

محاضرات وتمرين
في
الرياضيات المالية والاكتوارية



د. زرمان كريم

جامعة عباس لغزور قسنطينة

إهداء

إلى الوالدين الكريمين

إلى زوجتي وابنتي الحبيبتين

إلى إخوتي وأخواتي الأعزاء

إلى كل أفراد العائلة الطيبة

أهدي هذا العمل

الصفحة	فهرس المحتويات
04	المحاضرة الاولى: مفاهيم اساسية في الرياضيات الاكتوارية.....
11	المحاضرة الثانية: التوزيع الاحتمالي الاجمالي وقانون الاعداد الكبيرة.....
17	المحاضرة الثالثة: نمذجة معدلات الخسارة.....
25	المحاضرة الرابعة: جداول الحياة والوفاة.....
34	المحاضرة الخامسة: الفائدة البسيطة والفائدة المركبة.....
40	المحاضرة السادسة: دفعات نهاية المدة.....
44	المحاضرة السابعة: دفعات بداية المدة.....
48	المحاضرة الثامنة: استهلاك القروض بدفقات ثابتة.....
58	المحاضرة التاسعة: استهلاك القروض باستهلاكات ثابتة.....
63	المحاضرة العاشرة: أسئلة وأمثلة محلولة.....
79	قائمة المراجع.....



1- مفهوم الرياضيات الاكتوارية:

العلم الاكتواري أو علم تخمين المخاطر Actuarial science هي ذلك المبحث العلمي الذي يستخدم الطرق الحسابية والإحصائية لتقدير حجم المخاطر في قطاع التأمين والصناعات المالية. والاكتواريون هم هؤلاء الأشخاص المؤهلون من حيث التعليم والخبرة في هذا المجال. والعلوم الاكتوارية تضم عدداً من المواضيع ذات العلاقة، بما في ذلك الاحتمالات والحساب والإحصاء والتمويل والاقتصاد وبرمجة الحاسوب. ولعل جداول الحياة والوفاة التي تستخدمها شركات التأمين على الحياة هي أشهر تطبيقات هذا العلم. وقد شهد هذا العلم تغيراتٍ ثورية خلال العقود القليلة الماضية مع انتشار الحواسيب فائقة السرعة والدمج الحاصل بين النماذج الاكتوارية مع النظرية المالية الحديثة.

واليوم فإن العديد من الجامعات لديها برامج دراسية جامعية وعليا في العلم الاكتواري، خصوصاً وأن بعض الدراسات تشير إلى أهمية وظائف الاكتواريين وتزايد الطلب عليهم في المستقبل، حيث يوجد طلب على هذا التخصص سواء في شركات التأمين والبنوك والمؤسسات المالية ومؤسسات التأمين الاجتماعي والمعاشات وصناديق التقاعد وشركات الاستثمار أو حتى في مجالات لا علاقة لها بالقطاع الاقتصادي والمالي ولكنها تتطلب تقديم تقديرات لحجم المخاطر المحتملة.

2- مفهوم الخطر:

يختلف معنى الخطر في مجال التأمين عن المعاني الأخرى التي تعطى له في القانون المدني أو العلوم الاجتماعية والعلمية، فالتأمين يتم غالباً من أجل تحقيق الأمان للأشخاص الحقيقيين أو المعنويين، من الحوادث التي قد تصيبهم، كالسرقة، الحريق، الزلازل، غير أنه قد يقوم وبصورة مغايرة على تأمين أشياء إيجابية كتأمين الحياة، لذلك ومن خلال هذا المبحث سنقوم بتسليط الضوء على ماهية الخطر التاميني.

بالرغم من التقدم الهائل في الإمكانيات المتاحة للإنسان وخاصة فيما يتعلق بالتوقعات الخاصة والعامة والتنبؤ العلمي الدقيق والتي تساعد الإنسان على سلامة اتخاذ القرارات، إلا أن هذا لن يزيل القلق الذي يلزم الشخص عند اتخاذ قراراته، ويترتب عن ذلك أنه عند اتخاذ قرار معين يكون غير متأكد من النتيجة النهائية لذلك القرار مما يخلق لديه حالة معنوية توصف بأنها الخطر الذي يلزم متخذ القرار.¹

¹أسامة عزمي سلام، شقيري نوري موسى، إدارة الخطر والتأمين، دار الحامد، الأردن، 2007، ص 19.

في الواقع، هناك صعوبات عديدة في وضع تعريف محدد للخطر وذلك لأسباب كثيرة نذكر منها ما يلي:¹

- أن محل الخطر قد يكون ماديا كضياع الأموال، أو معنويا كخطر الوفاة ومن ثم لا بد أن يشتمل تعريف الخطر على نوعيته المادية والمعنوية؛
 - أن الخطر ظاهرة سلبية ومن ثم فإن تعريفه يكون أكثر صعوبة من الظواهر الايجابية.
- لقد أدت هذه الصعوبات وغيرها إلى تعدد المفاهيم التي أعطيت للخطر، بحيث يمكننا القول بأنه لا يوجد تعريف محدد متفق عليه بالنسبة للخطر، وإنما ظهرت بدلا من ذلك تعريفات مختلفة تتعرض كل منها لظاهرة الخطر من زاوية قد تقترب أو تبتعد كثيرا أو قليلا تبعا لاختلاف وجهات النظر من ناحية، واختلاف أهداف وأسلوب الدراسة وأدوات التحليل المتاحة من ناحية أخرى.

3- تعريف الخطر:

يقصد بالخطر لغويا الإشراف على الهلاك²، ولهذا الأخير مسببات مختلفة لذلك اختلفت آراء كتاب التأمين، الاقتصاديين، الرياضيين والإحصائيين حول تعريف الخطر، فقد عرفه بعضهم بأنه: "عدم التأكد من وقوع خسارة معينة". وقد اعتمد هذا التعريف على الحالة المعنوية للفرد عند اتخاذ قراراته، ذلك أنه قام على عدم التأكد الذي لا يخضع للقياس في كثير من الأحيان بطريقة موضوعية بل يتوقف على التقدير الشخصي للنتائج الناشئة عن موقف معين³.

لذلك عرف البعض الآخر الخطر بأنه: "احتمال وقوع خسارة" وقد اهتم هذا التعريف بشرط الخطر، وهو أن يكون الحادث احتمالي وليس مؤكدا ومستحيلا، كما قام هذا التعريف على الاحتمال وليس على عدم التأكد، وإن كان يعيب على هذا التعريف أنه لم يحدد المقصود بنوع الخسارة، هل هي خسارة مادية أم خسارة معنوية⁴. ومن هنا قام آخرون -وقد اتجه اهتمامهم عند تحديد هذا التعريف بالنتيجة المترتبة على تحقيق الخطر، وهي الخسارة المادية، بهدف إخضاع ظاهرة الخطر للقياس الكمي- بتعريف الخطر بأنه: "الخسارة المادية المحتملة نتيجة لوقوع حادث معين". وقد أشار هذا التعريف إلى تحديد نوع الخسارة بأنها خسارة مادية⁵.

¹ محمد الصيرفي، رياضيات التأمين، مؤسسة حورس الدولية، دون بلد، 2005، ص 3.

² حربي محمد عريقات، سعيد جمعة عقل، التأمين وإدارة الخطر: النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، دار وائل، الأردن، 2008، ص 11.

³ إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، الخطر والتأمين: المبادئ النظرية والتطبيقات العملية، دار المطبوعات الجامعية، مصر، 2008، ص 14.

⁴ إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، المرجع السابق، ص 14.

⁵ المرجع نفسه، ص 14.

كما يمكن تعريف الخطر اقتصاديا فقط: "هو أي خسائر مادية متوقعة يمكن قياسها، يحتمل أن تصيب الإنسان نتيجة للظروف الطبيعية العامة والخاصة المحيطة به في حياته اليومية، أو نتيجة لقرارات قد يتخذها خلال حالة معنوية تلازمه من التردد وعدم التأكد وتكون مصاحبة له أثناء اتخاذه لهذه القرارات"¹.

يمكن تعريف الخطر من وجهة نظر الفرد أو المنشأة بأنه: "الخسارة المادية المحتملة والخسارة المعنوية الممكن قياسها نتيجة لوقوع حدث معين مع الأخذ بعين الاعتبار جميع العوامل المساعدة على وقوع الخسارة"²، ونستخلص من التعريف أن الخطر لا يقتصر على الخسارة المادية فقط والتي غالبا ما ترتبط بأخطار الممتلكات والأشياء المادية الملموسة أكثر من ارتباطها بأنواع أخرى من الأخطار، مثل أخطار الأشخاص وأخطار المسؤولية المدنية، لذلك فإن إضافة "الخسارة المعنوية" إلى التعريف تجعله أكثر شمولاً، شرط إمكانية قياس هذه الخسارة طبقاً للخبرة العملية أو التقدير الشخصي.

يعرف الخطر من وجهة نظر شركة التأمين كما يلي: "يتمثل الخطر في الفرق بين الخسائر المتوقعة-التي تم على أساسها حساب قسط التأمين الصافي- والخسائر الفعلية التي التزم المؤمن بتعويض حملة الوثائق عنها إذا وقعت"³. والخطر هنا عندما تزيد الخسائر الفعلية عن الخسائر المحتملة أو المتوقعة وذلك على المستوى الكلي لأعمال المؤسسة في فرع تأمين معين أو في مجموع الفروع، وليس على مستوى حدث معين.

تجدر الإشارة إلى أن هناك اختلاف بين مضمون "الخسارة المحتملة" عن مضمون "احتمال وقوع خسارة" حيث يعني هذا الأخير فرصة وقوع الحادث الذي يتسبب عنه خسارة، وبعبارة أخرى درجة احتمال وقوع الحادث. أما عبارة "الخسارة المحتملة" فإنها تشير بالإضافة إلى احتمال وقوع الحادث إلى حجم الخسارة التي تتجم عن وقوع هذا الحادث، ذلك لأن احتمال وقوع الحادث ليس هو العنصر الوحيد لقياس درجة الخطر ولكن حجم الخسارة المحتملة، يعتبر عنصراً آخر رئيساً يدخل عند تقدير درجة الخطر. وتظهر أهمية هذه التفرقة إذا ما علمنا أنه في كثير من الأحيان نجد أن احتمال وقوع الحادث في خطر ما ضئيلاً جداً ومع ذلك يعتبر خطراً جسيماً وذلك لأن حجم الخسارة المحتملة والمترتبة على وقوع هذا الحادث جسيمة، وعلى النقيض من ذلك قد يكون

¹ أحمد عبد الله قحايوي أباطة، مدخل كمي لإدارة الأخطار ورياضيات المال والاستثمار، الطبعة الأولى، مطبعة الإشعاع الفنية، دون بلد، 2002، ص 12.

² مختار محمد الهانسي، إبراهيم عبد النبي حمودة، مقدمة في مبادئ التأمين بين النظرية والتطبيق، الدار الجامعية، مصر، 2000، ص 13.

³ المرجع نفسه، ص 15.

احتمال وقوع الحادث في خطر ما كبيرا جدا ومع ذلك يعتبر هذا الخطر تافها، ذلك لأن حجم الخسارة المادية المحتملة والمرتبة على وقوع هذا الحادث تكون بسيطة¹.

مما تقدم، فإننا نعتبر تعريف الخطر على أنه: "الخسارة المادية المحتملة نتيجة لوقوع حادث معين" أكثر دقة من التعريفات الأخرى، وإن كنا نفضل أن نضيف إلى هذا التعريف عبارة "في الثروة والدخل" ليصبح تعريف الخطر "الخسارة المادية المحتملة في الثروة أو الدخل نتيجة لوقوع حادث معين" حيث أن الإضافة المشار إليها تؤدي إلى أن يكون التعريف أكثر تحديدا للأخطار التي يهتم بدراستها علم الخطر والتأمين وهي أخطار أشخاص أو أخطار ممتلكات أو أخطار مسؤولية مدنية، وحتى يتضح لنا معنى الخطر بدقة فإنه يجب أن نتعرض لبعض المفاهيم الأخرى المتداولة في مجال الخطر والتأمين وعلاقتها بالخطر ومن أهم هذه المفاهيم مصادر أو مسببات الخطر خصائص الخطر وأركانه، طبيعة وأشكال الأخطار، العوامل المساعدة للخطر.

4- أركان وخصائص الخطر:²

هناك ركنين أساسيين للخطر هما:

- إمكانية القياس الموضوعي للخطر باستخدام نظرية الاحتمالات؛
 - اشتراط أن يكون ناتج تحقق الخطر خسارة يمكن تقويمها بوحدات النقود المستخدمة.
- أما خصائص الخطر فهي:
- الأزلية، فالخطر قائم طالما كان المستقبل غير معروف؛
 - العمومية، أي أن الخطر شامل لجميع الأموال تكون معرضة للسرقة وخطر الوفاة مسلطة على كل الناس؛
 - السلبية، بما يعني أن الخطر عادة أثر سلبي فهو يؤدي إلى شعور غير مستحب؛
 - الاحتمالية، بمعنى أن الخطر احتمالي وقيمه تتحصر بين الواحد الصحيح والصفر.

¹ إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، مرجع سبق ذكره، ص 15.

² محمد الصيرفي، مرجع سبق ذكره، ص 4.

5- الحادث والخسارة المادية:

5-1- الحادث:¹

يقصد بالحادث هنا "قوة خارجية مفاجئة غير عادية خارجة عن الإرادة وتسبب خسارة". بمعنى التحقق المادي الملموس كظاهرة أو أكثر من الظواهر الطبيعية أو الشخصية مما يترتب عليه خسارة مادية. فمثلا حادث السرقة يشير إلى تحقق أو وقوع السرقة فعلا، وحادث التصادم يشير إلى تحقق أو وقوع التصادم فعلا وحادث الغرق يشير إلى تحقق وقوع الغرق فعلا... وهكذا.

5-2- الخسارة المادية:

يقصد بالخسارة المادية ذلك النقص الجزئي أو الكلي الذي يصيب الدخل أو الممتلكات كنتيجة تحقق حادث طارئ معين. لذلك يمكن تعريفها بأنها: "النقص في قيمة الممتلكات أو فناؤها أو النقص في قيمة الدخل والثروة أو زوال واحد منهما نتيجة تحقق حادث معين.² والخسائر المادية تنقسم إلى عدة أنواع:³

5-2-1- من حيث الحجم:

وتنقسم إلى خسارة كلية وخسارة جزئية، حيث تعني الأولى إنقطاع الدخل أو هلاك وفناء الأصل عن آخره نتيجة الحادث. أما الثانية فهي نقص الدخل فقط وليس انقطاعه تماما أو نقص في قيمة الأصل وليس هلاكه تماما.

5-2-2- من حيث التأثير:

نميز بين خسارة مباشرة وأخرى غير مباشرة، حيث الخسارة المباشرة التي تلحق بالأصل مباشرة وتظهر آثارها عليه وبالتالي تلحق بصاحب الأصل كحريق بأحد المصانع نتج عنه حريق بضائع، أما الخسارة غير المباشرة فهي تلك الخسارة التي تلحق بصاحب الأصل فقط دون أن يتأثر الأصل بها مثل تكلفة أجور العمال أثناء فترة إعادة المصنع إلى حالته الطبيعية قبل الحريق أو تكلفة إيجار مكان آخر لمزاولة العمل أثناء الإصلاح.

