University Abbes Laghrour Khenchela
Faculty of Science and Technology
Department of Mechanic

Acad. Year 2025-2026
Level: L3
Subject: Analytical Mechanics

Exam

(Duration : 1h30mn)

Exercise 1 *(7 pts)*

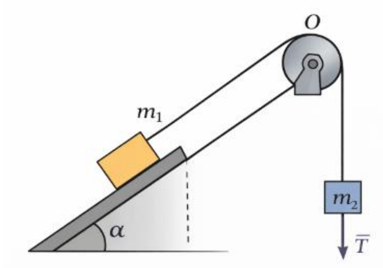
A material particle of mass m is considered to be a point mass; it moves in a plane under the action of a central force whose expression is: $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\,\overrightarrow{e_r}$ where k is a non-zero real constant and $\boldsymbol{r = OM}$ is the distance between the particle and the fixed center O. We adopt a polar coordinate system $(\boldsymbol{O}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}})$.

1- Show that the angular momentum of the particle is conserved.
2- Write the equation of the radial motion of the particle.
3- Determine the expression for the potential energy associated with this central force. (Take $E_p(\infty) = 0$).).
4- Determine the expression for the total mechanical energy.

Exercise 2 *(6 pts)*

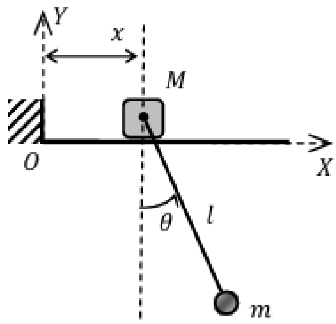
1. A mass $\boldsymbol{m_1}$ is placed on a perfectly smooth inclined plane and is connected to a mass $\boldsymbol{m_2}$ by an inextensible string of negligible mass that passes without friction over a pulley (see figure). Using the principle of virtual displacements, find the geometric condition for the system to remain in equilibrium.

2. Assume that mass $\boldsymbol{m_1}$ moves with friction on the inclined plane. Determine the acceleration of mass $\boldsymbol{m_2}$ using D'Alembert's principle. The friction force is given by $\boldsymbol{F_{f1} = -P_1\,\mu_1}$



Exercise 3 *(7pts)*

The system in the figure opposite consists of a point mass $\boldsymbol{M}$ sliding without friction on a horizontal plane. We attach to the mass $\boldsymbol{M}$ a simple pendulum of length $\boldsymbol{l}$ and mass $\boldsymbol{m}$. The position of the mass with respect to the vertical is denoted x and the angle that the pendulum makes with the vertical is $\boldsymbol{\theta}$.



1. Find the expression for the velocity $\overrightarrow{\boldsymbol{v_m}}$ of the mass $\mathbf{m}$ and for $\boldsymbol{v_m}$ in the frame of reference attached to the ground.$\overrightarrow{\boldsymbol{v_m}}$ of mass $\boldsymbol{m}$ in the ground-bound frame of reference. (For small oscillations, we will use $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} \approx \mathbf{1}$)
2. Write the expression of the Lagrangian $\mathscr{L}$ for the system.
3. Write the Lagrange equations of the system and deduce the equations of motion.

Good luck !

Université Abbès Laghrour – Khenchela ***A U : 2025 - 2026***
Faculté des Sciences et de la Technologie ***Niveau : 3ème année licence***
Département de Génie Mécanique ***Module : Mécanique analytique***

Examen

(Durée 1h30mn)

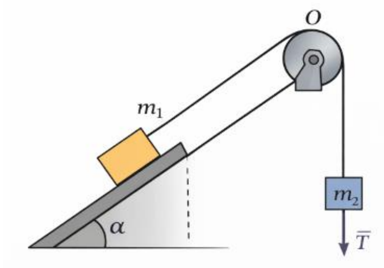
Exercice 1 *(7 pts)*

On considère une particule matérielle de masse m, assimilée à un point matériel, se déplaçant dans un plan sous l'action d'une force centrale dont l'expression est : $\vec{F} = -\frac{k}{r^3}\,\overrightarrow{e_r}$ où k est une constante réelle non nulle et $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$ la distance entre la particule et le centre fixe O. On adopte un repère polaire $(\boldsymbol{O}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}})$

1- Montrez que le moment angulaire de la particule est conservé.
2- Ecrivez l'équation du mouvement radial de la particule.
3- Déterminez l'expression de l'énergie potentielle associée à cette force centrale. (On prendra $E_p(\infty) = 0$).
4- Déterminez l'expression de l'énergie mécanique totale.

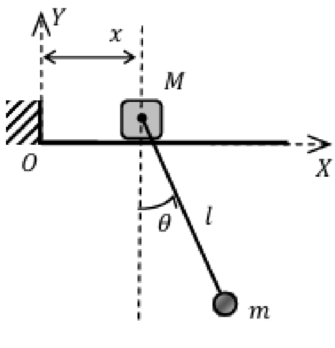
Exercice 2 *(6 pts)*

1. Une masse m_1 est posée sur un plan incliné parfaitement lisse et est reliée à une masse m_2 par un fil inextensible de masse négligeable qui passe sans frottement sur une poulie (voir figure). En utilisant le principe des déplacements virtuels trouvez la condition géométrique pour que le système reste en équilibre.
2. On suppose que la masse m_1 se déplace avec des frottements sur le plan incliné. Déterminez l'accélération de la masse m_2 en utilisant le principe de D'Alembert. On donne la force de frottement $\boldsymbol{F_{f1}} = -\boldsymbol{P_1}\,\boldsymbol{\mu_1}$



Exercice 3 *(7pts)*

Le système de la figure ci-contre est composé d'une masse ponctuelle $\boldsymbol{M}$ glissant sans frottement sur un plan horizontal. Nous accrochons à la masse $\boldsymbol{M}$ un pendule simple de longueur $\boldsymbol{l}$ et de masse $\boldsymbol{m}$. La position de la masse avec la verticale est notée $\boldsymbol{x}$ et l'angle que fait le pendule avec la verticale est $\boldsymbol{\theta}$.



1. Trouvez l'expression de la vitesse $\overrightarrow{\boldsymbol{v_m}}$ de la masse $\boldsymbol{m}$ et de $\boldsymbol{v_m}$ dans le référentiel lié au sol. (Pour les petites oscillations nous prendrons $\cos\boldsymbol{\theta} \approx \boldsymbol{1}$).
2. Ecrire le Lagrangien $\mathscr{L}$ du système.
3. Ecrire les équations de Lagrange du système et en déduire les équations du mouvement.

Bon Courage !