



PEOPLE'S DEMOCRATIC
REPUBLIC OF ALGERIA
MINISTRY OF HIGHER
EDUCATION AND SCIENTIFIC
RESEARCH
UNIVERSITÉ ABBES LAGHROUR-
KHENCHELA



FACULTY OF SCIENCES AND TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

N° de série:

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de Master
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques Appliquées

Intitulé par:

La stabilité d'un système dynamique

Réalisé par:

Kabouche Chifa

Dirigé par:

Mm LAOUAR Chafia

Membres de jury:

Mm Achichi Ahlem

Président

Dr Aouafi Rabiaa

Examineur

2020-2021



Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mon père HAMID et ma mère FARIDA pour leur amour inestimable, leurs sacrifices, leur confiance, leur soutien et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A ma grand-mère AKILA, de regrettée mémoire, pour toute l'affection qu'elle m'a donnée et pour son précieux encouragement.

A mes sœurs et mes frères, MOUSSAB RAHMA DJALAL HOUDA et ses enfants TAHA et NOURLINE pour leur tendresse, leur complicité et leur présence.

A mes tantes .mes oncles mes cousin mes cousine pour leurs mots d'encouragement et leur gentillesse..

A tous mes amies DAHA SARA AMIR

Mon professeur préféré HICHEM RAMOUL qui m'a aidé dans mon parcours académique.



Remerciements



Au nom d'Allah

le miséricordieux

*Premièrement et particulièrement, je tiens à remercier **ALLAH** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années. Ainsi, je tiens également à exprimer ma vifs remerciements à notre encadreur **Laouar Chafia**, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire, ses conseils, ses encouragement. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée. Par ailleurs, mes remerciements s'adressent aussi à de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et a tous les membres du département des mathématiques. Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail. à mon conseiller **Ch. Laouar Professeur A. Achich Professeur R. Aouafi** parce qu'ils l'ont accepté Ils passent leur temps à lire et à évaluer ma thèse. Et tous mes remerciements particuliers à mes **parents** pour leur soutien et leurs encouragements continus.*



❖ *Chifa*



Table des matières

Notation	5
Introduction	6
1 Stabilité des systèmes linéaires	7
1.1 Systèmes linéaires	7
1.1.1 Système linéaire continue autonome, non autonome	7
1.1.2 Système linéaire discret autonome, non autonome	7
1.1.3 L'existence et l'unicité de la solution d'un système linéaire	8
1.2 Exemples	11
1.3 Point d'équilibre d'un système linéaire	12
1.3.1 Définitions et exemples	12
1.4 Stabilité d'un système linéaire	15
1.5 Fonction de Lyapunov	18
1.5.1 Cas des systèmes linéaires continus	19
1.5.2 Cas des systèmes linéaires discret	21
2 Stabilité des systèmes non linéaires	23
2.1 Systèmes non linéaires	23
2.1.1 Système non linéaire continue autonome, non autonome	23
2.1.2 Système non linéaire, discret autonome, non autonome	23
2.1.3 L'existence et l'unicité de la solution d'un système non linéaire	23
2.2 Point d'équilibre d'un système non linéaire	25
2.3 Fonction de Lyapunov	29
2.3.1 Cas des systèmes continus	29
2.3.2 Cas des systèmes discrets	32

3	Instabilité et la stabilisation	35
3.1	Stabilité des systèmes autonomes	35
3.1.1	Définitions- Exemples	35
3.2	Stabilité et linéarisation	35
3.3	Instabilité des systèmes	39
	Bibliographie	42

Notation

Ω	un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière $\partial\Omega$
e^x, \exp	fonction exponentielle
\ln	logarithme népérien
$f(\cdot, t)$	fonction : $x \in \Omega \mapsto f(x, t)$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	dérivée partielle par rapport à x_i
γ_0	application trace d'ordre zéro
$\mathcal{D}(A)$	domaine de A (opérateur linéaire)
$N(A)$	noyau de A
$\text{Im}(A)$	image de A
A^{-1}	inverse de A
A^*	adjoint de A
$\rho(A)$	ensemble résolvant de A
$L^2(\Omega)$	espace des fonctions de carré sommable
$\mathcal{L}(H, K)$	ensemble des fonctions linéaires et continues de H dans K
$\mathcal{L}(H)$	$\mathcal{L}(H, H)$
$\ \cdot\ $	norme uniforme de $\mathcal{L}(H)$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	un produit scalaire défini dans H
$\ \cdot\ _H$	une norme définie dans H
\rightharpoonup	convergence faible dans H
\longrightarrow	convergence forte dans H



Introduction

En mathématiques, la théorie de la stabilité traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations des conditions initiales.