¹محمد الصيرفي، مرجع سبق ذكره، ص 5.

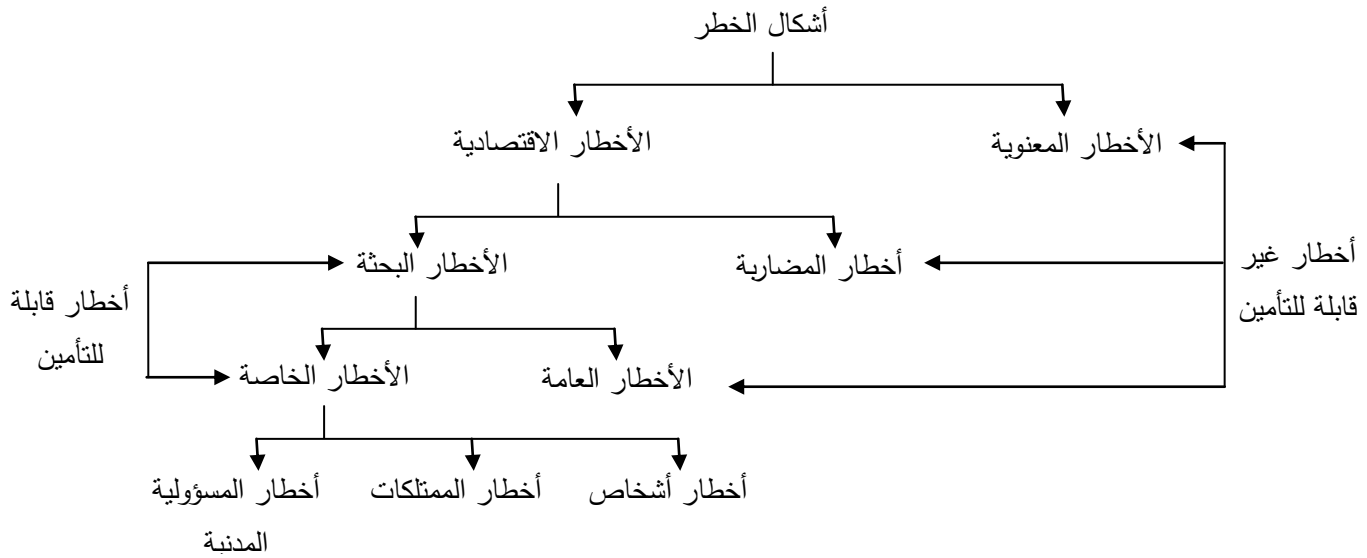
²إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، مرجع سبق ذكره، ص 17.

³شوقي سيف النصر، التأمين: الأصول العلمية والمبادئ العملية، دار الفكر العربي، مصر، 1984، ص 15.

6- أشكال الخطر:

يتم تصنيف الخطر إلى عدة أشكال كما هو موضح بالشكل التالي:

شكل رقم (01): أشكال الخطر



المصدر: حربي محمد عريقات، سعيد جمعة عقل، التأمين وإدارة الخطر: النظرية والتطبيق، الطبعة الثانية، دار وائل، الأردن، 2010، ص 19.

يتضح لنا من الشكل أعلاه، أن الخطر يمكن تقسيمه إلى مجموعتين فقط وهي:¹

- المجموعة الأولى: الأخطار المعنوية والأخطار الاقتصادية

- المجموعة الثانية: الأخطار العامة والأخطار الخاصة

¹أسامة عزمي سلام، شقيري نوري موسى، مرجع سبق ذكره، ص 25.



1- التوزيع الاحتمالي لإجمالي الخسارة السنوية:

في حالة معرفة التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث السنوية لنوع معين من الأخطار، والتوزيع الاحتمالي لمبلغ الخسارة في كل مرة، فإنه يمكننا الحصول على التوزيع الاحتمالي لإجمالي الخسارة السنوية لوحدة النقد.

وفيما يلي مثال يوضح ذلك:

نفترض أننا حصلنا على التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الخسارة (التوزيع الاحتمالي لتكرار الخسارة) بفعل الحريق أو السرقة سنويا لنوعية معينة من المنتجات في أحد المخازن وكان كما يلي:

عدد الحوادث X	0	1	2
الاحتمال	0.7	0.2	0.1

وتحصلنا كذلك على التوزيع الاحتمالي لمبلغ الخسارة (التوزيع الاحتمالي لوطأة أو شدة

الخسارة) وكان كما يلي:

مبلغ الخسارة Y	1000 دج	2000 دج	3000 دج
الاحتمال	0.5	0.35	0.15

فإذا أردنا إيجاد التوزيع الاحتمالي Z لإجمالي الخسارة السنوية لوحدة النقد سنقوم بما يلي:

إجمالي الخسائر السنوية الممكنة	بيان العمليات	الاحتمال Z
0 دج	$P(Z = 0) \Rightarrow P(X = 0)$ $P(Z = 0) = 0.7$	0.7
1000 دج	$P(Z = 1000) \Rightarrow P(X = 1) \wedge P(Y = 1000)$ $\Rightarrow 0.2 \times 0.5 = 0.1$	0.1
2000 دج	$P(Z = 2000) \Rightarrow [P(X = 1) \wedge P(Y = 2000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 1000) \wedge P(Y_2 = 1000)]$ $\Rightarrow (0.2 \times 0.35) + (0.1 \times 0.5 \times 0.5) = 0.095$	0.095
3000 دج	$P(Z = 3000) \Rightarrow [P(X = 1) \wedge P(Y = 3000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 1000) \wedge P(Y_2 = 2000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 2000) \wedge P(Y_2 = 1000)]$ $\Rightarrow (0.2 \times 0.15) + (0.1 \times 0.5 \times 0.35) +$ $(0.1 \times 0.35 \times 0.5) = 0.065$	0.065
4000 دج	$P(Z = 4000) \Rightarrow$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 2000) \wedge P(Y_2 = 2000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 1000) \wedge P(Y_2 = 3000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 3000) \wedge P(Y_2 = 1000)]$ $\Rightarrow (0.1 \times 0.35 \times 0.35) + (0.1 \times 0.5 \times 0.15)$ $+ (0.1 \times 0.15 \times 0.5) = 0.02725$	0.02725
5000 دج	$P(Z = 5000) \Rightarrow$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 2000) \wedge P(Y_2 = 3000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 3000) \wedge P(Y_2 = 2000)]$ $\Rightarrow (0.1 \times 0.35 \times 0.15) + (0.1 \times 0.15 \times 0.35)$ $= 0.0105$	0.0105
6000 دج	$P(Z = 5000) \Rightarrow$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 2000) \wedge P(Y_2 = 3000)]$ $\Rightarrow (0.1 \times 0.35 \times 0.15) = 0.00225$	0.00225
مجموع الاحتمالات	1

بعد ايجاد توزيع إجمالي الخسارة الممكنة، يمكننا ايجاد احتمالات وقوع الخسارة ضمن مجالات معينة كأن نحسب احتمال حدوث خسارة ضمن المجال [2000،5000]، هنا نجمع الاحتمالات المقابلة (0.0105+0.02725+0.065+0.095) ونتيجة الاحتمال هي:

$$P=0.19775$$

2- قانون الأعداد الكبيرة:

إن احتمال حدوث الخطر وما يترتب عليه من وقوع الخسارة هو مقياس مادي تقديري لفرص حدوث هذه الخسارة، ولذلك يهتم خبراء التأمين بدقة الحسابات الاكتوارية أو الفنية بمعنى يهتموا بالبيانات والإحصاءات للسنوات السابقة للوحدات التي كانت معرضة لنفس نوعية الأخطار موضع الاهتمام ويشترط في هذه البيانات شروط عدة أهمها:¹

- ألا تقل مدتها عن خمس سنوات وألا تزيد عن عشر سنوات وإلا تصبح عرضة للتقادم واختلاف الظروف والأحوال المحيطة؛

- أن تكون وفيرة وكثيرة العدد لكي تحقق قانون الأعداد الكبيرة، وقد كان أول من أشار إلى صحته الرياضي الفرنسي سيمون بواسون في عام 1835م.

وينص قانون الأعداد الكبيرة Law of Large Numbers في أبسط معانيه على أنه كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة أو كلما زاد عدد الوحدات التي يجري عليها التجربة كلما اقترب الاحتمال المتوقع أو التقديري من الاحتمال الفعلي أو الحقيقي، ويترتب على ذلك أن أفساط التأمين المقدره تصبح أكثر عدالة وأكثر كفاية.

والمثال التالي يوضح المقصود بهذا القانون.²

تقوم شركة تأمين ما بتأمين 10000 سيارة خاصة، فإذا كان معدل إصابة السيارة في حادث مروري 1% وكانت إصابات السيارات تتبع التوزيع الطبيعي، قدر عدد السيارات المتوقع إصابتها في حادث إذا كانت درجات الثقة المطلوبة للتقدير هي 68.3% 95.5% 99.7% على التوالي؟ ثم أحسب الانحراف النسبي؟

أولاً: بما أن إصابات السيارات تتبع التوزيع الطبيعي فإن:

$$E(x) = N \times p$$
$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{N \times p \times q}$$

حيث:

$E(x)$: التوقع الرياضي

$V(x)$: التباين

$\sigma(x)$: الانحراف المعياري

N : عدد السيارات

¹ أحمد عبد الله قمحاوي أباضة، مرجع سبق ذكره، ص ص 20-21.

² عبد المطلب عبده، الخطر والتأمين، دار الكتاب الجامعي، مصر، 1977، ص ص 64-66.

P: احتمال الإصابة

q: احتمال عدم الإصابة

ومنه

القيمة المتوقعة = الوسط الحسابي للتوزيع = عدد السيارات × احتمال الإصابة

$$= 10000 \times 0.01 = 100 \text{ سيارة}$$

الانحراف المعياري للتوزيع = $\sqrt{\text{عدد السيارات} \times \text{احتمال الإصابة} \times \text{احتمال عدم الإصابة}}$

$$= \sqrt{10000 \times 0.01 \times 0.99} \approx 10 \text{ سيارات}$$

ثانياً:

لتقدير عدد السيارات المنخرطة في حوادث وتتبع التوزيع الطبيعي بدرجة ثقة 68.3% تكون حدود الثقة محصورة بين $[E(x) \pm \sqrt{V(x)}]$ أي أننا واثقين بنسبة 68.3% أن عدد السيارات المتوقع إصابتها في حادث سوف يتراوح بين $[100 - 10, 100 + 10]$ أي بين $[90, 110]$.

أما لو كانت درجت الثقة المطلوبة 95.5% تكون حدود الثقة محصورة بين $[E(x) \pm 2\sqrt{V(x)}]$ أي أننا واثقين بنسبة 95.5% أن عدد السيارات المتوقع إصابتها في حادث سوف يتراوح بين $[100 - 20, 100 + 20]$ أي بين $[80, 120]$.

وفي حالة زيادة درجة الثقة إلى 99.7% تكون حدود الثقة محصورة بين التوقع للتوزيع ± 3 الانحراف المعياري أي $[E(x) \pm 3\sqrt{V(x)}]$ أي أننا سنكون واثقين بنسبة 99.7% أن عدد السيارات المتوقع إصابتها في حادث سوف يتراوح بين $[100 - 30, 100 + 30]$ أي بين $[70, 130]$.

ثالثاً:

يتم حساب الانحراف النسبي من خلال العلاقة التالية:

$$\text{الانحراف النسبي} = \frac{\sqrt{\text{احتمال الإصابة} \times \text{احتمال عدم الإصابة}}}{\text{عدد السيارات}} = \sqrt{\frac{p \times q}{N}}$$

$$\text{الانحراف النسبي} = \sqrt{\frac{0.01 \times 0.99}{10000}} = 0.1\%$$

رابعاً:

نلاحظ من الانحراف النسبي أن عدد السيارات في المقام، وبالتالي كلما زادت عدد السيارات قل الانحراف النسبي. فإذا افترضنا زيادة عدد السيارات إلى 40000 سيارة في المثال السابق نستنتج ما يلي:

العدد المتوقع = 400 سيارة؛ الانحراف المعياري = 20 سيارة؛ الانحراف النسبي = 0.05%

ومن الواضح من هذه المؤشرات الكمية أنه بينما زاد عدد الوحدات المؤمن عليها إلى أربعة أمثالها فإن الانحراف المعياري لم يزد إلا إلى الضعف فقط، أما الانحراف النسبي فقد أصبح نصف ما كان عليه من قبل.

ونستنتج أنه في حالة زيادة عدد السيارات المؤمن عليها لدى الشركة إلى 1000000 سيارة، فإن العدد المتوقع إصابته يكون 10000 سيارة، أما الانحراف المعياري فيصبح 100 سيارة تقريباً، بينما ينخفض الانحراف النسبي إلى 0.01% وفي هذه الحالة الأخيرة تكون الشركة متأكدة بنسبة 99.7% أن عدد السيارات المتوقع إصابته لن يقل عن 9700 ولن يزيد عن 10300 سيارة.

إن المثال السابق يوضح بجلاء أن زيادة عدد الوحدات المعرضة للخطر قد أدى إلى تخفيض الخطأ النسبي في التقدير، ويبدو تأثير ذلك من مقارنة المدى الذي يمكن أن يأخذه عدد السيارات المتوقع إصابته عند أي درجة ثقة منسوبا إلى المتوسط المتوقع. فعند درجة ثقة 99.7% يمثل التذبذب 60% $\left(\frac{130-70}{100}\right)$ من المتوسط المتوقع إذا ما كان عدد السيارات المؤمن عليها 10000 سيارة فقط. أما في حالة التأمين على 1000000 سيارة فإن تذبذب النتائج لن يتعدى 3% فقط بالنقص أو الزيادة ويكون المدى في هذه الحالة 6% فقط $\left(\frac{10300-9700}{10000}\right)$.

وباختصار فإنه يمكن القول بأن عملية التجميع للوحدات المعرضة لنفس الخطر -حسب قانون الأعداد الكبيرة- يقلل بلا شك من أخطاء التقدير، وبالتالي يصبح الخطر الذي تتحمله هيئة التأمين عند تحويل الخطر لها نظير قسط يتفق عليه أقل بكثير من مجموع الأخطار المحولة إليها من المؤمن لهم، ومن ناحية أخرى فإن عملية التجميع ينشأ عنها زيادة في المعلومات المتجمعة عن الخطر وتنوعها وشمولها لكافة أوصافه وجوانبه مما قد يؤدي إلى اكتشاف طرق جديدة للوقاية ورفع كفاءة الطرق الموجودة مما يكون له أبلغ تأثير على تخفيض معدلات تحقق الخطر وبالتالي تخفيض معدلات الخسارة وقيمتها.



1- عينة الدراسة

بسبب طبيعة الظاهرة المتمثلة في تقدير معدلات الخسارة في شركات التأمين والتي لا تسمح بدراسة المجتمع ككل (جميع مؤسسات التأمين مع مختلف فروعها) ومنه ستقتصر هذه المحاضرة على حساب معدلات الخسارة الفصلية لوحداث معرضة لنفس الخطر وهي السيارات السياحية ولعينة مختارة بطريقة عشوائية تساوي 100 حالة في كل سنة.

