 : Temps d'explosion numériques, nombres d'itérations, temps CPU (secondes), et ordres des approximations obtenues avec un schéma explicite

I	T^n	n	CPU	S
16	0.0823313480	7658	0	-
32	0.0824111922	29260	0	-
64	0.0824307891	111589	0	2.02
128	0.0824357252	424450	4	1.98
256	0.08243369743	1609727	30	1.98

Tableau 6 : Temps d'explosion numériques, nombres d'itérations, temps CPU (secondes), et ordres des approximations obtenues avec un schéma implicite

I	T^n	n	CPU	S
16	0.0824466304	7659	0	-
32	0.0824399945	29261	0	-
64	0.0824379884	111590	1	1.72
128	0.0824375249	424451	6	2.11
256	0.0824374243	1609728	42	2.21

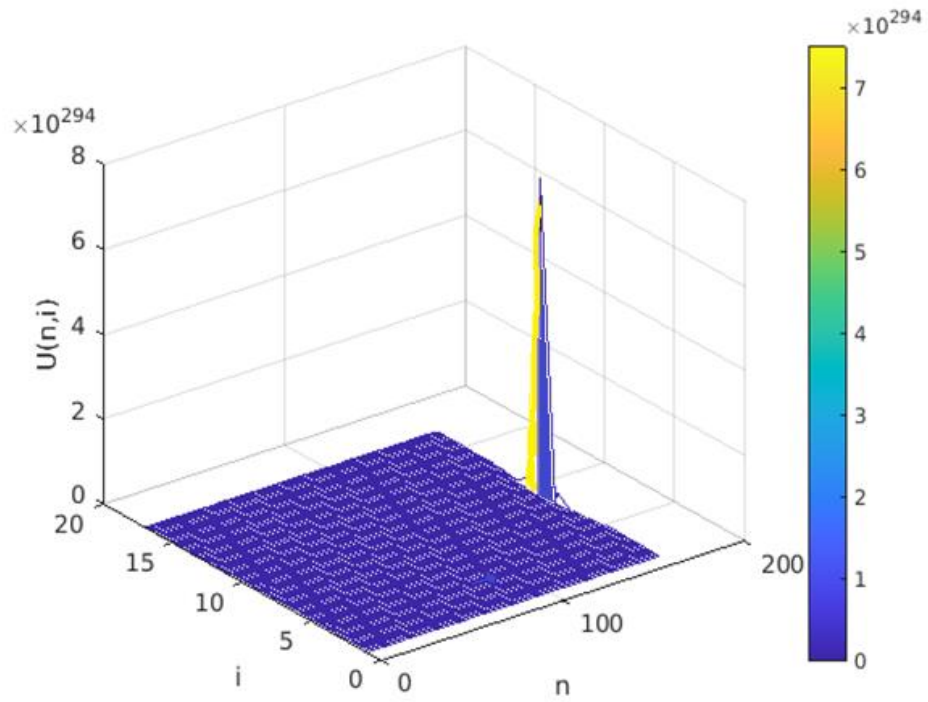


Figure 5: Evolution de la solution discrète pour $I = 16, p = 2$ avec terme source $\left(U_i^{(n)}\right)^p$
forme explicite

