



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de **Master**
Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

**Calcul Numérique des Dérivées
Fractionnaires**

Réalisé par : **Belkhiri Sami**
Berkane Abdelbasset

Dirigé par : **Dr. Chergui Djamilia**

Membres de jury :

Dr. Mefteh Yassine	Président
Dr. Achichi Ahlem	Examineur
Dr. Bekhouche Fares	Invité

2022-2023

Calcul Numérique des Dérivées Fractionnaires

Sami BELKHIRI & Abdelbasset BERKANE

sami2math@gmail.com & berkaneba.12@gmail.com

Master en Mathématiques Appliquées

Deuxième Année

Université Abbes Laghrour-Khenchela

18 Juin 2023



Dédicaces



*Je dédie ce modeste travail aux personnes qui me sont les plus chères au monde, Que
j'aime et que j'adore*

*A mes chers parents ♥ qui ont toujours cru en moi et ont mis à ma disposition tous les
moyens nécessaires pour que je réussisse dans mes études.*

*En second lieu, à mes frères et mes soeurs qui m'ont toujours encouragé et guidé dans
mes études.*

Enfin, A toutes les personnes que j'estime et je que respecte.

 Sami

Dédicaces



Je dédie ce travail tout d'abord et avant tous à mes chers parents ♥ , pour toutes les valeurs qu'ils m'ont inculqués,

Ainsi que leurs sacrifices et soutiens tout au long de mes études, mais aussi pour l'affection et l'attention qu'ils m'ont prêtés durant toute ma vie.

En second lieu, à mes frères et mes soeurs qui m'ont toujours encouragé et guidé dans mes études.

Enfin, je le dédie à tous mes amis et camarades.

 *Abdelbasset*

❁ Remerciements ❁



Au nom d'ALLAH Clément et Miséricordieux!

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volenté pour achever ce travail.

Cette section traduit sans aucun doute l'instant le plus agréable dans la rédaction du mémoire. En effet, câest le moment privilégié pour mettre en avant toutes les personnes qui, de près ou bien de loin, directement ou indirectement, ont contribué à l'avancement de notre travail.

Nous remercions également notre encadrante Dj. CHERGUI pour son aide précieux, ses remarques constructives, sa patience, ses encouragements , ainsi sa disponibilité.

Nos remerciements réitérés s'adressent à notre président de jury Dr. Y. MEFTAH pour son aide, et ses conseils, ainsi qu'à notre examinateur Dr. A. ACHICHI et Dr. F.Bekhouche (Invité).

Nous ne manquons pas de remercier l'ensemble des enseignants qui nous ont formés au cours de notre cursus à l'université de Khenchela.

En fin, nous adressons nos chaleureux remerciements à tous l'ensemble de nos camarades spécialement la promo MA 2023.

Merci 


**Johann Von Neumann The
sciences do not try to explain,
they hardly even try to inter-
pret, they mainly make models.**

**By a model is meant a
mathematical construct
which, with the addition of
certain verbal interpretations,
describes observed phenomena.
The justification of such a
mathematical construct is solely
and precisely that it is expected
to work**







Reste toujours un peu de parfum à la main qui donne des roses.
 CONFUCIUS (551 avant J.C., 479 avant J.C.) Philosophe chinois

 *Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes; un meilleur mathématicien est celui qui peut voir des analogies entre les démonstrations. Les très bons mathématiciens sont ceux qui peuvent déceler des analogies entre les théories. Mais on peut supposer que le meilleur des mathématiciens, est celui qui peut voir des analogies entre les analogies.* **Stefan Banach**




 *Dans les mathématiques vous ne comprenez pas des choses. Vous vous habituez juste à elles.* **John Von Neumann**




 *Dans la mesure où les lois des mathématiques se rapportent à la réalité, elles ne sont pas sûres; et jusque elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.* **Albert Einstein**




 *Les espaces hilbertiens ou espaces de Hilbert sont l'outil fondamental des applications de l'Analyse à la Physique et aux Sciences de l'ingénieur.* **L. SCHWARTZ**



 *Analysis is the technically most successful and best-elaborated part of Mathematics.*
J. Von Neumann



 *la vie il n'y a pas de solutions. Il y a des forces en marche : il faut les créer et les solutions suivent.* **Antoine de Saint-Exupéry**

Calcul Numérique des Dérivées Fractionnaires

Résumé



Ce mémoire est consacré à la résolution numérique pour un problème pseudo-hyperbolique et un problème des équations aux dérivées partielles fractionnaire d'ordre supérieur avec des conditions purement intégrales par la méthode de perturbation d'homotopie combinée avec la transformée de Laplace.

De plus, quelques exemples sont donnés pour comparer les solutions numériques et exactes.

 **Mots-clés** : Transformation de Laplace, Méthode de perturbation de l'homotopie, Condition aux limites non locale, conditions intégrale.




Numerical Calculations of Fractional Derivatives

Abstract



This memory is talking about the numerically resolution of Pseudo-hyperbolic equation with nonlocal boundary condition and a problem of fractional partial differential equations of higher order with purely integral conditions by homotopy perturbation method with using of Laplace tranformation.

In addition, some examples are given to compare numerical and exact solutions.

 **Keywords** :Laplace transform method, homotopy perturbation method, non-local boundary condition, integral conditions.



الحساب العددي لمشتقات الكسور

ملخص



تهدف هذه المذكرة بشكل اساسي للحل العددي لمسألة زائفة الزائدية ومسألة المعادلات التفاضلية الجزئية كسرية ذات رتبة اعلى مع شروط محلية بحتة من نوع التكامل باستخدام طريقة الهوموتوبي ممزوجة مع تحويل لابلاس ،
بالإضافة الى ذلك يتم اعطاء بعض الامثلة لمقارنة الحلول العددية و التقريبية


 **الكلمات المفتاحية:** تحويل لابلاس ، طريقة اضطراب التماثل ،
شروط حدية غير محلية، شرط حدي من نوع التكامل



Table des matières

Notations	x
Introduction générale	x
Table des figures	2
1 Préliminaires	6
1.1 Notions Générales	6
1.1.1 Espace normés	6
1.1.2 Espace de Banach	6
1.1.3 Espace de Hilbert	7
1.1.4 Espaces des fonctions intégrables	7
1.1.5 Espaces des fonctions continues et absolument continues	8
1.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire	8
1.2.1 La fonction Gamma	9
1.2.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma	9
1.2.3 La fonction Bêta	10
2 Dérivées et intégrales fractionnaires	11
2.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville	11
2.1.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$	11
2.1.2 Intégrales d'ordre arbitraire	12
2.1.3 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	12
2.1.4 Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles	13
2.1.5 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	14

2.1.6	Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles	15
2.2	Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	16
2.2.1	Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	19
2.3	Transformation de Laplace	19
2.3.1	Définition et propriétés	19
2.3.2	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville	21
2.3.3	Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo . .	21
2.4	La méthode de perturbation d'homotopie (HPM)	21
2.4.1	Description de la méthode	21
2.4.2	Analyse de convergence	22
2.4.3	Applications numériques	28
2.5	La méthode HPM combinée avec la transformation de Laplace	32
3	Applications de la méthode HPM pour résoudre un problème pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales	36
3.1	Introduction	36
3.2	Position du problème	37
3.3	Méthode de transformation de Laplace	37
4	Applications de la méthode HPM pour résoudre un problème des équations aux dérivées partielles fractionnaires d'ordre supérieur avec des conditions purement intégrales	44
4.1	Introduction	44
4.2	Position du problème	44
4.3	Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT- HPM)	45
5	Fiches A	49
	Bibliographie	52

Notations

Pour facilité la lecture, on commence par introduire les différentes notations utilisées tout au long de ce travail.

\mathbb{N} : ensemble des nombres entiers naturels

$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels.

\mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.

Ω : Domaine borné dans \mathbb{R} .

Γ : La frontière de Ω .

$L^p(\Omega)$: espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0, +\infty[$ intégrables sur Ω .

$L^\infty(\Omega)$: espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur Ω .

$C(\Omega)$: espace des fonctions continues sur Ω .

$C^n(\Omega)$: espace des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois et $f^{(n)}$ continues.

$AC(\Omega)$: espace des fonctions absolument continues sur Ω .

$AC^n(\Omega)$: espace des fonctions f dérivables à l'ordre $n - 1$ et elle que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$.

$\Gamma(\cdot)$: La fonction Gamma.

$B(\cdot, \cdot)$: La fonction Bêta.

$\Re(\cdot)$: Partie réelle d'un nombre complexe.

$[\cdot]$: Partie entière d'un nombre réel.

I_a^α : intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

${}^R D_a^\alpha$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.

${}^c D_a^\alpha$: dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.

Table des figures

1.1	la fonction Gamma	10
2.1	(vert) : La solution exacte et (noir) : La solution numérique	29
2.2	(vert) : La solution exacte et (noir) : La solution numérique	31
3.1	La solution excate -La solution Approximative	41
3.2	La solution excate et La solution Approximative	43
4.1	La solution excate -La solution Approximative	47
5.1	Georg Friedrich Bernhard Riemann	49
5.2	Joseph Liouville	50
5.3	Michele Caputo	51

Introduction générale

La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique tel que nous connaissons aujourd'hui. Ces origines remontent à la fin du 17^{ième} siècle, l'époque où **Isaac Newton** et **Gottfried Wilhelm Leibniz** ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. La première question qui a conduit au calcul fractionnaire était : Est-ce que la dérivée d'ordre entier $\frac{d^n f}{dx^n}$ peut être étendue à avoir un sens lorsque n est une fraction ? Plus tard, la question est devenue : n peut être n'importe quel nombre : Fractionnel irrationnel ou complexe ? Parce que cette dernière question a été répondu par l'affirmative, le calcul fractionnaire est devenu un terme mal approprié et pourrait mieux être appelé intégration et différentiation d'ordre fractionnaire.

Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f quand il a annoncé dans une lettre à **Guillaume l'Hôpital** datée du 30 septembre en 1695 avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$, L'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \frac{1}{2}$? Leibniz lui a répondu : "*Cela conduit à un paradoxe à partir duquel un jour, on pourra tirer des conséquences utiles*" [**Oldham et Spanier, 1974**]. Aujourd'hui, cette lettre est admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que L'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel), a en fait donné lieu au nom de domaine des mathématiques.

Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire qui a de nombreuses applications dans la description de nombreux événements en visco-élasticité, électromagnétique, biologie et économie.

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Les équations différentielles fractionnaires peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie tels que l'acoustique, le contrôle, milieux poreux, électrochimie, visco-élasticité, rhéologie, fractales, dynamique chaotique, physique des polymères, électromagnétique, médecine, économie, astrophysique, génie chimique, physique statistique,

thermodynamique, bioingénierie, etc. Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées entières. Les dérivés fractionnaires fournissent un excellent instrument pour la description de la mémoire et des propriétés héréditaires de divers matériaux et procédés (📄 [29]). En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, on peut voir les références 📄 [7, 6, 22, 23] 📖 [27, 28].

Dans tous ces domaines scientifiques, il est important de trouver des solutions exactes ou approximatives à ces problèmes. Il existe donc un intérêt marqué pour le développement de méthodes de résolution de problèmes liés aux équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire. Les solutions exactes de ces problèmes sont parfois trop compliquées à atteindre par les techniques classiques en raison de la complexité des parties non-linéaires les impliquant. La méthode de perturbation de l'homotopie **HPM** a été proposée par Ji-Huan He 📖¹⁹⁹⁸ [18]. Cette méthode a été appliquée par plusieurs auteurs à différents problèmes linéaires et non linéaires. Momani et Odibat 📄 [26] ont appliqué la méthode de perturbation d'homotopie aux équations différentielles fractionnaires et ils ont révélé que la méthode **HPM** a été aussi combinée avec des transformations comme celle de Laplace, Sumudu 📖 [30] ou encore d'Elzaki 📄 [9] pour résoudre des équations différentielles ordinaires et aussi aux dérivées partielles fractionnaires.