L'équation de la chaleur, par exemple, est une équation aux dérivées partielles stable parce que des petites perturbations des conditions initiales conduisent à des faibles variations de la température à un temps ultérieur en raison du principe du maximum. Plus généralement, un théorème est stable si des petits changements dans l'hypothèse conduisent à des petites variations dans la conclusion. Il faut spécifier la métrique utilisée pour mesurer les perturbations afin de juger qu'un théorème est stable. La notion de stabilité a pour but de formaliser la propriété d'un système dynamique tel que le système reste proche d'un état dit d'équilibre (dans un sens à préciser et à quantifier).

Le mémoire se repartit en trois chapitres :

Le premier chapitre présente la définition des systèmes linéaire leur types et leurs fonctionnalités, des exemples sur ses systèmes, le point d'équilibre des système et leur la stabilité des système linéaire, et on a aussi parler sur la fonction de Lyapunov. Dans le deuxième chapitre, on va présenter les systèmes non linéaires, ces types continue autonome et discret autonome, a l'existence et l'unicité de la solution. ensuite on a parlé de point d'équilibre d'un système non linéaire et la fonction de Lyapunov. Dans le dernier chapitre, on va parler sur l'instabilité et la stabilisation. on va étudier la stabilité des systèmes autonomes avec des exemples, aussi la relation de stabilité avec la linéarisation, en fin on a présenté l'instabilité des systèmes.



Stabilité des systèmes linéaires

1.1 Systèmes linéaires

1.1.1 Système linéaire continue autonome, non autonome

Dans le cas continu, un système linéaire est un système décrit pas l'équation d'état

$$\begin{cases} x(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t > t_0, \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $A(t)$ est une matrice $n \times n$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , $B(t)$ est une matrice $n \times m$ à valeurs dans \mathbb{R}^n et $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Un système de la forme (1.1) est un système linéaire non autonome, il est dit autonome s'il s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t > t_0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

1.1.2 Système linéaire discret autonome, non autonome

Dans le cas discret non autonome, un système linéaire s'écrit sous la forme d'équations récurrentes

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), k \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $A(k)$ est une matrice $n \times n$ à valeur dans \mathbb{R}^n , $B(k)$ est une matrice $n \times m$ à valeurs dans \mathbb{R}^n et $u(k) \in \mathbb{R}^m$. Dans le cas discret autonome, il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), k \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Proposition 1.1

Si le système linéaire (1.2) est positif, alors il conserve la positivité du vecteur d'état $x(t)$.

1.1.3 L'existence et l'unicité de la solution d'un système linéaire**Matrice de transition d'un système linéaire**

Considérons l'équation différentielle linéaire (1.1) à laquelle nous associons l'équation homogène donnée par

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t).$$

Alors, on a le résultat suivant :

Théorème 1.1

Si $A(t)$ est continue pour tout t , alors l'équation homogène admet une solution unique donnée par :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0).$$

Pour tout t , ou $\Phi(t, t_0)$ est la matrice de transition d'état solution de l'équation différentielle matricielle

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Phi(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0) & \text{pour tout } t, \\ \Phi(t_0, t_0) = I, \end{cases} \quad (1.5)$$

où I la matrice unité.

La matrice de transition satisfait les propriétés suivantes :

Propriété 1.1

1. $\Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t_2, t_0)$ pour tout t_0, t_1, t_2 .
2. $\Phi(t, t_0)$ est inversible pour tout t, t_0 .
3. $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$ pour tout t, t_0 .
4. $\frac{d}{dt}\Phi^T(t_0, t) = -A^T(t)\Phi^T(t_0, t)$ pour tout t, t_0 .

La propriété ci-dessus montre que le système : $\dot{x}(t) = -A^T(t)x(t)$ à pour matrice de transition $\Phi^T(t_0, t)$. Ceci peut être démontré en dérivant l'identité $\Phi_i^T(t, t_0)\Phi(t_0, t) = I$.

Théorème 1.2

On considère le système linéaire (1.1).