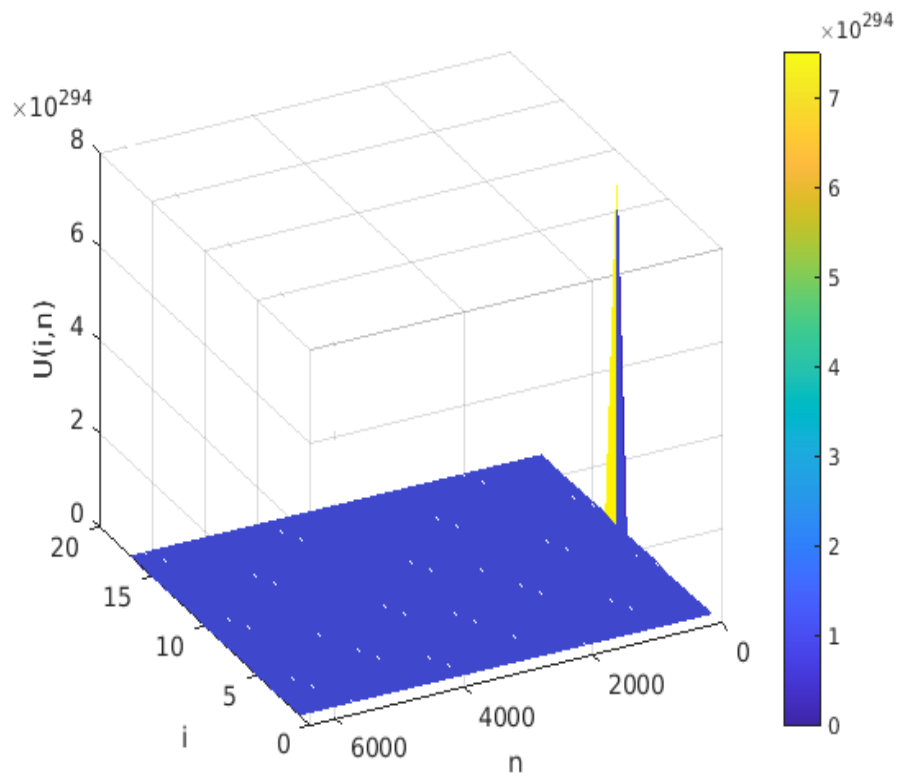


Figure 5: Evolution de la solution discrète pour $I = 16, p = 2$ forme implicite

Remarque 3.7.3.2: Sur les figures 1,2,3 et 4, la solution discrète explose globalement sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Mais, les figures 5 et 6, la solution discrète explose localement sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Conclusion & Perspectives

La majorité des phénomènes naturels peuvent être modélisés et formalisés en un problème de mathématiques.

Notre mémoire a porté sur l'étude d'un modèle de mathématiques issu d'un phénomène de propagation de la chaleur présenté par l'équation parabolique semi-linéaire localisé.

Nos modestes résultats obtenus, après l'étude théorique et numérique sont localisés par les qualités possibles de la solution, inspirées par ces propriétés, telles que la régularité, la convergence, la stabilité, la consistance et à la caractéristique la plus importante qui, à laquelle notre problématique est soulevée comme thème de recherche, c'est l'explosion de la solution en un temps fini, car il s'agit d'abord d'un phénomène naturel avant d'être mathématique.

Dans les perspectives, on peut d'abord s'intéresser au comportement du phénomène au moment de l'explosion, c'est la théorie du chaos, et ensuite voir les démarches qu'il faut faire pour contrôler l'explosion, c'est la théorie de contrôle.

Nous soulignons également un autre avantage dont bénéficie la solution de cette équation est l'extinction de la solution qui coïncide avec l'explosion de la solution.

Enfin, nous essayons de généraliser cette étude en abordant l'analyse fractionnaire !

Bibliographie

- [1] A.SAHANOGO, Explosion Numérique de Certaines Équations Paraboliques semi-linéaires localisées, mémoire de Master Université Nangui Abrogoua, Domaine Sciences et Technologies, Section Mathématiques, 2015-2016,
- [2] BEBERNES, J. EBERLY, D. -Mathematical problems From Combustion Theory, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1989,
- [3] BIMPONG-BOTA, K.; ORTOLEVA, P.; ROSS, J. -Far-form equilibrium phenomenon at local sites of reactions, J. Chem. Phys., 60(1974), 3124 – 3133,
- [4] D. NABONGO, BONI T. K, H. NACHID, Blow-up For Discretization Of A Localized Semi linear Heat Equation, MATHEMATICĂ, Tomul LVI, 2010,
- [5] D. Nabongo, Boni T. K., Numérical Blow-up Solutions of Localized Semi linear Parabolic Equations, Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, 2008, no. 24, 1145-1160,
- [6] Galaktionov V. A., Vázquez J. L. The problem of blow-up in non linear parabolic equations, Discrete Contin. Dynam. Systems A 8 (2002), 399–433,
- [7] GANON Ardjouma, Étude d'une EDP Parabolique et Applications, École normale supérieure D'abidjan, Département des Sciences et Technologies, Section Mathématiques, 2017-2018,
- [8] Eric Goncalvés , Résolution Numérique, Discrétisation des EDP et EDO, Septembre 2005,
- [9] Grégoire Allaire, Analyse Numérique et optimisation - Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, École Polytechnique MAP 431, 11 juillet 2005,
- [10] N'GUESSAN K., Étude théorique et numérique de l'explosion des solutions de quelques équations aux dérivées partielles de type parabolique, Thèse unique, École Doctorale Polytechnique YamoussouKro, 2017,
- [11] John M. Chadam. A. Peirce, and Hong-Ming Yin, The Blowup Property of Solutions to Some Diffusion Equations with Localized Non linear Reactions, Journal of Mathematical Analysis and Applications 169, 313-328 (1992),
- [12] Pablo A. An Introduction to the Problem of Blow-up for Semilinear and Qua-silinear Parabolic Equation, Departamento de Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid 28911 Leganés, SPAIN, No.12, 2006,
- [13] Robert Dautray - Jacques -Louis Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les Sciences et les techniques [8] Evolution : Semi-groupe, variationnel,

[14] T. GALLAY et J. Vovelle , Équations Aux Dérivées Partielles T. GALLAY et J. Vovelle Transcrit par Idriss Mazari, ENS de Lyon, 2014-2015.