L'objectif principal de ce mémoire est d'appliquer la méthode de perturbation d'homotopie pour résoudre des équations aux dérivées partielles fractionnaires et problème avec avec des conditions purement intégrales.

Ce mémoire est scindée en quatre chapitres comme suit :

Le premier chapitre sera consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire quelques concepts préliminaires seront introduits comme, la fonction gamma d'Euler et la fonction bêta avec des exemples et quelques propriétés intéressantes qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Un rappel de quelques résultats d'analyse fonctionnelle ainsi que les outils mathématiques nécessaires pour l'étude des problèmes.

Dans le second chapitre de ce mémoire est dédié les approches (Riemann-Liouville et Caputo) et les liens entre ces dérivées avec quelques exemples et quelques propriétés complémentaires, la transformation de Laplace est sa transformation inverse, nous donnons la description de la méthode de perturbation d'homotopie et nous faisons l'analyse de sa convergence, nous traitons quelques applications numériques de la méthode **HPM** pour résoudre des équations différentielles non-linéaires et nous exposons la méthode de perturbation d'homotopie **HPM** combinée avec la transformation de Laplace **LT**.

Le troisième et quatrième chapitre, présentons une analyse complète de notre méthode pour les deux problèmes un problème pseudo-hyperbolique et un problème des équations aux dérivées partielles fractionnaires d'ordre supérieur avec des conditions purement intégrales. Nous avons également utilisé une méthode semi-analytique pour estimer cette solution est la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (**LT-HPM**) pour obtenir la solution numérique, quelques exemples sont donnés pour justifier l'efficacité de cette méthode.

Enfin, nous concluons par **Conclusion Générale** cette partie est dédiée aux rappels de différentes contributions apportées dans ce mémoire ainsi que les perspectives considérées.

À la fin de ce Mémoire, pour la commodité des lecteurs intéressés par une autre investigation sur ces et d'autres sujets étroitement liés, on inclut une Bibliographie.



Préliminaires

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au l'analyse fonctionnelle telles que : les espaces L^p , espace de Banach et d'autres notions dont on aura besoin dans la suite de notre travail.

1.1 Notions Générales

Dans cette partie, nous présentons des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 Espace normés

Définition 1.1. (voir [[13], page 21]).(Norme) Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Une norme sur E , est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant les conditions suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in E$.

Remarque 1.1. L'espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle espace normé, noté par $(E, \|\cdot\|)$.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.2. (Suite de Cauchy) Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est de Cauchy si et seulement si,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > m > N \implies \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Définition 1.3. (*Espace Complet*) Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente dans E .

Définition 1.4. (*Espace de Banach*) Un espace de Banach est un espace normé complet.

1.1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.5. (*produit scalaire*) Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} . Un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x, y, x_1, x_2 \in E$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ on a :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.
4. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

Définition 1.6. (voir [[20], page 6]). (*Espace préhilbertien*) Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire .

Définition 1.7. (*Espace de Hilbert*) Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien sur \mathbb{K} complet pour la norme induite par le produit scalaire .

1.1.4 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.8. [Podlubny, 1999] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $1 \leq p \leq \infty$.

- 1) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et $\int_0^T |f(t)|^p dt < \infty$.
- 2) Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω .

Théorème 1.1. [Podlubny, 1999] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} .

- 1) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_0^T |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- 2) L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|f\|_\infty = \inf \left\{ M \geq 0 : |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega \right\}.$$

1.1.5 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.9. [Kilbas et al., 2006] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} et $n \in \mathbb{N}$. On désigne par $C^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à n continues sur Ω , muni de la norme :

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \|f^{(k)}\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^n \max_{t \in \Omega} |f^{(k)}(t)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{t \in \Omega} |f(t)|.$$

Définition 1.10. [Kilbas et al., 2006] Soit $\Omega = [0, T]$ ($0 < T < +\infty$) un intervalle fini de \mathbb{R} . On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables, c'est-à-dire :

$$AC(\Omega) = \left\{ f \mid \exists \varphi \in L^1(\Omega) : f(t) = c + \int_0^t \varphi(s) ds \right\},$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω .

Définition 1.11. [Kilbas et al., 2006] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on désigne par $C_\mu^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui ont des dérivées continues sur Ω jusqu'à l'ordre $(n-1)$ et telles que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$ c'est-à-dire

$$AC^n(\Omega) = \left\{ f \mid f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in C(\Omega), k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, f^{(n-1)} \in AC(\Omega) \right\}.$$

En particulier $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Une caractérisation des fonctions de cet espace est donnée par le lemme suivant :

Lemme 1.1. [Kilbas et al., 2006] Une fonction $f \in AC^n(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}^*$, si et seulement si elle est représentée sous la forme :

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f^{(n)}(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

1.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette partie, nous présentons les fonctions Gamma et Bêta. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses application.

1.2.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707 – 1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières. Plus tard, en raison de sa grande importance, elle a été étudiée par d'autres éminents mathématiciens comme Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Christoph Gudermann (1798 – 1852), Joseph Liouville (1809 – 1882), Karl Weierstrass (1815 – 1897), Charles Hermite (1822 – 1901) et beaucoup d'autres. La fonction Gamma appartient à la catégorie des fonctions transcendentes spéciales et nous verrons que certaines constantes mathématiques célèbres se produisent dans son étude. Elle apparaît également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, l'intégration définie, série hypergéométrique, fonction zêta de Riemann, théorie des nombres...

Définition 1.12. [Podlubny, 1999] Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (1.1)$$

où z est un nombre complexe quelconque tel que $\Re(z) > 0$.

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

1.2.2 Quelques propriétés de la fonction Gamma

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re(z) > 0, \quad (1.2)$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^{(z+1)-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_{t=0}^{t=+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z).$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

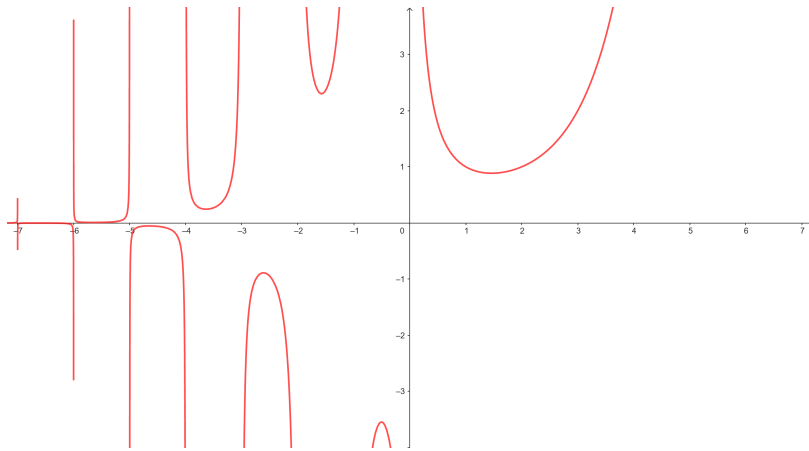


FIGURE 1.1: la fonction Gamma

1.2.3 La fonction Bêta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction joue un rôle important quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.13. [Podlubny, 1999] La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombre complexes z et w par :

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \Re(z) > 0, \Re(w) > 0. \quad (1.3)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad \Re(z) > 0, \Re(w) > 0, \quad (1.4)$$

il s'ensuit de (1.4) que :

$$B(z, w) = B(w, z), \quad \Re(z) > 0, \Re(w) > 0.$$

Dérivées et intégrales fractionnaires

Le concept du calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivation et de l'intégration ordinaires à un ordre arbitraire. Les dérivées d'ordres non entiers sont à présent largement appliquées dans de nombreux domaines, par exemple, en probabilité, viscoélasticité, électronique, économie, mécanique et en biologie, etc. Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des gommages et des caoutchoucs. En bref, toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations antérieures notamment à caractère viscoélastique. En effet, la dérivation fractionnaire s'y introduit naturellement. Il existe plusieurs définitions mathématiques de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour une large gamme de fonctions. Dans ce chapitre, on introduira l'opérateur d'intégration fractionnaire ainsi que les deux définitions les plus utilisées des dérivées fractionnaires à savoir celle de Riemann-Liouville et de Caputo, en donnant les propriétés les plus importantes de ces notions ainsi que la relation entre ces deux approches.

2.1 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

2.1.1 Intégrale fractionnaire sur un intervalle $[a, b]$

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$, on considère l'intégrale :

$$I^{(1)} f(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u) du$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^{(2)} f(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt$$

Plus généralement le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} I^{(n)} f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \end{aligned} \quad (2.1)$$

pour tout entier n .

Cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann a rendu compte que le second membre de (2.1) pourrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il était naturel donc de définir l'intégration fractionnaire.

2.1.2 Intégrales d'ordre arbitraire

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (ou à valeurs vectorielles) une fonction continue. b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

Pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau) d\tau,$$

en itérant, on arrive à :

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau.$$

2.1.3 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.1. [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit $f \in L^1([a, b])$, avec $(-\infty < a < b < +\infty)$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) > 0$) notée I_a^α est définie par :

$$(I_a^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad \forall t \in [a, b]. \quad (2.2)$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma donnée par (1.1)

Théorème 2.1. [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Si $f \in L^1([a, b])$, avec $(-\infty < a < b < +\infty)$. alors $I_a^\alpha f$ existe pour presque tout $t \in [a, b]$ et de plus $I_a^\alpha f \in L^1([a, b])$.

Démonstration. En introduisant (2.2) puis en utilisant le théorème de Fubini, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_a^b |I_a^\alpha f(t)| dt &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} |f(\tau)| d\tau dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(\tau)| \left(\int_\tau^b (t-\tau)^{\alpha-1} dt \right) d\tau \\ &\leq \frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^b |f(\tau)| (b-\tau)^\alpha d\tau \\ &\leq \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b |f(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

Puisque $f \in L^1([a, b])$, la dernière quantité est fini, ce qui établit le résultat. ■

2.1.4 Intégrales fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ où $\beta > -1$.

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-a)^\beta d\tau.$$

Pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variables $\tau = a + (t-a)s$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

La relation (2.3) montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une constante est donnée par :

$${}^R D_t^{-\alpha} C = I_a^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)} (t - a)^\alpha.$$

Et en particulier, si $\alpha = \frac{1}{2}$,

$${}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^0 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2 \sqrt{\frac{x}{\pi}} {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^1 = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{x^3}{\pi}} {}^R D_t^{-\frac{1}{2}} x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15} \sqrt{\frac{x^5}{\pi}}$$

Proposition 2.1. Soient α et β deux nombres complexes et $f \in C^0([a, b])$.

- i) $I_a^\alpha (I_a^\beta f) = I_a^{\alpha+\beta} f$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $\operatorname{Re}(\beta) > 0$
- ii) $\frac{d}{dt} (I_a^\alpha f)(t) = (I_a^{\alpha-1} f)(t)$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 1$
- iii) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (I_a^\alpha f)(t) = f(t)$, $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$

2.1.5 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.2. [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit $f \in L^1([a, b])$, une fonction intégrable sur $[a, b]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$) notée ${}^R D_t^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} ({}^R D_t^\alpha f)(t) &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n [(I_a^{n-\alpha} f)(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

où $n - 1 < [\operatorname{Re}(\alpha)] < n$, et $[\operatorname{Re}(\alpha)]$ est la partie entière de $\operatorname{Re}(\alpha)$.