Si $A(t)$ est continue, et $B(t)$ et $u(t)$ sont presque partout continues pour tout t alors la solution de (1.1) est

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s)ds, \text{ pour tout } t.$$

Dans le cas d'un système linéaire autonome, la matrice de transition a une forme explicite donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.3

Le système autonome $\dot{x}(t) = Ax(t)$ a pour matrice de transition

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)},$$

où l'exponentielle d'une matrice carrée M est définie par :

$$e^M = I + M + \frac{1}{2!}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \dots$$

Cette série converge pour tout M .

Proposition 1.2

Si la matrice A est diagonalisable et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, sont ses valeurs propres, e_1, e_2, \dots, e_n étant les vecteurs propres associés.

On définit les matrices T et A de dimension $n \times n$, par :

$$\begin{aligned} T &= (e_1, e_2, \dots, e_n), \\ A &= \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} e^{At} &= Te^{At}T^{-1}, \\ e^{At} &= \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}). \end{aligned}$$

Plus généralement, si A n'est pas diagonalisable, on a le résultat suivant :

Théorème 1.4

La matrice s'écrit $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$, où J la matrice de Jordan de A la matrice de passage à la forme de Jordan.

De plus

$$e^{Jt} = \text{diag} \left(e^{J_1 t}, e^{J_2 t}, \dots, e^{J_k t} \right),$$

avec

$$e^{J_i t} = \text{diag}_g \left(e^{J_{i_1} t}, e^{J_{i_2} t}, \dots, e_{i_k t} \right),$$

$$e^{J_{ij} t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n_{ij}-2}}{(n_{ij}-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

ou n_{ij} c'est la dimension de J_{ij} et k le nombre de valeurs propres distinctes.

Remarque 1.1

Si A est écrite sous sa forme de Jordan, tous les termes de e^{At} sont de la forme $\alpha t^r e^{\lambda_i t}$.

Si de plus, pour toute valeur propre λ_i de A , on a $\Re(\lambda_i) < 0$, soit $\lambda \in]1, \inf_{1 \leq i \leq k} -\lambda_i]$, alors on a

$$\alpha t^r e^{\lambda_1 t} = \left[\alpha t^r e^{(\lambda_i + \lambda)t} \right] e^{-\lambda t}. \quad (1.7)$$

Ainsi le terme entre crochets est borné, par suite il existe $M > 0$ tel que $\|e^{At}\| \leq M e^{-\lambda t}$.

Notons que même si A est quelconque alors il existe M, ω tels que

$$\|e^{At}\| \leq M e^{\omega t},$$

(en fait $M = 1$ et $\omega = \|A\|$).

1.2 Exemples

Considérons l'exemple d'un oscillateur harmonique régi par l'équation

$$\begin{cases} \ddot{y} + y = 0, \\ y(0) = x_1^0, \quad \dot{y}(0) = x_2^0. \end{cases} \quad (1.8)$$

On introduit les nouvelles variables $x_1 = y$ et $x_2 = \dot{y}$. Le système ci-dessus, est équivalent au système

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

La matrice dynamique étant

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solution s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{At} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}.$$

La matrice de transition et se calcule explicitement. Pour cela on remarque

$$A^2 + I = 0;$$

et par conséquent

$$A^{2n} = (-1)^n I \text{ et } A^{2n+1} = (-1)^n A,$$

on obtient alors

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots,$$

qui peut s'écrire, en groupant les termes pairs et les termes impairs, sous forme :

$$e^{At} = I \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right) + A \left(t - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) = I \cos t + A \sin t,$$

ou encore

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix},$$

et finalement la solution de l'équation est :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

1.3 Point d'équilibre d'un système linéaire

1.3.1 Définitions et exemples

Quand on s'intéresse à l'évolution naturelle d'un système, la première question naturelle qui vient à l'esprit est de savoir si ce système peut rester immobile. Pour une dynamique de populations par exemple, on veut savoir si les effectifs peuvent être constants. La condition mathématique est évidente :

Définition 1.1

Un point x^* est dit point d'équilibre de l'équation $\dot{x} = f(x)$ si et seulement si $f(x^*) = 0$.

Considérons le système dynamique continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.10)$$

respectivement le système discret

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), k), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.11)$$

où f fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est telle que (1.10) (respectivement (1.11)) admet au moins une solution.

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (1.10) (respectivement du système (1.11)).