2- متغيرات الدراسة

نهتم بمتغيرين وهما المتغير التابع Y_i والذي يمثل الزمن والمتغير X_i الذي يمثل معدلات الخسارة المحسوبة في كل فصل وبحسب كما يلي:

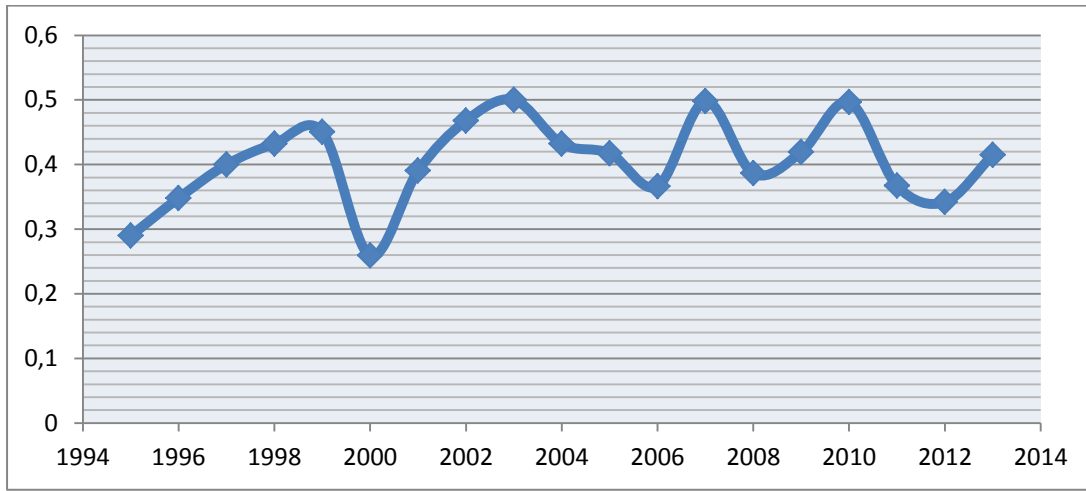
$$\text{معدل الخسارة} = \frac{\text{مجموع الخسائر المحققة فعلا}}{\text{مجموع مبالغ التأمين}}$$

حيث مجموع الخسائر المحققة فعلا هي قيمة التعويضات نتيجة الحوادث المختلفة للسيارات أما مجموع مبالغ التأمين هي مجموع أقساط التأمين المحصلة. وفيما يلي جدول يوضح معدلات الخسارة المحسوبة جدول معدلات الخسارة المحسوبة

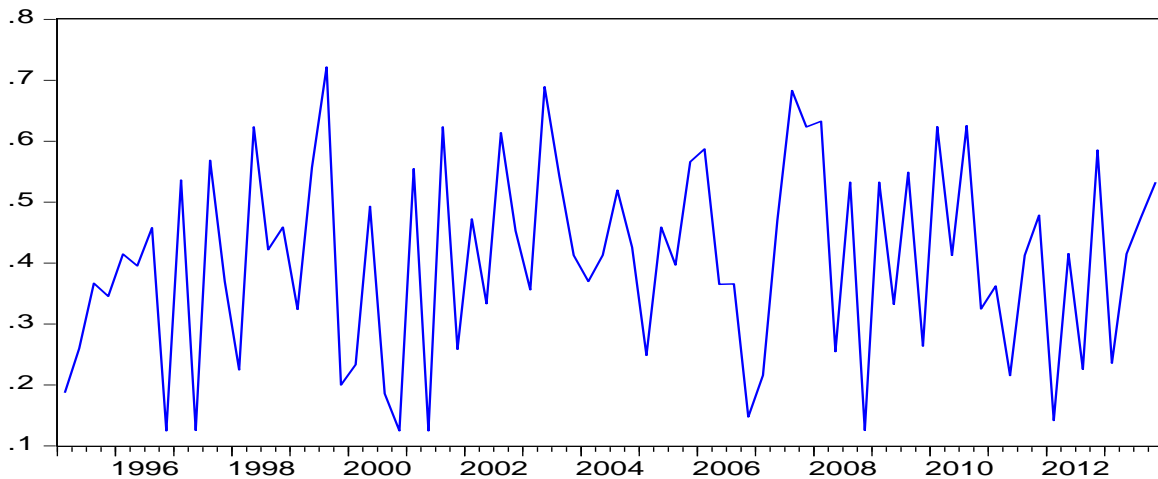
السنة/الفصل	الاول	الثاني	الثالث	الرابع	معدل الخسارة السنوي المتوسط
1995	0,1869	0,2598	0,3667	0,3455	0,289725
1996	0,4145	0,3955	0,4578	0,1245	0,348075
1997	0,5361	0,1254	0,5686	0,3699	0,400000
1998	0,2247	0,6234	0,4218	0,4587	0,432150
1999	0,3241	0,5567	0,7215	0,1999	0,450550
2000	0,2333	0,4928	0,1857	0,1245	0,259075
2001	0,5547	0,1245	0,6233	0,2584	0,390225
2002	0,4721	0,3333	0,6135	0,4528	0,467925
2003	0,3562	0,6891	0,5425	0,4125	0,500075
2004	0,3697	0,4129	0,5196	0,4258	0,432000
2005	0,2484	0,4587	0,3967	0,5659	0,417425
2006	0,5871	0,3649	0,3658	0,1475	0,366325
2007	0,2158	0,4695	0,6829	0,6233	0,497875
2008	0,6325	0,2548	0,5326	0,1254	0,386325
2009	0,5326	0,3321	0,5487	0,2635	0,419225
2010	0,6235	0,4127	0,6254	0,3245	0,496525
2011	0,3624	0,2154	0,4125	0,4784	0,367175
2012	0,1415	0,4154	0,2256	0,5854	0,341975
2013	0,2358	0,4151	0,4748	0,5326	0,414575
معدل الخسارة الفصلي المتوسط	0,38167895	0,38694737	0,48873684	0,35889474	0,404064474

الجدول يوضح معدلات الخسارة الفصلية المحسوبة منذ سنة 1995 الى غاية 2013 لعينة الدراسة المختارة بطريقة عشوائية وتساوي 100 حالة لكل سنة ولوحدات معرضة لنفس الخطر وهي السيارات السياحية وكذلك معدل الخسارة السنوي المتوسط والشكلين التاليين يوضحان التطور الزمني لكل منهما:

تطور معدل الخسارة السنوي المتوسط



تطور معدلات الخسارة الفصلية



من الشكلين أعلاه، يتضح أن هناك فصلية دون وجود لمركبة الاتجاه العام وللتأكد من ذلك نقوم ببعض الاختبارات الإحصائية للكشف عنهما:

3- إختبار دانيال لكشف مركبة الاتجاه العام

بغية التأكد من عدم وجود مركبة الاتجاه العام في السلسلة الزمنية نقوم بإجراء اختبار دانيال المشار اليه فيما سبق وذلك على النحو التالي:

جدول الحسابات الأساسية لكشف مركبة الاتجاه العام لمعدلات الخسارة السنوية المتوسطة

الزمن	معدل الخسارة السنوي المتوسط	الرتبة	d	d ²
1	0,289725	2	-1	1
2	0,348075	4	-2	4
3	0,400000	9	-6	36
4	0,432150	14	-10	100
5	0,450550	15	-10	100
6	0,259075	1	5	25
7	0,390225	8	-1	1
8	0,467925	16	-8	64
9	0,500075	19	-10	100
10	0,432000	13	-3	9
11	0,417425	11	0	0
12	0,366325	5	7	49
13	0,497875	18	-5	25
14	0,386325	7	7	49
15	0,419225	12	3	9
16	0,496525	17	-1	1
17	0,367175	6	11	121
18	0,341975	3	15	225
19	0,414575	10	9	81
المجموع	-	-	-	1000

إذا للحصول على معامل ارتباط سبيرمان نطبق العلاقة التالية:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum_{t=1}^T d_t^2}{T(T^2-1)} = 1 - \frac{6(1000)}{19(361-1)} = 0.1228$$

القرار: بما أن نتيجة دانيال المحسوبة 0.1228 أقل من القيمة الجدولية لتوزيع t التي تساوي 1.729 عند n=19 ودرجة معنوية $\alpha=10\%$ علما ان عدد السنوات اقل من 30 ومنه نرفض الفرضية البديلة ونقبل الفرضية المدومة التي تنص على عدم وجود مركبة الاتجاه العام في معدلات الخسارة السنوية المتوسطة.

4- إختبار كريسكال واليس لكشف المركبة الفصلية

بغية التأكد من وجود أو عدم وجود المركبة الفصلية في السلسلة الزمنية نقوم بإجراء اختبار

كريسكال واليس المشار اليه فيما سبق وذلك على النحو التالي:

جدول رتب معدلات الخسارة الفصلية

السنة/الفصل	الاول	الثاني	الثالث	الرابع
1995	15	53	8	2
1996	9	20	31	26
1997	6	42	14	65
1998	40	34	46	2
1999	66	29	30	7
2000	28	11	36,5	52
2001	73	18	56	4,5
2002	61	2	68,5	19
2003	58	4,5	64	33
2004	16	41	51	56
2005	17	47,5	35	63
2006	56	24	60	21
2007	32	39	54	44
2008	13	70	43	47,5
2009	22	62	76	10
2010	50	25	67	45
2011	71	38	72	23
2012	12	49	74	68,5
2013	27	75	59	36,5
مجموع R _i	672	684	945	625

وبتطبيق علاقة اختبار كريسكال واليس (kruskal-Wallis) نتحصل على القيمة المحسوبة وذلك كما يلي:

$$kw = \frac{12}{T(T+1)} \sum_{i=1}^p \frac{R_i^2}{n_i} - 3(T+1)$$
$$kw = \frac{12}{76(76+1)} \left(\frac{(672)^2}{19} + \frac{(684)^2}{19} + \frac{(945)^2}{19} + \frac{(625)^2}{19} \right).$$

القرار:

بما أن $\chi^2(4-1)$ الجدولية تساوي 6.251 وذلك عند درجة معنوية $\alpha=10\%$ ومنه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة ونقر بوجود المركبة الفصلية وبالتالي يجب أخذها بعين الاعتبار في عمليات النمذجة ومن تم التنبؤ.

5- إزالة المركبة الفصلية

تستخدم عدة طرق لإزالة المركبة الفصلية، وسنستخدم لأجل ذلك طريقة النسب الموسمية، لأنها لا تفرق بين الشكلين الجدائي والتجميحي أثناء الحساب، ويمكن تلخيص هذه الطريقة في الخطوات التالية:

- حساب الوسط الحسابي لملاحظات كل سنة ثم الوسط الحسابي العام \bar{Y}
- حساب الوسط الحسابي لملاحظات كل فصل \bar{Y}_s
- لإيجاد المؤشر الموسمي S_s نقوم بقسمة \bar{Y}_s على \bar{Y}

وفيما يلي سنحاول إيجاد المؤشر الموسمي لمعدلات الخسارة الفصلية:

جدول رتب معدلات الخسارة الفصلية

السنة/الفصل	الاول	الثاني	الثالث	الرابع	معدل الخسارة السنوي المتوسط
1995	0,1869	0,2598	0,3667	0,3455	0,289725
1996	0,4145	0,3955	0,4578	0,1245	0,348075
1997	0,5361	0,1254	0,5686	0,3699	0,400000
1998	0,2247	0,6234	0,4218	0,4587	0,432150
1999	0,3241	0,5567	0,7215	0,1999	0,450550
2000	0,2333	0,4928	0,1857	0,1245	0,259075
2001	0,5547	0,1245	0,6233	0,2584	0,390225
2002	0,4721	0,3333	0,6135	0,4528	0,467925
2003	0,3562	0,6891	0,5425	0,4125	0,500075
2004	0,3697	0,4129	0,5196	0,4258	0,432000
2005	0,2484	0,4587	0,3967	0,5659	0,417425
2006	0,5871	0,3649	0,3658	0,1475	0,366325
2007	0,2158	0,4695	0,6829	0,6233	0,497875
2008	0,6325	0,2548	0,5326	0,1254	0,386325
2009	0,5326	0,3321	0,5487	0,2635	0,419225
2010	0,6235	0,4127	0,6254	0,3245	0,496525
2011	0,3624	0,2154	0,4125	0,4784	0,367175
2012	0,1415	0,4154	0,2256	0,5854	0,341975
2013	0,2358	0,4151	0,4748	0,5326	0,414575
معدل الخسارة الفصلي المتوسط	0,38167895	0,38694737	0,48873684	0,35889474	0,404064474
المؤشر الموسمي S_s	0.9446	0.9576	1.2095	0.8882	

6- تقدير النموذج

لتقدير نموذج يسمح لنا بتقدير معدلات الخسارة الفصلية سنستخدم نماذج الانحدار من

الشكل

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t$$

حيث:

t هي الزمن و \hat{Y}_t هي القيم المقدرة لمعدلات الخسارة

وباستخدام برنامج *spss* الاصدار رقم 15 من أجل التقدير نتحصل على ما يلي:

جدول نتائج معادلة الانحدار y/t

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta	B	Std. Error
1	(Constant)	,376	,037		10,130	,000
	t	,001	,001	,099	,856	,395

المصدر: مخرجات spss اعتمادا على بيانات معدلات الخسارة الفصلية

من خلال الجدول يمكن كتابة دالة الانحدار كما يلي:

$$\hat{Y}_t = [0.376 + 0.001t]$$

وإذا أخذنا بعين الاعتبار تأثير المعدل الموسمي تصبح دالة الانحدار كما يلي:

$$\hat{Y}_t = [0.376 + 0.001t] \times S_s$$

ومنه ومن أجل تقدير معدلات الخسارة الفصلية لسنة 2014 (الفصل 77، 78، 79، 80) ستكون

العملية كما يلي:

$$\hat{Y}_{77} = [0.376 + 0.001(77)] \times 0.9446 = 0.453 \times 0.9446 = 0.4279038$$

$$\hat{Y}_{78} = [0.376 + 0.001(78)] \times 0.9576 = 0.454 \times 0.9576 = 0.4347504$$

$$\hat{Y}_{79} = [0.376 + 0.001(79)] \times 1.2095 = 0.455 \times 1.2095 = 0.5503225$$

$$\hat{Y}_{80} = [0.376 + 0.001(80)] \times 0.8882 = 0.456 \times 0.8882 = 0.4050192$$



1- ماهية التأمين على الحياة:

هو اتفاق بين طرفين، يتعهد في الطرف الاول -وهو شركة التأمين- بأن يدفع للطرف الثاني -وهو المكتتب- مبلغا من المال دفعة واحدة أو بشكل دوري، وذلك عند تحقق حدث يتعلق بحياة شخص معين (أو عدة أشخاص) وخلال فترة محددة. وفي المقابل يدفع الطرف الثاني للطرف الاول قسطا وحيدا أو دوريا لمدة معلومة.

تجدر الاشارة إلى أنه من الطبيعي أن تكون قيمة القسط أقل من قيمة مبلغ التأمين، كما يتضح من هذا المفهوم أن الخطر المؤمن منه في هذا النوع مرتبط بالمدة غير المعلومة لحياة الانسان، وهي الميزة الاساسية التي ينفرد بها عن باقي أشكال التأمين الأخرى.

