Abbes Laghrour Khenchela University
Faculty of Science and Technology
Department of Mathematics
2nd Year License
Ksaoudi_17/05/25

جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR UNIVERSITY KHENCHELA

Final exam in Numerical Analysis 2

REMARK : Exo1 and Exo2 are optional, however, Exo3 and Exo4 are mandatory.

Exercise 01 : Choose (05pts)

a- Calculate the derivative of the function Arccos(x): $(Arccos(x))' = ?$

b- Can we calculate the following integral: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$, , by a direct method? If not, say why and try to approximate it!

Exercise 02 : Choose (05pts)

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1- Show that A is invertible and calculate its inverse,

2- Calculate the eigenvector associated with the spectral radius $\rho(A)$ of the matrix A .

Exercise 03 : Mandatory (07pts)

Consider the following system of linear equations:

$$(S) \begin{cases} x + 12y - z = 2 \\ 14x - 3y + 2z = 3 \\ 5x + y + 13z = 1 \end{cases}$$

1- Deduce (Approximate) the spectral radius from the matrix of (S),

2- Can we apply a numerical method to solve (S), if yes, give to 10^{-3} near, , by a chosen method, the second approximation of the exact solution of (S).

Exercise 04 : Mandatory (08pts)

Consider the following differential problem:

$$(Q) \begin{cases} y(x)' = x(y(x) - 1), & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1- Denoted (Q) and show that it is well laid,

2- Calculate the analytical solution of (Q),

3- Use the EULER method with a subdivision step $h = 0,1$, to calculate to two decimal near, the approximate solution at point x_2 and give successively, its absolute error and the error of the method used,

4- Comment on the three errors cited above.

Good luck_Ksaoudi

Correction de l'examen final
Analyse Numerique 2.

Ex 1 : a) $(\arccos(x))' = ?$

$\arccos(x) = \cos^{-1}(x) = y = y(x)$

$\Leftrightarrow \quad x = \cos(y) \quad — (1)$

$\Leftrightarrow \quad \frac{d(x)}{dx} = \frac{d(\cos(y))}{dx}$

$\Leftrightarrow \quad 1 = -y'(x)\sin y(x)$

$\Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{1}{\sin y(x)}$

de (1) : $x^2 = \cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$\Rightarrow \sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$

$\Rightarrow$ ~~...~~

$\Rightarrow \sin y(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow y'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arccos(x))'$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = ?$

* Méthode directe :

$x^4+1 = (x^2)^2 + (1)^2$

$= (x^2)^2 + 2(x^2)(1) + (1)^2 - 2(x^2)(1)$

$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$

$= (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x)$

$= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$

$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A-\sqrt{2}C=0 \\ A+C+\sqrt{2}B-\sqrt{2}D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=D=1/2 \\ A=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ C=\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$

$x^2-\sqrt{2}x+1 = x^2-\sqrt{2}x+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}$

$= (x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}$

$x^2+\sqrt{2}x+1 = (x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \underbrace{\int_0^1 \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}dx}_{I} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\frac{1}{2}}dx}_{J}$$

Posons $u = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = u + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $du = dx$

$I = \int_0^1 \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}u + \frac{1}{4}}{u^2+1/2}du = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{u}{u^2+1/2}du + \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}.$

$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\ln(u^2+1/2) + \frac{1}{4}\sqrt{2}\,\mathrm{Arctg}(\sqrt{2}u)$

$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}(\sqrt{2}x-1)\Big]_0^1$

$\Rightarrow J = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}(\sqrt{2}x+1)\Big]_0^1$

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = -\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}(\sqrt{2}x-1)$

$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{Arctg}(\sqrt{2}x+1)\Big]_0^1$

** Méthode indirecte :

Méthode de Trapèze :

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \frac{h}{2}(f(0)+f(1))$

où $h = 1-0 = 1$.