Définition 1.2

1. Un point d'équilibre \bar{x} du système (1.10) (respectivement du système (1.11)) est dit stable à t_0 si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R, t_0) > 0$ tel que

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R, \text{ pour tout } t \geq t_0 \quad (1.12)$$

(respectivement il existe $r(R, k_0) > 0$ tel que

$$\|x(k_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(k) - \bar{x}\| < R, \text{ pour tout } k \geq k_0). \quad (1.13)$$

Dans le cas contraire le point d'équilibre \bar{x} est dit instable.

2. Un point d'équilibre \bar{x} est dit uniformément stable (u.s) si pour tout $R > 0$ il existe $r = r(R) > 0$ indépendant de t_0 (respectivement de k_0) tel que, pour tout t_0 (respectivement pour tout k_0)

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R, \text{ pour tout } t \geq t_0 \quad (1.14)$$

$$\|x(k_0) - \bar{x}\| < r \implies \|x(k) - \bar{x}\| < R, \text{ pour tout } k \geq k_0. \quad (1.15)$$

3. (a) Le point d'équilibre \bar{x} est asymptotiquement stable (a.s) il est stable et s'il existe $r(t_0) > 0$ tel que si $\|x(t_0) - \bar{x}\| < r(t_0)$ alors $\|x(t) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ (respectivement $r(k_0) > 0$) tel que si $\|x(k_0) - \bar{x}\| < r(k_0)$ alors

$$\|x(k) - \bar{x}\| \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

- (b) Le point d'équilibre \bar{x} est globalement asymptotiquement stable (g.a.s) si, pour tout t_0 et $x(t_0)$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ (respectivement pour tout k_0 et $x(k_0)$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \bar{x}$).

- (c) Le point d'équilibre est exponentiellement stable (e.s), s'il existe α, β positifs tels que pour $x(t_0)$ proche de \bar{x} on a :

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha \|x(t_0) - \bar{x}\| e^{-\beta(t-t_0)}, \text{ pour tout } t \geq t_0. \quad (1.16)$$

- (d) Le point d'équilibre est globalement exponentiellement stable (g.e.s), s'il existe α, β positifs tels que pour tout t_0 et $x(t_0)$

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \alpha \|x(t_0) - \bar{x}\| e^{-\beta(t-t_0)}, \text{ pour tout } t \geq t_0. \quad (1.17)$$

Exemple 1.1

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t).$$

La solution est

$$x(t) = x(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t a(r) dr\right).$$

On en conclut que

1. Le système est stable si $a(t) \geq 0$ pour tout $t \geq t_0$.
2. Le système est (a.s) si $\int_0^\infty a(r) dr = \infty$.
3. Le système est (e.s) s'ils existent $T > 0, M > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$, on a :

$$\int_T^{t+T} a(r) dr \geq M.$$

Cas particuliers:

1. Si $a(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, alors le système est stable mais non (a.s).
2. Si $a(t) = \frac{1}{(1+t)}$, alors le système est (a.s) et non (e.s).
3. Si $a(t) = t$, alors le système est (e.s).

Exemple 1.2

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = -t(x - 1).$$

La solution est donnée par

$$x(t) - 1 = \lambda e^{-\frac{t^2}{2}},$$

et le point d'équilibre 1 est (e.s).

Exemple 1.3

Soit le système

$$\dot{x}(t) = \frac{-x(t)}{1+t}. \quad (1.18)$$

La solution de ce système est donnée par

$$x(t) = \frac{1+t_0}{1+t} x(t_0).$$

D'où le système est (a.s) mais non (u.a.s).

Définition 1.3

Le point d'équilibre \bar{x} est localement uniformément asymptotiquement stable (u.a.s) si

1. Il est uniformément stable.
2. Il existe $R_0 > 0$ tel que pour tout R_1, R_2 avec $0 < R_2 < R_1 \leq R_0$, il existe $T(R_1, R_2) > 0$ tel que pour tout $t_0 \geq 0$, on a :

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < R_1 \implies \|x(t) - \bar{x}\| < R_2 \quad \text{pour tout } t \geq t_0 + T.$$

Remarque 1.2

La stabilité asymptotique uniforme implique la stabilité asymptotique mais la réciproque n'est pas vraie.

1.4 Stabilité d'un système linéaire

On considère les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.19)$$

et

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.20)$$

où A est une matrice carrée de dimension $n \times n$.

