الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عباس لغرور خنشلة
UNIVERSITÉ ABBES LAGHROUR- KHENCHELA

Faculté des Sciences et Techniques

Département de mathématiques et d'informatique

N° de série: ……………

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Etude de la stabilité d'Ulam-Hyres-Rassias d'un problème aux limites d'ordre fractionnaire

Réalisé par : **BERKANE Haythem Ihabeddine**

SABEG Smail

Dirigé par : **Dr. AOUAFI Rabiaa**

Membres de jury :

M[me]. MERGHAD Amal	**Président**
Dr .BRAGDI Ahmed	**Examinateur**

2021-2022

Dédicace

A mes très chers parents .

A mes chères sœurs.

A mes chères frères.

A tous la famille.

A tous les amis .

Remerciements

Avant tout, je remercie le dieu de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces deux années d'études et que grâce à lui ce travail a pu être réalisé.

Tout d'abord, je remercie vivement et en premier lieu, mon encadreur ***Dr. AOUAFI Rabiaa****, pour son aide précieux, sa gentillesse, son soutien, ses conseils utiles et la confiance qu'elle m'a accordée.*

Je remercie également les membres de jury ***Dr. BRAGDI Ahmed*** *et* ***Dr. MERGHAD Amel*** *pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail.*

Mes remerciements vont aussi à tous mes enseignants qui ont contribué à ma formation.

J'adresse également mes remerciements envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Résumé

L'objectif principal de ce travail est de discuter des conditions suffisantes pour l'existence de solutions pour le problème de valeur aux limites non linéaire de l'équation différentielle d'ordres fractionnaires implicites et d'étudier certains types de stabilité d'Ulam pour notre problème.

Mots clés : Dérivée fractionnaire, équation différentielle fractionnaire implicite, théorèmes du point fixe, stabilité d'Ulam

Abstract

The main objective of this work is to discuss sufficient conditions for the existence of solutions for nonlinear boundary value problem of implicit fractional orders differential equation and to study certain types of Ulam stability for our problem.

Key Words : Fractional derivative, implicit fractional differential equation, fixed point theorems, Ulam stability .

الملخص

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو مناقشة الشروط الكافية لوجود حلول لمشكلة القيمة الحدية غير الخطية لمعادلة تفاضلية ضمنية ذات مشتقات كسرية ودراسة أنواع معينة من استقرار Ulam لمشكلتنا.

الكلمات المفتاحية: المشتقة الكسرية , المعادلة التفاضلية الضمنية, نظرية النقطة الثابتة, استقرار Ulam.

Table des matières

Notations

$\mathbb{R}_+^*$: Ensemble des nombres réels strictement positifs.

$\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels.

$\mathbb{C}$: Ensemble des nombres complexes

$R(\alpha)$: La partie réelle du nombre complexe α.

$Im(\alpha)$: La partie imaginaire du nombre complexe α.

(a, b) : Intervalle ouvert.

$C([a, b])$: Espace de fonctions continues sur $[a, b]$.

$C^n([a, b], \mathbb{R})$: Espace des fonctions n fois continument différentiables.

$AC([a, b])$: Espace de fonctions absolument continues sur [a, b].

$AC^n([a, b])$: Espace de fonctions $(n-1)$-fois continument dérivables sur $[a, b]$ telles que $x^{(n-1)} \in AC([a, b])$.

$L^p([a, b])$: Espaces des fonctions de puissance $p-$ième integrable sur [a, b].

[.] : Partie entière d'un nombre réel.

$\Gamma(\alpha)$: Fonction Gamma.

$B(\alpha, \beta)$: Fonction Betta.

I_{a+}^{α} : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α.

I_{b-}^{α} : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α.

D_{a+}^{α} : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α.

D_{b+}^{α} : Dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville à droite d'ordre α.

${}^{C}D_{a+}^{\alpha}$: Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α.

${}^{C}D_{b-}^{\alpha}$: Dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α.

Introduction générale

Le calcul fractionnaire est la branche des mathématiques qui étudie l'intégration et la différenciation d'ordres réels ou complexes. Bien que ce calcul soit ancien, il n'a acquis une popularité surprenante qu'au cours des dernières décennies. En raison de ses nombreuses applications apparemment diverses ([1], [7], [13], [18], [19]).

D'autre part, l'existence et l'unicité des solutions sont parmi les propriétés qualitatives les plus importantes des équations différentielles. L'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles impliquant les dérivées fractionnaires ont été abordées par de nombreux chercheurs (voir [5] , [8], [9],[17], et les références qui y sont citées).

Récemment, le calcul fractionnaire a été introduit dans l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaire, (voir par exemple [25], [30]) et de nombreux problèmes ont été étudiés à ce sujet. Voir ([10], [20], [21]), où certains résultats fondamentaux ont été obtenus. La stabilité des systèmes non linéaires a fait l'objet d'une attention accrue en raison de son importance rôle dans les domaines de la science et de l'ingénierie. Un grand nombre de monographies et d'articles sont consacrés aux systèmes non linéaires fractionnaires ([4], [23], [24], [31]).

Le problème de la stabilité des équations fonctionnelles provient d'une question de Stanistaw-Ulam, posée en 1940, concernant la stabilité des homomorphismes de groupe :
Étant donné un groupe métrique (G, d), un nombre $\epsilon > 0$ et une application $f : G \longrightarrow G$ satisfaisant $d\Big(f(x, y), f(x) \cdot f(y)\Big) \leq \epsilon$, pour tout $x, y \in G$, existe-il un homomorphisme $a : G \longrightarrow G$ et une constante $k > 0$ dépendant seulement de G tel que : $d(a(x), f(x)) \leqslant k\epsilon$, pour tout $x \in G$?" Si la réponse est positive, l'équation des homomorphismes $a(x, y) = a(x) \cdot a(y)$ est dite stable.
L'année suivante 1941, Donald H. Hyres a donné une réponse affirmative partielle à la question d'Ulam dans le contexte des espaces de Banach (voir [15], [27]).
En 1978 Themistocles M.Rassias a réussi à étendre le théorème de Hyres pour les mappages entre espaces de Banach en considérant une différence de Cauchy illimitée soumise à une condition de continuité sur le mappage.

Qui a abouti à une conclusion formellement plus forte, ce résultat est connu sous le nom de stabilité d'Ulam-Hyres-Rassias des équations fonctionnelles. Depuis lors, un grand nombre d'articles ont été publiés en rapport avec diverse généralisations du problème d'Ulam et de théorème de Hyres ([3],[14], [26] − [29]).
Ce mémoire se décompose de trois chapitres partagés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on regroupe les outils mathématiques utilisés dans les autres chapitres, à savoir, les théorèmes de point fixe et les fonctions spéciales.

Le deuxième chapitre est consacré à la notion de calcule fractionnaire et la stabilité de type-Ulam.
Dans le dernier chapitre, nous présentons notre résultat principal en utilisant le théorème

du point fixe de Schauder. De plus, nous prouvons la stabilité d'Ulam-Hyers de la solution du problème differentielle fractionnaire ipmlicite (PDFI) suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\alpha}y(t) = f\left(t, y(t), {}^{C}D^{\beta}y(t), \int_0^t k(t,s){}^{C}D^{\alpha}y(s)ds\right), \text{ pour tout } t \in J = [0,T], \\ y(0) = y_0, \qquad y(T) = y_T, \qquad y_0, \quad y_T \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{P}$$

où ${}^{C}D^{\alpha}y$, ${}^{C}D^{\beta}y$ sont les dérivées de Caputo d'order α et d'order β recpectivement, $1 < \beta < \alpha \leq 2$, $f : J \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est continue et $k(t,s)$ une fonction continue pour tout $(t,s) \in J \times J$, et nous donnons des exemples pour démontrer l'application de nos principaux résultats. Enfin, nous présentons une conclusion qui résume les principeaux résultat obtenus dans ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est de caractère préliminaire et contient des définitions nécessares et des propriétés tels que les espaces fonctionnels, les théorèmes du point fixe et les fonctions spéciales utiles dans notre étude.

1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section, nous présentons les définitions des espaces p-intégrables , de fonctions continues et absolument continues ([1], [6]), qui seront utilisées plus tard.

1.1.1 Espaces $L^p(\mathbb{R})$

Définition 1.1.1 *Soit* $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$*. L'espace des fonctions intégrables sur* Ω *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *est noté et défini par :*

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ \textit{mesurable et } \int_\Omega |f|dx < \infty\}.$$

Définition 1.1.2 *L'espace des fonctions intégrables de Lebesgue est noté et défini par* *l'espace vectoriel quotient :*

$$L^1(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^1(\Omega)}{\mathcal{R}},$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalance donnée par :

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow f = g \ p.p \ sur \ \Omega, \tag{1.1}$$

avec $f,\ g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

L'espace $L^1(\Omega)$, muni de la norme :

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Définition 1.1.3 *L'espace des fonctions mesurables de puissance p^{ime} intégrable de Lebesgue est noté et défini par :*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ mesurable\ et\ \int_\Omega |f|^p dx < \infty, \quad 1 < p < +\infty\}.$$

Définition 1.1.4 *La classe des fonctions mesurables de puissance p^{ime} intégrable de Lebesgue est noté et défini par :*

$$L^p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\mathcal{R}},$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalance définie dans (1.1) avec $f,\ g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, i.e.,

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ mesurable\ et |f|^p \in L^1(\Omega), \quad 1 < p < +\infty\}.$$

L'espace $L^P(\Omega)$ est défini comme l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ associé à relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.1.5 *L'espace des fonctions essentiellement bornées est noté et défini par :*

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ mesurable\ et\ \exists C > 0,\ telle\ que\ |f| < C\ p.p\ sur\ \Omega\}.$$

Définition 1.1.6 *La classe des fonctions essentiellement bornées de Lebesgue est noté et défini par :*

$$L^\infty(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}{\mathcal{R}},$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalance (1.1), avec $f,\ g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$.