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}) \simeq \frac{3}{4} \simeq 0{,}75$

Méthode de Simpson :

$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} = \frac{h}{3}(f(0)+4f(1/2)+f(1))$

où $h = \frac{1-0}{2} = 1/2$.

$=$

$= \frac{1}{6}(1+4(\frac{16}{17})+1/2) \simeq \frac{115}{204} \simeq 0{,}56$

Ex 2 : Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1_ $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$= -3\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible $\Rightarrow A^{-1} \exists$.

$$A^{-1} = \frac{{}^t A^c}{\det(A)} \quad / \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}^c & a_{12}^c & a_{13}^c \\ a_{21}^c & a_{22}^c & a_{23}^c \\ a_{31}^c & a_{32}^c & a_{33}^c \end{pmatrix}$$

$A^c = (a_{ij}^c)_{1 \le i,j \le 3}$ /

$$a_{ij}^c = (-1)^{i+j} |A_{ij}|.$$

$a_{11}^c = +\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$; $a_{12}^c = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$;
$a_{13}^c = +\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $a_{21}^c = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$
$a_{22}^c = +\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$; $a_{23}^c = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
$a_{31}^c = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5$; $a_{32}^c = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $a_{33}^c = +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$

$$\Rightarrow A^c = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -15 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t A^c = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/15 & -1/3 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A . A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/3 & 2/15 & -1/3 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/15 & -1/3 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

2 - $\rho(A) = \lambda_{max} = 5$

car A est une matrice triangulaire inférieure, où les v.p sont situées sur la diagonale principale !

$\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \rho(A) = 5$ et $\lambda_3 = 1$.

Calculons vect. p $= X \neq 0$ associé à $\rho(A)$

on a $AX = \lambda X$ / $X \neq 0$.

vect p associé à $\rho(A)$ est X !

$$A X = \rho(A) . X = 5X$$

où $X \in \mathbb{R}^3$: $X = (x\ y\ z)^t = ?$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - 5I_3)X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -(I)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8x + 2y - z = 0 \\ -4z = 0 \Rightarrow z = 0 \\ -8x + 2y = 0 \Rightarrow y = 4x \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 4x \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

on constate que le système (I) admet une infinité de solt, car $\det(I) = 0$ et $\Delta x = \Delta y = 0$

$x = \frac{\Delta x}{|I|} \Rightarrow x . |I| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$y = \frac{\Delta y}{|I|} \Rightarrow y . |I| = 0. \quad \forall y \in \mathbb{R}$

le vect. propre associé à $\rho(A)$ est :

$$X = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad / \alpha \in \mathbb{R}$$

EX 03 ! Soit le système d'eqts linéaires suivant !

$$(S)\begin{cases} x+12y-z=2 & -(E_1)\\ 14x-3y+2z=3 & -(E_2)\\ 5x+y+13z=2 & -(E_3)\end{cases}$$

$(S) \Leftrightarrow AX=B$

$$\begin{pmatrix}1 & 12 & -1\\ 14 & -3 & 2\\ 5 & 1 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$\rho(A) \sim \|A\|_1$: deux normes équivalentes.

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}|$

$= \max(1+14+5 ; 12+|-3|+1 ; |-1|+2+13)$

$= \max(20 ; 16 ; 16) = 20$.

$\Rightarrow \rho(A) \sim 20$,

—— o ——

2 - Tout d'abord rendre (S) avec les $|a_{ii}|$ max et pour faire ceci, faisons les permutations suivantes :

$E_1 \longleftrightarrow E_2$

$(S) \Leftrightarrow (S')$

$$(S')\begin{cases} 14x-3y+2z=3\\ x+12y-z=2\\ 5x+y+13z=2\end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$(S'')\begin{cases} x=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}y-\frac{2}{14}z\\ y=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}x+\frac{1}{12}z\\ z=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}x-\frac{1}{13}y\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/14\\1/6\\1/13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & \frac{3}{14} & \frac{1}{7}\\ -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{12}\\ -\frac{5}{13} & \frac{1}{13} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow X = TX + C$; où $T\in M_3(\mathbb{R})$ et $X, C \in \mathbb{R}^3$