En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$({}^R D_t^0 f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_a^t f(\tau) d\tau = f(t).$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$({}^R D_t^n f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \right) \int_a^t f(\tau) d\tau = \frac{d^n}{dt^n} f(t) = f^{(n)}(t).$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où

$$({}^R D_t^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Remarque 2.1. • Contrairement à la dérivée usuelle d'une fonction $f(t)$ en un point qui ne dépend que des valeurs de $f(t)$ au voisinage de ce point, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre non-entier dépend de toutes les valeurs de $f(t)$ dans l'intervalle (a, t) . On dit qu'elle est à caractère non-local.

- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée ordinaire.

2.1.6 Dérivées fractionnaires de quelques fonctions usuelles

Calculons la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$. Par la formule (2.3) on peut écrire :

$$\begin{aligned} {}^R D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (t-a)^{\beta+n-\alpha} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta+n-\alpha}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

on sait que :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta+n-\alpha} = (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)(t-a)^{\beta-\alpha}. \quad (2.6)$$

Par substitution de (2.6) dans (2.5), on obtient :

$${}^R D_t^\alpha (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1+n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\Gamma(\beta+1)(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)}{(\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\dots(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Remarque 2.2. i) Pour $\alpha = 1$, la formule de dérivation (2.7) se réduit à

$${}^R D_t^1 (t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)} (t-a)^{\beta-1} = \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt} (t-a)^\beta. \quad (2.9)$$

ii) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}^R D_t^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

c'est-à-dire que la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constant! mais on a :

$${}^R D_t^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.$$

2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouer un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs dont [Caputo\(1967 – 1969\)](#) ont rendu compte que cette définition doit être révisé [[Caputo, 1967](#)], car les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques comme par exemple $u(0), u'(0), etc \dots$, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Malgré le fait que les problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, la solution de ce problème a été proposée par [M. Caputo](#) dans sa définition qu'il a adapté avec [F. Mainardi](#) dans la structure de la théorie de viscoélasticité [[Caputo et Mainardi, 1971](#)].

Dans cette partie on donne la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo ainsi que quelques propriétés essentielles.

Soit $[a, b]$ un intervalle fini de \mathbb{R} , et soit I_a^α et ${}^R D_a^\alpha$ les opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires donnés par (2.2) et (2.4) respectivement.

Définition 2.3. [[Kilbas et al., 2006](#)] La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D_a^\alpha f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\text{Re}(\alpha) \geq 0$), sur l'intervalle $[a, b]$ est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville par :

$${}^c D_a^\alpha f(t) = {}^R D_a^\alpha \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \quad (2.10)$$

où

$$n = [\text{Re}(\alpha)] + 1, \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}, \text{ et } n = \alpha \text{ si } \alpha \in \mathbb{N}^*. \quad (2.11)$$

Si $\alpha = 0$, alors

$${}^c D_a^0 f(t) = f(t).$$

En particulier, lorsque $0 < \mathcal{R}e(\alpha) < 1$, la relation (2.10) prend la forme

$$({}^c D^\alpha) f(t) = {}^R D^\alpha ([f(t) - f(a)]).$$

Donc, si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et f est une fonction pour laquelle les dérivées fractionnaires de Caputo (2.10), et celle de Riemann-Liouville (2.4) existent, alors elles sont liées à l'autre par la relation

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k - \alpha + 1)} (t - a)^{k - \alpha}, \quad (n = [\mathcal{R}e(\alpha)] + 1). \quad (2.12)$$

En particulier, lorsque $0 < \mathcal{R}e(\alpha) < 1$, on a

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \frac{f(a)}{\Gamma(1 - \alpha)} (t - a)^{-\alpha} \quad (2.13)$$

D'après la relation (2.12), si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors la dérivée de Caputo (2.10) coïncide avec la dérivée de Riemann-Liouville (2.4) si la fonction f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ ($n = [\alpha] + 1$) s'annulent au point a , i.e.

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) \iff f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0.$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et la dérivée usuelle $f^{(n)}(t)$ existe, alors ${}^c D^\alpha f(t)$ coïncide avec $f^{(n)}(t)$ i.e

$${}^c D^\alpha f(t) = f^{(n)}(t). \quad (2.14)$$

Remarque 2.3. ► *principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo des équations différentielles fractionnaires prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.*

► La dérivée fractionnaire de Caputo (2.10) est définie pour les fonctions $f(t)$ pour lesquelles la dérivée de Riemann-Liouville (2.4) existe, en particulier, elle est définie pour les fonctions $f(t) \in AC^n[a, b]$. On a le théorème suivant :

Théorème 2.2. [Kilbas et al., 2006] *Soit $\mathcal{R}e(\alpha) > 0$ et soit n donné par (2.11). Si $f \in AC^n[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a, b]$.*

1) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c D^\alpha f(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(s) ds, \\ &= I_a^{n - \alpha} D^n f(t). \end{aligned} \quad (2.15)$$

En particulier, lorsque $0 < \Re(\alpha) < 1$ et $f \in AC[a, b]$, alors

$$\begin{aligned} {}^c_a D^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds, \quad t > 0 \\ &= I_a^{1-\alpha} f'(t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

2) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors ${}^c_a D^n f(t) = f^{(n)}(t)$.

Théorème 2.3. [Kilbas et al., 2006] Soient $\Re(\alpha) > 0$, n donné par (2.11) et $f \in C^n([a, b])$. Alors la dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c_a D^\alpha f$ est continue sur $[a, b]$.

1) Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors ${}^c_a D^\alpha f$ est donnée par (2.15). En particulier, elle prend la forme (2.16) pour $0 < \alpha < 1$.

2) Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors ${}^c_a D^n f(t) = f^{(n)}(t)$.

Exemple 2.1. La dérivée de $f(t) = (t-a)^\gamma$, au sens de Caputo.

Soit α un entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\gamma > n-1$, alors :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)} (\tau-a)^{\gamma-n}. \quad (2.17)$$

d'où

$${}^c_a D^\alpha (t-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\gamma-n} d\tau.$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, $0 \leq s \leq 1$, nous arrivons à :

$$\begin{aligned} {}^c_a D^\alpha (t-a)^\gamma &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\gamma-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha} \int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\gamma-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\gamma-n+1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha}. \end{aligned}$$

En particulier, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une constante est nulle :

$${}^c D_a^\alpha C = 0, \quad \forall C \in \mathbb{R}. \quad (2.18)$$

La dérivée fractionnaire de Caputo ${}^c D_a^\alpha$, comme celle de Riemann-Liouville, représente l'opération inverse à gauche de l'intégrale fractionnaire I_a^α .

2.2.1 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 2.4. [Podlubny, 1999],[Kilbas et al., 2006] Soit $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ avec $n-1 < \operatorname{Re}(\alpha) < n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et soit f une fonction telle que les dérivées fractionnaires ${}^c D^\alpha f(t)$ et ${}^R D^\alpha f(t)$ existent alors :

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^R D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha}. \quad (2.19)$$

2.3 Transformation de Laplace

2.3.1 Définition et propriétés

Définition 2.4. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

On appelle transformée de Laplace de f , la fonction $\mathcal{L}(f)$ définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{C}, \quad (2.20)$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ où $t \in \mathbb{R}^+$.

Remarque 2.4. On peut étendre cette définition aux fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes :

- f est continue par morceaux, c'est-à-dire que sur chaque intervalle fini de la forme $[a, b], a < b$, les discontinuités de f (si elle existent) sont en nombre fini et sont de première espèce.
- f est d'ordre exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) \leq Me^{\alpha t}$. La continuité intervient lorsqu'on parlera de la transformée inverse de Laplace. Sous ces conditions, il est facile de vérifier que $\int_0^\infty f(t)e^{-tp} dt$ converge pour $\operatorname{Re}(p) > \alpha$ et on peut alors parler de transformée de Laplace de f .

La transformée inverse de Lapalce est donnée par :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \Re e(s) > c_0, \quad (2.21)$$

c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Lapalce (2.20).

La transformée de Lapalce de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad (2.22)$$

de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ qui sont nulles pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Lapalce

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t); s\} = F(s).G(s),$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

La transformée de Lapalce de la dérivée d'ordre entier de la fonction $f(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \quad (2.23)$$

ce qui peut être obtenu à partir de la définition (2.20) par une intégration par parties avec sous l'hypothèse que les intégrales correspondantes existent.

Tableau de Transformée de Laplace

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\cos wt$	$\frac{s}{s^2 + w^2}$
1	$\frac{1}{s}$	$\sin wt$	$\frac{w}{s^2 + w^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cosh wt$	$\frac{s}{s^2 - w^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\sinh wt$	$\frac{w}{s^2 - w^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{at} \cos wt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w}$
$t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at} \sin wt$	$\frac{w}{(s-a)^2 + w}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{n-1}{(s+a)^n}$

2.3.2 Transformée de Lapalce de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La formule de la transformée de Lapalce de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \geq 0$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\{(D_{0+}^{\alpha} f)(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [(D_{0+}^{\alpha-k-1} f)(t)]_{t=0}, \quad (n-1 \leq \alpha < n). \quad (2.24)$$

2.3.3 Transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

La formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo suivante :

$$\mathcal{L}\{{}^c D_{0+}^{\alpha} f(t); s\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (n-1 < \alpha \leq n). \quad (2.25)$$

2.4 La méthode de perturbation d'homotopie (HPM)

De nombreux modèles mathématiques de systèmes physiques conduisent à des équations fonctionnelles dans différents domaines des sciences physiques et de l'ingénierie. Ces équations ne sont pas en général facile à résoudre analytiquement. Il existe cependant des méthodes pour obtenir des solutions approchées de ce type d'équations. L'une d'entre elles est celle de perturbation d'homotopie établie par [Ji-Huan He](#) [18] en 1998, développée et améliorée par lui même. Il l'a appliquée à des problèmes aux limites d'équations des ondes non linéaires, ainsi qu'à de nombreux autres sujets [15], [16], [17] et [19]. La méthode de perturbation d'homotopie peut être considérée comme une méthode universelle capable de résoudre différents types d'équations fonctionnelles non linéaires. Cette méthode a été appliquée entre autre à des équations de Schrodinger non linéaires [8], à des systèmes d'équations intégrales de Volterra de seconde espèce et à beaucoup d'autres équations (voir : [10], [15],[17], [19]).

La solution numérique selon la méthode **HPM** est de considérée une série de fonctions qui converge rapidement vers la solution exacte (quand elle existe). Cette méthode permet de transformer la résolution d'un problème difficile en un problème simple à résoudre. La méthode de perturbation d'homotopie (**HPM**) est basée sur l'hypothèse de l'existence d'un petit paramètre $p \in [0, 1]$, affublé à l'équation étudiée.

2.4.1 Description de la méthode

Pour illustrer le concept de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega, \quad (2.26)$$

avec les conditions aux limites

$$B(u, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad (2.27)$$

où A est un opérateur différentielle générale, B est un opérateur définissant les conditions aux limites, $f(r)$ est une fonction analytique comme, u est la fonction inconnue et Γ la frontière du domaine Ω .