2- أهمية التأمين على الحياة:

يهدف التأمين بصفة عامة إلى تحقيق الأمان، أما التأمين على الحياة فهو يهدف بصفة أساسية إلى وقاية الأسرة وخلق نوع من الراحة للمسؤول الاول عليها، كما تزيد أهمية التأمين على الحياة عن ذلك ونوجزها فيما يلي:

- التأمين على الحياة من أهم وسائل الادخار والاستثمار، لأنه يعتبر أداة هامة ومتميزة من أدوات تجميع المدخرات ومن تم الاستثمار بكافة دول العالم.

- المساهمة في خلق مناصب توظيف ثابتة ومستقرة ومنه تخفيض معدل البطالة.

- العمل على زيادة الانتاج لان عملية تأمين حياة العمال تنعكس ايجابيا على مردوديتهم وكفاءتهم الانتاجية.

- العمل على التخفيف من حدة التضخم من خلال الحجز من جهة على كتلة هامة من الاموال التي كانت ستوجه للاستهلاك ومنه ارتفاع الأسعار ومن جهة أخرى توظيف الاموال المحتجزة في مشاريع انتاجية واستثمارية توفر جزء من السلع والخدمات المعروضة. وكل هذا سيؤدي في النهاية الى خلق توازن نسبي بين العرض والطلب ومنه استقرار الاسعار.

- تخفيض تكلفة الخدمات او المنتجات المالية من خلال المنافسة في تقديمها بين شركات التأمين والبنوك التجارية.

- مكافحة الفقر لما يضمنه من توفير حد ادنى لمستوى المعيشة.

- تنمية الشعور بالمسؤولية بالنفس والأسرة من طرف المسؤول الاول عنها.

تجدر الاشارة هنا الى بعض السلبيات التي قد يتسم بها هذا النوع من التامينات اهمها:

- ارتفاع التكاليف لدى المشاريع بسبب مصاريف التأمين.

- حدوث بعض جرائم القتل لغرض الحصول على مبالغ التأمين.

- تهريب الاموال او تحويلها نحو الخارج.

- قد يكون هذا النوع من التأمينات للأغنياء دون الفقراء.

3- العوامل المؤثرة على الخطر في تأمينات الحياة:

يخضع هذا النوع لعدة عوامل تختلف فيما بينها من ناحية قوتها، اجاها وتأثيرها، وسنذكر اهمها فيما يلي:

- السن، لانه من الطبيعي ان خطر الوفاة يزداد تدريجيا عند التقدم في السن.

- الفئة المهنية، وذلك حسب تباين الظروف التي يعمل فيها كل فرد، وتأثيرها على الجانب الصحي.

- المنطقة الجغرافية، وذلك بسبب تباين الظروف المناخية على مستوى المناطق الجغرافية المحلية او الدولية، اصف الى ذلك تباين مستويات الوسائل والتجهيزات الصحية المتوفرة في المنطقة.

4- جداول الوفاة/الحياة:

نظرا لصعوبة حصر مسببات الوفاة، وصعوبة قياس قوة وتأثير كل منها، فقد اقتضى الامر اللجوء الى طريقة عملية تؤدي الى قياس احتمال الوفاة دون دراسة الاسباب التي تؤدي الى وقوعه، وذلك وفقا لطريقة الاحتمال التجريبي، وهي طريقة علمية تتبع لتقدير احتمال الوفاة للاعمار المختلفة، تتم على اساس مراقبة عدد كبير من الافراد في كل عمر من هذه الاعداد لمدة سنة كاملة، وبحصر الوفيات لكل منها يمكننا الوصول الى "احتمال الوفاة" أو الاحتمال المعاكس "احتمال الحياة"، وباستخدام مثل هذه الاحتمالات، يمكننا أن نكوّن ما يسمى بجدول الحياة أو الوفاة لكافة الاعداد التي تمت مراقبتها.

تجدر الاشارة، إلى أن الاحتمالات التي يتم الحصول عليها وفقا للاسلوب المذكور لا تمثل بالضرورة الاحتمالات الحقيقية، لكنه كلما زاد عدد الافراد الذين تتم مراقبتهم زيادة كبيرة فإن الاحتمالات المشاهدة تكون قريبة جدا من الحقيقية، ذلك كما ينص عليه قانون الاعداد الكبيرة.

مما سبق، يمكن تعريف جدول الحياة/الوفاة على أنه اداة فنية يمكن عن طريقها قياس احتمالات الحياة او الوفاة بسهولة عند كل عمر أو مجال من الاعداد المختلفة.

5- أهم البيانات التي يتضمنها جدول الوفاة/الحياة:

- يتكون جدول الوفاة/الحياة من خمس اعمدة وهي:
- العمر ويرمز له بـ X ويكون في العمود الاول.
 - عدد الاحياء ويرمز له بـ I_x ويكون في العمود الثاني.
 - عدد الوفيات ويرمز له بـ d_x ويكون في العمود الثالث.
 - احتمال الوفاة ويرمز له بـ q_x ويكون في العمود الرابع.
 - احتمال الحياة ويرمز له بـ p_x ويكون في العمود الخامس.

☺مثال:

قم باعداد جدول الوفاة/الحياة انطلاقا من المعلومات التالية:

$$q_{30}=0.008427, q_{31}=0.008510, q_{32}=0.008607, q_{33}=0.008718, q_{34}=0.008831, \\ q_{35}=0.008946, I_{30}=85441 \text{ نسمة} .$$

خطوات الحل:

- نبحث عن عدد الوفيات لعمر 30:

$$d_{30} = I_{30} \times q_{30} \\ d_{30} = 85441 \times 0.008427 \\ d_{30} \approx 720 \text{ نسمة}$$

- نبحث عن عدد الوفيات لعمر 31:

نطرح I_{30} من d_{30} ينتج I_{31} ومنه:

$$I_{31} = I_{30} - d_{30} \\ I_{31} = 85441 - 720 \\ I_{31} = 84721 \text{ نسمة}$$

$$d_{31} = I_{31} \times q_{31} \\ d_{31} = 84721 \times 0.008510 \\ d_{31} = 721 \text{ نسمة}$$

ونكمل على نفس المنوال لاستكمال عدد الوفيات و باقي الاحياء للاعمار الاخرى.

- ايجاد احتمالات الحياة:

من اجل ايجاد الاحتمالات الحياة نقوم بطرح احتمالات الوفاة من الواحد 1 (الحادث المعاكس) كما

يلي:

$$p_{30} = 1 - 0.008427 = 0.991573$$

$$p_{31} = 1 - 0.008510 = 0.99149$$

وهكذا حتى يستكمل الجدول:

X	I_x	d_x	q_x	P_x
30	85441	720	0.008427	0.991573
31	84721	721	0.008510	0.991490
32	84000	723	0.008607	0.991393
33	83277	726	0.008718	0.991282
34	82551	729	0.008831	0.991169
35	81822	732	0.008946	0.991054

☺مثال:

إذا علمت ما يلي:

$$q_{32}=0.00660, \quad q_{33}=0.00689, \quad q_{34}=0.00722, \quad q_{35}=0.00754, \quad q_{36}=0.00789, \\ q_{37}=0.00829$$

المطلوب:

- إيجاد عدد الاشخاص الذين يبلغون تمام العمر 36 من بين اشخاص عددهم 73574 في تمام العمر 32.

- عدد الاشخاص الذين يتوفون فيما بين العمر $34 \leq X < 37$ ؟

- عدد الاشخاص الذين يتوفون في العام 36 من عمرهم؟

خطوات الحل:

- إيجاد احتمالات الحياة:

$$P_x = 1 - q_x$$

$$P_{32} = 1 - 0.00660 = 0.9934$$

$$P_{33} = 1 - 0.00689 = 0.99311$$

...

$$P_{37} = 1 - 0.00829 = 0.99171$$

- إيجاد عدد الوفيات:

$$d_x = I_x \times q_x$$

$$d_{32} = I_{32} \times q_{32} = 73574 \times 0.00660 = 486$$

$$d_{33} = I_{33} \times q_{33} = 73088 \times 0.00689 = 504$$

...

$$d_{37} = I_{37} \times q_{37} = 70953 \times 0.00829 = 588$$

- من خلال النتائج المحصل عليها يمكن وضع الجدول التالي:

X	I _x	d _x	q _x	P _x
32	73574	486	0.00660	0.99340
33	73088	504	0.00689	0.99311
34	72584	524	0.00722	0.99278
35	72060	543	0.00754	0.99246
36	71517	564	0.00789	0.99211
37	70953	588	0.00829	0.99171

من خلال الجدول يمكن الاجابة عن الاسئلة السابقة:

- عدد الاشخاص الذين يبلغون تمام العمر 36 من بين اشخاص عددهم 73574 في تمام العمر 32 هو 71517=I₃₆.

- عدد الاشخاص الذين يتوفون فيما بين العمر $34 \leq X < 37$ هو:

$$\sum_{x=34}^{36} d_x = d_{34} + d_{35} + d_{36}$$

$$\sum_{x=34}^{36} d_x = 524 + 543 + 564$$

$$\sum_{x=34}^{36} d_x = 1631 \text{ شخص}$$

- عدد الاشخاص الذين يتوفون في العام 36 من عمرهم هو:

(العام 36 يعني نبداً من 35 وننتهي مع بداية 36) ومنه الاجابة هي :

$$d_{35}=543$$

😊مثال:

يعطى لك الجدول التالي:

X	I_x	d_x	q_x	P_x
20	10000	100	0.01	0.99
21	9900	198	0.02	0.98
22	9702	485	0.05	0.95
23	9217	645	0.07	0.93
24	8572	771	0.09	0.91
25	7801	780	0.10	0.90

المطلوب: أوجد الاحتمالات التالية:

- احتمال أن شخصا عمره 21 سنة يتوفى خلال 4 سنوات؟
 - احتمال أن شخصا عمره 22 سنة يتوفى خلال العام 25 من عمره؟
 - احتمال حياة شخص عمره 20 سنة يعيش لمدة 3 سنوات؟
 - احتمال أن شخصا عمره 20 سنة يعيش لمدة 3 سنوات ثم يتوفى خلال العامين التاليين؟
- خطوات الحل:

- احتمال أن شخصا عمره 21 سنة يتوفى خلال 4 سنوات هو:

$$nq_x = 4q_{21} = \frac{I_{21} - I_{21+4}}{I_{21}} = \frac{9900 - 7801}{9900} = 0.212$$

- احتمال أن شخصا عمره 22 سنة يتوفى خلال العام 25 من عمره هو:

$$mq_x = \frac{d_{x+m}}{I_x} = \frac{771}{9702} = 0.079$$

- احتمال حياة شخص عمره 20 سنة يعيش لمدة 3 سنوات هو:

$$\frac{I_{x+3}}{I_x} = \frac{I_{23}}{I_{20}} = \frac{9217}{10000} = 0.9217$$

- احتمال أن شخصا عمره 20 سنة يعيش لمدة 3 سنوات ثم يتوفى خلال العامين التاليين هو:

$$\frac{I_{20+3} - I_{20+3+2}}{I_{20}} = \frac{I_{23} - I_{25}}{I_{20}} = \frac{9217 - 7801}{10000} = 0.1416$$

😊مثال:

إذا علمت أن:

- شخص عمره 20 سنة واحتمال حياته لمدة 20 سنة أخرى هو 80%
- شخص عمره 40 سنة واحتمال حياته ليبلغ العمر 60 هو 60%
- وبفرض أنه من كل 5000 شخص عند تمام العمر 20 يتوفى منهم 300 شخص خلال 10 سنوات.

المطلوب:

- اوجد عدد الاحياء الذين بلغوا سن 60؟
 - احسب احتمال أن شخصا عمره 30 سنة يتوفى قبل بلوغه العمر 60؟
- خطوات الحل:

- عدد الاحياء الذين بلغوا سن 60 هو:

لدينا:

$$I_{20} = 5000, I_{30} = 5000 - 300 = 4700$$

ولدينا المعادلتين:

$$\frac{I_{40}}{I_{20}} = 0.8 \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{I_{60}}{I_{40}} = 0.6 \dots \dots \dots (2)$$

- بضرب (1) في (2) نجد:

$$\frac{I_{40}}{I_{20}} \times \frac{I_{60}}{I_{40}} = 0.8 \times 0.6$$

$$\frac{I_{60}}{I_{20}} = 0.48 \Rightarrow \frac{I_{60}}{5000} = 0.48 \Rightarrow I_{60} = 2400 \text{ نسمة}$$

- احتمال أن شخصا عمره 30 سنة يتوفى قبل بلوغه العمر 60 هو:

$$\frac{I_{30} - I_{60}}{I_{30}} = \frac{4700 - 2400}{4700} = 0.489$$

😊مثال:

إذا علمت أن من بين 10000 شخص في تمام سن الثلاثين يعيش منهم 9950 شخص حتى تمام السن 31، ويعيش من هؤلاء 9840 شخص حتى تمام السن 32.

المطلوب:

اوجد احتمال وفاة شخص في تمام السن 30 بعد بلوغه تمام السن 32 سنة؟
خطوات الحل:

- ايجاد احتمال حياة شخص في تمام 30 حتى تمام 31:

$$\frac{I_{31}}{I_{30}} = \frac{9950}{10000} = 0.995$$

- ايجاد احتمال حياة شخص في تمام 31 حتى تمام 32:

$$\frac{I_{32}}{I_{31}} = \frac{9840}{9950} = 0.988944$$

- ايجاد احتمال حياة شخص في تمام 30 حتى تمام 32:

$$\frac{I_{32}}{I_{30}} = \frac{9840}{10000} = 0.984$$

ولأن المطلوب هو احتمال وفاة (وليس حياة) شخص في تمام السن 30 بعد بلوغه تمام السن 32،
نقوم بايجاد الاحتمال المعاكس كما يلي:

$$1 - 0.984 = 0.016$$

المحاضرة الخامسة

الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

1- مفاهيم أساسية:

1-1- تعريف الفائدة:

يمكن تعريف الفائدة البسيطة بأنها العائد الذي يحصل عليه المستثمر نتيجة استخدام أمواله خلال مدة زمنية معينة، فإذا أودع شخص مبلغا من المال في أحد البنوك لمدة معينة وبمعدل فائدة محدد، فإنه سيتحصل من البنك في نهاية المدة على المبلغ الذي أودعه بالإضافة إلى الفائدة المستحقة منه.

تعرف كذلك على أنها الأجر الذي يدفعه المدين إلى دائنة نتيجة استخدامه لأموال دائنة في نهاية مدة زمنية معينة، أي بمعنى آخر هي تكلفة الاموال المقترضة خلال مدة محددة والمحسوبة على أساس معدل محدد.

وبالتالي يمكن القول أن قيمة الفائدة المستحقة عن استثمار مبلغ ما تتوقف على العوامل

الآتية :

- المبلغ الأصلي أو رأس المال المستثمر وسوف نرمز له بالرمز A

- معدل الفائدة وسوف نرمز له بالرمز i

- مدة الاستثمار وسوف نرمز له بالرمز n

وسوف نرمز للفائدة البسيطة بالرمز I_s ، ويتم حساب الفائدة البسيطة في العمليات المالية قصيرة الأجل والتي تكون فيها مدة الاستثمار غالبا اقل من سنة، أما الفائدة المركبة فنرمز لها بالرمز I_c ويتم حساب الفائدة المركبة في العمليات المالية طويلة الأجل والتي تكون فيها مدة الاستثمار غالبا أكثر من سنة.