La norme dans l'espace $L^\infty(\Omega)$ est :

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup ess_{x\in\Omega} \Big| f(x) \Big| = \inf\{C > 0, |f| < C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Théorème 1.1.1 *L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach , pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

1.1.2 Espaces des fonctions continues et des fonctions absolument continus

Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et $m \in \mathbb{N}$ On note par $C^m(\Omega)$ l'espace de fonctions f qui sont m fois continûment différentiables sur Ω est muni de la norme :

$$\| f \|_{C^m} = \sum_{i=0}^{m} \|f\|_C = \sum_{i=0}^{m} \max_{x\in\Omega} \Big| f(x) \Big|, \qquad m \in \mathbb{N}$$

où $C(\Omega)$ est l'espace des fonctions continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C = \max_{x\in\Omega} \Big|f(x)\Big|.$$

En particulier si $m = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

Définition 1.1.7 [1] *Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. L'espace des fonctions absolument continues sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$ est noté par $AC(\Omega)$ tel que :*

$$f \in AC(\Omega) \Longleftrightarrow \exists\varphi \in L^1(\Omega) \quad telque \quad f = c + \int_a^x \varphi(s)ds.$$

Définition 1.1.8 [1] *Pour $n \in \mathbb{N}$. On note $AC^n(\Omega)$ l'espace des fonctions f appartenant à $C^k(\Omega)$ $(k = 0, 1, ...n - 1)$, telles que $f^{(n-1)} \in AC(\Omega)$, i.e. ;*

$$AC^n(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}, \quad f \in C^k(\Omega), \quad m = 0, 1, ..., n - 1, \ \ et\ f^{(n-1)} \in AC(\Omega)\}.$$

En particulier, $AC^1(\Omega) = AC(\Omega)$.

Lemme 1.1.1 *f est une fonction de $AC^n(\Omega)$ si et seulement si elle est représentée sous la forme :*

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x - s)^{n-1}\varphi(s)ds + \sum_{m=0}^{n-1} c_m(x - a)^m,$$

où $\varphi \in L^1(\Omega)$, c_m sont des constantes arbitraires.

1.2 Quelques résultats sur la théorie du point fixe

Dans cette section nous rappelons le théorème d'Ascoli-Arzelà et quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le théorème du point fixe de Banach. On verra ensuite le théorème du point fixe de Schauder. Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii. ([6],[18], [12]).

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \to R(A) \subset X$, une application non linéaire, un point $x^* \in D(A)$ est appelé point fixe de A si :*

$$A(x^*) = x^*.$$

1.2.1 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Le théorème d'Ascoli-Arzela démontré par les mathématiciens **Giulio Ascoli** et **Cresare Arzelà** à l'aide de la notion d'equicontinuité, ce théorème est à la base de divers résultats consernant la compacité des opérateurs intégraux.

Théorème 1.2.1 *Soit une famille K de l'ensemble $C([a,b],\mathbb{R})$ des application continue tel que cet ensemble est muni de la norme $\|y\|_C = \max_{[a,b]} |y(t)|$, $-\infty < a < b \leq +\infty$,*

i) K est uniformément borné.

ii) K est équicontinu.

si seulement si K est relativement compact.

1.2.2 Théorème du point fixe de type Banach

Le théorème du point fixe de Banach garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante.

Théorème 1.2.2 *Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach, $A : X \to X$ une contraction. Alors A admet un point fixe unique dans X, c-a-d*

$$\exists! x^* \in X \quad \textit{telle que} \quad A(x^*) = x^*.$$

1.2.3 Théorème du point fixe de type Schauder

Le théorème de Schauder affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet au moin un point fixe.

Théorème 1.2.3 *Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach X et supposons $A : K \to K$ une application continue. Alors A admet un point fixe.*

Nous donnons un autre théorème du point fixe de Schauder qui généralise le théorème 1.2.2.

Théorème 1.2.4 *Soit K un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach X et soit $A : K \to K$ une application continue telle que $A(K)$ soit un sous-ensemble relativement compact de K. Alors A admet au moin un point fixe.*

Théorème 1.2.5 *Soit K un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach X et supposons $A : K \to K$ une application continue. Alors A admet un point fixe.*

1.2.4 Théorème de point fixe de type Krasnoselskii

Théorème 1.2.6 *Soit K un convex fermé et non vide d'un espace de Banach X , et soit : $A : X \to X$, supposons que $A = B + C$ telque B, C sont deux applications de K dans X telle que :*

i) $Bx + Cy \in K$,

ii) B *continue et* $B(K)$,

iii) C *est une contraction.*

Alors il existe $x \in K$ *avec* $Ax = Bx + Cx = x$.

1.3 Fonctions spéciales

Dans cette partie nous présentons la fonction Gamma d'Euler et la fonction Bêta, qui jouent un rôle important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.3.1 Fonction Gamma

Historiquement la fonction Gamma a d'abord été introduite par Euler 1729, qui a la propriété d'interpoler la factorielle lorsque l'argument de la fonction est un entier. Dans une lettre du 8 janvier 1730 à Christian Goldbach, il proposa la définition suivante ([1],[2],[13],[22],[23]).

Définition 1.3.1 *La fonction de Gamma est définie sur le demi-plan* $\{\alpha \in C \text{ tel que } R(\alpha) > 0\}$ *par :*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \tag{1.2}$$

Propriétés de la fonction gamma

L'une des propriétés de base de la fonction gamma est qu'elle vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \tag{1.3}$$

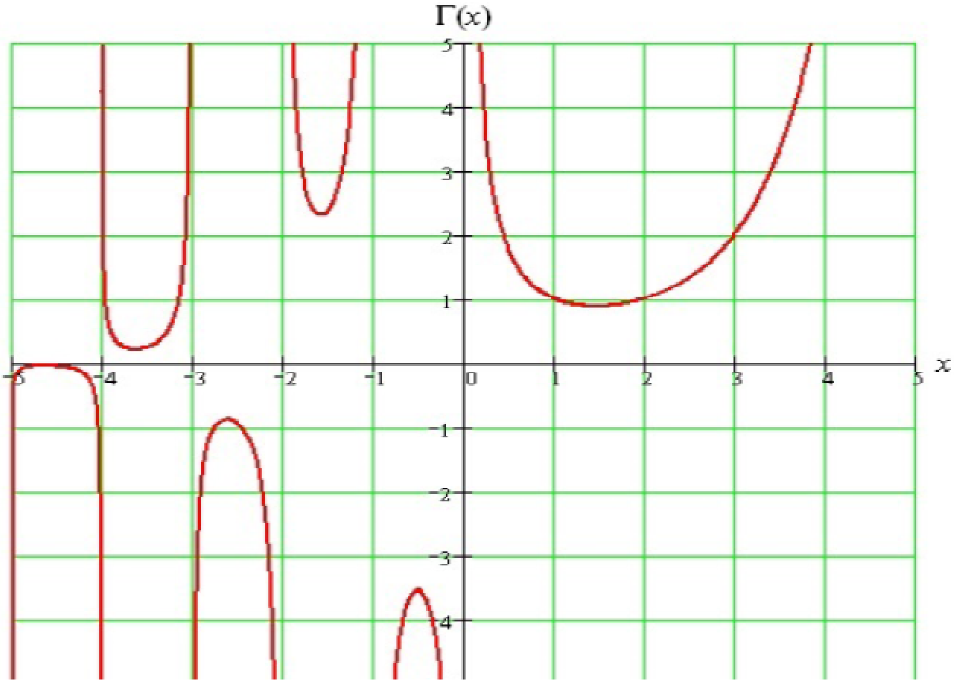

Figure 1.1 – La fonction Gamma

ce qui peut être facilement prouvé en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha}e^{-t}dt \\ &= \left[-t^{\alpha}e^{-t}\right]_{t=0}^{t=\infty} + \alpha\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

Évidement, $\Gamma(1) = 1$, et en utilisant (1.3) on obtient pour $\alpha = 1, 2, 3, ...$:

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ & \quad ... \;\; ... \;\; ... \;\; ..., \\ \Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!.\end{aligned}$$

On donne quelques valeurs particulières de $\Gamma(\alpha)$. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, le changement de variables

$t = u^2$ donne :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \tag{1.4}$$

Aucune expression de base est connue pour $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ ou $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, mais il a été prouvé que ces chiffres sont transcendantales (respectivement par Lionnais en 1983 et Chudnovsky en 1984).

Jusqu'à 50 chiffres, les valeurs numériques de certaines de ces constantes sont :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= 1;77245385090551602729816748334114518279754945612238... \\
\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &= 2;67893853470774763365569294097467764412868937795730... \\
\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) &= 3;62560990822190831193068515586767200299516768288006...
\end{aligned}$$

1.3.2 Fonction Bêta

En mathématiques, la fonction bêta, également appelée intégrale d'Euler définie pour tous nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives.

Définition 1.3.2 *([2]) Dans de nombreux cas, il est plus pratique d'utiliser la fonction dite bêta au lieu d'une certaine combinaison de valeurs de la fonction gamma.*

La fonction bêta est généralement définie par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1} d\tau, \quad (R(\alpha) > 0, \quad R(\beta) > 0). \tag{1.5}$$

Pour établir la relation entre la fonction Gamma définie par (1.2) et la fonction bêta (1.5), nous utiliserons la transformée de Laplace.[1]

Considérons l'intégrale suivante :

$$h_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^t \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{\beta-1} d\tau. \tag{1.6}$$

De toute évidence, $h_{\alpha,\beta}(t)$ est une convolution des fonctions $t^{\alpha-1}$ et $t^{\beta-1}$ et

$$h_{\alpha,\beta}(1) = B(\alpha,\beta). \tag{1.7}$$

Parce que la transformée de Laplace d'une convolution de deux fonctions est égale au produit de leurs transformées de Laplace, on obtient :

$$H_{\alpha,\beta}(s) = \frac{\Gamma(\alpha)}{s^{\alpha}}.\frac{\Gamma(\beta)}{s^{\beta}} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{s^{\alpha+\beta}}, \tag{1.8}$$

où $H_{\alpha,\beta}(s)$ est la transformée de Laplace de la fonction $h_{\alpha,\beta}(t)$.
D'autre part, puisque $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ est une constante, il est possible de restaurer la fonction originale $h_{\alpha,\beta}(t)$ par la transformée inverse de Laplace du côté droit de (1.8). En raison de l'unicité de la transformation de Laplace, nous obtenons donc :

$$h_{\alpha,\beta}(t) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} t^{\alpha+\beta-1} \tag{1.9}$$

et en prenant $t = 1$ on obtient l'expression suivante pour la fonction bêta :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{1.10}$$

Chapitre 2

Aspects fondamentaux de l'analyse fractionnaire et stabilité de type Ulam

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres qui suivent, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire, et d'établir quelques type de stabilité d'Ulam(voir [11] ,[15], [16] [21]).