D'une façon générale, l'opérateur A peut être décomposé en deux opérateurs L et N , où L est un opérateur linéaire et N est un opérateur non-linéaire. Donc l'équation (2.26) peut être réécrite comme suit :

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0.$$

On construit une homotopie $v(r, p) : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, qui satisfait :

$$H(v, p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad (2.28)$$

où

$$H(v, p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0, \quad (2.29)$$

où $r \in \Omega$, $p \in [0, 1]$ est le paramètre d'homotopie et u_0 est une approximation initiale de l'équation (2.26) qui satisfait les conditions aux limites (2.27). D'après les équations (2.28) et (2.29), nous avons :

$$H(v, 0) = L(v) - L(u_0) = 0, \quad H(v, 1) = A(v) - f(r) = 0.$$

Le changement de p de zéro à l'unité transforme $u_0(r)$ en $u(r)$. En topologie avec cette dernière propriété, la fonction $v(r, p)$ est appelée homotopie. Selon la méthode HPM, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petit paramètre et supposons que les solutions des équations (2.28) et (2.29) peuvent être écrites comme une série de puissance de p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i. \quad (2.30)$$

Nous prenons $p \rightarrow 1$, on aboutit à l'approximation de la solution de l'équation

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (2.31)$$

2.4.2 Analyse de convergence

Dans cette paragraphe, on étudie la convergence de la méthode HPM [8], [5]. On peut réécrire la relation (2.28) comme suit :

$$L(v) - L(u_0) = p[f(r) - L(u_0) - N(v)]. \quad (2.32)$$

En remplaçons (2.30) dans (2.32), on obtient :

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) - L(u_0) = p[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)]. \quad (2.33)$$

Ainsi

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(p^i v_i) - L(u_0) = p[f(r) - L(u_0) - N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)]. \quad (2.34)$$

Selon le développement de Maclaurin de $N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right)$ par rapport à p , nous avons :

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{i=n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) \right)_{p=0} p^i. \quad (2.35)$$

D'après [11], on a

$$\left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) \right)_{p=0} = \left(\frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n p^i v_i\right) \right)_{p=0}.$$

Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} N\left(\sum_{i=0}^n p^i v_i\right) \right)_{p=0} p^i$$

Posons :

$$H_n(v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} \left[N\left(\sum_{i=0}^n p^i v_i\right) \right]_{p=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.36)$$

où H_n sont appelés polynômes de He [11]. Alors

$$N\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^i v_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i. \quad (2.37)$$

En remplaçons (2.37) dans (2.34), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{\infty} L(v_i) - L(u_0) = p \left[f(r) - L(u_0) - \sum_{i=0}^{\infty} H_i p^i \right]. \quad (2.38)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p , on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : L(v_0) - L(u_0) = 0, \\ p^1 : L(v_1) = f(r) - L(u_0) - H_0, \\ p^2 : L(v_2) = -H_1, \\ p^3 : L(v_3) = -H_2, \\ \vdots \\ p^{n+1} : L(v_{n+1}) = -H_n, \end{array} \right. \quad (2.39)$$

Donc, on conclut que

$$\left\{ \begin{array}{l} p^0 : v_0 = u_0, \\ p^1 : v_1 = L^{-1}(f(r)) - u_0 - L^{-1}(H_0), \\ p^2 : v_2 = -L^{-1}(H_1), \\ p^3 : v_3 = L^{-1}(H_2), \\ p^{n+1} : v_{n+1} = -L^{-1}(H_n), \end{array} \right. \quad (2.40)$$

Théorème 2.5. [5] La solution de l'équation (2.26) obtenue par la méthode de perturbation d'homotopie est équivalente à la détermination de S_n donnée par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n, \quad S_0 = 0, \quad (2.41)$$

en utilisant le schéma itératif

$$S_{n+1} = -L^{-1}N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)), \quad (2.42)$$

où

$$N_n \left(\sum_{i=0}^n v_i \right) = \sum_{i=0}^n H_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

Démonstration. Pour $n = 0$, d'après (2.42), on a :

$$S_1 = -L^{-1}N_0(S_0 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)).$$

Alors

$$v_1 = -L^{-1}(H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)).$$

Pour

$$\begin{aligned} S_2 &= -L^{-1}N_1(S_1 + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}(H_1 + H_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}(H_1) + v_1. \end{aligned}$$

Selon $S_2 = v_1 + v_2$, on obtient :

$$v_2 = -L^{-1}(H_1).$$

La démonstration de ce théorème se fera par induction. Supposons que :

$$v_{k+1} = -L^{-1}(H_k), \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n-1,$$

donc :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= -L^{-1}N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -L^{-1}\left(\sum_{i=0}^n H_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= -\sum_{i=0}^n L^{-1}(H_i) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\ &= v_1 + v_2 + \dots + v_n - L^{-1}(H_n). \end{aligned}$$

Puis, à partir de (2.41), on peut trouver

$$v_{n+1} = -L^{-1}(H_n).$$

Ce résultat est identique à celui de (2.39) obtenu par la méthode de HPM. ■

Théorème 2.6. Soit B un espace de Banach.

1) $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ converge vers $S \in B$, si

$$\exists (0 \leq \lambda < 1) \quad \text{telque} \quad (\forall n \in \mathbb{N} \implies \|v_n\| \leq \lambda \|v_{n-1}\|). \quad (2.44)$$

2) $S = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$ vérifie

$$S = -L^{-1}N(S + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)). \quad (2.45)$$

Démonstration. 1) on a :

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|v_{n+1}\| \leq \lambda \|v_n\| \leq (\lambda)^2 \|v_{n-1}\| \leq \dots \leq \lambda^{n+1} \|v_0\|.$$

Pour $n, m \in \mathbb{N}, n \geq m$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\|S_n - S_m\| &= \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\| \\
&\leq \|S_n - S_{n-1}\| + \|S_{n-1} - S_{n-2}\| + \dots + \|S_{m+1} - S_m\| \\
&\leq \lambda^n \|v_0\| + \lambda^{n-1} \|v_0\| + \dots + \lambda^{m+1} \|v_0\| \\
&\leq (\lambda^n + \lambda^{n-1} + \dots + \lambda^{m+1}) \|v_0\| \\
&\leq (\lambda^{m+1} + \dots + \lambda^n + \dots) \|v_0\| \\
&\leq \lambda^{m+1} (1 + \lambda + \dots + \lambda^n + \dots) \|v_0\| \\
&\leq \frac{\lambda^{m+1}}{1 - \lambda} \|v_0\|.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0.$$

$(S_n)_{n \geq 0}$ est suite de Cauchy dans l'espace de Banach et elle est convergente, c'est-à-dire :

$$\exists S \in B, \text{ avec : } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S.$$

2) D'après (2.42), on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n(S_n + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
&= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} N_n\left(\sum_{i=0}^n v_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
S &= -L^{-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n H_i - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
&= -L^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} H_i - u_0 + L^{-1}(f(r)).
\end{aligned}$$

Par (2.43) et (2.37), pour $p = 1$, il vient

$$\sum_{i=0}^{\infty} H_i = N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i\right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
S &= -L^{-1} N\left(\sum_{i=0}^{\infty} v_i\right) - u_0 + L^{-1}(f(r)) \\
&= -L^{-1} N(S + v_0) - u_0 + L^{-1}(f(r)).
\end{aligned}$$



Lemme 2.1. *L'équation (2.45) est équivalent à :*

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0. \quad (2.46)$$

Démonstration. On écrit l'équation (2.45) comme suit :


$$S + u_0 = -L^{-1}N(S + v_0) + L^{-1}(f(r)).$$

En appliquant l'opérateur L à l'équation précédente, on obtient :

$$L(S + u_0) = -N(S + v_0) + f(r),$$

comme $u_0 = v_0$,

$$L(S + v_0) = -N(S + v_0) + f(r).$$

Soit $u = S + v_0 = \sum_{i=0}^{\infty} v_i$, l'équation (2.46) devient l'équation d'origine. La solution de l'équation (2.45) est la même que celle de la solution de $A(u) - f(r) = 0$. 

Définition 2.5. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit :*

$$\lambda_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \|v_i\| \neq 0 \\ 0, & \|v_i\| = 0. \end{cases}$$

Dans le Théorème 2.6 $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ converge vers la solution exacte, lorsque $0 \leq \lambda_i < 1$.

Si v_i et v'_i sont obtenus par deux différentes homotopies et $\lambda_i < \lambda'_i$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le taux de convergence de $\sum_{i=0}^{\infty} v_i$ est supérieure à $\sum_{i=0}^{\infty} v'_i$.

2.4.3 Applications numériques

Exemple 2.2. On considère l'équation suivante

$$u' + u^2 = 0, \quad t \geq 0, \quad t \in \Omega \text{ et } u(0) = 1, \quad (2.47)$$

d'où la solution exacte de cette équation est

$$u(t) = \frac{1}{1+t}. \quad (2.48)$$

Selon la méthode **HPM**, on peut construire l'homotopie suivante : $U : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(1-p)(v' - u'_0) + p(v' + v^2) = 0, \quad (2.49)$$

avec $u_0 = 1$. Les solutions de l'équation (2.47), peuvent être écrites sous forme de série

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots. \quad (2.50)$$

En remplaçant (2.50) dans (2.49) et identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , on obtient

$$\begin{aligned} p^0 : v'_0 &= u'_0, \\ p^1 : v'_0 &= -u'_0 - v_0^2, \quad v_1(0) = 0, \\ p^3 : v'_2 &= -2v_0 v_1, \quad v_2 = 2, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.51)$$

Donc, la solution de (2.47) est

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = 1 - t + t^2 + \dots \quad (2.52)$$

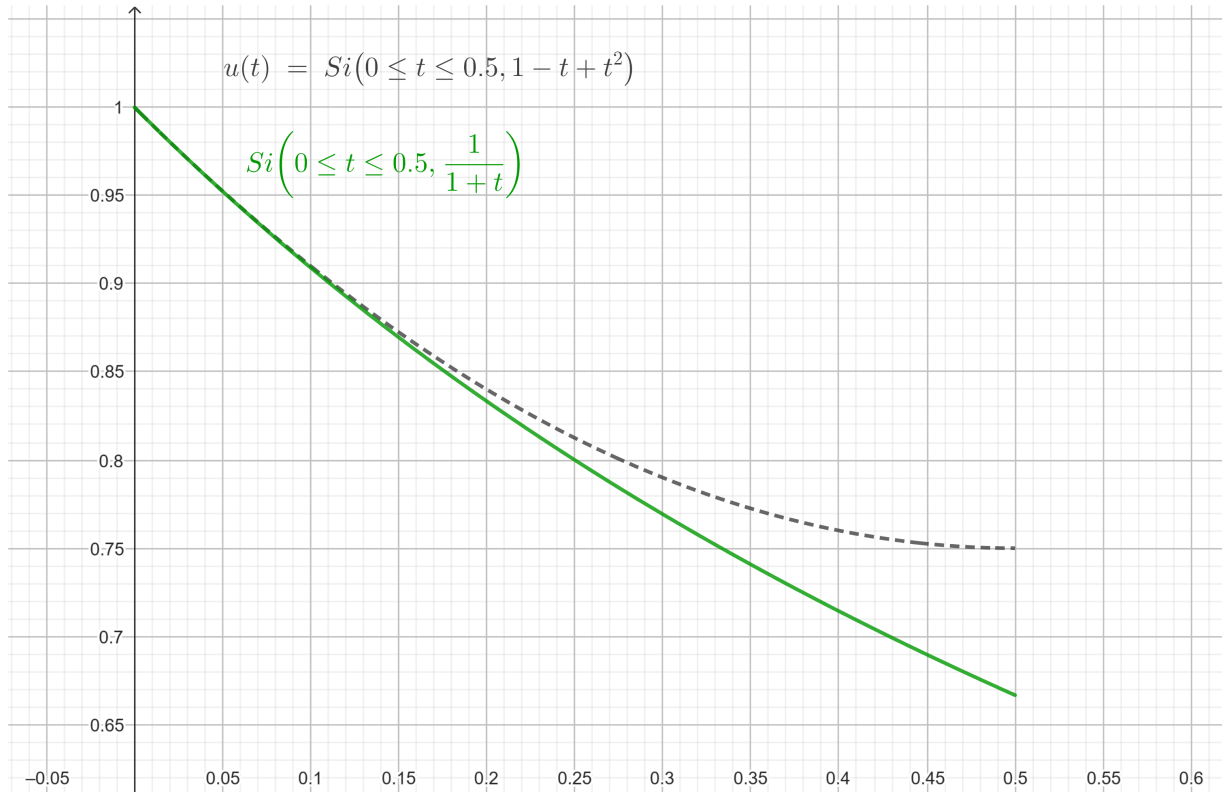


FIGURE 2.1: (vert) : La solution exacte et (noir) : La solution numérique

Exemple 2.3. Maintenant, on considère l'équation de **Riccati** suivante :

$$u' = 2u - u^2 + 1, \quad t \geq 0, \quad t \in \Omega. \quad \text{Avec } u(0) = 0. \quad (2.53)$$