1-2- الفرق بين الفائدة البسيطة والمركبة:

- الفائدة البسيطة: هي الفائدة التي لا تتغير بمرور الفترات، بمعنى لا تعتمد على تراكم رأس المال.

- الفائدة المركبة: هي الفائدة التي تتغير وتزيد بمرور الفترات نتيجة تراكم رأس المال.

تجدر الإشارة إلى أن عملية تراكم رأس المال هنا المقصود منها إضافة الفوائد المحسوبة

لرأس المال المبدئي للمستثمر.

2- قوانين وعمليات أساسية في حساب الفائدة البسيطة:

- حساب الفائدة البسيطة: تتم عملية حساب الفائدة البسيطة وفق الصيغة التالية:

$$I_s = A \times i \times n$$

- حساب الجملة: ونقصد بها مجموع رأس المال والفوائد المتراكمة وتحسب وفق الصيغة التالية:

$$I_s = (A \times i \times n) + A$$

$$I_s = A[(i \times n) + 1]$$

ملاحظات هامة:

- لا بد أن تتفق المدة مع المعدل المطبق عند حساب الفائدة.

- المدة غالبا لا تكون بالسنوات لذلك يجب تحويلها بالسنوات، فإذا كانت المدة بالشهور تحول إلى سنوات بالقسمة على 12، أما إذا كانت بالأيام تحول إلى سنوات بالقسمة على 360 في حالة الفائدة التجارية أو بالقسمة على 365 في حالة الفائدة الصحيحة.

- تكون السنة بسيطة عندما يكون فيها شهر فيفري 28 يوما وتكون السنة بسيطة في حالة إذا تم قسمة السنة على 4 ووجد لها باقى.

- تكون السنة صحيحة (السنة كبيسة) عندما يكون فيها شهر فيفري 29 يوما، وتكون السنة كبيسة في حالة إذا تم قسمة السنة على 4 ووجد أنها تقبل القسمة على 4 بدون باقى. مثلا سنة 2016.

مثال:

أودع شخص مبلغ من المال قدره 3000 دج لمدة سنة واربعة أشهر وعشرون يوما بمعدل فائدة بسيط قدره 5%. أوجد قيمة الفائدة البسيطة ثم الجملة في نهاية الفترة؟

الحل:

- قيمة الفائدة البسيطة:

$$I_s = A \times i \times n$$

$$I_s = (3000 \times 0.05 \times 1) + \left(3000 \times 0.05 \times \frac{4}{12}\right) + \left(3000 \times 0.05 \times \frac{20}{365}\right)$$

$$I_s = (3000 \times 0.05 \times 1) + \left(3000 \times 0.05 \times \frac{4}{12}\right) + \left(3000 \times 0.05 \times \frac{20}{365}\right)$$

$$I_s = 150 + 50 + 8.21$$

$$I_s = 208.21 \text{ دج}$$

- قيمة الجملة:

$$3208.21 = 208.21 + 3000 = \text{الفوائد} + \text{راس المال} = \text{الجملة}$$

😊مثال:

أودع شخص مبلغ من المال لمدة 10 شهور، بمعدل 6% فوجد قيمة الفائدة البسيطة 165دج،
أوجد إذا قيمة رأس المال الموظف؟

الحل:

$$I_s = A \times i \times n$$
$$165 = A \times 0.06 \times \frac{10}{12}$$

$$A = \frac{165 \times 12}{0.06 \times 10}$$

$$A = 3300 \text{ دج}$$

3- قوانين وعمليات أساسية في حساب الفائدة المركبة:

- حساب الفائدة المركبة: تتم وفق الصيغة التالية:

$$I_c = A[(1 + i)^n - 1]$$

- حساب الجملة: تتم وفق الصيغة التالية:

$$\text{الجملة} = A(1 + i)^n$$

😊مثال:

وظف شخص مبلغ من المال قدره 8000دج لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركبة 4% ،
أوجد قيمة الفائدة المركبة ثم الجملة في نهاية الفترة؟

الحل:

- قيمة الفائدة المركبة:

$$I_c = A[(1 + i)^n - 1]$$
$$I_c = 8000[(1 + 0.04)^3 - 1]$$

$$I_c = 998.91 \text{ دج}$$

- قيمة الجملة:

$$\text{الجملة} = A(1 + i)^n$$

$$\text{الجملة} = 8000(1 + 0.04)^3$$

$$\text{الجملة} = 8998.91$$

😊مثال:

نفس معطيات التمرين الـ [مثال السابق، مع اختلاف في المدة فقط وهي 3 سنوات و5 أشهر و20 يوم، أوجد إذا قيمة الفائدة المركبة ثم الجملة في نهاية الفترة؟
الحل:

- قيمة الفائدة المركبة:

$$I_c = A[(1 + i)^n - 1]$$

$$I_c = 8000 \left[(1 + 0.04)^{3 + \frac{5}{12} + \frac{20}{360}} - 1 \right]$$

$$I_c = 1167.12 \text{ دج}$$

- قيمة الجملة:

$$\text{الجملة} = A(1 + i)^n$$

$$\text{الجملة} = 8000(1 + 0.04)^{3 + \frac{5}{12} + \frac{20}{360}}$$

$$\text{الجملة} = 9167.12$$

😊مثال:

وظف شخص مبلغ من المال قدره 4000 دج بمعدل 5% لمدة معينة، فبلغت جملته في نهاية الفترة 5500 دج، أوجد المدة الزمنية لعملية التوظيف؟
الحل:

$$\text{الجملة} = A(1 + i)^n$$

$$5500 = 4000(1 + 0.05)^n$$

$$\frac{5500}{4000} = (1.05)^n$$

$$\frac{5500}{4000} = (1.05)^n$$

$$1.375 = (1.05)^n$$

بادخال اللوغارتم على الطرفين نتحصل على:

$$\log(1.375) = n \log(1.05)$$

$$\frac{\log(1.375)}{\log(1.05)} = n$$

$$6.52 = n \text{ سنة}$$

أي حوالي 6 سنوات ونصف.

😊مثال:

وظف شخص بمعدل 3% عدة مبالغ بتواريخ مختلفة، والجدول التالي يلخص ذلك:

تاريخ الايداع	قيمة المبلغ
2010/01/01	5000دج
2012/06/01	3000دج
2013/10/01	4000دج

المطلوب ايجاد جملة المبالغ في نهاية سنة 2016 .

الحل:

جملة المبلغ في نهاية 2016	قيمة المبلغ	تاريخ الايداع
$A(1 + i)^n = 5000(1 + 0.03)^7 = 6149.36$	5000دج	2010/01/01
$A(1 + i)^n = 3000(1 + 0.03)^{4+\frac{7}{12}} = 3435.25$	3000دج	2012/06/01
$A(1 + i)^n = 4000(1 + 0.03)^{3+\frac{3}{12}} = 4403.32$	4000دج	2013/10/01
13987.93دج	جملة	مجموع المبالغ.....



1- الفرق بين دفعات بداية المدة ونهاية المدة:

نقصد بدفعات بداية المدة دفعات الاستثمار أما دفعات نهاية المدة فهي دفعات التسديد،

ونرمز للعناصر المستخدمة في حساب القيمة الحالية وجملة الدفعات كما يلي:

V_n جملة دفعات نهاية المدة، \dot{V}_n جملة دفعات بداية المدة

V_0 القيمة الحالية لدفعات نهاية المدة، \dot{V}_0 القيمة الحالية لدفعات بداية المدة

a قيمة الدفعة

n عدد الدفعات

i معدل الفائدة

تجدر الإشارة الى أنه يجب أن تكون الدفعات متساوية من ناحية القيمة والفترة، لذلك تسمى

في بعض المراجع بالدفعات المتساوية.

2- قانون الجملة V_n :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

3- قانون القيمة الحالية V_0 :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

☺مثال:

اشترت مؤسسة عقارا بمبلغ 470000 دج وتمت عملية الدفع عن طريق تسديد

220000 دج عند تاريخ الشراء، والباقي عن طريق 08 دفعات متساوية، الأولى بعد سنة من

تاريخ الشراء، بمعدل 5% سنويا. أحسب قيمة الدفعة الثابتة؟

الحل:

- ايجاد القيمة الباقية (القيمة الحالية):

$$V_0 = 470000 - 220000 = 250000$$

لدينا:

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$250000 = a \frac{1 - (1 + 0.05)^{-8}}{0.05}$$

$$a = 250000 \frac{0.05}{1 - (1 + 0.05)^{-8}} = 38680.45 \text{ دج}$$

😊مثال:

اشترى أحد الأشخاص سيارة بـ 12 دفعة سنوية ذات قيمة 70000 دج، تدفع الأولى منها نهاية السنة الأولى من تاريخ الشراء، ما هو سعر شراء هذه السيارة بمعدل 5%؟
نفترض أن سعر شراء السيارة لو تم الدفع فوراً هو 620000 دج، وأن المشتري يدفع نصف المبلغ فوراً والباقي بواسطة 5 دفعات سنوية، الأولى نهاية السنة الأولى، ما هي قيمة الدفعة الجديدة؟

الحل:

- لدينا:

$$V_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$V_0 = 70000 \frac{1 - (1 + 0.05)^{-12}}{0.05}$$

$$V_0 = 620427.61$$

- نبحث عن قيمة الباقي:

$$620000/2 = 310000$$

ومنه:

$$V_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$310000 = a \frac{1 - (1 + 0.05)^{-5}}{0.05}$$

$$a = 71602.18$$

😊مثال:

كم عدد الدفعات السنوية ذات مبلغ 10000 دج تدفع نهاية كل سنة للحصول على مبلغ 150000 دج علماً أن المعدل هو 7% سنوياً.

الحل:

$$V_n = a \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

$$150000 = 10000 \frac{(1 + 0.07)^n - 1}{0.07}$$

$$2.05 = (1 + 0.07)^n$$

ادخال log على الطرفين:

$$\log 2.05 = n \log(1 + 0.07)$$

$$\frac{\log 2.05}{\log(1 + 0.07)} = n$$

$$10.60 \text{ سنة} = n$$

ومنه يجب 10.60 سنة، وللحصول على عدد سنوات صحيح (إما 10 أو 11)، لا بد من تغيير قيمة الدفعة وتثبيت الجملة أو تغيير قيمة الجملة وتثبيت الدفعة.

😊 مثال:

لتسديد دين قيمته 100000 يدفع مدين في نهاية كل سداسي ولمدة 8 سنوات مبلغا ثابتا بمعدل فائدة سداسي 3%، أحسب قيمة هذا المبلغ؟
الحل:

يجب أولاً تحويل السنوات الى سداسيات (لكي تتماشى الفترة مع طبيعة المعدل)، ومنه لدينا 8 سنوات تساوي 16 سداسي.

$$V_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$100000 = a \frac{1 - (1 + 0.03)^{-16}}{0.03}$$

$$a = 100000 \frac{0.03}{1 - (1 + 0.03)^{-16}}$$

$$a = 7961.08 \text{ دج}$$

😊 مثال:

تعاقد مدين مع بنكه على تسديد قرض بـ 4 دفعات متساوية كل نهاية سنة، مبلغ الدفعة 40000 دج، لكن غير المدين رأيه واقترح تسديد دينه بدفعتين متساويتين في آخر كل سنة، بمعدل فائدة 5%، أحسب اذا مبلغ الدفعة الجديدة؟
الحل:

لكي تكون طريقة التسديد الاول تساوي (تكافئ) طريقة التسديد الثاني لا بد أن تتساوى قيمتها الحالية ومنه:

$$40000 \frac{1 - (1 + 0.05)^{-4}}{0.05} = a \frac{1 - (1 + 0.05)^{-2}}{0.05}$$

نلاحظ أن a هي المجهول، إذا وبعد اجراء العملية الحسابية نجد قيمة الدفعة a الجديدة تساوي 76281.17 دج



1- قانون الجملة \hat{V}_n :

$$\hat{V}_n = a \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} (1+i)^{n_2}$$

2- قانون القيمة الحالية \hat{V}_0 :

$$\hat{V}_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n_1}}{i} (1+i)^{-n_2}$$

☺مثال:

اتفق شخص مع بنكه بايداع دفعات سنوية ثابتة بقيمة 2000 دج بداية كل سنة، الدفعة الاولى بداية 2003 والأخيرة بداية 2012 وذلك بمعدل 10%، أوجد ما يلي:

- جملة هذا الشخص نهاية سنة 2012؟

- جملة هذا الشخص بداية سنة 2015؟

الحل:

- جملة هذا الشخص نهاية سنة 2012:

$$\hat{V}_n = a \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} (1+i)^{n_2}$$

$$\hat{V}_n = 2000 \frac{(1+0.1)^{10} - 1}{0.1} (1+0.1)^1$$

$$\hat{V}_n = 35062.33$$

- جملة هذا الشخص بداية سنة 2015 (علما أن بداية 2015 هي في نفس الوقت نهاية 2014):

$$\hat{V}_n = a \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} (1+i)^{n_2}$$

$$\hat{V}_n = 2000 \frac{(1+0.1)^{10} - 1}{0.1} (1+0.1)^3$$

$$\hat{V}_n = 42425.41$$

😊مثال:

يودع أحد الأشخاص بداية كل سنة مبلغ 5000 دج لمدة 8 سنوات، حيث معدل الفائدة هو 8%، ما هي الجملة المتحصل عليها نهاية السنة الثامنة؟، ما هي الجملة المتحصل عليها لو تأخر السحب بثلاثة أشهر عن الأجل السابق؟

الحل:

- الجملة المتحصل عليها نهاية السنة الثامنة:

لدينا:

$$\hat{V}_n = a \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} (1+i)^{n_2}$$

$$\hat{V}_n = 5000 \frac{(1+0.08)^8 - 1}{0.08} (1+0.08)^1$$

$$\hat{V}_n = 57437.78$$

- الجملة المتحصل عليها لو تأخر السحب بثلاثة أشهر عن الأجل السابق:

لدينا:

$$\hat{V}_n = a \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} (1+i)^{n_2}$$

$$\hat{V}_n = 5000 \frac{(1+0.08)^8 - 1}{0.08} (1+0.08)^{1+\frac{3}{12}}$$

$$\hat{V}_n = 58553.60$$

😊مثال:

أودع شخص دفعات في بنكه في بداية كل سنة مبلغ 60000 ولمدة 10 سنوات، وبعد ذلك وخلال 10 سنوات التالية قام بسحب 60000 في بداية كل سنة، السحب الاول نهاية السنة 10 لعملية الايداع.
أوجد رصيد هذا الشخص في نهاية السنة 10 الخاصة بالسحب علما أن المعدل المطبق هو 5 %؟

الحل:

لدينا: الرصيد يساوي جملة الايداعات ناقص جملة المسحوبات

$$\hat{V}_n = a \frac{(1+i)^{n_1} - 1}{i} (1+i)^{n_2}$$

$$\hat{V}_n = \left[a \frac{(1+0.05)^{10} - 1}{i0.05} (1+0.05)^{11} \right] + \left[a \frac{(1+0.05)^{10} - 1}{0.05} (1+0.05)^1 \right]$$

$$\hat{V}_n = 1290747.88 - 792407.23$$

$$\hat{V}_n = 49834.65$$



بموجب هذه الطريقة يتم تسديد القروض بشكل دوري (سنويا، شهريا،...) أي يدفع المقترض دوريا دفعة ثابتة للمقرض بعدد محدد متفق عليه مسبقا، وتسدّد آخر دفعة يكون المقترض قد دفع أصل القرض ومجموع الفوائد المترتبة عنه.
ملاحظة هامة:

تحتوي كل دفعة على جزئين:

- الجزء أول يتمثل في جزء من رأس المال ويسمى الاستهلاك ونرمز له بـ M
 - الجزء الثاني يتمثل في الفائدة على القرض المتبقي نرمز له بـ I
- ومنه نقول أن الدفعة = الاستهلاك + الفائدة أي $a = M + I$

1- تحديد قيمة الدفعة الثابتة:

يتم استخراج قيمة الدفعة a من إحدى العلاقتين:

- من قانون الجملة V_n :

$$V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} \rightarrow a = V_n \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

- من قانون القيمة الحالية V_0 :

$$V_0 = a \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \rightarrow a = V_0 \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

2- جدول استهلاك القرض:

حتى يتسنى للمسیر متابعة تطور القرض واستهلاكاته، يتم اعداد جدول يضم المعلومات التالية: السنوات، أصل القرض، القيمة المبدئية، الدفعة، الفائدة، الاستهلاك، الاستهلاك المتراكم، القيمة النهائية. ومن هذا الجدول تستخرج العديد من العلاقات والعناصر المفيدة في مراقبة التسيير مثل تحديد رصيد الدين المتبقي، تحديد قيمة الفوائد المسددة او المتبقية... إلخ.