2.1 Intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville

Dans cette section, nous donnons les définitions des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et les dérivées fractionnaires et présentent certaines des leurs propriétés.

Définition 2.1.1 *Soit* $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. *Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville* $I^{\alpha}_{a+}x$ *et* $I^{\alpha}_{b-}x$ *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$ $\quad (R(\alpha) > 0)$ *sont définies par :*

$$\left(I^{\alpha}_{a+}x\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \qquad (t > a; \quad R(\alpha) > 0) \tag{2.1}$$

et

$$\left(I_{b-}^{\alpha}x\right)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b (s-t)^{\alpha-1}x(s)ds,\qquad (t<b;\quad R(\alpha)>0). \tag{2.2}$$

Ces intégrales sont appelées intégrales fractionnaires à gauche et à droite respectivement, $\Gamma(\alpha)$ *est la fonction Gamma qui définie dans* (1.2).

Lorsque $\alpha=n\in\mathbb{N}$, *les définitions* (2.1) *et* (2.2) *coïncident avec les* $n-$ *ièmes intégrales de la forme :*

$$\begin{aligned}\left(I_{a+}^{n}x\right)(t) &= \int_a^t ds_1\int_a^{s_1}ds_2\int_a^{s_2}ds_3...\int_a^{s_{n-1}}x(s_n)ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1}x(s)ds,\quad (n\in\mathbb{N})\end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned}\left(I_{b-}^{n}x\right)(t) &= \int_t^b ds_1\int_{s_1}^{b}ds_2\int_{s_2}^{b}ds_3...\int_{s_{n-1}}^{b}x(s_n)ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_t^b (s-t)^{n-1}x(s)ds,\quad (n\in\mathbb{N}).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Exemple 2.1.1

Si $R(\alpha)>0$ *et* $\beta\in\mathbb{C}$, $R(\beta)>0$, *alors : les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville* (2.1) *et* (2.2) *des fonctions de puissance* $(t-a)^{\beta-1}$ *et* $(b-t)^{\beta-1}$ *donnent des fonctions de puissance de même forme suivantes :*

$$\left(I_{a+}^{\alpha}(s-a)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1} \tag{2.5}$$

et

$$\left(I_{b-}^{\alpha}(b-s)^{\beta-1}\right)(t)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}. \tag{2.6}$$

Lemme 2.1.1 *Si $R(\alpha) > 0$ et $R(\beta) > 0$ alors les équations*

$$\left(I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} x\right)(t) = \left(I_{a+}^{\alpha+\beta} x\right)(t), \quad \text{et} \quad \left(I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} x\right)(t) = \left(I_{b-}^{\alpha+\beta} x\right)(t), \tag{2.7}$$

sont satisfaites pour $x(t) \in L^p(]a, b[)$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

2.2 Dérivées fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer deux approches à savoir celles de Riemann-Liouville et de Caputo.

2.2.1 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.2.1 *Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche $\left(D_{a+}^{\alpha} x\right)$ et à droite $\left(D_{b-}^{\alpha} x\right)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(R(\alpha) > 0)$ d' une fonction intégrable x sont définies par :*

$$\begin{aligned} \left(D_{a+}^{\alpha} x\right)(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left[(I_{a+}^{n-\alpha} x)(t)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} x(s) ds, \end{aligned} \tag{2.8}$$

et

$$\begin{aligned} \left(D_{b-}^{\alpha} x\right)(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \left[\left(I_{b-}^{n-\alpha} x\right)(t)\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} x(s) ds, \end{aligned} \tag{2.9}$$

où $n = [R(\alpha)] + 1$, $[R(\alpha)]$ désigne la partie entière du nombre réel $R(\alpha)$.

En particulier, quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\left(D_{a+}^{0} x\right)(t) = \left(D_{b-}^{0} x\right)(t) = x(t), \quad (D_{a+}^{n} x)(t) = x^{(n)}(t) \quad \text{et} \quad \left(D_{b-}^{n} x\right)(t) = (-1)^n x^{(n)}(t), \tag{2.10}$$

où $x^{(n)}(t)$ est la dérivée habituelle de $x(t)$ d'ordre n.

Exemple 2.2.1 *Si $R(\alpha) \geq 0$ et $\beta \in \mathbb{C}$ $(R(\beta) > 0)$, alors :*

$$\left(D_{a+}^{\alpha} (s-a)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \tag{2.11}$$

et

$$\left(D_{b-}^{\alpha} (b-s)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}. \tag{2.12}$$

En particulier, si $\beta = 1$ et $R(\alpha) \geq 0$, alors les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville d'une constante ne sont général pas égal à zéro :

$$\left(D_{a+}^{\alpha} 1\right)(t) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \left(D_{b-}^{\alpha} 1\right)(t) = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \ (0 < R(\alpha) < 1). \tag{2.13}$$

D'autre part, pour $j = 1, 2, ..., [R(\alpha)] + 1$,

$$\left(D_{a+}^{\alpha} (s-a)^{\alpha-j}\right)(t) = 0, \quad \left(D_{b-}^{\alpha} (b-s)^{\alpha-j}\right)(t) = 0. \tag{2.14}$$

Composition avec les intégrales fractionnaires

Le lemme suivant donne que l'opérateur de différenciation fractionnaire de Riemann-Liouville est à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville du même ordre α.

Lemme 2.2.1 *Si $R(\alpha) > 0$ et $x(t) \in L^p([a,b])$ $(1 \leq p \leq \infty)$, alors :*

$$\left(D_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\alpha} x\right)(t) = x(t) \quad et \quad \left(D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\alpha} x\right)(t) = x(t). \tag{2.15}$$

Propriété 2.2.1 *Si $R(\alpha) > R(\beta) > 0$, alors, pour $x(t) \in L^p([a,b])$ $(1 \leq p \leq \infty)$,*

$$\left(D_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} x\right)(t) = \left(I_{a+}^{\alpha-\beta} x\right)(t) \quad et \quad \left(D_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} x\right)(t) = \left(I_{b-}^{\alpha-\beta} x\right)(t). \tag{2.16}$$

En particulier, quand $\beta = k \in \mathbb{N}$ et $R(\alpha) > k$, alors :

$$\left(D^{k} I_{a+}^{\alpha} x\right)(t) = \left(I_{a+}^{\alpha-k} x\right)(t) \quad et \quad \left(D^{k} I_{b-}^{\alpha} x\right)(t) = (-1)^{k} \left(I_{b-}^{\alpha-k} x\right)(t). \tag{2.17}$$

Lemme 2.2.2 [5] *Pour $\alpha > 0$, soit $x, \in AC^n(a,b)$. Alors :*

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} x(t) = x(t) + c_1(t-a)^{\alpha-1} + c_2(t-a)^{\alpha-2} + ... + c_n(t-a)^{\alpha-n}, \tag{2.18}$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ $(n = [\alpha] + 1$).

Composition avec des dérivées fractionnaires

Propriété 2.2.2 *soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tel que : $n-1 < \alpha < n$, $m-1 < \beta < m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ et $\alpha + \beta < n$, et soit $x \in L^1(a,b)$ et $I_{a+}^{m-\alpha} x \in AC^m([a,b])$. Alors nous avons :*

$$\left(D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} x\right)(t) = \left(D_{a+}^{\alpha+\beta} x\right)(t) - \sum_{j=1}^{m} \left(D_{a+}^{\beta-j} x\right)(a) \frac{(t-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \tag{2.19}$$

En permutant α et β (et donc m et n), nous pouvons écrire :

$$D_{a+}^{\beta}\left(D_{a+}^{\alpha} x(t)\right) = D_{a+}^{\alpha+\beta} x(t) - \sum_{j=1}^{n} \left[D_{a+}^{\alpha-j} x(t)\right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}. \tag{2.20}$$

2.2.2 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 2.2.2 *Les dérivées fractionnaires ${}^C D_{a+}^{\alpha} x$ et ${}^C D_{b-}^{\alpha} x$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(R(\alpha) \geq 0)$ sur $[a,b]$ sont définies via les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (2.8) et (2.9) par :*

$$\left({}^C D_{a+}^{\alpha} x\right)(t) := \left(D_{a+}^{\alpha}\left[x(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!}(s-a)^k\right]\right)(t) \tag{2.21}$$

et

$$\left({}^C D_{b-}^{\alpha} x\right)(t) := \left(D_{b-}^{\alpha}\left[x(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(b)}{k!}(b-s)^k\right]\right)(t), \tag{2.22}$$

respectivement, où

$$n = \alpha \text{ si } \alpha \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad n = [R(\alpha)] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N}. \tag{2.23}$$

Ces dérivées sont appelées dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite d'ordre α.

Définition 2.2.3 *Si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et x est une fonction pour laquelle existent les dérivées fractionnaires de Caputo ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}x$ et ${}^{C}D^{\alpha}_{b-}x$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ $(R(\alpha) \geq 0)$ ainsi que les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville $D^{\alpha}_{a+}x$ et $D^{\alpha}_{b-}x$, alors :*

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}x\right)(t) = \left(D^{\alpha}_{a+}x\right)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha} \qquad (n = [R(\alpha)] + 1) \tag{2.24}$$

et

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}x\right)(t) = \left(D^{\alpha}_{b-}x\right)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-t)^{k-\alpha} \qquad (n = [R(\alpha)] + 1). \tag{2.25}$$

Propriété 2.2.3 *Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, alors les dérivées fractionnaires (2.24) et (2.25) coïncident avec les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (2.8) et (2.9) dans les cas suivants :*

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}x\right)(t) = \left(D^{\alpha}_{a+}x\right)(t), \tag{2.26}$$

si $x(a) = x'(a) = ... = x^{(n-1)}(a) = 0 \quad (n = [R(\alpha)] + 1)$; et

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{b-}x\right)(t) = \left(D^{\alpha}_{b-}x\right)(t), \tag{2.27}$$

si $x(b) = x'(b) = ... = x^{(n-1)}(b) = 0 \quad (n = [R(\alpha)] + 1)$.