Définition 1.4

Le système continu (1.19) ou discret (1.20) est dit stable si l'origine est stable et il est dit asymptotiquement stable si l'origine est asymptotiquement stable. Dans ce cas, la matrice du système A est dite stable ou asymptotiquement stable.

La stabilité des systèmes linéaires continus est caractérisée par le résultat suivant:

Proposition 1.3

Le système (1.19) est stable si et seulement si

1. $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ pour toute valeur propre λ de A .
2. S'il existe une valeur propre λ de multiplicité k telle que $\Re(\lambda) = 0$ alors $\dim E_\lambda = k$, où E_λ est le sous espace propre associé à λ .

Le système (1.20) est stable si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a $|\lambda| \leq 1$.

Remarque 1.3

Pour le cas continu, la démonstration se base essentiellement sur la décomposition de la matrice du système sous forme de Jordan. Pour le cas discret, la solution s'écrit $x(k) = A^k x_0$ et, dans ce cas, le système est stable si et seulement si, pour toute valeur propre λ de A , on a $|\lambda| \leq 1$.

Exemple 1.4

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases} \quad (1.21)$$

Les valeurs propres de A , $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -1$, sont simples, d'où le système est stable.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

La seule valeur propre de A est 0 de multiplicité 2 et $\dim E_0 = 1$, donc le système est instable.

Pour la stabilité asymptotique, on a le résultat suivant.

Proposition 1.4

Le système (1.19) est (a.s) si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a $\Re(\lambda) < 0$.

Le système (1.20) est (a.s) si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a $|\lambda| < 1$.

Démonstration : Soient $\lambda_j, j = 1, \dots, p$, les valeurs propres distinctes de A , la solution du système (1.19) s'écrit

$$x(t) = \sum_{j=1}^p g_j(t) e^{\lambda_j t},$$

où $g_j(t)$ est un polynôme en t , donc $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ si et seulement si $\Re(\lambda_j) < 0$, pour $j = 1, \dots, p$. Dans le cas discret, la solution s'écrit $x(k) = A^k x_0$ et donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0,$$

si et seulement si $|\lambda_j| < 1$, pour $j = 1, \dots, p$. ■

La stabilité d'un système linéaire est liée à la nature des valeurs propres de la matrice A et qui sont solutions de l'équation

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1.23)$$

Soit la matrice de Routh-Hurwitz donnée par

$$RH = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

On propose le théorème :

Théorème 1.5

Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de (1.23) aient la partie réelle strictement négative est que tous les mineurs diagonaux $\Delta_k, k = 1, \dots, n$ de la matrice (1.24) soient positifs. Cette condition est la condition de Routh-Hurwitz.

Rappelons que

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{bmatrix}$$

pour $k = 1, \dots, n$, les coefficients à indices supérieurs à n ou inférieurs à 0 sont remplacés par 0 avec la convention $a_0 = 1$.

Exemple 1.5

Soit le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 \quad (1.25)$$

Donc $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 4, a_4 = 10, a_5 = 3$. Nous avons

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 > 0, \\ \Delta_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} = 3 > 0, \\ \Delta_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 5 > 0, \\ \Delta_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 10 \end{bmatrix} = 8 > 0. \end{aligned}$$

De même $\Delta_5 = 3$ et $\Delta_6 = 24 > 0$.

Remarque 1.4

$\Delta_k > 0$ pour tout $k = 1, \dots, n \implies a_i > 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Proposition 1.5

Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les racines de l'équation (1.23) soient de module strictement inférieur à 1 est que les $(n+1)$ conditions suivantes soient vérifiées :

1. $p(1) > 0, (-1)^n p(-1) > 0.$
2. $|a_n| < 1, |b_n| > |b_1|, |c_n| > |c_2|, \dots, |s_n| > |s_{n-2}|$ où

$$b_{n-k} = \det \begin{bmatrix} a_n & a_k \\ 1 & a_{n-k} \end{bmatrix}, k = 0, \dots, n-1, a_0 = 1$$

$$c_{n-k} = \det \begin{bmatrix} b_n & b_{k+1} \\ b_1 & b_{n-k} \end{bmatrix}, k = 0, \dots, n-2$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$s_{n-k} = \det \begin{bmatrix} r_n & r_{n-3+k} \\ r_{n-3} & r_{n-k} \end{bmatrix}, k = 0, 1, 2.$$

Exemple 1.6

Soit le polynôme caractéristique

$$p(\lambda) = \lambda^4 + \frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda}{8}.$$

On a

$$p(1) = \frac{9}{8}, \quad p(-1) = \frac{3}{8}, \quad a_4 = 0, \quad |b_4| = 1, \quad b_1 = \frac{1}{8}, \quad |c_4| = \frac{7}{8}, \quad |c_2| = \frac{17}{64}$$

D'où le système discret correspondant est asymptotiquement stable.