La solution exacte de (2.53) est donnée par

$$u(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh\left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)\right) \quad (2.54)$$

D'autre part, le développement de Taylor de u ou voisinage de zéro est

$$u(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \dots \quad (2.55)$$

On cherche maintenant la solution avec la méthode (HPM), nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$U : \Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(1 - P)(v' - u'_0) + p(v' - 2v + v^2 - 1) = 0, \quad p \in [0, 1], \quad t \in \Omega. \quad (2.56)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p , on obtient

$$\begin{aligned}
 p^0 : v'_0 &= u'_0, \\
 p^1 : v'_1 + u'_0 + u_0^2 - 1 &= 0, \\
 p^2 : v'_2 + 2v_0v_1 &= 0, \\
 p^3 : v'_3 + v'_1 + 2v_0v_1 &= 0, \\
 p^4 : v'_4 + v'_1 + 2v_0v_3 + 2v_1v_2 &= 0, \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Alors, les premiers composants de la solution sont donnés par

$$\begin{aligned}
 p^0 : v'_0 &= t, \\
 p^1 : v'_1 &= \frac{1}{4}(-1 + e^t - 2t + 2t^2), \\
 p^2 : v'_2 &= \frac{1}{4}(t^2 - e^t t^2 + 2t^3), \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Mettant $p = 1$, la solution approximative de l'équation (2.53) est donnée par

$$u = v_0 + v_1 + v_2 + \dots, \tag{2.59}$$

ce qui veut dire que

$$u = t + \frac{1}{4}(-1 + e^t - 2t + 2t^2) + \frac{1}{4}(t^2 - e^t t^2 + 2t^3) + \dots. \tag{2.60}$$

D'autre part, après l'utilisation le développement de Taylor de e^t au voisinage de zéro, la solution approximative est donnée par

$$\begin{aligned}
 u(t) &= t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \dots \\
 &= 1 + \sqrt{2} \tanh \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right)
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

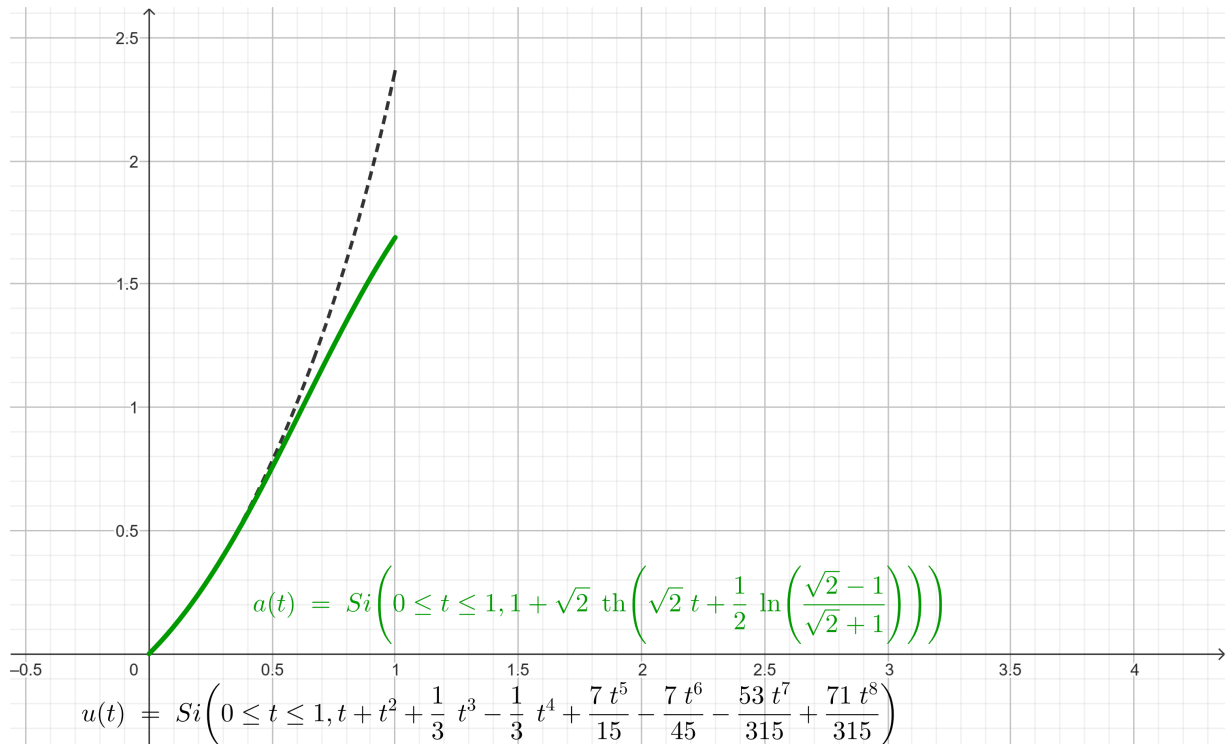


FIGURE 2.2: (vert) : La solution exacte et (noir) : La solution numérique

2.5 La méthode HPM combinée avec la transformation de Laplace

Dans les exemples suivant nous exposons la méthode de perturbation d'homotopie (HPM) combinée avec la transformation de Laplace (LT)

Exemple 2.4. On considère l'équation de **Riccati** suivante :

$$\begin{aligned} u' &= 2u - u^2 + 1, \quad t \in \Omega, \quad (\Omega = [0, \infty[) \\ u(0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.62)$$

la solution exacte est donnée par :

$$u(t) = 1 + \sqrt{2} \tanh \left(\sqrt{2}t + \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \right) \right),$$

d'autre part, le développement de Taylor de u au voisinage de 0 est

$$u(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^4 - \frac{7}{15}t^5 - \frac{7}{45}t^6 + \frac{53}{315}t^7 + \frac{71}{315}t^8 \dots,$$

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT-HPM). Appliquant l'opérateur \mathcal{L} à l'équation (2.62), on obtient

$$sU(s) - u(0) = \mathcal{L}(2u(t) - u^2(t) + 1) \quad (2.63)$$

d'où

$$U(s) - \frac{1}{s}u(0) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(2u(t) - u^2(t) + 1). \quad (2.64)$$

En appliquant l'inverse de l'opérateur \mathcal{L} à l'équation (2.64), on obtient

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L}(2u(t) - u^2(t) + 1) \right\}. \quad (2.65)$$

Nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$\begin{aligned} v(t; p) &: \Omega \times [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ v(t) - u(0) &= p \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L}(2u(t) - u^2(t) + 1) \right\} \end{aligned} \quad (2.66)$$

supposons que la solution de (2.62) soit écrite comme la série suivante

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t), \quad (2.67)$$

En remplaçant (2.67) dans (2.66), on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t) - u(0) = p \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{L} \left(2 \sum_{j=0}^{\infty} p^j u_j(t) - (p^j u_j(t))^2 \right) + 1 \right\}. \quad (2.68)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p , on trouve

$$\begin{aligned} p^0 : v_0 &= u(0) = 0 \\ p^1 : v_1 &= \mathcal{L}^{-1} (s^{-1} \mathcal{L} \{2v_0 - v_0^2 + 1\}) = t, \\ p^2 : v_2 &= \mathcal{L}^{-1} (s^{-1} \mathcal{L} \{2v_1 - v_0 v_1\}) = t^2, \\ p^3 : v_3 &= \mathcal{L}^{-1} (s^{-1} \mathcal{L} \{2v_2 - 2v_0 v_2 - v_1^2\}) = \frac{1}{3} t^3, \\ p^4 : v_4 &= \mathcal{L}^{-1} (s^{-1} \mathcal{L} \{2v_3 - v_0 v_3 + 2v_1 v_2\}) = -\frac{1}{3} t^4, \\ &\dots\dots\dots \\ p^i : v_i &= \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1} \mathcal{L} \left\{ 2v_{i-1} - \sum_{j=0}^{i-1} v_j v_{i-j-1} \right\} \right), \end{aligned} \quad (2.69)$$

lorsque $p \rightarrow 1$, (2.68) devient la solution approximative de l'équation (2.62), c-à-d,

$$\begin{aligned} u(t) &= \lim_{p \rightarrow 1} = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots \\ u(t) &= t + t^2 + \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{3} t^4 - \frac{7}{15} t^5 - \frac{7}{45} t^6 + \frac{53}{315} t^7 + \frac{71}{315} t^8 + \dots \end{aligned}$$

Exemple 2.5. Dans le rectangle $\Omega = (0, l) \times (0, T)$, on considère l'équation différentielle partielle non linéaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x, t) \in \Omega, \quad (2.70)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = x. \quad (2.71)$$

La solution exacte de (2.70) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{x}{1-t} \quad (2.72)$$

le développement de Taylor par rapport à t de la fonction u au voisinage de 0 est

$$u(x, t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 + \dots). \quad (2.73)$$

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT-HPM), en appliquant l'opérateur \mathcal{L} à l'équation (2.70), on obtient

$$sU(x, s) - u(x, 0) = \mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

d'où

$$U(x, s) - \frac{1}{s}u(x, 0) = \frac{1}{s}\mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \tag{2.74}$$

Appliquons l'opérateur \mathcal{L}^{-1} à l'équation (2.74), on obtient

$$u(x, s) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s}\mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) + u(x, 0),$$

nous pouvons construire l'homotopie suivante :

$$\begin{aligned} u(x, t, p) \Omega \times [0; 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ v(x, s) - u(x, 0) &= p\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s}\mathcal{L} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right), \end{aligned} \tag{2.75}$$

supposons que la solution de (2.70), soit écrite comme la série suivante

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(t). \tag{2.76}$$

En remplaçant (2.76) dans (2.75), on obtient

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(x, t) - u(x, 0) = p\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s}\mathcal{L} \left(\sum_{j=0}^{\infty} p^j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j \sum_{j=0}^{\infty} p^j \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) \right). \tag{2.77}$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p , on trouve :

$$\begin{aligned} p^0 : v_0(x, t) &= u(x, 0) = x \\ p^1 : v_1(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} \right) = -tx \\ p^2 : v_2(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - v_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_1 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} \right) = t^2x \\ p^3 : v_3(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} - v_0 \frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2 \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} \right) = -t^3x \\ &\dots\dots\dots \\ p^i : v_i(x, t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(s^{-1}\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u_{i-1}}{\partial x^2} - \sum_{j=0}^{i-1} v_j \frac{\partial v_{i-j-1}}{\partial x} \right\} \right), \end{aligned} \tag{2.78}$$

lorsque $p \rightarrow 1$, (2.77) devient la solution approximative de l'équation (2.70), c-à-d

$$u(t) = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots$$

$$u(t) = x(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + t^6 \dots)$$

Applications de la méthode HPM pour résoudre un problème pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales

3.1 Introduction

L'étude d'un problème différentiel pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales est un domaine de recherche en mathématiques appliquées qui vise à comprendre le comportement de certaines équations différentielles qui combinent des propriétés hyperboliques et paraboliques. Ces équations apparaissent dans de nombreux domaines de la physique et de l'ingénierie, tels que la mécanique des fluides, l'acoustique, l'électromagnétisme et la thermodynamique. Les conditions intégrales sont des conditions qui lient les valeurs de la solution à des intégrales de la solution elle-même ou de ses dérivées.

L'étude de ces problèmes est complexe car les équations impliquées ne peuvent pas être résolues de manière analytique dans la plupart des cas. Les méthodes numériques sont donc souvent utilisées pour obtenir des solutions approchées.