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et la dérivée usuel $x^{(n)}$ d'ordre n existe, alors ${}^{C}D^{n}_{a+}x$ coïncide avec $x^{(n)}(t)$, tandis que ${}^{C}D^{n}_{b-}x$ coïncide avec $x^{(n)}(t)$ avec l'exactitude au multiplicateur constant $(-1)^n$:

$$\left({}^{C}D^{n}_{a+}x\right)(t) = x^{(n)}(t), \qquad \left({}^{C}D^{n}_{b-}x\right)(t) = (-1)^n x^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{2.28}$$

Théorème 2.2.1 *Soit $R(\alpha) \geq 0$ et soit n donnée par (2.23). Si $x \in AC^n([a,b])$, alors les dérivées fractionnaires de Caputo $\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}x\right)(t)$ et ${}^{C}D^{\alpha}_{b-}x$ existent presque par tout sur $[a,b]$.*

a) *Si* $\alpha \notin \mathbb{N}$, ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}x$ *et* ${}^{C}D_{b-}^{\alpha}x$ *sont représentés par :*

$$\left({}^{C}D_{a+}^{\alpha}x\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}\frac{x^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds = I_{a+}^{n-\alpha}D^{n}x(t) \tag{2.29}$$

et

$$\left({}^{C}D_{b-}^{\alpha}x\right)(t) = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}\frac{x^{(n)}(s)}{(s-t)^{\alpha-n+1}}ds = (-1)^{n}\, I_{b-}^{n-\alpha}D^{n}x(t), \tag{2.30}$$

respectivement, où $D = \frac{d}{dx}$ *et* $n = [R(\alpha)] + 1$.

b) *Si* $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *alors* ${}^{C}D_{a+}^{\alpha}x$ *et* ${}^{C}D_{b+}^{\alpha}x$ *sont représentés par* (2.28). *En particulier,*

$$\left({}^{C}D_{a+}^{0}x\right)(t) = \left({}^{C}D_{b-}^{0}x\right)(t) = x(t). \tag{2.31}$$

Exemple 2.2.2 *Soit* $R(\alpha) > 0$, $R(\beta) > 0$ *et soit* n *donnée par* (2.23). *Alors on peut verifier directemment que :*

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(t-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (R(\beta) > n), \tag{2.32}$$

$${}^{C}D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}(b-t)^{\beta-\alpha-1} \quad (R(\beta) > n) \tag{2.33}$$

et

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{k} = 0 \text{ et } {}^{C}D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{k} = 0 \quad (k = 0, 1, ..., n-1), \tag{2.34}$$

pour $\beta = 1$ *on trouve :*

$${}^{C}D_{a+}^{\alpha}1 = 0 \text{ et } {}^{C}D_{b-}^{\alpha}1 = 0. \tag{2.35}$$

Composition de la dérivée de Caputo avec l'intégrale fractionnaire

Lemme 2.2.3 [1] *Soit* $R(\alpha) > 0$ *et soit* $x(t) \in L^{\infty}(a,b)$ *ou* $x(t) \in C(a,b)$.

a) *si* $R(\alpha) \notin \mathbb{N}$ *ou* $\alpha \in \mathbb{N}$, *alors :*

$$\left({}^C D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} x\right)(t) = x(t) \quad et \quad \left({}^C D^{\alpha}_{b-} I^{\alpha}_{b-} x\right)(t) = x(t). \tag{2.36}$$

b) *Si* $R(\alpha) \in \mathbb{N}$ *et* $Im(\alpha) \neq 0$, *alors :*

$$\left({}^C D^{\alpha}_{a+} I^{\alpha}_{a+} x\right)(t) = x(t) - \frac{\left(I^{\alpha}_{a+}\right)(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(t-a)^{n-\alpha}, \tag{2.37}$$

$$\left({}^C D^{\alpha}_{b-} I^{\alpha}_{b-} x\right)(t) = x(t) - \frac{\left(I^{\alpha}_{a+}\right)(a)}{\Gamma(n-\alpha)}(b-t)^{n-\alpha}. \tag{2.38}$$

Lemme 2.2.4 [1] *Soit* $R(\alpha) > 0$, *et soit* n *donnée par* (2.23), *si* $x(t) \in AC^n([a,b])$ *ou* $x(t) \in C^n([a,b])$ *alors :*

$$\left(I^{\alpha C}_{a+} D^{\alpha}_{a+} x\right)(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \tag{2.39}$$

et

$$\left(I^{\alpha C}_{b-} D^{\alpha}_{b-} x\right)(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k. \tag{2.40}$$

En particulier, si $0 < R(\alpha) \leq 1$ *et* $x(t) \in AC([a,b])$ *ou* $x(t) \in C([a,b])$, *alors :*

$$\left(I^{\alpha C}_{a+} D^{\alpha}_{a+} x\right)(t) = x(t) - x(a), \quad et \quad \left(I^{\alpha C}_{b-} D^{\alpha}_{b-} x\right)(t) = x(t) - x(b). \tag{2.41}$$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est l'inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

2.2.3 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Rieman-Liouville

- *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \in]m-1, m[$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre* m *suivit d'une dérivation classique d'ordre* m, *alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.*

- *Une autre différence entre la définition de Rieman celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Rieman-Liouville elle est*

$$\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}$$

- *Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann- Liouville), c'est-à-dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.*

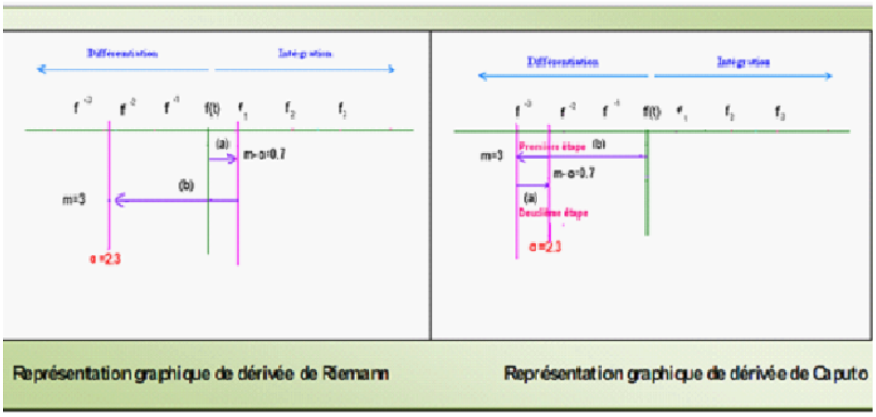

FIGURE 2.1 – Comparaison entre la dérivée fractionnaire de Caputo et Rieman-Liouville

2.3 Stabilité de type Ulam

La stabilité des équations différentielles fractionnaire de Ulam a quatre type, stabilité de Ulam-Hyers, stabilité de Ulam-Hyers généralisé, stabilité de Ulam-Hyers-Rassias et stabilité de Ulam-Hyers-Rassias généralisé.

2.3.1 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Définition 2.3.1 *Le PDFI (P) est stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel $c_f > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C(J, \mathbb{R})$ de l'inégalité :*

$$\left| {}^{c}D^{\alpha}x(t) - f\left(t, x(t), {}^{c}D^{\beta}x(t), \int_{0}^{t} k(t,s)\, {}^{c}D^{\alpha}x(s)\mathrm{d}s\right)\right| \leq \varepsilon, \quad t \in J, \tag{2.42}$$

il existe une solution $y \in C(J, \mathbb{R})$ de (P) avec

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f \varepsilon, \quad t \in J. \tag{2.43}$$

2.3.2 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers généralisée

Définition 2.3.2 *Le PDFI (P) est stable au sense de Ulam-Hyers généralisée s'il existe une fonction $\theta_f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, $\theta_f(0) = 0$, tel que pour tout $\epsilon > 0$ et pour chaque solution $x \in C(J, \mathbb{R})$ de l'inégalité (2.42) il existe une solution $y \in C(J, \mathbb{R})$ de (P) avec*

$$|x(t) - y(t)| \leq \theta_f(\varepsilon), \quad t \in J. \tag{2.44}$$

2.3.3 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias

Définition 2.3.3 *Le PDFI* (P) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à* $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *s'il existe un nombre réel* $c_{f,\varphi} > 0$ *tel que* $\varepsilon > 0$ *et pour chaque solution* $x \in C(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$\left| {}^cD^\alpha x(t) - f\left(t, x(t), {}^cD^\beta x(t), \int_0^t k(t,s) {}^cD^\alpha x(s) \mathrm{d}s\right)\right| \leq \varepsilon\varphi(t), \quad t \in J, \tag{2.45}$$

il existe une solution $y \in C(J, \mathbb{R})$ *de* (P)

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi}\varepsilon\varphi(t), \quad t \in J. \tag{2.46}$$

2.3.4 Stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias généralisée

Définition 2.3.4 *Le PDFI* (P) *est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée par rapport à* $\varphi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *s'il existe un nombre réel* $c_{f,\varphi} > 0$ *tel que pour chaque solution* $x \in C(J, \mathbb{R})$ *de l'inégalité :*

$$\left| {}^cD^\alpha x(t) - f\left(t, x(t), {}^cD^\beta x(t), \int_0^t k(t,s) {}^cD^\alpha x(s) \mathrm{d}s\right)\right| \leq \varphi(t), \quad t \in J, \tag{2.47}$$

il existe une solution $y \in C(J, \mathbb{R})$ *de* (P)*, tel que*

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi}\varphi(t), \quad t \in J. \tag{2.48}$$

Remarque 2.3.1 *Il est claire que :*

(i) La stabilité dans la définition 2.3.1 $\Rightarrow$ *La stabitité dans la définition* 2.3.2 *;*

(ii) La stabilité dans la définition 2.3.3 $\Rightarrow$ *La stabilité dans la définition* 2.3.4 *;*

(iii) La stabilité dans la définition 2.3.3 $\Rightarrow$ *La stabilité dans la définition* 2.3.1.

Remarque 2.3.2 *Une fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ est dite solution de l'inégalité* (2.42) *si est seulement s'il existe une fonction $g \in C(J, \mathbb{R})$ (qui dépend de la solution y) tel que :*

i) $|g(t)| \leq \varepsilon, \ \ t \in J.$

ii) ${}^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)) + g(t), \ \ t \in J.$

Remarque 2.3.3 *Une fonction $x \in C(J, \mathbb{R})$ est dite solution de l'inégalité* (2.45) *si est seulement s'il existe une fonction $g \in C(J, \mathbb{R})$ (qui dépend de la solution y) tel que :*

i) $|g(t)| \leq \varepsilon\varphi(t), \ \ t \in J.$

ii) ${}^{C}D^{\alpha}x(t) = f(t, x(t)) + g(t), \ \ t \in J.$

Chapitre 3

Existence et stabilité de type Ulam d'un problème aux limites fractionnaire

Nous établissons dans ce chapitre des résultats de l'existence et la stabilité de type Ulam pour le problème aux limites d'ordre fractionnaires implicites au sens de Caputo (P).