1.5 Fonction de Lyapunov

L'idée de base de cette méthode est de chercher une fonction définie positive, dépendant de l'état du système, et qui est décroissante le long des trajectoires du système, quand le système évolue.

Considérons maintenant une équation différentielle autonome quelconque

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{1.26}$$

associée à un champ de vecteurs $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 .

L'exemple des champs de gradient suggère d'introduire la définition suivante.

Définition 1.5

Soient x_0 un équilibre de (1.26), $U \subset \Omega$ un voisinage de x_0 et $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que L est une fonction de Lyapunov pour (1.26) en x_0 si :

- (a) $L(x) > L(x_0)$ pour $x \in U, x \neq x_0$ (x_0 est un minimum strict de L sur U)
- (b) pour tout $x \in U$, la fonction $t \mapsto L(\phi_t(x))$ est décroissante.
- (c) pour tout $x \in U, x \neq x_0$, la fonction $t \mapsto L(\phi_t(x))$ est strictement décroissante, on dit que L est une fonction de Lyapunov stricte pour (1.26) en x_0 .

Quand L est de classe C^1 , les conditions (b) et (c) sont impliquées respectivement par les conditions suivantes :

- (b)' $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0$ pour tout $x \in U$.
- (c)' $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0$ pour tout $x \in U, x \neq x_0$.

Théorème 1.6

Si l'équation différentielle (1.26) admet un fonction de Lyapunov en un équilibre x_0 , alors x_0 est un équilibre stable. Si de plus la fonction de Lyapunov est stricte, alors x_0 est asymptotiquement stable.

Démonstration : Voir le livre [1] ■

1.5.1 Cas des systèmes linéaires continus

En général, il n'y a pas une méthode donnée pour trouver une fonction de Lyapunov pour un système non linéaire stable. Cependant il existe des formes générales de fonctions de Lyapunov pour les systèmes linéaires continus. Soit le système linéaire continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.27)$$

où A est une matrice de dimension $n \times n$ à coefficients réels.

Proposition 1.6

Si A est une matrice asymptotiquement stable ($\Re(\lambda) < 0$ pour tout λ valeur propre de A) alors pour toute matrice Q définie positive, il existe une matrice P définie positive

unique solution de l'équation algébrique

$$A^T P + PA + Q = 0. \quad (1.28)$$

Démonstration : Soit

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt.$$

1. Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \langle Px, x \rangle &= \int_0^\infty \langle e^{A^T t} Q e^{At} x, x \rangle dt \\ &= \int_0^\infty \langle Q e^{At} x, e^{At} x \rangle dt > 0. \end{aligned}$$

2. P est bien définie, en effet A est asymptotiquement stable, il existe M et $\omega > 0$ telles que $\|e^{At}\| = \|e^{A^T t}\| \leq M e^{-\omega t}$. Donc

$$\|P\| \leq \|Q\| \int_0^\infty M^2 e^{-2\omega t} dt \leq \|Q\| \frac{M^2}{2\omega}.$$

3.

$$A^T P + PA = \int_0^\infty (A^T e^{A^T t} Q e^{A^T t} + e^{A^T t} Q e^{At} A) dt,$$

or A et e^{At} commutent donc

$$A^T P + PA = \int_0^\infty \frac{d}{dt} (e^{A^T t} Q e^{At}) dt = -Q.$$

4. Soit \bar{P} une matrice définie positive solution de l'équation (1.28) alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{A^T t} \bar{P} e^{At}) &= A^T e^{A^T t} \bar{P} e^{At} + e^{A^T t} \bar{P} A e^{At} \\ &= e^{A^T t} [A^T \bar{P} + \bar{P} A] e^{At} \\ &= -e^{A^T t} Q e^{At}, \end{aligned}$$

d'où $-\bar{P} = -\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$, c'est-à-dire $P = \bar{P}$. ■

La réciproque de ce résultat est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.7

S'il existe une matrice Q définie positive telle que (1.28) admet une solution alors le système linéaire associé (1.27) est asymptotiquement stable.