Le problème différentiel pseudo-hyperbolique avec des conditions intégrales est un problème mathématique complexe qui ne peut souvent pas être résolu exactement. La méthode de perturbation homotopie est une méthode numérique qui peut être utilisée pour trouver des solutions approchées à ces problèmes.

*Dans [4], Ahcene Merad, Abdelfatah Bouziani and Serkan Araci, sont traités l'existence et l'unicité de la solution. La démonstration est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré. Ceci nous motivés pour étudier. Nous avons également utilisé une méthode semi-analytique pour estimer cette solution est la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (**LT-HPM**) pour obtenir la solution numérique, quelques exemples sont donnés pour justifier l'efficacité de cette méthode.*

3.2 Position du problème

Dans le domaine rectangulaire

$$Q = \Omega \times I = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\},$$

on considère une équation différentielle pseudo-hyperbolique :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial^2 x} = g(x, t), \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} \ell v &= v(x, 0) = \Phi(x), 0 < x < 1, \\ qv &= v_t(x, 0) = \Psi(x), 0 < x < 1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

et les conditions intégrales

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(x, t) dx &= n(t), 0 < t \leq T, \\ \int_0^1 xv(x, t) dx &= m(t), 0 < t \leq T, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où g, Φ, Ψ, a, n et m , des fonctions connues, α, β et T des constants positives, de plus les fonctions $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ satisfaisant aux conditions de compatibilité suivantes :

$$\int_0^1 \Phi dx = n(0), \int_0^1 x\Phi dx = m(0), \int_0^1 \Psi dx = n'(0), \int_0^1 x\Psi dx = m'(0).$$

3.3 Méthode de transformation de Laplace

Supposons que $v(x, t)$ est défini et est d'ordre exponentiel pour $t \geq 0$ c'est-à-dire qu'il existe $A, \gamma > 0$ et $t_0 > 0$ tels que $|v(t)| \leq A \exp(\gamma t)$ pour $t \geq t_0$. Supposons aussi que la transformée de Laplace $V(x, s)$, existe et est donnée par

$$V(x, s) = \mathcal{L}(v(x, t))(s) = \int_0^\infty v(x, t) e^{-st} dt,$$

où s est un paramètre positif. Prenant les transformations de Laplace des deux côtés de (3.1), nous obtenons

$$-(\alpha + s\beta) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, s) + s^2 V(x, s) = G(x, s) + \psi(x) + s\phi(x) - \beta\phi''(x),$$

où

$$G(x, s) = \mathcal{L}(g(x; t))(s); t \longrightarrow s$$

$$\int_0^1 V(x, s) dx = N(s), \quad (3.4)$$

$$\int_0^1 xV(x, s) dx = M(s)$$

$$N(s) = \mathcal{L}(n)$$

$$M(s) = \mathcal{L}(m).$$

Après l'application de la transformation de Laplace et d'après la technique HPM, pour déterminer la solution approché de l'équation (3.1) nous construisons une homotopie proposée par Madani et al [24], sous la forme suivant :

$$V(x, s) = \frac{p}{s^2} \left((\alpha + s\beta) \frac{\partial^2 (V(x; s))}{\partial x^2} + G(x; s) \right) + \frac{1}{s^2} \left(\psi(x) + s\Phi(x) - \beta \frac{\partial^2 (\Phi(x))}{\partial x^2} \right) \quad (3.5)$$

La solution de L'équation (3.5) s'écrit sous la forme d'une série comme suit

$$V(x; s) = \sum_{i=0}^{\infty} p^i V_i(x, s), \quad (3.6)$$

où $V_i(x, s); i = 1, 2, 3, \dots$ sont des fonctions qui devraient être déterminées. En substituant (3.6) dans (3.5), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} p^i V_i(x, s) &= \frac{p}{s^2} \left((\alpha + s\beta) \frac{\partial^2 (\sum_{i=0}^{\infty} p^i V_i(x, s))}{\partial x^2} + G(x; s) \right) \\ &+ \frac{1}{s^2} \left(\psi(x) + s\Phi(x) - \beta \frac{\partial^2 (\Phi(x))}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p dans (3.7), on trouve :

$$\begin{aligned}
p^0: V_0(x, s) &= \frac{1}{s^2} \left(\psi(x) + s\Phi(x) - \beta \frac{\partial^2(\Phi(x))}{\partial x^2} \right) \\
p^1: V_1(x, s) &= \frac{\alpha + s\beta}{(s^2)^2} \left(s \frac{\partial^2(\Phi(x))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Psi(x))}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^4(\Phi(x))}{\partial x^4} + \frac{\alpha + s\beta}{(s^2)} G(x; s) \right) \\
&\vdots \\
p^n: V_n(x, s) &= \frac{\alpha + s\beta}{s^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V_{n-1}(x, s), \quad (\text{pour } n \geq 2),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

alors :

$$\begin{aligned}
V_0(x, s) &= \frac{1}{s^2} \left(\psi(x) + s\Phi(x) - \beta \frac{\partial^2(\Phi(x))}{\partial x^2} \right) \\
&\vdots \\
V_n &= \left(\frac{\alpha + s\beta}{s^2} \left(-\beta \Phi^{(2n+2)}(x) + \Psi^{(2n)}(x) + s\Phi^{(2n)}(x) \right) + \frac{1}{s^2} G^{(2n-2)}(x, s) \right) \\
&\times \left(\frac{\alpha + s\beta}{s^2} \right)^{n-1} \quad \text{pour } (n \geq 1).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Lorsque $p \rightarrow 1$ devient la solution approximative de l'équation (3.1)

$$V(x, s) \simeq H_n(x, s) = \sum_{i=0}^n V_i(x, s).$$

La solution $v(x, t)$ est :

$$v(x, t) \simeq \mathcal{L}^{-1}(H_n(x, s)).$$

Exemple 3.1. On considère une équation différentielle pseudo-hyperbolique :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial^2 x} &= -e^x \sinh t \\
\Phi(x) = e^x, \Psi(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\
n(t) = (e - 1) \cosh(t), \quad m(t) = \cosh(t), \quad 0 < t \leq T,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

La solution exacte est $v(x, t) = e^x \cosh t$.

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans 3.9, on obtient :

$$\begin{aligned}
 V_0(x, s) &= \frac{s-1}{s^2} e^x \\
 V_n(x, s) &= \left(\frac{s^4 - 3s^2 + 1}{s^6 - s^4} \right) \left(\frac{1+s}{s^2} \right)^{n-1} e^x \quad (n \geq 1).
 \end{aligned}
 \tag{3.11}$$

alors : $V(x, s) \simeq H_n(x, s) = \frac{s-1}{s^2} e^x + \left(\frac{s^4 - 3s^2 + 1}{s^6 - s^4} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1+s}{s^2} \right)^{i-1} e^x,$ (3.12)

pour $n = 6$

$$H_6(x, s) = e^x \left(\frac{32}{s} + \frac{32}{s^2} + \frac{32}{s^3} + \frac{32}{s^4} + \frac{32}{s^5} + \frac{32}{s^6} + \frac{32}{s^7} + \frac{31}{s^8} + \frac{25}{s^9} + \frac{11}{s^{10}} - \frac{4}{s^{11}} - \frac{9}{s^{12}} - \frac{5}{s^{13}} - \frac{1}{s^{14}} + \frac{1}{2(s+1)} - \frac{63}{2(s-1)} \right)$$

alors :

$$\begin{aligned}
 v(x; t) \simeq \mathcal{L}^{-1}(H_6(x, s)) &= (\cosh(t) - 32e^t + 32 + 32t + 16t^2 + (32/6)t^3 + (32/24)(t^4) + (32/120)t^5 \\
 &\quad + (32/720)t^6 + (31/5040)t^7 + (5/8064)t^8 + (11/362880)t^9 - (1/907200)t^{10} \\
 &\quad - (1/4435200)t^{11} - (1/95800320)t^{12} - (1/1932053504)t^{13}) e^x.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Tableau de l'erreur relative $Er = \frac{v_{exa} - v_{hpm}}{v_{exa}}$.

t	v_{exa}	v_{hpm}	Erreur relative
0.1	$1.0050041680558 e^x$	$1.00500416803417 e^x$	$2.15293997922188e-11$
0.2	$1.02006675561908 e^x$	$1.02006675260428 e^x$	$2.95548628291563e-09$
0.3	$1.04533851412886 e^x$	$1.04533845814587 e^x$	$5.35548906338043e-08$
0.4	$1.08107237183845 e^x$	$1.08107191672627 e^x$	$4.20982160980611e-07$
0.5	$1.12762596520638 e^x$	$1.12762361370152 e^x$	$2.08535891692341e-06$
0.6	$1.18546521824227 e^x$	$1.18545610086848 e^x$	$7.69096692756663e-06$
0.7	$1.25516900563094 e^x$	$1.25514002021245 e^x$	$2.30928411715609e-05$
0.8	$1.33743494630484 e^x$	$1.33735528273839 e^x$	$5.95644421234532e-05$
0.9	$1.43308638544877 e^x$	$1.43289052652222 e^x$	0.000136669309359684
1	$1.54308063481524 e^x$	$1.54263970992734 e^x$	0.000285743257970118

La solution exacte et approximative de (3.10) est illustrée dans la figure 3.1.

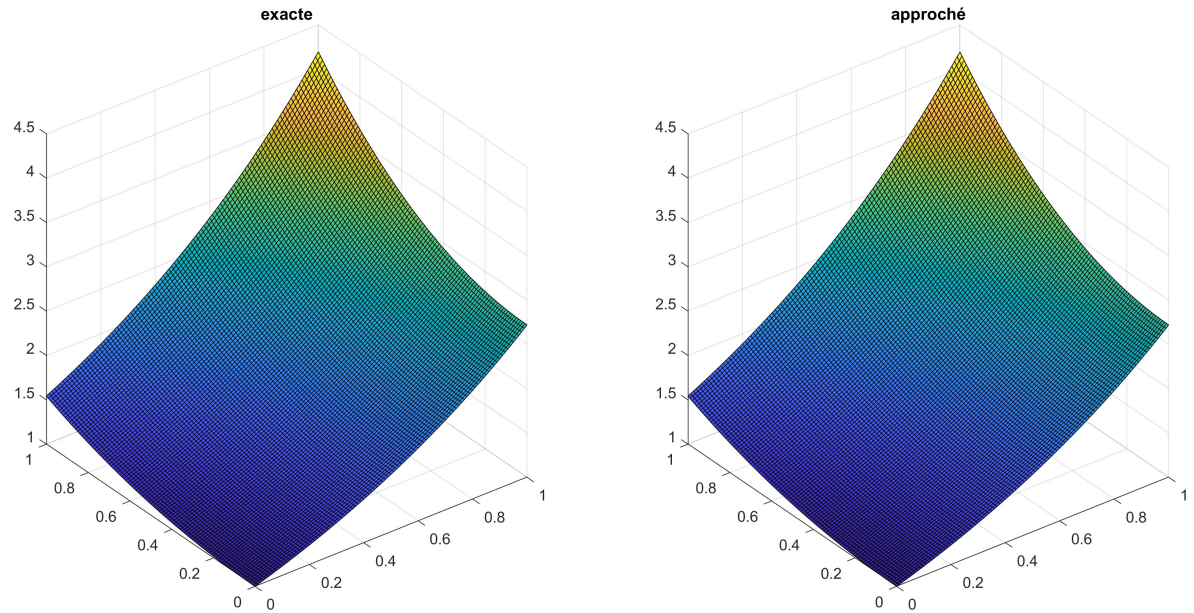


FIGURE 3.1: La solution exacte -La solution Approximative

Exemple 3.2. Prenons :

$$g(x, t) = 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \text{ et } \alpha = 0.5, \beta = 0.5 \quad (3.14)$$

$$\Phi(x) = e^x, \Psi(x) = e^x \text{ et } 0 < x < 1,$$

$$n(t) = (e - 1)e^t, m(t) = e^t, 0 < t < T,$$

la solution exacte est : $v(x, t) = e^x e^t$.