3.1 Résultats d'existence

Considérons le problème (P) sous les hypothèses suivantes :

(H_1) $f : J \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *est continue et il existe* $\psi \in C(J, \mathbb{R}_+)$ *muni de la norme* $\|.\|_C$, *tel que :*

$$\Big|f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)\Big| \leq \psi(t)\Big(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|\Big),$$

pour tout $t \in J$, *et* $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, 2, 3$.

(H_2) $k(t, s)$ *est continue pour tout* $(t, s) \in J \times J$, *et il existe une constante positive*

K tel que :

$$\max_{t,s\in J}|k(t,s)| = K.$$

Remarque 3.1.1 *De l'hypothèse (H_1), nous avons :*

$$\begin{aligned}\Big|f(t,x_1,x_2,x_3)\Big| &\leq \Big|f(t,x_1,x_2,x_3)-f(t,0,0,0)\Big|+\Big|f(t,0,0,0)\Big|\\ &\leq \psi(t)\Big(|x_1|+|x_2|+|x_3|\Big)+F, \quad \textit{avec} \quad F=\sup_{t\in J} f(t,0,0,0).\end{aligned}$$

Lemme 3.1.1 *Si la solution du problème (P) existe, elle peut être représentée par l'équation intégrale :*

$$y(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)u(s)\mathrm{d}s, \tag{3.1}$$

où u est la solution d'équation intégrale fonctionnelle suivante :

$$u(t) = f\left(t, h(t) + \int_0^T G(t,s)u(s)\mathrm{d}s, I^{\alpha-\beta}u(t), \int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s\right), \tag{3.2}$$

$G(t,s)$ est la fonction de Green définie par :

$$G(t,s) = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - \dfrac{t(T-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha)}, & 0\leq s\leq t\leq T,\\ \dfrac{-t(T-s)^{\alpha-1}}{T\Gamma(\alpha)}, & 0\leq t\leq s\leq T,\end{cases} \tag{3.3}$$

avec

$$G_0 = \max\{|G(t,s)|,\ (t,s)\in J\times J\},$$

et

$$h(t) = y_0 + \frac{(y_T-y_0)t}{T}. \tag{3.4}$$

Preuve. *Il n'est pas difficile de vérifier que* ${}^C D^\beta y(t) = I^{\alpha-\beta C} D^\alpha y(t)$ *pour* $t \in J$. *Si* y *est une solution de* (P), *alors*

$$ {}^C D^\alpha y(t) = f\left(t, y(t), I^{\alpha-\beta c} D^\alpha y(t), \int_0^t k(t,s)^c D^\alpha y(s)\mathrm{d}s\right), \ t \in J =: [0;T]. $$

Soit ${}^c D^\alpha y(t) = u(t)$ *dans l'équation* (P), *alors :*

$$ u(t) = f\left(t, y(t), I^{\alpha-\beta} u(t), \int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s\right). \tag{3.5} $$

On applique I^α *de* (P), *on trouve :*

$$ y(t) = c_0 + c_1 t + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)\mathrm{d}s, $$

à partir de la condition $y(0) = y_0$ *on obtenient* $c_0 = y_0$ *et la deuxieme condition* $y(T) = y_T$

$$ c_1 = -\frac{1}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} u(s)\mathrm{d}s + \frac{(y_T - y_0)}{T}. $$

Alors la solution de (P) *et donnée par :*

$$ \begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s)\mathrm{d}s - \frac{t}{T\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} u(s)\mathrm{d}s + \left(1 - \frac{t}{T}\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t \left[(t-s)^{\alpha-1} - \frac{t}{T}(T-s)^{\alpha-1}\right] u(s)\mathrm{d}s - \frac{t}{T} \int_t^T (T-s)^{\alpha-1} u(s)\mathrm{d}s \right] \\ &\quad + \left(1 - \frac{t}{T}\right) y_0 + \frac{t}{T} y_T. \end{aligned} $$

Par conséquence, nous avons l'équation (3.1) *et* (3.2). □

Notre premier résultat d'existence est basé sur le théorème du point fixe de Schauder.

Théorème 3.1.1 *Supposons que* $(H_1) - (H_2)$ *sont vérifiées. Si*

$$ \frac{\|\psi\|}{1 - \aleph} < 1, \qquad \aleph = \frac{T^{\alpha-\beta} \|\psi\|}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} + \|\psi\| KT. $$

Alors le problème (P) possède au moins une solution sur J.

Preuve. *Transformons le problème (P) à un problème de point fixe.*

Definnissons l'operateur $A : C(J, \mathbb{R}) \to C(J, \mathbb{R})$ par :

$$Ay(t) = h(t) + \int_0^T G(t,\ s)v(s)\mathrm{d}s, \tag{3.6}$$

où $v \in C(J, \mathbb{R})$ satisfait l'équation fonctionnelle implicite :

$$v(t) = f\left(t, y(t), I^{\alpha-\beta}v(t), \int_0^t k(t,s)v(s)\mathrm{d}s\right) \tag{3.7}$$

et

$$h(t) = y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T},$$

avec G sont les fonctions définies par (3.3).

Definissons la boule

$$B_\rho = \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \|y\| \leq \rho\},\ \ \rho \geq \frac{|y_T| + \dfrac{G_0TF}{1-\aleph}}{1 - \dfrac{G_0T||\psi||}{1-\aleph}}.$$

L'ensemble B_ρ est non vide, borné, fermé et convexe. Nous démontrons que l'opérateur A défini par (3.6) répond à l'hypothèse du théorème du point fixe de Schauder. La preuve sera présentée en plusieurs étapes.

Étape 1 : *L'operateur A est continue.*

Considérons une suite $\{x_n\} \subset B_\rho$ tel que $x_n \to x$ dans B_ρ.

Pour montrer que A est continue, nous devons démontrer que $\|Ax_n - Ax\| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Pour cela, nous avons :

$$|Ax_n(t) - Ax(t)| \leq \int_0^T |G(t,\ s)||u_n(s) - u(s)\mathrm{d}s, \tag{3.8}$$

où $u_n, u \in C(J, \mathbb{R})$, *tel que :*

$$u_n(t) \quad = \quad f\left(t, x_n(t), I^{\alpha-\beta}u_n(t), \int\limits_0^t k(t,\ s)u_n(s)\mathrm{d}s\right),$$

et $u(t)$ *est définie dans* (3.5). *De* (H_1), *nous avons :*

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u(t)| \quad &= \quad \left| f\left(t, x_n(t),\ I^{\alpha-\beta}u_n(t), \int\limits_0^t k(t,\ s)u_n(s)\mathrm{d}s\right)\right. \\ &\quad \left. - f\left(t, x(t), I^{\alpha-\beta}u(t), \int\limits_0^t k(t, s)u(s)\mathrm{d}s\right)\right| \\ &\leq \quad \psi(t)(|x_n(t) - x(t)| + \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}|u_n(s) - u(s)|\mathrm{d}s \\ &\quad + \int\limits_0^t k(t,\ s)|u_n(s) - u(s)|\mathrm{d}s). \end{aligned}$$

Alors :

$$\|u_n(t) - u(t)\| \leq \|\psi\|(\|x_n - x\| + \frac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\|u_n - u\| + KT\|u_n - u\|.$$

Ainsi

$$\|u_n - u\| \leq \frac{||\psi||}{1 - \|\psi\|(KT + \frac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)})}\|x_n - x\|.$$

Comme $x_n \to x$, *alors nous obtenons* $u_n(t) \to u(t)$ *lorsque* $n \to \infty$ *pour chaque* $t \in J$. *Et soit* $\epsilon > 0$ *tel que, pour chaque* $t \in J$, *nous avons* $|u_n(t)| \leq \epsilon$, *et* $|u(t)| \leq \epsilon$. *Alors :*

$$|G(t,\ s)||u_n(s) - u(s)| \leq |G(t,\ s)|(|u_n(s)| + |u(s)|) \leq 2\epsilon|G(t,\ s)|.$$

Pour chaque $t \in J$, *la fonction* $s \mapsto 2\epsilon|G(t; s)|$ *est intégrable sur* J.

Alors appliquons le Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue, on obtient l'equation (3.8) *implique que* $\|Ax_n - Ax\| \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

Par conséquent, A *est continue.*

Étape 2 : A transforme des ensembles bornés en ensembles bornés dans B_ρ, i.e., $A(B_\rho) \subset B_\rho$.

En effet, il suffit de démontrer qu'il existe une constante positive ρ pour chaque $y \in B_\rho$, nous avons $\|Ay\| \leq \rho$, montre que $Ay \in B_\rho$.

Nous avons que pour chaque $t \in J$, par la condition (H_2) ,

$$|Ay(t)| = \left| h(t) + \int_0^T G(t,\ s)v(s)\mathrm{d}s \right| \leq |h(t)| + \int_0^T |G(t,s)||v(s)|\mathrm{d}s, \qquad (3.9)$$

où $v(t)$ est définie dans (3.7), donc :

$$\begin{aligned} |v(t)| &= \left| f\left(t, y(t), I^{\alpha-\beta}v(t), \int_0^t k(t,s)v(s)\mathrm{d}s\right)\right| \\ &\leq F + \psi(t)|y(t)| + \psi(t)\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}|v(s)|\mathrm{d}s + \psi(t)\int_0^t |k(t,\ s)||v(s)|\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Majorons pour $t \in J$, nous avons :

$$\|v\| \leq F + \|\psi\|\|y\| + \|\psi\|\frac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\|v\| + \|\psi\|K\|v\|T.$$

Donc

$$\|v\| \leq \frac{F + ||\psi||\rho}{1 - \left(\frac{||\psi||T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + ||\psi||KT\right)},$$

et

$$\begin{aligned} |h(t)| &= \left| y_0 + \frac{(y_T - y_0)t}{T} \right| \\ &\leq \frac{|y_0|(t-T)}{T} + \frac{|y_T|t}{T} \leq |y_T|. \end{aligned}$$

Donc (3.9) implque que, pour chaque $t \in J$,

$$|Ay(t)| \leq |y_T| + \frac{G_\circ T(F + \|\psi\|\rho)}{1 - \aleph} \leq \rho.$$

Majorons pour $t \in J$,

$$||Ay\| \leq \rho.$$

Alors : $A(B_\rho) \subset B_\rho$.