Démonstration : Soit P solution de (1.28), considérons la fonction V définie par

$$V(x) = \langle Px, x \rangle, x \in \mathbb{R}^n.$$

La dérivée de V le long de la trajectoire est

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}V(x(t)) &= (P\dot{x}(t), x(t)) + (Px(t), \dot{x}(t)) \\
 &= (PAx(t), x(t)) + (Px(t), Ax(t)) \\
 &= (PAx(t), x(t)) + (A^T Px(t), x(t)) \\
 &= ((PA + A^T P)x(t), x(t)) \\
 &= -(Qx(t), x(t)) < 0.
 \end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de Lyapunov, le système est asymptotiquement stable. ■

Corollaire 1.1

Le système (1.27) est asymptotiquement stable si et seulement si, pour une matrice définie positive Q , l'unique solution P de l'équation de Lyapunov (1.28) est définie positive.

Remarque 1.5

Le corollaire ci-dessus montre que le choix d'une matrice définie positive Q est arbitraire, par conséquent, un choix simple de Q sera la matrice Identité.

Exemple 1.7

Soit le système de dynamique

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

On prend $Q = I$ et on pose

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix},$$

P étant symétrique, donc $p_{12} = p_{21}$ et l'équation de Lyapunov donne $p_{11} = \frac{5}{4}$, $p_{12} = p_{22} = \frac{1}{4}$. Par conséquent, le système linéaire de matrice A est asymptotiquement stable.

1.5.2 Cas des systèmes linéaires discret

On considère un système autonome discret positif

$$x(k+1) = Ax(k), \tag{1.29}$$

que l'on suppose (*a.s*). Soit λ_0 la plus grande valeur propre de A et w un vecteur propre positif gauche associé à λ_0 ($w^T A = \lambda_0 w^T$).

Soit $|x|$ le vecteur dont les composantes sont égales aux valeurs absolues des composantes du vecteur x .

Proposition 1.8

La fonction $V(x) = w^T |x|$ est une fonction de Lyapunov associée au système (1.29).

Démonstration : On a $V(x) > 0$ pour tout vecteur $x \neq 0$ et $V(0) = 0$. De plus pour tout $x(k)$ on a :

$$V(x(k+1)) \leq w^T A |x(k)| = \lambda_0 w^T |x(k)| = \lambda_0 V(x(k)),$$

or le système (1.29) est (*a.s*) donc $0 < \lambda_0 < 1$, par conséquent V est strictement décroissante par suite V est une fonction de Lyapunov. ■

Soit maintenant le système (1.29) supposé perturbé sous la forme

$$x(k+1) = Ax(k) + b,$$

qu'on suppose ayant un point d'équilibre unique

$$\bar{x} = [I - A]^{-1}b,$$

qui est (*a.s*). Alors on a le résultat suivant.

Proposition 1.9

La fonction

$$V(x) = w^T |x - \bar{x}|. \tag{1.30}$$

est une fonction de Lyapunov associée au système perturbé.

Démonstration : V admet un minimum au point \bar{x} de plus

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) &= w^T |x(k+1) - \bar{x}| \\ &= w^T |Ax(k) - A\bar{x}| \\ &\leq w^T A |x(k) - \bar{x}| \end{aligned}$$

$$\text{et } w^T A |x(k) - \bar{x}| = \lambda_0 w^T |x(k) - \bar{x}|.$$

On en déduit que $V(x(k+1)) < V(x(k))$ pour tout $x(k) \neq \bar{x}$. Donc V est une fonction de Lyapunov. ■

Stabilité des systèmes non linéaires

2.1 Systèmes non linéaires

2.1.1 Système non linéaire continue autonome, non autonome

Dans le cas continu, un système dynamique peut être représenté par l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

ou $x : I =]t_0, t_0 + h] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $f : D = I \times B \rightarrow \mathbb{R}^n$ ou

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x - x_0\| \leq b\}.$$

Un système de la forme (2.1) est appelé système non autonome, il est dit autonome s'il s'écrit sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t)); \quad x(t_0) = x_0.$$

2.1.2 Système non linéaire, discret autonome, non autonome

Dans le cas discret un système dynamique non autonome s'écrit :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(k, x(k)), \\ x(k_0) = x_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.1.3 L'existence et l'unicité de la solution d'un système non linéaire

Définition 2.1

La fonction $x(t)$ est solution de (2.1) si pour tout $t \in I, (t, x(t)) \in D$ et $x(t)$ vérifie (2.1) Si f est continue sur L , alors il est clair que x

est de classe C^1 sur I et vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (2.3)$$

Il existe différents résultats concernant l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.3). Ci-dessous, on décrit le théorème de Picard-Lindeloff par son importance historique et aussi parce que sa démonstration donne un moyen de construire la solution.