☺مثال:

تحصلت مؤسسة على قرض يقدر بـ 200000 دج يسدد خلال 4 سنوات بدفعات ثابتة سنوية وبمعدل 12% ابتداء من نهاية سنة العقد. المطلوب حساب قيمة الدفعة ثم اعداد جدول استهلاك هذا القرض.

الحل:

- تحديد قيمة a:

$$a = V_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = 200000 \frac{0.12}{1 - (1 + 0.12)^{-4}} = \boxed{65846.88}$$

- إعداد جدول استهلاك القرض:

السنوات	قيمة الاصل	ق مبدئية	a	I	M	ΣM	ق نهائية
01	200000	200000	65846.88	24000	41846.88	41846.88	158153.12
02	200000	158153.12	65846.88	18978.37	46868.55	88715.38	111284.61
03	200000	111284.61	65846.88	13354.15	52492.72	141208.11	58791.88
04	200000	58791.88	65846.88	7055.02	58791.88	200000	0
المجموع	-	-	263387.55	63387.55	200000	-	-

ملاحظات هامة:

- نلاحظ أن هناك تغييرات صغيرة في بعض الحسابات ناتجة عن عملية التقريب
 - نلاحظ أن القيمة المتبقية في السنة الاخيرة (4) تساوي قيمة الاستهلاك الخاص بها وهو 58791.88

- نلاحظ أن الاستهلاك المتراكم لجميع السنوات يساوي قيمة القرض

- نلاحظ أن مجموع الدفعات الثابتة = مجموع الفوائد + مجموع الاستهلاكات

- نلاحظ ان القيمة النهائية في السنة الاخير تساوي صفر.

- 3- علاقات أساسية من جدول استهلاك القروض بدفعات ثابتة:
من الجدول السابق، يمكن استنباط العلاقات او القوانين الهامة التالية:
- علاقة الاستهلاك مع الدفعة:

$$a = M_k(1 + i)^{n-k+1}$$

- علاقة الاستهلاكات فيما بينها:

$$M_n = M_k(1 + i)^{n-k}$$

- الفرق بين استهلاكين متتاليين:

$$M_2 - M_1 = I_1 - I_2$$

- علاقة الاستهلاكات ومعدل الفائدة:

$$\frac{M_2 + M_3}{M_2 + M_1} = (1 + i)$$

- علاقة الاستهلاك الاول وراس المال المبدئي:

$$V_0 = M_1 \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

☺مثال:

- يسدد قرض بـ 10 دفعات متساوية بمعدل 8% ومن جدول استهلاك القرض استخرجنا ما يلي:
مجموع الاستهلاكين الاول والاخير يساوي 437010.96 د.ج.
المطلوب:

- ايجاد قيمة الاستهلاكين الاول والاخير
- مبلغ الدفعة الثابتة
- أصل القرض
- المبلغ الباقي بعد تسديد الدفعة السادسة.

الحل:

- حساب الاستهلاكين الاول والاخير

لدينا:

$$M_1 + M_{10} = 437010.96 \dots \dots (1)$$

ولدينا:

$$M_n = M_k(1 + i)^{n-k}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} M_n &= M_1(1 + i)^{n-1} \\ M_{10} &= M_1(1 + 0.08)^{10-1} \\ M_{10} &= M_1(1.08)^9 \dots \dots (2) \end{aligned}$$

نعوض 2 في 1 فنجد:

$$M_1 + M_1(1.08)^9 = 437010.96$$

ومنه:

$$M_1 = 145718.65 \dots \dots (3)$$

نعوض 3 في 1 نجد:

$$M_{10} = 291292.3$$

- حساب مبلغ الدفعة:

لدينا:

$$a = M_k(1 + i)^{n-k+1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} a &= M_1(1 + i)^{n-1+1} \\ a &= M_1(1 + i)^n \\ a &= 145718.65(1 + 0.08)^{10} \\ a &= 314595.68 \end{aligned}$$

- حساب أصل القرض:

لدينا:

$$V_0 = M_1 \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

ومنه:

$$V_0 = 145718.65 \frac{(1 + 0.08)^{10} - 1}{0.08} = 21100962.50$$

- المبلغ الباقي بعد تسديد الدفعة السادسة:

بمعنى أنه سيبقى لنا تسديد 4 دفعات

$$V_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$V_6 = 314595.68 \frac{1 - (1 + 0.08)^{-4}}{0.08} = 1041980.85$$

😊مثال:

ليكن رأس مال قدره 610510 دج يسدد على مدار 05 دفعات سنوية ثابتة، أولها بعد سنة

وبمعدل 10%، أنجز جدول الاستهلاك؟

الحل:

- تحديد قيمة a:

$$a = V_0 \frac{i}{1 - (1 + i)^{-n}} = 610510 \frac{0.1}{1 - (1 + 0.1)^{-5}} = \boxed{161051}$$

- إعداد جدول استهلاك القرض:

السنوات	قيمة الاصل	ق مبدئية	a	I	M	ΣM	ق نهائية
01	610510	610510	161051	61051	100000	100000	510510
02	610510	510510	161051	51051	110000	210000	400510
03	610510	400510	161051	40051	121000	331000	279510
04	610510	279510	161051	27951	133100	464100	146410
05	610510	146410	161051	14641	146410	610510	0
المجموع	-	-	805255	194745	610510	-	-

😊مثال:

- قرض يسدد على مدار 06 دفعات ثابتة، أولها تدفع بعد سنة بمعدل فائدة قدره 07%، فإذا علمت أن قيمة الاستهلاك الأول هي 6500 دج أوجد ما يلي:
- رأس المال المقترض؟
 - قيمة الاستهلاك الخامس؟
 - قيمة الدفعة الثابتة؟
 - قيمة الفائدة الخاصة بالسنة الثالثة؟

الحل:

- حساب أصل القرض:

لدينا:

$$V_0 = M_1 \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

ومنه:

$$V_0 = 6500 \frac{(1 + 0.07)^6 - 1}{0.07} = 46496.38$$

- حساب قيمة الاستهلاك الخامس:

لدينا:

$$M_n = M_k(1 + i)^{n-k}$$

ومنه:

$$M_5 = M_1(1 + i)^{5-1}$$
$$M_5 = 6500(1 + 0.07)^4 = 8520.17$$

- حساب قيمة الدفعة الثابتة:

لدينا:

$$a = M_k(1 + i)^{n-k+1}$$

ومنه:

$$a = M_5(1 + i)^{6-5+1}$$
$$a = 8520.17(1 + i)^2$$
$$a = 9754.74$$

- ايجاد قيمة الفائدة الخاصة بالسنة الثالثة:

لدينا:

$$\begin{aligned}I_3 &= a - M_3 \\I_3 &= a - M_1(1.07)^2 \\I_3 &= 9754.74 - 6500(1.07)^2 \\I_3 &= 9754.74 - 7441.85 \\I_3 &= 2312.89\end{aligned}$$

😊مثال:

يسدد دين على 07 دفعات سنوية ثابتة، وبمعايينة جدول استهلاك القرض تبين ما يلي:

- قيمة الاستهلاك الاول: 4000 دج

- قيمة الاستهلاك الثاني: 4500 دج

أوجد ما يلي:

- معدل الفائدة؟

- قيمة الدين؟

- قيمة القسط الثابت؟

- مجموع الفوائد المدفوعة؟

الحل:

- ايجاد معدل الفائدة:

لدينا:

$$\begin{aligned}M_n &= M_k(1 + i)^{n-k} \\M_2 &= M_1(1 + i)^{2-1} \\4500 &= 4000(1 + i)^1 \\ \frac{4500}{4000} &= (1 + i) \\ \frac{4500}{4000} - 1 &= i\end{aligned}$$

$$12.5\% = i$$

- حساب قيمة الدين:

$$V_0 = M_1 \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

ومنه:

$$V_0 = 4000 \frac{(1 + 0.125)^7 - 1}{0.125} = 40982.31$$

- حساب قيمة القسط الثابت (الدفعة الثابتة):

$$V_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$40982.31 = a \frac{1 - (1 + 0.125)^{-7}}{0.125}$$

$$a = 40982.31 \frac{0.125}{1 - (1 + 0.125)^{-7}}$$

$$a = 9122.78$$

- حساب مجموع الفوائد المدفوعة:

$$\sum_{i=1}^7 I_i = (n \times a) - V_0$$

$$\sum_{i=1}^7 I_i = (7 \times 9122.78) - 40982.31$$

$$\sum_{i=1}^7 I_i = 22877.15$$

😊مثال:

دين قيمته 3000000 دج يسدد على مدار 08 سنوات بمعدل 10%، فإذا علمت أن:
قيمة الدفعة الثابتة هي 562332.05 دج و قيمة الاستهلاك الاول هي 262332.05 دج
أوجد ما يلي:

- قيمة الدين الباقي للتسديد بعد دفع الدفعة الخامسة؟

- قيمة الدين المسدد بعد دفع الدفعة الخامسة؟

الحل:

- إيجاد قيمة الدين الباقي للتسديد بعد دفع الدفعة الخامسة: (في هذه الحالة لم يتبقى سوى ثلاث

دفعات)

لدينا:

$$V_0 = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

$$V_5 = a \frac{1 - (1 + i)^{-(8-5)}}{i}$$

$$V_5 = a \frac{1 - (1 + i)^{-3}}{i}$$

$$V_5 = 562332.05 \frac{1 - (1 + 0.1)^{-3}}{0.1}$$

$$V_5 = 1398436.58$$

- حساب قيمة الدين المسدد بعد دفع الدفعة الخامسة:

$$\text{الدين المسدد} = V_0 - V_5$$

$$\text{الدين المسدد} = 3000000 - 1398436.58$$

$$\text{الدين المسدد} = 1601563.42$$

المحاضرة التاسعة

استهلاك القروض باستهلاكات ثابتة

يتم تسديد الدين حسب هذه الطريقة دوريا بدفعات تشمل جزء ثابت من أصل القرض وفائدة على القرض المتبقي كل فترة، علما أن الاستهلاك الثابت يحدد عن طريق قسمة أصل القرض على عدد دفعاته.
ملاحظة:

- بتناقص أصل القرض عبر الفترات تتناقص الفائدة في الدفعات المتوالية، وكننتيجة لذلك تتناقص قيمة الدفعات بنفس النسبة مادام الاستهلاك فيها ثابتا.
- إذا كانت في الطريقة السابقة الدفعة المتساوية هي العنصر الاساسي في جدول استهلاك القرض، فإن العنصر الأساسي في هذه الطريقة هو الاستهلاك الثابت.

1- تحديد قيمة الاستهلاك الثابت:

تحدد قيمة الاستهلاك الثابت مباشرة عن طريق قسمة قيمة الاصل على عدد فترات التسديد، علما أن الرموز تبقى على حالها.

2- جدول استهلاك القرض بطريقة الاستهلاكات الثابتة:

بمقتضى هذه الطريقة، يأخذ جدول استهلاك القرض نفس الشكل الخاص بجدول استهلاك القروض بدفعات ثابتة، مع ضرورة الأخذ بعين الاعتبار الاختلاف في خصائص مكوناته والعمليات الحسابية.
وعليه يتضمن الجدول كل من الفترات، قيمة القرض، الرصيد المبدئي، قيمة الدفعة، قيمة الفائدة، قيمة الاستهلاك الثابت، الاستهلاكات المتراكمة، وأخيرا الرصيد النهائي.

😊مثال:

اقترضت مؤسسة مبلغ من المال قدره 25000 دج لمدة 5 سنوات، بمعدل 8% قم بانجاز جدول استهلاك القرض بطريقة الاستهلاكات الثابتة؟
الحل:

- تحديد قيمة الاستهلاك الثابت:

$$M = \frac{V_0}{n} = \frac{25000}{5} = 5000$$

- اعداد الجدول استهلاك القرض الثابت:

السنوات	قيمة الاصل	ق مبدئية	a	I	M	ΣM	ق نهائية
01	25000	25000	7000	2000	5000	5000	20000
02	25000	20000	6600	1600	5000	10000	15000
03	25000	15000	6200	1200	5000	15000	10000
04	25000	10000	5800	800	5000	20000	5000
05	25000	5000	5400	400	5000	25000	0
المجموع	-	-	31000	6000	25000	-	-

2-3- علاقات أساسية من جدول استهلاك القروض باستهلاكات ثابتة:

من الجدول السابق، يمكن استنباط العلاقات او القوانين الهامة التالية:

- أصل القرض:

$$M = \frac{V_0}{n} \rightarrow V_0 = M \times n$$

- مجموع الدفعات:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

- مجموع الفوائد:

$$\sum_{i=1}^n I_i = \left(\frac{n+1}{2} \right) (V_0 \times i)$$

- الفرق بين دفعتين يساوي الفرق بين فائدتين:

$$a_n + a_k = I_n + I_k$$

😊مثال:

من جدول استهلاك قرض بطريقة الاستهلاك السنوية الثابتة وجدنا أن قيمة الاستهلاك 10000دج، عدد السنوات 4، المعدل المطبق 3%. اوجد ما يلي:

- قيمة الاصل؟

- مجموع الفوائد المتحصل عليها؟

- مجموع الدفعات؟

- اعداد جول استهلاك هذا القرض؟

الحل:

- ايجاد قيمة الاصل:

$$V_0 = 10000 \times 4$$

$$V_0 = 40000$$

- ايجاد مجموع الفوائد:

لدينا:

$$\sum_{i=1}^n I_i = \left(\frac{n+1}{2}\right) (V_0 \times i)$$

$$\sum_{i=1}^n I_i = \left(\frac{4+1}{2}\right) (40000 \times 0.03)$$

$$\sum_{i=1}^n I_i = \left(\frac{n+1}{2}\right) (V_0 \times i)$$

$$\sum_{i=1}^n I_i = 3000$$

- ايجاد مجموع الدفعات:

لدينا:

$$\sum_{i=1}^n a_i = V_0 + \sum_{i=1}^n I_i$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 40000 + 3000$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = 43000$$

- اعداد جدول استهلاك القرض بطريقة الاستهلاكات الثابتة:

السنوات	قيمة الاصل	ق مبدئية	a	I	M	ΣM	ق نهائية
01	40000	40000	11200	1200	10000	10000	30000
02	40000	30000	10900	900	10000	20000	20000
03	40000	20000	10600	600	10000	30000	10000
04	40000	10000	10300	300	10000	40000	0
المجموع	-	-	43000	3000	40000	-	-



سؤال نظري: ما هي أهم الأدوات الإحصائية الشائعة في قياس المخاطر المالية؟

الجواب:

تعتمد هذه الأدوات على قياس درجة التشتت في قيم المتغير المالي محل الاهتمام، أو قياس درجة حساسيته تجاه التغيرات التي تحدث في متغير آخر، ومن أهم هذه الأدوات:

1- المدى: Range

والذي يتمثل في الفرق بين أعلى قيمة وأدنى قيمة للمتغير المالي موضع الاهتمام، ويمكن استخدام المدى كمؤشر للحكم على المستوي النسبي للخطر. وكلما زادت قيمة المدى كان ذلك مؤشراً على ارتفاع مستوى الخطر المصاحب للمتغير المالي موضع الاهتمام.