Étape 3 : A est compact.

Nous démontrons que A transfome des ensembles bornés en ensembles équicontinus de $C(J,\mathbb{R})$ *, i.e,* $B\rho$ *est équicontinues.*

Maintenant, Soit $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ *et* $t_1, t_2 \in J, t_1 < t_2, |t_2 - t_1| < \delta$. *Alors nous avons :*

$$\begin{aligned}
|Ay(t_2) - Ay(t_1)| &\leq \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,)||v(s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \|v\| \int_0^T |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\mathrm{d}s \\
&\leq \frac{F + \|\psi\|\rho}{1 - \aleph} \int_0^T |G(t_2,\ s) - G(t_1,\ s)|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Lorsque $t_1 \to t_2$, *le membre droite de l'inégalité ci-dessus ne dépend pas de* y *et tend vers zéro. Par conséquent,*

$$|Ay(t_2) - Ay(t_1)| \to 0,\ \forall |t_2 - t_1| \to 0.$$

Donc, $A(B_\rho)$ *est équicontinue, par le Théorème d'Ascoli-Arzela l'opérateur* $A : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ *est continue et un opérateur compact. Finalement, toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder sont tenues et montrent que A a un point fixe sur* B_ρ. *Alors, le problème* (P) *a une solution.* $\square$

Notre deuxième résultat est basé sur le théorème du point fixe de Banach pour obtenir l'existence d'une solution unique du problème (P)*.*

Théorème 3.1.2 *Soient les hypothèses du théorème* 3.1.1 *sont tenues, avec* (H_3) :

$$\Delta = \frac{G_o \|\psi\| T}{1 - \|\psi\| \left(KT + \frac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \right)} < 1. \tag{3.10}$$

Alors le problème (P) *a une unique solution sur* J*.*

Preuve. *Il résulte, du Théorème* 3.1.1*, que le problème* (P) *admet au moins une solution. Il suffit donc de montrer que l'opérateur* A *décrit dans* (3.9) *est une contraction.*

Prenons maintenant $x, y \in C(J, \mathbb{R})$ *. Alors pour* $t \in J$*, on a*

$$Ax(t) - Ay(t) = \int_0^T G(t,\ s) u(s) \mathrm{d}s - \int_0^T G(t,\ s) v(s) \mathrm{d}s, \tag{3.11}$$

où $u, v \in C(J, \mathbb{R})$ *sont définies dans* (3.5), (3.7) *respectivement. Alors, pour* $t \in J$

$$|Ax(t) - Ay(t)| \leq \int_0^T G(t,\ s) |u(s) - v(s)| \mathrm{d}s, \tag{3.12}$$

mais par les hypothèses $(H_1 - H_2)$ *, nous avons :*

$$\begin{aligned}
|u(t) - v(t)| &= \Bigg| f\left(t, x(t), I^{\alpha-\beta}u(t), \int_0^t k(t,s)u(s)\mathrm{d}s\right) \\
&- f\left(t, y(t), I^{\alpha-\beta}v(t), \int_0^t k(t,s)v(s)\mathrm{d}s\right)\Bigg| \\
&\leq \psi(t) \left(|x(t) - y(t)| + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha - \beta)} |u(s) - v(s)| \mathrm{d}s \right. \\
&\left. + \int_0^t k(t,\ s) |u(s) - v(s)| \mathrm{d}s \right) \\
&\leq \|\psi\| \left(\|x - y\| + \frac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} \|u - v\| + K\|u - v\| T \right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|u-v\| \leq \frac{\|\psi\|}{1-\|\psi\|\left(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)}\|x-y\|.$$

Reconvertir en (3.12), nous avons :

$$|Ax(t)-Ay(t)| \leq \frac{G_0\|\psi\|T}{1-\|\psi\|\left(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)}\|x-y\|.$$

Majorons pour $t \in J$, on trouve :

$$\|Ax-Ay\| \leq \frac{G_0\|\psi\|T}{1-\|\psi\|\left(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)}\|x-y\|.$$

De (3.10) , $\Delta < 1$. Alors l'opérateur A est un contraction. Ainsi, par le principe de contraction de Banach, A a un unique point fixe qui est une solution de (P) sur J. □

3.2 Résultats de stabilité de type Ulam

Dans cette section, nous prouvons deux types de la stabilité de notre problème (P).

3.2.1 Résultats de stabilité au sens d'Ulam-Hyers

Avans de présenter le résultat de stablité au sens d'Ulam-Hyers nous avons la remarque suivante :

Remarque 3.2.1 *Soit $1 < \alpha \leq 2$, si $x \in C(J)$ est la solution de l'inégalité (2.42), alors x est la solution de l'inégalité suivante :*

$$\left|x(t)-Ax(t)\right| \leq \frac{\varepsilon T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{3.13}$$

où A défini dans (3.6).

De la remarque 2.3.2

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)\,(u(s) + g(s))\,ds,$$

où u, $G(t,s)$ sont définies dans (3.5), (3.3) respectivement. Alors :

$$\begin{aligned} |x(t) - Ax(t)| &\leq \int_0^T |G(t,s)g(s)|ds \\ &\leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Nous donnons le résultat de stablité au sens d'Ulam-Hyers.

Théorème 3.2.1 *Supposons que les hypothèses du Théorème* 3.1.2 *soient satisfaites. Alors le problème (P) est stable au sens d'Ulam-Hyers.*

Preuve. *Soit $\varepsilon > 0$ et soit $x \in C(J,\mathbb{R})$ une fonction qui satisfaire l'inegualité (2.42), et soit $y \in C(J,\mathbb{R})$ la solution unique de le problème (P) qui est par le Lemme* 3.1.1 *l'équivalence de (P) à l'équation intégrale (3.1) alors nous obtenons pour chaque $t \in J$:*

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= \left| x(t) - h(t) - \int_0^T G(t,\ s)v(s)\mathrm{ds} \right| \\ &\leq |x(t) - h(t) - \int_0^T G(t,\ s)u(s)\mathrm{ds}| \\ &\quad + \left| h(t) + \int_0^T G(t,\ s)u(s)\mathrm{ds} - h(t) - \int_0^T G(t,\ s)v(s)\mathrm{ds} \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^T G(t,s)|u(s) - v(s)|\mathrm{ds} \\ &\leq \frac{\epsilon T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + G_0\|u - v\|T. \end{aligned}$$

En effet, d'après la preuve du théorème 3.1.2*, nous avons :*

$$\|u-v\| \leq \frac{\|\psi\|}{1-\|\psi\|(KT+\frac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)})}\|x-y\|.$$

Alors, pour chaque $t \in J$ *:*

$$\|x-y\| \leq \frac{\epsilon T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{G_o\|\psi\|T}{1-\|\psi\|(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)})}\|x-y\|.$$

Donc :

$$\|x-y\| \;\leq\; \frac{\epsilon T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1-(\frac{G_o\|\psi\|T}{1-\|\psi\|(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)})})\right]^{-1} = \sigma\varepsilon,$$

pour soit $\sigma = \dfrac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1-(\frac{G_0\|\psi\|T}{1-\|\psi\|(KT+\frac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)})}\right]^{-1}.$

Alors le problème (P) *est stable au sens d'Ulam-Hyers.* □

En mettant $\Phi(\epsilon) = \sigma\epsilon, \Phi(0) = 0$ *il résulte que le problème* (P) *est stable au sens d'Ulam-Hyers généralisé.*

3.2.2 Résultats de stabilité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias

Maintenant, nous énonçons le résultat de stablité au sens d'Ulam-Hyers-Rassias suivant :

Théorème 3.2.2 *Assumons les hypothèses* $(H_1)-(H_3)$ *et*

(H_4) *La fonction* $\varphi \in C(J,\mathbb{R}_+)$ *est croissante et il existe* $\lambda_{\varphi} > 0$ *tel que, pour chaque* $t \in J$*, nous avons :*

$$I^{\alpha}\varphi(t) \leq \lambda_{\varphi}\varphi(t).$$

sont tenues. Alors le Proplème (P) est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias par rapport à φ.

Preuve. *Soit $x \in C(J,\mathbb{R})$ une solution de l'inéquation (2.45), et supposons que y soit une solution du problème (P). Ainsi, nous avons :*

$$y(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)v(s)\mathrm{d}s,$$

où $v \in C(J,\mathbb{R})$ défini par (3.7)

Fonctionnant par I^α sur les deux membres de l'inégualité (2.45) et puis en intégrant, nous obtentons :

$$\begin{aligned}\left| x(t) - h(t) - \int_0^T G(t,s)u(s)\mathrm{d}s \right| &\leq \frac{\epsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)\mathrm{d}s \\ &\leq \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t)\ ,\end{aligned}$$

où $u \in C(J,\mathbb{R})$ défini dans (3.5). Pour chaque $t \in J$, nous avons :

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &= \left| x(t) - h(t) - \int_0^T G(t,s)v(s)\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \left| x(t) - h(t) - \int_0^T G(t,s)u(s)\mathrm{d}s \right| \\ &+ \left| h(t) + \int_0^T G(t,s)u(s)\mathrm{d}s - h(t) - \int_0^T G(t,s)v(s)\mathrm{d}s \right| \\ &\leq \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t) + \int_0^T G(t,s)|u(s)-v(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t) + G_0\|u-v\|T.\end{aligned}$$

En effet, de la preuve du Theorem 3.1.2, *nous avons :*

$$\|u-v\| \leq \frac{\|\psi\|}{1 - \|\psi\|\left(KT + \dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)}\|x-y\|.$$

Ensuite, pour chaque $t \in J$:

$$\|x-y\| \leq \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t) + \frac{G_o\|\psi\|T}{1-\|\psi\|\left(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)}\|x-y\|.$$

Donc :

$$\|x-y\| \leq \left[1-\frac{G_o\|\psi\|T}{1-\|\psi\|\left(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)}\right]^{-1} \varepsilon\lambda_\varphi\varphi(t) = c_\varphi\varepsilon\varphi(t)\ ,$$

où

$$c_\varphi = \left[1-\frac{G_o\|\psi\|T}{1-\|\psi\|\left(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)}\right]^{-1} \lambda_\varphi.$$

Alors, le problème (P) est stable au sens d'Ulam-Hyers-Rassias par rapport à φ. $\square$

3.3 Exemples

Exemple 3.3.1 *Étant donné le Problème suivant :*

$$cD^{\frac{1}{2}}y(t) = \frac{2+y(t)+{}^cD^{\frac{4}{3}}+\displaystyle\int_0^1 e^{t-sc}D^{\frac{1}{2}}y(s)\mathrm{d}s}{2e^{t+1}\left(1+y(t)+{}^cD^{\frac{4}{3}}+\displaystyle\int_0^1 e^{t-sc}D^{\frac{1}{2}}y(s)\mathrm{d}s\right)},\ t\in[0,1] \tag{3.14}$$

$$y(0)=1 \ et\ y(1)=1. \tag{3.15}$$

Posons

$$f(t,u,v,w) = \frac{2+|u|+|v|+|w|}{2e^{t+1}(1+|u|+|v|+|w|)}.$$

Évidemment, f est une fonction mutuellement continue.