Pour appliquer une méthode numérique qui converge, il faut que $\rho(T) < 1$.

où $\rho(T) \sim \|T\|_1$

$\|T\|_1 = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |t_{ij}|$

$= \max\left(|-\frac{1}{12}|+|-\frac{5}{13}| ; \frac{3}{14}+\frac{1}{13} ; \frac{1}{7}+\frac{1}{12}\right)$

$= \max(0{,}467 ; 0{,}290 ; 0{,}226)$

$= 0{,}467 < 1$, alors, on peut appliquer la méthode de Jacobi suivante :

$$\begin{cases} X_k = TX_{k-1}+C, & k\ge 1\\ X_0 = 0_{\mathbb{R}^3}\end{cases}$$

$k=1$; $X_1 = T\cdot X_0 + C = C$

$X_1 = (\overset{x_1}{3/14} \quad \overset{y_1}{1/6} \quad \overset{z_1}{1/13})^t$

$k=2$; $X_2 = TX_1 + C$

$$\begin{cases} x_2=\frac{3}{14}+\frac{3}{14}y_1-\frac{2}{14}z_1\\ y_2=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}x_1+\frac{1}{12}z_1\\ z_2=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}x_1-\frac{1}{13}y_1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3/14 + \frac{1}{14}\cdot\frac{1}{6} - \frac{2}{14}\cdot\frac{1}{13} = 0{,}214 + 0{,}035 - 0{,}010 \\ y_2 = 1/6 - 1/12\cdot\frac{3}{14} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{13} = 0{,}166 - 0{,}017 + 0{,}006 \\ z_2 = \frac{1}{13} - \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{14} - \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{6} = 0{,}076 - 0{,}082 - 0{,}012 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0{,}239 \\ y_2 = 0{,}155 \\ z_2 = -0{,}017 \end{cases}$$

La 2ème approximation de la solution exacte à 10^{-3} près est,

$$X_3 = (0{,}239 \quad 0{,}155 \quad -0{,}017)^T.$$

Ex°4 : Soit le Pb différentiel suivant :

$$(Q)\begin{cases} y' = x(y-1) \quad , x \in [0,1] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

1 – (Q) est un problème différentiel de Cauchy de 1er degré.

$$y' = f(x,y) = xy - x$$

f est continue % à y et proportionnelle à x, car est un monôme (polynôme de deg = 1).

$\forall y_1, y_2 \in D = \{(x,y) / \; x\in[0,1] \; ; \; -\infty < y < +\infty\}$.

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |xy_1 - x - xy_2 + x|$$
$$= |xy_1 - xy_2| = |x(y_1-y_2)| = |x||y_1-y_2|$$
$$\le |y_1 - y_2| \quad \text{car } x\in[0,1]$$

$\Rightarrow L = 1.$

f est lipschitzienne % à y avec la cte L = 1.

Donc, d'après le Théorème de Cauchy, (Q) est bien posé.

2 – $y_T = y_H + y_p$.

$y_H = ?$ $y' - xy = 0$

$\overset{SN}{\Leftrightarrow} \frac{dy}{dx} = xy$, pour $y \neq 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx$

$y > 0$ (1er cas)

$\ln y + c_1 = \frac{x^2}{2} + c_2$.

$\Rightarrow y = e^{\frac{x^2}{2}+K}$ / $K = (c_2 - c_1) \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{y_H = A\, e^{x^2/2}}$ / $A = e^K = $ cte

$y_p = ?$ Appliquons la méthode de variation des ctes.

$\Rightarrow y_p = A(x)\, e^{x^2/2}$.