Ainsi, on cherche la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans 3.9 on obtient :

$$V_0 = \frac{2s+1}{2s^2},$$

$$V_n = \left(\frac{s+1}{2s^2}\right)^n \frac{2s+1}{2s^2} e^x.$$

Alors

$$V(x, s) \simeq H_n(x, s) = \sum_{j=0}^n V_j(x, s) = e^x \left(1 - \left(\frac{s+1}{2s^2}\right)^n\right) \frac{2s+1}{2s^2 - s - 1},$$

pour $n = 4$

$$V(x, s) \simeq H_4(x, s) = \sum_{j=0}^4 V_j(x, s) = e^x \left(1 - \left(\frac{s+1}{2s^2}\right)^5\right) \frac{2s+1}{2s^2 - s - 1}$$

$$H_4(x, s) = e^x \frac{32s^9 + 32s^8 + 32s^7 + 32s^6 + 32s^5 + 31s^4 + 26s^3 + 16s^2 + 6s + 1}{32s^{10}}$$

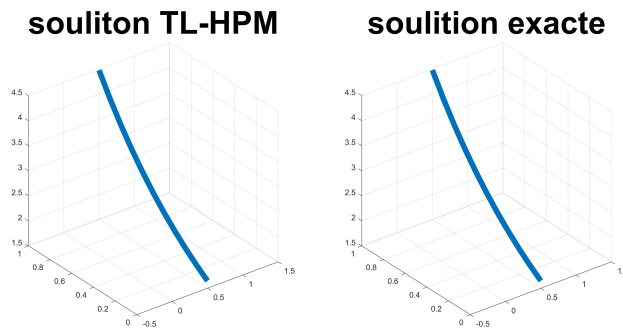
$$= e^x \left\{ \frac{32s^9}{32s^{10}} + \frac{32s^8}{32s^{10}} + \frac{32s^7}{32s^{10}} + \frac{32s^6}{32s^{10}} + \frac{32s^5}{32s^{10}} + \frac{31s^4}{32s^{10}} + \frac{26s^3}{32s^{10}} + \frac{16s^2}{32s^{10}} + \frac{6s}{32s^{10}} + \frac{1}{32s^{10}} \right\}$$

$$v(x, t) \simeq \mathcal{L}^{-1} H_4(x, t) = e^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \frac{31t^5}{3840} + \frac{13t^6}{11520} + \frac{t^7}{10080} + \frac{t^8}{215040} + \frac{t^9}{11612160}\right),$$

$$\text{Tableau de l'erreur relative } Er = \frac{v_{\text{exa}} - v_{\text{hpm}}}{v_{\text{exa}}}$$

pour $x = 0.5$, on obtient

t	Exacte	Approxumative	Erreur relative
0.1	1.8221	1.8221	2.6011e-09
0.2	2.0138	2.0138	8.2956e-08
0.3	2.2255	2.2255	6.2653e-07
0.4	2.4596	2.4596	2.6208e-06
0.5	2.7183	2.7183	7.9251e-06
0.6	3.0042	3.0041	1.9507e-05
0.7	3.3201	3.32	4.1641e-05
0.8	3.6693	3.669	8.006e-05
0.9	4.0552	4.0546	0.00014207
1	4.4817	4.4806	0.00023661



La solution exacte et approximative de (3.10) est illustrée dans la figure 3.2.

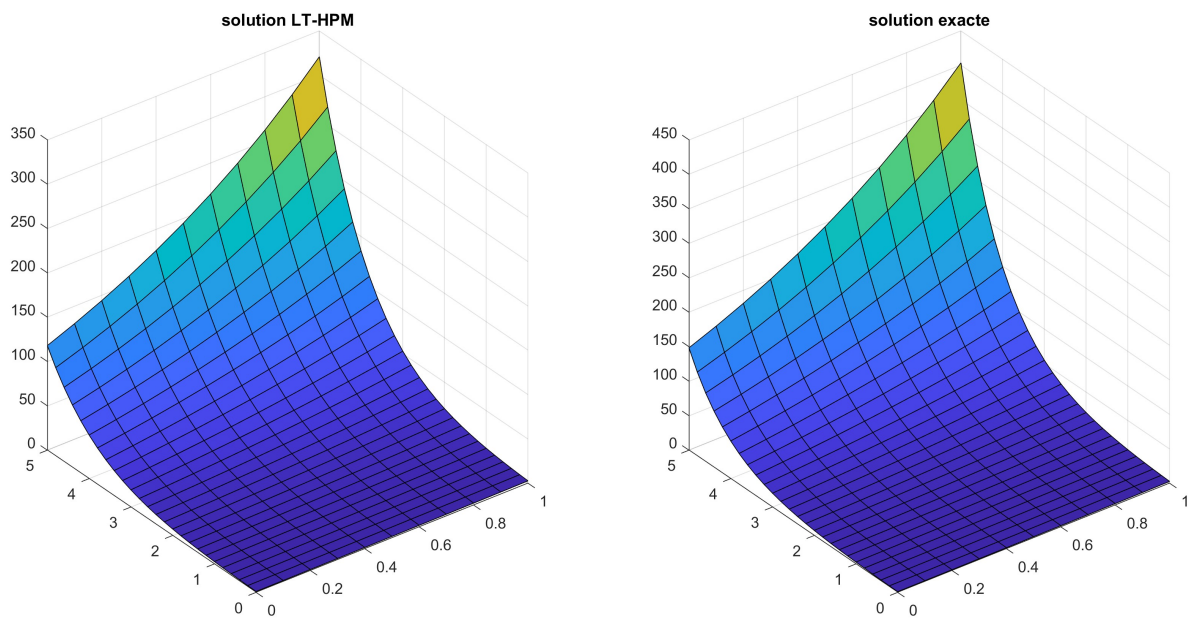


FIGURE 3.2: La solution exacte et La solution Approximative

Applications de la méthode HPM pour résoudre un problème des équations aux dérivées partielles fractionnaires d'ordre supérieur avec des conditions purement intégrales

4.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie un problème avec condition purement intégrales pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires d'ordre supérieur, l'existence et l'unicité de la solution est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré est démontré par [25] Said Mesloub et Ften Aldosari. Nous avons également utilisé une méthode semi-analytique pour estimer cette solution est la méthode de perturbation de l'homotopie avec la transformée de Laplace (LT-HPM) pour obtenir la solution numérique, quelques exemples sont donnés pour justifier l'efficacité de cette méthode.

4.2 Position du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}v = {}^c \partial_t^{\alpha+1} v + (-1)^m \theta(t) \frac{\partial^{2m}}{\partial x^{2m}} = f(x, t), \quad x \in (0, 1) \quad t \in (0, T), \\ l_1 v = v(x, 0) = \Phi(x), \quad l_2 v = v_t(x, 0) = \Psi(x), \quad x \in (0, 1), \\ \int_0^1 x^i v(x, t) dx = 0, \quad i = 0, \dots, 2m-1, \quad t \in (0, T), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

4.3 Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT- HPM)

En appliquant la transformation de Laplace aux deux cotés de l'équation (4.1), on obtient :

$$\mathcal{L}v(x; t) = -s^{-\alpha-1} \mathcal{L} \left\{ (-1)^{2m} \theta(t) \frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}} - f(x, t) \right\} + \Phi(x) + s^{-1} \Psi(x). \quad (4.2)$$

En prenant la transformation de Laplace inverse \mathcal{L}^{-1} de l'équation (4.2), on trouve :

$$v(x; t) = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha-1} \mathcal{L} \left\{ (-1)^{2m} \theta(t) \frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}} - f(x, t) \right\} \right\} + \Phi(x) + t\Psi(x). \quad (4.3)$$

D'après la technique **HPM**, pour déterminer la solution approchée de l'équation (4.3), nous construisons une homotopie proposé par Madani et al [24], sous la forme suivant :

$$v(x, t) - \Phi(x) - t\Psi(x) = -p \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha-1} \mathcal{L} \left\{ (-1)^{2m} \theta(t) \frac{\partial^{2m} v}{\partial x^{2m}} - f(x, t) \right\} \right\} \right]. \quad (4.4)$$

La solution de l'équation (4.4) s'écrit sous la forme d'une série comme suit

$$v(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(x, t), \quad (4.5)$$

En substituant (4.5) dans (4.4), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(x, t) - \Phi(x) - t\Psi(x) = \\ & -p \left[\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha-1} \mathcal{L} \left\{ (-1)^{2m} \theta(t) \frac{\partial^{2m} (\sum_{j=0}^{\infty} p^j v_j(x, t))}{\partial x^{2m}} - f(x, t) \right\} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

En identifiant les termes avec ceux de mêmes puissance de p dans (4.6), on trouve :

$$\begin{cases} v_0 = \Phi(x) + t\Psi(x) \\ v_1 = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha-1} \mathcal{L} \left\{ (-1)^{2m} \theta(t) \frac{\partial^{2m} (v_0(x, t))}{\partial x^{2m}} - f(x, t) \right\} \right\} \\ v_{n+1} = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-\alpha-1} \mathcal{L} \left\{ (-1)^{2m} \theta(t) \frac{\partial^{2m} (v_n(x, t))}{\partial x^{2m}} \right\} \right\} ; (n \geq 1) \end{cases} \quad (4.7)$$

lorsque $p \rightarrow 1$, (4.6) devient la solution approximative de l'équation (4.1), c-à-d

$$v(x, t) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} v_j(x, t). \quad (4.8)$$

Exemple 4.1. Prenons :

$${}_0^c \partial_t^{\frac{1}{2}+1} v + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{3}{4} \sqrt{\pi} [e^x + 6ex - 18x + 10 - 4e] + 2t^{\frac{3}{2}} e^x \quad (4.9)$$

avec

$$\Phi(x) = 0, \Psi(x) = 0 \quad (4.10)$$

et

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad (4.11)$$

la solution exacte est : $v(x, t) = (e^x + 6ex - 18x + 10 - 4e) t^{\frac{3}{2}} e^x$.