En fait, pour tout $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$

$$|f(t,\ u,\ v,\ w) - f(t,\ u_1,\ v_1,\ w_1)| \leq \frac{1}{2e^2}(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|+|w_1-w_2|).$$

D'où la condition (H_2) *est satisfaite avec* $\psi(t) = \dfrac{1}{2e^{t+1}}$. *Ainsi,*

$$|f(t,u,v,w)| = \frac{1}{2e^{t+1}}(2 + |u| + |v| + |w|).$$

Alors :

$$\frac{\|\psi\|}{1-\aleph} \approx 0.393913 < 1. \tag{3.16}$$

où

$$\aleph = \frac{T^{\alpha-\beta}\|\psi\|}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \|\psi\|KT,$$

avec $\|\psi\| = \dfrac{1}{2e^2}$. $T = 1, \alpha = \dfrac{1}{2}, \beta = \dfrac{4}{3}, F = \dfrac{1}{e^2}$ *et* $K = e$.

Il découle du théorème 3.1.1 *que le problème* (3.14) $-$ (3.15) *possède au moins une solution sur J.*

Exemple 3.3.2 *Considérons le problème suivant :*

$${}^cD^{\frac{3}{2}}y(t) = \frac{1}{2e^{t+1}\left(1 + y(t) +^c D^{\frac{3}{4}}y(t) + \int\limits_0^1 e^{t-s}\ {}^cD^{\frac{3}{2}}y(s)\mathrm{d}s\right)} \tag{3.17}$$

$$y(0) = 1 \ \textit{et}\ y(1) = 2. \tag{3.18}$$

Posons

$$f(t,u,v,w) \ = \ \frac{1}{2e^{t+1}(1 + |u| + |v| + |w|)}, \qquad t \in [0,1],$$

$u, v, w \in \mathbb{R}$.

Clairement, la fonction f *est continue. Pour chaque* $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \in \mathbb{R}$ *et*

$t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
|f(t,u_1,v_1,w_1) - f(t,u_2,v_2,w_2)| &\leq \left|\frac{1}{2e^{t+1}}\left(\frac{1}{(1+|u_1|+|v_1|+|w_1|)}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.-\frac{1}{(1+|u_2|+|v_2|+|w_2|)}\right)\right|\\
&\leq \left|\frac{1}{2e^{t+1}}\left(\frac{|u_1-u_2|+|v_1-v_2|+|w_1-w_2|}{(1+|u_1|+|v_1|+|w_1|)(1+|u_2|+|v_2|+|w_2|)}\right)\right|\\
&\leq \frac{1}{2e^2}(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|+|w_1-w_2|).
\end{aligned}$$

D'où la condition (H_2) *est tenue avec* $||\psi|| = \frac{1}{2e^2} < 1$. *De* (3.3) *la fonction* G *est donnée par*

$$G(t,\ s) = \begin{cases} \dfrac{(t-s)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} - \dfrac{t(1-s)^{\frac{1}{2}}}{T\Gamma(\alpha)} & 0 \leq s \leq t \leq 1,\\ \dfrac{-t(1-s)^{\frac{1}{2}}}{T\Gamma(\alpha)} & 0 \leq t \leq s \leq 1, \end{cases}$$

Clairement $G_0 < 2$. *Donc nous allons vérifier la condition* (3.10) *donc*

$$\frac{G_0||\psi\|T}{1-\|\psi\|\left(KT+\dfrac{T^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right)} = 0.1821179198 < 1,$$

avec $T = 1, \alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{4}{3}, ||\psi|| = \frac{1}{2e^2}$ *et* $K = e$.

Il découle du Théorème 3.1.2 *que le problème* (3.17) $-$ (3.18) *admet une solution unique sur* $[0,1]$. *Elle est stable au sens de Ulam-Hyers.*

Conclusion

Dans notre étude. Tout d'abord, l'existence et l'unicité des solutions aux problèmes de valeurs aux limites des équations différentielles implicites d'ordre fractionnaire ont été établies sur la base du théorème du point fixe de Schauder et du principe de contraction de Banach. Deuxièmement, nous avons trouvé la stabilité d'Ulam Hayers et la la stabilité d'Ulam Hayers généralisée, la stabilité d'Ulam - Hyers - Rassias et la stabilité de Ulam - Hyers - Rassias généralisée. Enfin, nous terminons le travail avec des exemples d'illustrations pour prouver la applicabilité du résultat obtenu.

Annexe A

Certains mathématiciens intéressés par l'analyse fractionnaire

A.1 Georg Friedrich Bernhard Riemann

Figure A.1 – Georg Friedrich Bernhard Riemann

Né le 17 septembre 1826 à Breselenz, Etat de Hanovre, mort le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania , Italie, est un mathématicien allemand. Influent sur le plan, théorique, il a apporté une contribution importante à *l'analyse et à la géométrie différentielle.*

En 1840, Bernhard s'établit à Hanovre pour vivre chez sa grand-mère et aller au collège. Après le décès de sa grand-mère en 1842, il va à Lunebourg pour continuer ses études secondaires1.

Au lycée, Riemann étudie la Bible intensivement, mais il est distrait par les mathématiques ; il essaye même de prouver, mathématiquement, l'exactitude de la Genèse. Ses professeurs sont surpris par ses capacités à résoudre des problèmes complexes en mathématique.

En 1846, âgé de 19 ans, grâce à l'argent de sa famille, il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir pasteur afin de financer sa famille.

En 1847, son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il étudie d'abord de Berlin, où il a entre autres comme professeurs Jacobi, Steiner et Dirichlet. Il effectue sa thèse à Göttingen sous la direction de Gauss.

Dans sa thèse, présentée en 1851, Riemann met au point la théorie des fonctions d'une variable complexe, introduisant notamment le concept des surfaces qui portent son nom. On lui doit également d'importants travaux sur les intégrales, poursuivant ceux de Cauchy, qui ont donné entre autres ce qu'on appelle aujourd'hui les intégrales de Riemann. Intéressé par la dynamique des gaz , il jette les bases de l'analyse des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique et résout un cas particulier de ce qu'on appelle maintenant le problème de Riemann.

FIGURE A.2 – Joseph Liouville

A.2 Joseph Liouville

Né le 24 mars 1809, Joseph est le fils d'un militaire qui survit aux campagnes napoléoniennes et qui, en 1814, établit sa famille à Toul.

Joseph Liouville est diplômé de l'école polytechnique en 18271. Deux ans plus tard, il intègre l'école des ponts et chaussées, dont il n'obtient pas le diplôme en raison de problèmes de santé et, surtout, de sa volonté de suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur.

Il obtient le doctorat ès sciences mathématiques en 1836 devant la faculté sous la direction de Simeon Denis Poisson et Louis Jacques Thenard2. Après quelques années dans diverses institutions comme assistant et comme professeur à l'école centrale (1833, où il était répétiteur depuis 1831), il est nommé professeur à l'école *polytechnique en 1838.*

Il obtient une chaire en mathématique au Collège de France en 1850 et une chaire en mécanique à la Faculté des sciences de Paris en 1857. Il est élu membre de l'Académie des sciences le 3 juin 1839 (il en sera président pendant l'année 1870). À côté de ses réussites académiques, il était un remarquable organisateur. Liouville fonda en1836 le Journal de mathématiques pures et appliquées appelé parfois journal de Liouville, qui garde sa haute réputation de nos jours (il est édité depuis 1997 par l'éditeur anglo-néerlandais Elsevier Science). Il a beaucoup publié dans ce journal, en son nom ou en utilisant le pseudonyme Besge.

Il fut le premier à lire les travaux inédits d'évariste Galois, en reconnut l'importance et les publia dans son journal en 1846. Le mathématicien Olry Terquem fut l'un des célèbres auteurs de son journal. Liouville s'impliqua aussi en politique et fut membre de l'assemblée constituante en 1848. Cependant, après sa défaite aux élections à la députation en 1849, il quitta la politique.

A.3 Michele Caputo

Michele Caputo (05 mai 1927 à Ferrara, Italie -) un mathématicien italien.

Expérience professionnelle *A participé aux travaux de l'expédition italienne Karakorum, à plusieurs expéditions de l'Université de Californie dans l'Océan Pacifique et à une expédition archéologique sur l'île d'Icaros (Koweït) organisée par l'Université de Venise.*

1950-1953 *Assistant Professeur de mathématiques, Université de Ferrare.*

FIGURE A.3 – Michele Caputo

1953-1956 *Assistant Institut Géophysique. Université de Trieste.*

1957 *Assistant Cartographie Res. Lab. Université d'État de l'Ohio.*

1958-1959 *Assistant Professeur à l'Institut Geophys. Université de Trieste.*

1959-1960 *Assistant de recherche à l'Institut Geophys. Université de California Los Angeles.*

1960-1961 *Assistant Professeur à l'Institut Geophysique Université de Trieste.*

1961-1965 *Associé à l'Institut de géophysique et professeur de mathématiques et professeur au département de mathématiques Université de Californie Los Angeles.*

1967-1965 *Professeur au département de mathématiques et de géophysique Université de British-Columbia.*

1967-1972 *Directeur de l'Institut de Géophysique Université de Bologne.*

1972-1974 *Directeur de l'Institut de Physique de l'Université de Bologne.*

1974-1976 *Directeur de l'Istituto Nazionale di Geofisica à Rome.*

1976-1983 *Professeur du département de physique de l'université de Rome.*

1983-1987 *Professeur Harris de géophysique Texas A and M University (chaire dotée).*

1987 *Professeur émérite de géophysique Texas A and M University.*

1987 *Professeur au département de physique de l'université de Rome.*

Honneurs

1970 *Membre de l'Académie Nationale dei Lincei.*

1989 *Membre de l'Académie Européen (Londres).*

Diplômes

1950 *Mathématiques (laurea) Université de Ferrare.*

1955 *Physique (laurea) Université de Bologne.*

1959 *Géodésie (libera docenza) Ministère de l'éducation de l'Italie.*

A.4 Donald Holmes Hyers

Hyers est né à Los Angeles le 1er avril 1913 de Charles et Faith Holmes Hyers. 84 ans, professeur retraité de mathématiques à l'USC. Président du département de mathématiques de 1945 à 1950, Hyers a enseigné à l'université de 1944 jusqu'à sa retraite en 1978. Il était originaire de Los Angeles et a obtenu un baccalauréat et une maîtrise de l'UCLA et un doctorat de Caltech. Il a enseigné à l'Université du Wisconsin et à Caltech avant de passer à l'USC. Hyers était un expert en analyse fonctionnelle et en mathématiques appliquées et a fait des recherches sur les équations intégrales non linéaires et une théorie mathématique des vagues d'eau. Son article scientifique écrit avec KO Friedrichs, «On the Existence of Solitary

Waves», a été considéré comme un travail fondateur dans le domaine. Hyers a également rédigé des critiques de livres pour la revue Mathematics Reviews. Le 13 avril à Eugene, Ore., De la leucémie.