2- التوزيعات الاحتمالية: Probability distributions

وهي تقدم أداة كمية أكثر تفصيلاً من مقياس المدى، وذلك من خلال تتبع سلوك المتغير المالي وتحديد

القيم المتوقعة الحدوث في ظل الأحداث الممكنة. وتحديد التوزيع الاحتمالي لهذه القيم، واستخدامه في المقارنة بين مستويات الخطر المصاحبة لعدد من الأصول المستقلة، وبما يمكن من المفاضلة فيما بينها. وكلما كان التوزيع الاحتمالي أكثر اتساعاً نحو الطرفين، كلما كان ذلك مؤشراً على ارتفاع مستوى الخطر.

3- الانحراف المعياري: Standard deviation

يعتبر أكثر المقاييس الإحصائية استخداماً كمؤشر للخطر الكلي المصاحب للمتغير المالي، وهو يقيس درجة تشتت قيم المتغير موضوع الدراسة حول القيمة المتوقعة له، وكلما زادت قيمة الانحراف المعياري دل ذلك على ارتفاع مستوى الخطر.

4- معامل الاختلاف: Coefficient of variation

هو مقياس نسبي (أو معياري) لدرجة التشتت، حيث يربط بين الخطر (مقاساً بالانحراف المعياري)، وبين العائد (مقاساً بالقيمة المتوقعة)، ولذلك يصبح معامل الاختلاف أكثر دقة وتفضيلاً عن الانحراف المعياري، عند المقارنة بين عدة أصول مستقلة ومختلفة فيما بينها من حيث العائد والخطر. إن معامل الاختلاف يعبر عن درجة الخطر لكل وحدة من العائد، وكلما ارتفعت قيمته دل ذلك على ارتفاع مستوى الخطر.

5- معامل بيتا: Beta coefficient

وهو مقياس لمدى حساسية قيم المتغير المالي موضع الدراسة للتغيرات التي تحدث في متغير آخر، فمثلاً يمكن قياس درجة حساسية عائد سهم معين للتغيرات في عائد السوق، أو للتغيرات في أسعار الفائدة بالبنوك. ويبدل معامل بيتا المرتفع على ارتفاع درجة الحساسية، وبالتالي ارتفاع مستوى الخطر.

مثال (1):

البيانات التالية يعطي الخسائر الناتجة بسبب الحريق لأحد المصانع خلال خمس سنوات متتالية

السنوات	1999	2000	2001	2002	2003
مقدار الخسارة (بالآلاف وحدة نقدية)	20	21	0	22	17

والمطلوب حساب كل من:

1. متوسط الخسارة " \bar{x} " (القيمة المتوقعة للخسارة بالنسبة التالية)
2. الانحراف المعياري للخسارة σ .
3. معامل الاختلاف للخسارة C.V.

الحل

يرمز لمقدار الخسارة بالآلاف جنية بالرمز x

ونكون الجدول الآتي

X	X ²
20	400
21	441
0	0
22	484
17	289
80	1614

وتحسب قيمة كل من القيمة المتوقعة للخسارة والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للخسارة كالتالي:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{80}{5} = 16$$

(بالآلاف وحدة نقدية)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \left[\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} \left[1641 - \frac{(80)^2}{5} \right]}$$

$$\sqrt{66.8} = 8.17$$

(بالآلاف وحدة نقدية)

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{8.17}{16} \times 100 = 51.06\%$$

و

مثال (2)

تمتلك إحدى شركات النقل للسياحة والرحلات 800 سيارة، والجدول التالي يعطي التوزيع التكراري لعدم حوادث السيارات التابعة للشركة والخسائر الناتجة عنها مقدرة بالآلاف نقدياً

فئات الخسارة (بالآلاف وحدة نقدية)	0-	20-	40-	60-	80-	100-120
عدد السيارات	300	220	140	80	42	18

المطلوب حساب الآتي:ـ

1. القيمة المتوقعة للخسارة المعرضة لها الشركة بسبب الحوادث خلال العام التالي \bar{x}

2. الانحراف المعياري للخسارة المتوقعة σ

فئات الخسارة (بالآلاف وحدة نقدية)	عدد السيارات F	مركز الفئات X	Fx	Fx ²
0-	300	10	3000	30000
20-	220	30	6600	198000
40-	140	50	7000	350000
60-	80	70	5600	392000
80-	42	90	3780	34200
100-120	18	110	1980	217800
المجموع	800	-----	27960	1528000

$$\bar{x} = \frac{\sum FX}{\sum F} = \frac{27960}{800} = 34.95$$

(ألف وحدة نقدية)

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\sum f} \left[\sum fx^2 - \frac{(\sum fx)^2}{\sum f} \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{800} \left[1528000 - \frac{(27960)^2}{800} \right]}$$

$$= \sqrt{688.4975} = 26.239$$

(ألف وحدة نقدية)

ملحوظة هامة:

يمكن الوصول إلى نفس النتائج من المثال السابق إذا تم الحل عن طريق التوزيع التكراري النسبي (ويسمى أيضاً التوزيع الاحتمالي) وفي هذه الطريقة تتبع الخطوات الآتية:

1. يوجد التوزيع التكراري النسبي (التوزيع الاحتمالي) ويرمز له بالزمر $P(x)$ وبحسب بقسمة تكرار كل فئة على مجموعة التكرارات.

2. يمكن حساب القيمة المتوقعة للخسارة ويرمز لها بالرمز " μ " والانحراف المعياري " σ " كالاتي:

$$\mu = \Sigma [x \cdot px]$$

$$\sigma = \sqrt{\Sigma [x^2 \cdot P(x) - \mu^2]}$$

ولحساب المطلوب يخطط الجدول التالي:

فئات الخسارة (بالألف وحدة نقدية)	عدد السيارات F	مراكز الفئات x	P(X)	x.p (x)	X ² .px
0-	30	10	0.375	3.75	37.5
20-	220	30	0.275	8.25	247.5
40-	140	50	0.175	8.75	427.5
60-	80	70	0.100	7.0	490.0
80-	42	90	0.0525	4.725	425.25
100-120	18	110	0.0255	2.475	272.25
المجموع	800	----	1.000	34.95	1910

لاحظ الآتي:

1. التوزيع التكراري النسبي ويسمى التوزيع الاحتمالي، تحسب قيمة $P(X)$ لكل فئة بقسمة تكرار الفئة

$$\left[\frac{f}{\Sigma f} \right] \text{ على التكرار الكلي}$$

2. مجموعة التكرارات النسبة = 1 أي أن $\Sigma P(X) = 1$

$$34.95 = \mu = \Sigma [X \cdot P(X)] - \mu^2 \text{ القيمة المتوقعة للخسارة} = 34.95$$

(نفس النتيجة السابقة)

$$\sigma = \sqrt{\Sigma [x^2 \cdot P(X)] - \mu^2} \text{ الانحراف المعياري و}$$

$$\sqrt{1910 - (34.95)^2} = 26.239 \text{ (نفس النتيجة السابقة)}$$

مثال (3):

البيان التالي يعطي عدد مرات حوادث إصابات العمل لعمال إحدى الشركات الكبرى خلال إحدى السنوات:

عدد مرات الحوادث	0	1	2	3	4	المجموع
عدد العمال	4000	600	250	100	50	5000

إذا تم اختبار أحد عمال ذلك المصنع عشوائياً، إحسب احتمال حدوث الحالات الآتية خلال إحدى السنوات القادمة:

1. احتمال عدم حدوث أي حادثة للعامل $p(x=0)$
2. احتمال حدوث حادثة فقط للعامل $p(x=1)$
3. احتمال حدوث حادثين فقط للعامل $p(x=2)$
4. احتمال حدوث حادثة واحدة على الأكثر للعامل $P(x \leq 1)$
5. احتمال حدوث حادثة واحدة على الأقل للعامل $P(x \geq 1)$
6. احتمال حدوث حادثين على الأكثر للعامل $P(x \leq 2)$
7. احتمال حدوث حادثين على الأقل للعامل $P(x \geq 2)$

الحل

لحساب الاحتمالات المطلوبة نوجد أولاً التوزيع الاحتمالي (التكرار النسبي) للحوادث كالتالي:

عدد مرات الحوادث (x)	عدد العمال	التوزيع الاحتمالي P(x)
0	4000	0.80
1	600	0.12
2	250	0.05
3	100	0.02
4	50	0.01
المجموع	5000	1.00

يلاحظ أن التوزيع الاحتمالي (التكرار النسبي) لكل حالة هو خارج قسمة عدد العمال بالحالة على العدد الكلي للعمال.

1. احتمال عدم حدوث حادثة للعامل: $p(x=0) = 0.8$
 2. احتمال حدوث حادثة واحدة للعامل $p(x=1) = 0.12$
 3. احتمال حدوث حادثين للعامل $p(x=2) = 0.05$
 4. احتمال حدوث حادثة واحدة على الأكثر للعامل:
- $$P(x \leq 1) = p(x=0) + p(x=1) = 0.80 + 0.12 = 0.92$$

5. احتمال حدوث حادثة واحدة على الأقل للعامل

$$1) = p(x = 1) + p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) = 0.12 + 0.05 + 0.02 + 0.01 = 0.2 \geq P(x)$$

حل آخر:

$$1) = 1 - p(x \leq 1) = 1 - p(x = 0) = 1 - 0.8 = 0.2 \geq P(x)$$

6. احتمال حدوث حادثتين على الأكثر

$$2) = p(x = 0) + p(x = 1) + p(x = 2) = 0.8 + 0.12 + 0.05 = 0.97 \geq P(x)$$

7. احتمال حدوث حادثتين على الأقل للعامل

$$2) = p(x = 2) + p(x = 3) + p(x = 4) = 0.05 + 0.02 + 0.01 = 0.08 \geq P(x)$$

مثال 4:

من بيانات المثال السابق إحصى كل من:

1. القيمة المتوقعة لمرات الإصابة (متوسط عدد مرات الإصابة).

2. الانحراف المعياري لعدد مرات الإصابة.

X	P(x)	x.p(x)	X ² .p(x)
0	0.80	0.00	0.00
1	0.12	0.12	0.12
2	0.05	0.10	0.20
3	0.02	0.06	0.18
4	0.01	0.04	0.16
المجموع	1.00	0.32	0.66

1. القيمة المتوقعة لمرات الإصابة (متوسط عدد مرات الإصابة)

$$\mu = \sum[x.p(x)] = 0.32$$

2. الانحراف المعياري لعدد مرات الإصابة

$$\sigma = \sqrt{\sum[x^2.p(x)] - \mu^2} = \sqrt{0.66 - (0.32)^2} = \sqrt{0.5576} = 0.747$$

مثال (5)

نظمت إحدى شركات الطيران خلال إحدى السنوات 2000 رحلة طيران، فإذا علمت أن عدد الرحلات التي وصلت متأخرة عن موعدها المحدد 200 رحلة، إذا قامت 3 طائرات تابعة لهذه الشركة بثلاث رحلات، المطلوب إيجاد الآتي:

1. التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل متأخرة عن موعدها
2. احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل متأخرة عن موعدها.
3. احتمال وصول طائرتين على الأكثر متأخرة عن موعدها.
4. أوجد كل من القيمة المتوقعة للتوزيع " μ " كذلك الانحراف المعياري للتوزيع " σ ".

الحل

نرمز لاحتمال وصول طائرة متأخرة عن موعدها بالرمز "P" ونرمز لاحتمال وصول الطائرة في موعدها (ليست متأخرة) بالرمز "1-p".

$$\therefore p = \frac{200}{2000} = 0.1$$

$$1 - P = 1 - 0.1 = 0.9$$

نلاحظ أن التوزيع الاحتمالي لعدد لطائرات التي تصل متأخرة عن موعدها يتبع توزيع ذي الحدين بمعالم:

(P=0.1, n=3)، والصور العامة لتوزيع ذي الحدين هي:

$$P(X) = {}^n C_x (P)^x (1 - P)^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

وبالنسبة للتوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل متأخرة يكون:

$$P(X) = {}^3 C_x (0.1)^x (0.9)^{3-x} \quad \text{و} \quad X = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X = 0) = {}^3 C_0 (0.1)^0 (0.9)^3 = 1 \times 1 \times 0.729 = 0.729$$

$$P(X = 1) = {}^3 C_1 (0.1) (0.9)^2 = 3 \times 0.1 \times 0.81 = 0.243$$

6 . احتمال حدوث حادثتين على الأكثر

$$P(x \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.05 + 0.02 + 0.01 = 0.08$$

مثال (6):

من بيانات المثال السابق احسب كل من:

(1) القيمة المتوقعة لمرات الإصابة (متوسطة عدد مرات الإصابة).

(2) الانحراف المعياري لعدد مرات الإصابة.

X	P(X)	X.P(X)	X ² .P(X)
0	0.08	0.00	0.00
1	0.12	0.12	0.12
2	0.05	0.10	0.20
3	0.02	0.06	0.18
4	0.01	0.04	0.16
المجموع	1.00	0.32	0.66

1. القيمة المتوقعة لمرات الإصابة (متوسط عدد مرات الإصابة)

$$\mu = \sum [x \cdot p(x)] = 0.32$$

2. الانحراف المعياري لعدد مرات الإصابة

$$\sigma = \sqrt{\sum [x^2 \cdot p(x)] - \mu^2} = \sqrt{0.66 - (0.32)^2} = \sqrt{0.5576} = 0.747$$

مثال (7):

نظمت إحدى شركات الطيران خلال إحدى السنوات 2000 رحلة طيران، فإن علمت أن عدد الرحلات التي وصلت متأخرة عن موعدها المحدد 200 رحلة. إذا قامت 3 طائرات تابعة لهذه الشركة بثلاث رحلات، المطلوب إيجاد الآتي:

1. التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل متأخرة عن موعدها.
2. احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل متأخرة عن موعدها.
3. احتمال وصول طائرتين على الأكثر متأخرة عن موعدها.
4. أوجد كل من القيمة المتوقعة للتوزيع " μ " كذلك الانحراف المعياري للتوزيع " σ ".