On cherche maintenant la solution selon la méthode (LT-HPM), par substitution des données précédentes dans (4.1), on obtient :

$$v_0 = \Phi(x) + t\Psi(x) = 0$$

$$v_1 = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1.5} \mathcal{L} \left\{ 2 \frac{\partial^2 (v_0(x, t))}{\partial x^2} - f(x, t) \right\} \right\} = [e^x + 6ex - 18x + 10 - 4e] \left(\frac{4t^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} \right) + \frac{\sqrt{\pi} t^3}{4} e^x$$

$$v_2 = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1.5} \mathcal{L} \left\{ 2 \frac{\partial^2 (v_1(x, t))}{\partial x^2} \right\} \right\} = -e^x \left[\frac{t^3}{3} + \frac{32t^{\frac{9}{2}}}{315} \right]$$

$$v_3 = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1.5} \mathcal{L} \left\{ 2 \frac{\partial^2 (v_2(x, t))}{\partial x^2} \right\} \right\} = e^x \left[\frac{128t^{\frac{9}{2}}}{945\sqrt{\pi}} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}} t^6}{120} \right]$$

$$v_4 = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1.5} \mathcal{L} \left\{ 2 \frac{\partial^2 (v_3(x, t))}{\partial x^2} \right\} \right\} = -e^x \left[\frac{t^6}{90} + \frac{1024t^{\frac{15}{2}}}{675675} \right]$$

$$v_5 = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ s^{-1.5} \mathcal{L} \left\{ 2 \frac{\partial^2 (v_4(x, t))}{\partial x^2} \right\} \right\} = e^x \left[\frac{4096t^{\frac{15}{2}}}{2027025\sqrt{\pi}} + \frac{\pi^{\frac{1}{2}} t^9}{15120} \right]$$

⋮

⋮

(4.12)

La solution exacte et approximative de (4.9) est illustrée dans la figure 4.1.

pour $x = 0.5$ on a :

4.3 Méthode de perturbation de l'homotopie avec transformation de Laplace (LT- HPM)47

t	Exacte	Approxumative	Erreur relative
0.01	-6.9561e-05	-5.1047e-05	0.26615
0.02	-0.00019675	-0.00013776	0.29983
0.03	-0.00036145	-0.00023729	0.34349
0.04	-0.00055648	-0.00033654	0.39524
0.05	-0.00077771	-0.00042461	0.45403
0.06	-0.0010223	-0.00049161	0.51913
0.07	-0.0012883	-0.00052816	0.59003
0.08	-0.001574	-0.00052519	0.66633
0.09	-0.0018781	-0.00047383	0.74771
0.1	-0.0021997	-0.0003653	0.83393

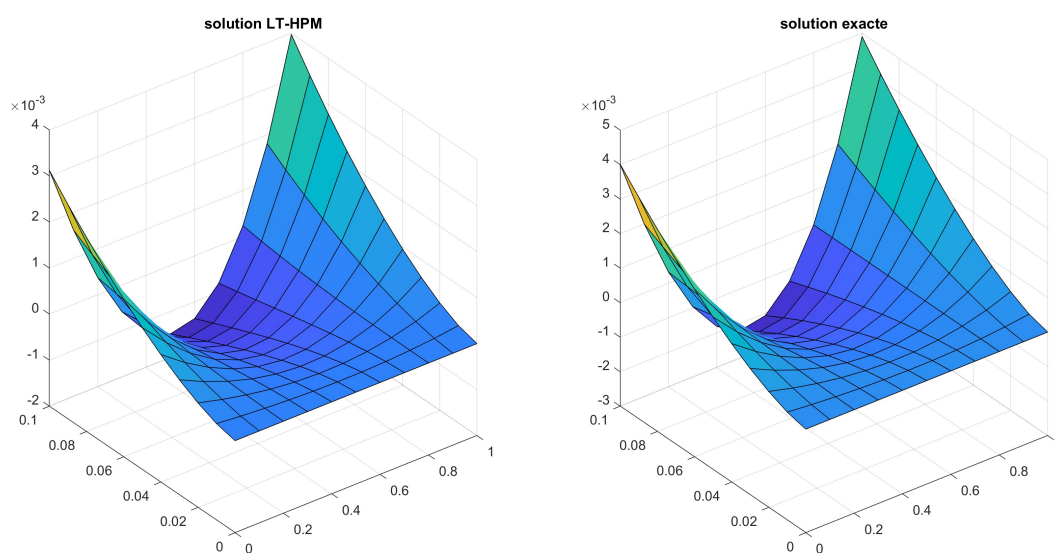


FIGURE 4.1: La solution exacte -La solution Approximative

Conclusion et Perspectives

Conclusion

Dans ce mémoire, la méthode de perturbation de l'homotopie a été utilisée avec succès pour résoudre les problèmes pseudo-hyperbolique et équations aux dérivées partielles et fractionnaires. Il a été démontré que la méthode de perturbation d'homotopie fonctionne bien dans le cadre de plusieurs exemples simples pour lesquels les solutions exactes sont connues et peuvent être utilisées à des fins de comparaison.

En effet, ces exemples indiquent que la méthode de perturbation d'homotopie fournit une excellente approximation pour la solution exacte.

Perspectives

✚ Il faut améliorer et développer la méthode HPM pour l'étude des problèmes avec des conditions différentes comme les conditions de type Neumann, mixte, intégrales...etc.

✚ Il faut améliorer la méthode pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.

✚ Il faut déterminer le taux de convergence.

Fiches A

Dans ce qui suit, nous avons essayé de donner un compte rendu historique de certaines des personnalités mentionnées dans notre mémoire, ce qui a eu un impact important sur le travail et les recherches qu'ils ont présentés au monde.



FIGURE 5.1: Georg Friedrich Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann, Né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania, Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.

En 1840, Bernhard s'établit à Hanovre pour vivre chez sa grand-mère et aller au collège. Après le décès de sa grand-mère en 1842, il va à Lunebourg pour continuer ses études secondaires. Au lycée, Riemann étudie la Bible intensivement, mais il est distrait par les mathématiques; il essaye même de prouver, mathématiquement, l'exactitude de la Genèse. Ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique.

En 1846, âgé de 19 ans, grâce à l'argent de sa famille, il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir pasteur afin de financer sa famille.

En 1847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord à l'université de Göttingen où il rencontre Carl Friedrich Gauss, puis à l'université de Berlin, où il a entre

autres comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet. Il effectue sa thèse à Gottingen sous la direction de Gauss.

Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom.

On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann. Intéressé par la dynamique des gaz, il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et résout un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème de Riemann.



FIGURE 5.2: Joseph Liouville

Joseph Liouville, Né le 24 mars 1809, Joseph est le fils d'un militaire qui survit aux campagnes napoléoniennes et qui, en 1814, établit sa famille à Toul.

Joseph Liouville est diplômé de l'école polytechnique en 1827. Deux ans plus tard, il intègre l'école des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur.

Il obtient le doctorat *ès sciences mathématiques* en 1836 devant la faculté sous la direction de Simeon Denis Poisson et Louis Jacques Thenard. Après quelques années dans diverses institutions comme assistant et comme professeur à l'école centrale (1833, où il était répétiteur depuis 1831), il est nommé professeur à l'école polytechnique en 1838. Il obtient une chaire en mathématique au Collège de France en 1850 et une chaire en mécanique à la Faculté des sciences de Paris en 1857. Il est élu membre de l'Académie des sciences le 3 juin 1839 (il en sera président pendant l'année 1870).

À côté de ses réussites académiques, il était un remarquable organisateur. Liouville fonda en 1836 le *Journal de mathématiques pures et appliquées* appelé parfois *journal de Liouville*, qui garde sa haute réputation de nos jours (il est édité depuis 1997 par l'éditeur anglo-néerlandais Elsevier Science). Il a beaucoup publié dans ce journal, en son nom ou en utilisant le pseudo nyme Besge.

Il fut le premier à lire les travaux inédits d'Évariste Galois, en reconnut l'importance et les publia dans son journal en 1846. Le mathématicien Olry Terquem fut l'un des célèbres auteurs de son journal. Liouville s'impliqua aussi en politique et fut membre de l'assemblée constituante en 1848. Cependant, après sa défaite aux élections à la députation en 1849, il quitta la politique. D'un point de vue familial, on sait que Liouville a eu deux filles, Céline et Marie.



FIGURE 5.3: Michele Caputo

Michele Caputo

Anniversaire : le 5 mai 1927.

Lieu de naissance : Ferrara, Italie.

Degrés :

- 1950 *Mathématiques (laurea) Université de Ferrare.*
- 1955 *Physique (laurea) Université de Bologne.*
- 1959 *Géodésie (libera docenza) Ministère de la éducation d'Italie.*

Bibliographie

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, In : North-Holland Mathematics Studies, Amsterdam : Elsevier Science, 2006.
- [2] A.Necib, A.Merad. *Laplace transform and Homotopy perturbation methods for solving the pseudo-hyperbolic integro-differential problems with purely integral conditions*, *Kragujevac Journal of Mathematics*, accepted. 2018.
- [3] A. Khalouta. *Résolution des équations aux dérivées partielles linéaires et non-linéaires moyennant des approches analytiques. Extension aux cas d'EDP d'ordre fractionnaire*, thèse de Doctorat, Université Ferhat ABBAS SETIF 1, Algeria, 2019.
- [4] Ahcene Merad¹, Abdelfatah Bouziani¹ and Serkan Araci² : *Existence and Uniqueness for a Solution of Pseudohyperbolic equation with Nonlocal Boundary Condition*, *Appl. Math. Inf. Sci.* 9, No. 4, 1855-1861 (2015)
- [5] Ayatia, Z., Biazar, J. *On the convergence of Homotopy perturbation method*, *J. Egyptian Math. Soci.*, 23,(2015), 424-428.
- [6] B. Ahmad, A. Alsaedi, B. Alghamdi, *Analytic approximation of solutions of the forced Duffing equation with integral boundary conditions*, *Nonlinear Anal Real World Appl.*, 2008(2008), 9 :1727-1740.
- [7] B. Ahmad, J.J. Nieto, *Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions*, *Comput. Math. Appl.* 58 (2009), 1838-1843.
- [8] Biazar, J., & Aminikhah, H. (2009). *Study of convergence of homotopy perturbation method for systems of partial differential equations*. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(11-12), 2221-2230.
- [9] Elzaki, T. M. *The New Integral Transform "Elzaki Transform"*, *Glo. J. Pure. App. Math.*, 7(1), 57-64, (2011).
- [10] El Qarnia, H. *Application of homotopy perturbation method to non-homogeneous parabolic partial and non linear differential equations*, *W. J. Model. Sim.*, 5(3),(2009),225-231.
- [11] Ghorbani, A. (2009). *Beyond Adomian polynomials : he polynomials*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3), 1486-1492.

- [12] He, J. H, Homotopy perturbation technique, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*; 178(3), (1999), 257-262.
- [13] H. Weimin k. Atkinson, *Theoretical numerical analysis a fonctionnal analysis framework*. Bysshaya Shkola, Moscow, 1993.
- [14] Harkat, Y., & Necib, A. E. H. (2021). Résolution numérique des équations différentielles non linèaire et aux dérivées partielles fractionnaires par la méthode de perturbation d'homotopie.
- [15] He, J. H, Acoupling method of homotopy technique and perturbation technique for non-linear problems, *Int. J. Non-Linear. Mech*; 35, (2000), 37-43.
- [16] He, J. H, A new perturbation technique which is also valid for large parameters, *J. Sound Vib*; 229, (2000), 1257-1263.
- [17] He, J. H, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos Solitons Fractals*; 26(3), (2005), 695-700.
- [18] He, J. H, Homotopy perturbation technique, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*; 178(3), (1999), 257-262.
- [19] He, J. H, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, *Int. J. Modern Phys. B*; 20(10), (2006), 1141-1199.
- [20] I. Podlubny, *Fractional Differentrial Equations*, San Diego : Academic Press, 1999.
- [21] I. Podlubny. *Fractional-order system and fractional-order controllers*. UEF-03-94. Slovak Acad. Sci., Kosice, 1994.
- [22] K. Balachandran, J.J. Trujillo, The nonlocal Cauchy problem for nonlinear fractional integro differential equations in Banach spaces, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 4587-4593..
- [23] M. Belmekki, J.J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation, *Bound. Value Probl.* 2009, 18 p. Article ID 324561.
- [24] Madani, M., Fathizadeh, M., Khan, Y., & Yildirim, A. (2011). On the coupling of the homotopy perturbation method and Laplace transformation. *Mathematical and Computer Modelling*, 53(9-10), 1937-1945.
- [25] S .Mesloub, F .Aldosari : Even Higher Order Fractional Initial Boundary Value Problem with Nonlocal Constraints of Purely Integral Type, *Symmetry* 2019, 11(3), 305; <https://doi.org/10.3390/sym11030305>.
- [26] S. Momani, Z. odibat, Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order. Volume 365, Issues 5?6, Pages 345-350. 11 June 2007.
- [27] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications*, Springer.
- [28] R.P. Agarwal, M. Mechan et D. O'regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge university press.
- [29] Tarasov, V. E. *Fractional dynamics : applications of fractional calculus to dynamics of particles, Fields and media*. Springer Science Business Media, 2011.
- [30] Watugula, G. K. Sumudu Transform : a new integral transform to Solve differential equations and control engineering problems, *Int. J. Math. Educ. Sci. Tech.*, 24(1), (1993).