A.5 Stanisław Marcin Ulam

FIGURE A.4 – Stanisław Marcin Ulam (13 avril 1909 - 13 mai 1984)

Ulam *est un mathématicien américain d'origine juive polonaise. Il aida à développer la théorie qui permit la bombe à hydrogène. Ulam a étudié à l'Institut Polytechnique de Lwów, où l'un de ses professeurs fut Stefan Banach. Il a obtenu en 1933 le doctorat en mathématiques sous la direction de Kazimierz Kuratowski. Ulam entra aux USA en 1938 comme Harvard Junior Fellow (boursier à l'université Harvard). Au terme de sa bourse, il trouva du travail à la faculté de l'université du Wisconsin-Madison, et aida son frère, Adam, qui s'était enfui de Pologne à la veille de la Seconde Guerre mondiale. Il suggéra d'employer la méthode de Monte-Carlo pour évaluer les intégrales mathématiques difficiles qui apparaissent en modélisant les réactions nucléaires en chaîne (ne sachant pas que Fermi et d'autres avaient découvert la méthode plus tôt). Cette suggestion conduisit au développe-*

ment de la méthode de Monte-Carlo par Von Neumann, Metropolis, et d'autres. En mathématiques pures, il travailla à la théorie des ensembles (incluant les cardinaux mesurables et les mesures abstraites), la topologie, la théorie ergodique, et d'autres domaines. Il a collaboré avec Paul Erdős pendant plus d'un demi-siècle. Après la Seconde Guerre mondiale, il se détourna largement des mathématiques pures rigoureuses pour un travail plus spéculatif et imaginatif, en posant des problèmes et en faisant des conjectures, ce qui a toujours été une de ses spécialités. Elles concernaient souvent l'application des mathématiques à la physique et à la biologie.

A.6 Themistocles M. Rassias

Rassias est né le 2 avril 1951, est un mathématicien grec et professeur à l' Université technique nationale d'Athènes. Il a obtenu son doctorat. en mathématiques de l' Université de Californie à Berkeley en juin 1976. Le professeur Stephen Smale et le professeur Shiing-Shen Chern ont été respectivement sa thèse et ses conseillers académiques. Son travail s'étend sur plusieurs domaines de l'analyse mathématique. Il comprend l'analyse fonctionnelle non linéaire , les équations fonctionnelles , la théorie de l'approximation , l' analyse sur les collecteurs , le calcul des variations , les inégalités , la géométrie métrique et leurs applications. Il a contribué un certain nombre de résultats dans la stabilité des sous - variétés minimales , dans la solution du problème d'Ulam pour les homomorphismes approchés dans les espaces de Banach , dans la théorie des mappages isométriques dans les espaces métriques et dans l' analyse complexe (inégalité de Poincaré et mappages harmoniques). Il

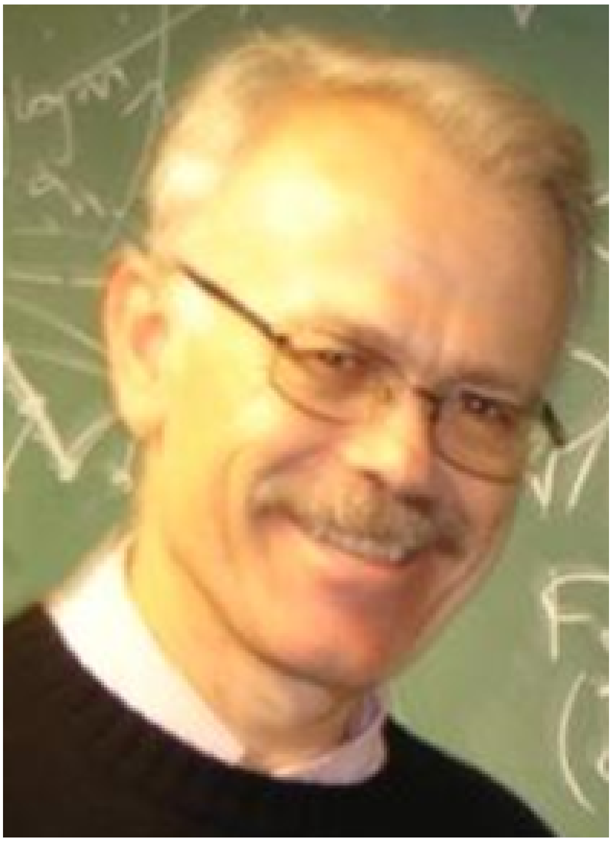

FIGURE A.5 – Themistocles M. Rassias

a publié plus de 300 articles, 10 livres de recherche et 45 volumes édités en mathématiques de recherche ainsi que 4 manuels de mathématiques (en grec) pour les étudiants universitaires.

Bibliographie

[1] *A. A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, volume 204 of North-Holland Mathematics Studies. Elsevier, Amesterdam, (2006).*

[2] *A. A. Kilbas, M. Saigo and R. K. Saxena, Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional caculus operators. Inregral Transforms and Special Functions, 15, 31-49, (2004).*

[3] *A.M.A. El-Sayed, Sh. M AlIssa and M. Elmiari, Ulam-type Stability for a boundary value problem of implicit fractional differential equation. Advances in Dynamical Systems and Applications. Volume* 16, *Number* 1, (2021).

[4] *A. Souahi, A. B. Makhlouf, M. A. Hammami, Stability analysis of conformable fractional order nonlinear systems. Indag. Math. 28, 1265-1274,(2017).*

[5] *Bashir Ahmad, Sotiris K, Ntouyas and Ahmed Alsaedi, New existence results for nonlinear fractional differential equations with three-point integral Boundary Conditions, Hindawi Publishing Corporation Advances in Difference Equations. 1-11, (2011).*

[6] *Caroline Daze, Théorème de point fixe et principe Variationelle Dékeland, mémoire de master, Differ. Uravn., Université de Montréal,* (2010).

[7] *C.F. Lorenzo, Hartley, T.T, Variable order and distributed order fractional operators. Nonlinear Dyn. 29, 57–98 ,(2002).*

[8] *Daftardar-Gejji, V., Jaffari, H. : Analysis of a system of nonautonomous fractional differential equations involving Caputo derivatives. J. Math. Anal. Appl. 328, 1026–1033, (2007).*

[9] *Delbosco, D., Rodino, L. : Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation. J. Math. Anal. Appl. 204, 609–625 ,(1996)*

[10] *D. Henry, Geometric theory of semilinear parabolic equations, LNM 840, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1981).*

[11] *D. H. Hyers, On the stability of the lineair functional equations, Proc. Nat. Acad, Sci., 27, pp. 222-224, (1941).*

[12] *E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo (1985).*

[13] *I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering, vol, 198, Academic Press, New York/Londin/Toronto, (1999).*

[14] *J. Wang, L. Lv, Y. Zhou, Ulam stability and data dependence for fractional differential equations with Caputo derivative. Electron. J. Qualit. Diff. Equat, 63, 1-10, (2011)*

[15] *K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integrations to Arbitrary Order. Academic Press, Inc (1974).*

[16] K. S. Miller and B. Ross, An Introduction of the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York (1993).

[17] R. Aouafi, Existence et unicité des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires, Oum Bouaghi (2019).

[18] R. (Ed.). Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientic, Singapore.

[19] R.L. Magin, Fractional Calculus in Bioengineering. Begell House Publishers, Redding (2006).

[20] R. W. Ibrahim, Generalized Ulam-Hyers stability for fractional differential equations, Int.J.

[21] R. W. Ibrahim, On generalized Hyers-Ulam stability of admissible functions, Abstract and Applied Analysis,Volume 2012, Article ID 749084, 10 pages doi :10.1155/2012/749084. Math., Vol. 23, No. 5 , 1250056 ,(2012).

[22] S. Das, Functional Fractional Calculus for System Identication and Control, Springer-Verlag, Berlin, (2008).

[23] S. Huang, B. Wang, Stability and stabilization of a class of fractional-order nonlinear systems for $0 < \alpha < 2$: Nonlinear Dyn, 2, 973-984,(2016).

[24] S. Liu, W. Jiang, X. Li, X.F. Zhou, Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. Appl. Math. Lett, 51, 13-19, (2016).

[25] S. Momani, S. Hadid, Lyapunov stability solutions of fractional integrodifferential equations. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 47, 2503-2507,(2004).

[26] S. M. Jung, Ulam-Hyers-Rassias stability of functional equations in mathematical analysis, Hadronic Press, Palm Harbor, (2001).

[27] S. M. Ulam, A Collection Of Mathematical Problems, Interscience Publishers., New York, (1968).

[28] S. M. Ulam, Problems in modern mathematics. Courrier Corporation, (2004).

[29] T.M. Rassias, and Brzdek, Functional equations in mathematical analysis, Springer, vol.86, (2012).

[30] V.E.Tarasov, Fractional stability, Available online : http :// arxiv.org/abs/0711.2117v1, (2007).

[31] W. S. Chung, Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. J. Comput. Appl. Math, 290, 150-158, (2015).