$y_p' = A' e^{x^2/2} + x e^{x^2/2} A(x)$

$A' e^{x^2/2} + A x e^{x^2/2} - x A e^{x^2/2} = x$

$A' = x\, e^{-x^2/2} = (-e^{-x^2/2})'$

$\Rightarrow A = -e^{-x^2/2} + C$

$\Rightarrow y_p = (-e^{-x^2/2} + C)\, e^{x^2/2}$

$= 1 + C e^{x^2/2}$

$\Rightarrow y_T = A e^{x^2/2} + C e^{x^2/2} + 1$

$y_T = B e^{x^2/2} + 1$ / $B = (A + C) \in \mathbb{R}$

$y_T = B e^{x^2/2} + 1.$

$y(0) = B+1 = 0 \Rightarrow B = -1.$

$\boxed{y_T(x) = 1 - e^{x^2/2}}$

3 – Méthode d'Euler / $h = 0,1$.

L'algorithme de la méthode est :

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h f(x_i, w_i) \\ w_0 = 1 \quad ; i = 1,9 \end{cases}$$

$w_i \approx y_i = y_T(x_i)$.

$w_{i+1} = w_i + h\,(x_i(w_i - 1))$

$= w_i + h\,(x_i w_i - x_i)$

$= w_i + h.x_i w_i - h x_i \quad ; i = 1,9$

$i=0 \Rightarrow w_1 = w_0 + 0,1.0.w_0 - 0,1.0$

$= w_0 = 1$

$i=1 \Rightarrow w_2 = w_1 + h.x_1.w_1 - h x_1$

$= 1 + 0,1.0,1.1 - 0,1.0,1$

$= 1$

$i=2 \Rightarrow w_3 = w_2 + h x_2.1 - 0,1.x_2$

$= 1 + 0,1.0,2.1 - 0,1.0,2$

$= 1,00$

$w_3 \approx y_3 = y_T(x_2) = 1,00$

La solt approximative à 10^{-2} près est

$w_3 = 1,00$

– Erreur absolue :

$\Delta w_3 = |y_T(0,2) - w_3| = |1 - e^{(0,2)^2/2} - 1|$

$= |-e^{(0,2)^2/2}| = e^{(0,2)^2/2} = e^{0,02} \simeq 1,02$

– Erreur de la méthode :

$\Delta_{w_3} \le \frac{h.M}{2L}(e^{x_2 - 0} - 1)$?

$h = 0,1$; $L = 1$ et $M = ?$

$|y''(x)| \le M$

$y(x) = 1 - e^{x^2/2}$

$y'(x) = -x e^{x^2/2}$

$y''(x) = -(e^{x^2/2} + x^2 e^{x^2/2})$

$|y''(x)| = |-e^{x^2/2} - x^2 e^{x^2/2}|$

$= |-1||e^{x^2/2} - x^2 e^{x^2/2}|$

$= |e^{x^2/2}(1 - x^2)|$

$= |e^{x^2/2}||1 - x^2|$

$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 1$

$-1 \le -x^2 \le 0$

$0 \le 1 - x^2 \le 1$

$\le +\frac{x^2}{2} \le 1/2 \Rightarrow e^{x^2/2} \le e^{1/2}$

$|y''(x)| \le e^{1/2} = M = 1,65$

$\Delta_{w_3} \le \frac{0,1.1,65}{2}(e^{0,2} - 1)$

$\le 0,082\,(1,22 - 1)$

$\le 0,018$

L'erreur de la méthode d'Euler est : $\Delta_{w_3} = 0,018 = 0,18.10^{-1}$

$< 0,5.10^{-1}$

$\Rightarrow w_3 = 1,0 \pm 10^{-2}$

—o—

3 – Δw_3 = Erreur absolue qui désigne l'efficacité de la méthode.

Δ_{w_3} = Erreur de la méthode qui désigne la précision de la méthode

$\varepsilon = 10^{-2}$ près, c'est une erreur quelconque.

—o—