الحل

نرمز لاحتمال وصول الطائرة متأخرة عن موعدها بالرمز "p"

ونرمز لاحتمال وصول الطائرة في موعدها (ليست متأخرة) بالرمز "1-P"

$$\therefore P \frac{200}{2000} = 0.1 \text{ و } 1 - p = 1 - 0.1 = 0.9$$

وبالنسبة للتوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل متأخرة يكون:

$$P(X) = {}^3C_x (0.1)^x (0.9)^{3-x}$$

$$P(X=0) = {}^3C_0 (0.1)^0 (0.9)^3$$

$$= 1 \times 1 \times 0.729 = 0.729$$

$$P(X=1) = {}^3C_1 (0.1) (0.9)^2$$

$$= 3 \times 0.1 \times 0.81 = 0.243$$

$$P(X=2) = {}^3C_2 (0.1)^2 (0.9) = 3 \times 0.01 \times 0.9 = 0.027$$

$$P(X=3) = {}^3C_3 (0.1)^3 (0.9)^0 = 1 \times 0.001 \times 1 = 0.001$$

ويعرض التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل متأخرة عن موعدها في الجدول الآتي:

عدد الطائرات التي تصل متأخرة x	0	1	2	3	المجموع
الاحتمال P(X)	0.729	0.243	0.027	0.001	1

لاحظ أنه دائماً يكون مجموع الاحتمالات في توزيع ذي الحدين مساوياً للواحد الصحيح.

2. احتمال وصول طائرة واحدة على الأقل متأخرة عن موعدها

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0.243 + 0.027 + 0.001 = 0.271$$

3. احتمال وصول طائرتين على الأكثر متأخرة عن موعدها

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0.729 + 0.243 + 0.027 = 0.999$$

ويلاحظ أن نفس النتيجة يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$P(X \leq 2) = 1 - P(X=3) = 1 - 0.001 = 0.999$$

4. لإيجاد كل من القيمة المتوقعة للتوزيع " μ " كذلك الانحراف المعياري " σ " تخطيط الجدول

الآتي:

X	P(X)	X.P(X)	X ² .P(X)
0	0.729	0	0
1	0.243	0.243	0.243
2	0.027	0.054	0.108
3	0.001	0.003	0.009
المجموع	1	0.3	0.36

$$\mu = \Sigma[X.P(X)] = 0.3 = \sqrt{\Sigma[X^2.P(X)]} - \mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{0.36 - (0.3)^2} = \sqrt{0.27} = 0.52$$

مثال (8):

في إحدى المناطق الصناعية إذا كان من بين كل 1000 من مخازن المواد الخام يصاب 120 مخزناً بالحريق خلال السنة، إذا كان المخزن بتلك المنطقة معرض للإصابة بخطر الحريق 4 مرات في السنة على الأكثر.

المطلوب إيجاد كل من:

1. التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الإصابة بخطر الحريق.
2. القيمة المتوقعة لعدد مرات الإصابة بحريق، كذلك الانحراف المعياري.
3. احسب الاحتمالات الآتية:

$$P(X < 3) \text{ و } P(X \leq 3) \text{ و } P(x \geq 4) \text{ و } P(x > 3)$$

الحل

نرمز الاحتمال الإصابة بالحريق بالرمز "P"

$$P = \frac{120}{1000} = 0.12$$

$$1 - P = 1 - 0.12 = 0.88$$

نلاحظ أن التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الإصابة بحريق يتبع توزيع ذي الحدين بمعالم $n = 4$ و $p = 0.12$

وحيث أن الصور لتوزيع ذي الحدين هي:

$$P_x = {}^n C_x (P)^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, 3, 4$$

يكون التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الإصابة بخطر الحريق كالاتي:

$$P(x) = {}^4 C_x (0.12)^x (0.88)^{4-x}$$

$$P(x=0) = {}^4 C_0 (0.12)^0 (0.88)^4$$

$$= 1 \times 1 \times 0.5997 = 0.59970$$

$$P(X=1) = {}^4 C_1 (0.12) (0.88)^3$$

$$= 4 \times 0.12 \times 0.68147 = 0.32711$$

$$P(X=2) = {}^4 C_2 (0.12)^2 (0.88)^2$$

$$= 6 \times 0.0144 \times 0.7744 = 0.06691$$

$$P(X=3) = {}^4 C_3 (0.12)^3 (0.88)$$

$$= 4 \times 0.00173 \times 0.88 = 0.00609$$

$$P(X=4) = {}^4 C_4 (0.12)^4 (0.88)^0$$

$$= 1 \times 0.0021 \times 1 = 0.00021$$

ويعرض التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الإصابة بحريق في الجدول الآتي:

عدد مرات الإصابة بحريق x	0	1	2	3	4	المجموع
الاحتمال p(x)	0.59970	0.32711	0.04491	0.00609	0.00021	1

(لاحظ أن المجموع الفعلي هو 0.99991 والمفروض أن يكون الواحد الصحيح، وهذا الفرق الضئيل جداً راجع لعمليات التقريب)

2. لحساب كل من القيمة المتوقعة للتوزيع كذلك انحرافه المعياري نخطط الجدول الآتي:

X	P(X)	X.P(X)	X ² .P(X)
0	0.59970	0	0
1	0.32711	0.32711	0.32711
2	0.06691	0.13382	0.26764
3	0.00609	0.01827	0.05481
4	0.0021	0.00084	0.00336
المجموع	1.0	0.78004	0.65292

القيمة المتوقعة لعدد مرات الإصابة بالحريق μ

$$\mu = \sum [px - p(x)] = 0.48004$$

$$0.48 =$$

الانحراف المعياري للتوزيع σ

$$\sigma = \sqrt{\sum [X^2 . P(X) - \mu^2]} = \sqrt{0.65292 - (0.48)^2} = \sqrt{0.42253 - 0.65}$$

3. تحسب الاحتمالات المطلوبة كالآتي:.

$$P(x < 3) = P(x = 0) + P(x = 1) + P(x = 2) = 0.59970 + 0.32711 + 0.06691 = 0.99372$$

لاحظ أن $P(X < 2)$ تعني احتمال عدم حدوث حريق أو حدوث حريق واحد أو حدوث حريقين

$$P(X \leq 3) = P(x = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$P(X < 3) + P(X = 3) = 0.99372 + 0.00609 = 0.99981.$$

لاحظ أن $P(X \leq 3)$ تعني احتمال حدوث ثلاثة حرائق أو حريقين أو حريق أو عدم حدوث حريق.

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.00609 + 0.00021 = 0.0063 \geq P(X > 3) = P(X = 4) = 0.00021$$

المثال (9):

نفترض أننا حصلنا على التوزيع الاحتمالي لعدد مرات الخسارة (التوزيع الاحتمالي لتكرار الخسارة) بفعل الحريق أو السرقة سنويا لنوعية معينة من المنتجات في أحد المخازن وكان كما يلي:

عدد الحوادث X	0	1	2
الاحتمال	0.75	0.2	0.05

وتحصلنا كذلك على التوزيع الاحتمالي لمبلغ الخسارة (التوزيع الاحتمالي لوطأة أو شدة الخسارة) وكان كما يلي:

الوحدة: مليون دينار

مبلغ الخسارة Y	2000 دج	3000 دج	4000 دج
الاحتمال	0.6	0.25	0.15

المطلوب: إيجاد التوزيع الاحتمالي "Z" لإجمالي الخسارة السنوية لوحددة النقد؟ ثم الاحتمالات التالية:

$$p(4000 \leq Z) ; p(2000 \leq Z \leq 4000) ; p(Z=9000) ; p(Z \leq 3000)$$

الحل:

الإجمالي الخسائر السنواتية الممكنة	بيان العمليات	الاحتمال Z
0 دج	$P(Z = 0) \Rightarrow P(X = 0)$ $P(Z = 0) = 0.75$	0.75
2000 دج	$P(Z = 2000) \Rightarrow P(X = 1) \wedge P(Y = 2000)$ $\Rightarrow 0.2 \times 0.6 = 0.12$	0.12
3000 دج	$P(Z = 3000) \Rightarrow [P(X = 1) \wedge P(Y = 3000)] \vee$ $\Rightarrow (0.2 \times 0.25) = 0.05$	0.05
4000 دج	$P(Z = 4000) \Rightarrow [P(X = 1) \wedge P(Y = 4000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 2000) \wedge P(Y_2 = 2000)] \vee$ $\Rightarrow (0.2 \times 0.15) + (0.05 \times 0.6 \times 0.6) = 0.048$	0.048
5000 دج	$P(Z = 5000) \Rightarrow$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 2000) \wedge P(Y_2 = 3000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 3000) \wedge P(Y_2 = 2000)] \vee$ $\Rightarrow (0.05 \times 0.6 \times 0.25) + (0.05 \times 0.25 \times 0.6)$ $= 0.015$	0.015
6000 دج	$P(Z = 6000) \Rightarrow$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 3000) \wedge P(Y_2 = 3000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 4000) \wedge P(Y_2 = 2000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 2000) \wedge P(Y_2 = 4000)]$ $\Rightarrow (0.05 \times 0.25 \times 0.25) + (0.05 \times 0.15 \times$ $0.6) + (0.05 \times 0.6 \times 0.15) = 0.0121225$	0.0121225
7000 دج	$P(Z = 7000) \Rightarrow$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 3000) \wedge P(Y_2 = 4000)] \vee$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 4000) \wedge P(Y_2 = 3000)]$ $\Rightarrow (0.05 \times 0.25 \times 0.15) + (0.05 \times 0.15 \times$ $0.25) = 0.00375$	0.00375
8000 دج	$P(Z = 8000) \Rightarrow$ $[P(X = 2) \wedge P(Y_1 = 4000) \wedge P(Y_2 = 4000)]$ $\Rightarrow (0.05 \times 0.15 \times 0.15) = 0.001125$	0.001125
مجموع الاحتمالات	1

الاحتمالات المطلوبة هي:

بعد ايجاد توزيع اجمالي الخسارة الممكنة، يمكننا ايجاد احتمالات وقوع الخسارة ضمن مجالات معينة:

$$p(Z=9000) = \phi \text{ احتمال مستحيل}$$

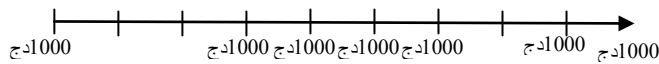
$$p(4000 \leq Z) = (0.048 + 0.015 + 0.012125 + 0.00375 + 0.001125) = 0.08$$

$$p(Z \leq 3000) = (0.05 + 0.12 + 0.75) = 0.92$$

$$p(2000 \leq Z \leq 4000) = (0.12 + 0.05 + 0.048) = 0.218$$

مثال (10):

إليك الخط الزمني السنوي التالي: علما أن معدل الفائدة المركبة السنوي هو 5%؟



1- أوجد القيمة الحالية (في بداية السنة الأولى)؟

2- أوجد الجملة (في نهاية السنة الأخيرة)؟

مثال (11):

قام بنك بإقراض شخص ما مبلغ 10000 دج لمدة 04 سنوات بمعدل 5 % سنويا.

المطلوب: إعداد جدول استهلاك هذا القرض بدفعات ثابتة؟

مثال (12):

ما هو الفرق بين الفائدة البسيطة والفائدة المركبة؟ (مع كتابة قانون كل منهما)

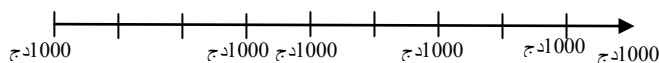
ما هو الفرق بين المعدل المتناسب والمعدل المتكافئ؟ (مع التعليل الرياضي)

ما هو الفرق بين دفعات بداية المدة ودفعات نهاية المدة؟ (مع كتابة قانوني الجملة والقيمة الحالية)

ما هو الفرق بين جدول الاستهلاك القروض بدفعات ثابتة وجدول الاستهلاك القروض باستهلاكيات ثابتة؟ (ذكر أوجه الاختلاف والتشابه)

مثال (13):

إليك الخط الزمني السنوي التالي:



1- أوجد القيمة الحالية (في بداية السنة الأولى)؟

2- أوجد الجملة (في نهاية السنة الأخيرة)؟

علما أن معدل الفائدة المركبة السنوي هو 5%؟

مثال (14):

لدينا القيم التالية من جدول استهلاك القروض بدفعات ثابتة:

الاستهلاك الخامس

الدفعة الثابتة 6000 دج

الاستهلاك الاول 4500 دج

5469.78 دج

المطلوب: أوجد بالترتيب

1- معدل الفائدة المركب السنوي

2- حساب أصل القرض

3- عدد الدفعات

4- القيمة المتبقية بعد دفع الدفعة الثالثة

5- السطر الخامس من جدول الاستهلاك مع تبرير العمليات

ملاحظة: أخذ جميع الأرقام بعد الفاصلة من دون تقريب



قائمة المراجع:

- 1- أسامة عزمي سلام، شقيري نوري موسى، إدارة الخطر والتأمين، دار الحامد، الأردن، 2007.
- 2- محمد الصيرفي، رياضيات التأمين، مؤسسة حورس الدولية، دون بلد، 2005.
- 3- حربي محمد عريقات، سعيد جمعة عقل، التأمين وإدارة الخطر: النظرية والتطبيق، الطبعة الأولى، دار وائل، الأردن، 2008.
- 4- إبراهيم علي إبراهيم عبد ربه، الخطر والتأمين: المبادئ النظرية والتطبيقات العملية، دار المطبوعات الجامعية، مصر، 2008.
- 5- أحمد عبد الله قماوي أباطة، مدخل كمي لإدارة الأخطار ورياضيات المال والاستثمار، الطبعة الأولى، مطبعة الإشعاع الفنية، دون بلد، 2002.
- 6- مختار محمد الهانسي، إبراهيم عبد النبي حمودة، مقدمة في مبادئ التأمين بين النظرية والتطبيق، الدار الجامعية، مصر، 2000.
- 7- شوقي سيف النصر، التأمين: الأصول العلمية والمبادئ العملية، دار الفكر العربي، مصر، 1984.
- 8- عبد المطلب عبده، الخطر والتأمين، دار الكتاب الجامعي، مصر، 1977.
- 9- منصور بن عوف عبد الكريم، الرياضيات المالية: 99 تمرين محلول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2000.
- 10- علي محمد علي عكاشة، الرياضيات المالية، دار الرضا للنشر والتوزيع، مصر، 2009.
- 11- غازي فلاح المومني، الرياضيات المالية المعاصرة، دار المناهج للنشر والتوزيع، الاردن، 2006.
- 12- شقيري نوري موسى، الرياضيات المالية، دار المسيرة للطبع والتوزيع، الاردن، 2011.