Théorème 2.1

Soit f une fonction continue sur D et satisfaisant la condition de Lipschitz

$$\|f(t, x) \cdots f(t, y)\| \leq K \|x - y\|, t \in I, x, y \in B.$$

Si $\|f(t, x)\| \leq m$ pour tout $(t, x) \in D$, alors (2.1) admet une solution unique dans $[t_0, t_0 + c]$ ou $c = \min\left(h, \frac{b}{m}\right)$.

Démonstration :

- Soit $x_1(t)$ tel que $\|x_1(t) - x_0\| \leq b$. A partir de (2.3), considérons la suite (x_{ic}) définie par

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds, \quad k \geq 1.$$

Par récurrence, on a $\|x_k(t) - x_0\| \leq b$. La suite (x_k) converge uniformément. En effet

$$\|x_3(t) - x_2(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))\| ds.$$

Comme f est lipschitzienne par rapport à x , on a

$$\|x_3(t) - x_2(t)\| \leq K \int_{t_0}^t \|x_2(s) - x_1(s)\| ds,$$

or, $\|x_2(s) - x_1(s) + x_0 - x_0\| \leq 2b$ danc

$$\|x_3(s) - x_2(s)\| \leq 2Kb(s - t_0).$$

Par récurrence, on a f

$$\|x_k(s) - x_{k-1}(s)\| \leq 2bK^{k-2} \frac{(s - t_0)^{k-2}}{(k-2)!}; s \in [t_0, t_0 + h].$$

Soit $s_1 > s$

$$\|x_{k+1}(s) - x_k(s)\| \leq 2bK^{k-1} \frac{(s_1 - t_0)^{k-1}}{(k-1)!},$$

terme général d'une série numérique convergente. D'où la suite (x_k) converge uniformément. Soit $x(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(s)$, alors on a

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Soit $y_1(s)$ et $(y_k(s))$ la suite associée.

$$\|x_k(t) - y_k(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x_{k-1}(s)) - f(s, y_{k-1}(s))\| ds.$$

Par le même raisonnement que précédemment, on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k(t) - y_k(t)) = 0,$$

or, $y_k - x = (y_k - x_k) + (x_k - x)$. Donc pour tout x_1 ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(s) = x(s).$$

- Pour l'unicité, on suppose qu'il existe deux solutions du problème, notées x et y .

Soit (x_k) tel que $x(s) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(s)$ et $y_k(s)$ tel que $y_k(s) = y(s)$ pour tout k : On a

$$\|y_k(t) - x(t)\| \leq \|y_k(t) - x_k(t)\| + \|x_k(t) - x(t)\|$$

Donc (x_k) et (y_k) convergent vers la même limite. ■

2.2 Point d'équilibre d'un système non linéaire

Dans cette partie, nous allons voir que les problèmes de stabilité sont naturellement formulés par rapport aux points d'équilibre.

Considérons le système dynamique continue

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.4)$$

respectivement le système discret

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), k), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.5)$$

où f fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est telle que (2.4) (respectivement (2.5)) admet au moins une solution.

Définition 2.2

Le vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est dit point d'équilibre du système (2.4) (respectivement (2.5)) si $f(\bar{x}, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ (respectivement $\bar{x} = f(\bar{x}, k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Exemple 2.1

1. Considérons le système régi par l'équation

$$\dot{x}(t) = a \left[1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t) \text{ où } a > 0; \quad c > 0.$$

Les points d'équilibre de ce système sont solutions de l'équation algébrique $a \left[1 - \frac{\bar{x}}{c} \right] \bar{x} = 0$, ce qui donne deux points d'équilibre $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = c$.

2. Considérons le système discret suivant

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + x_2(k)^2 \\ x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k) \end{cases} \quad (2.6)$$

Un point d'équilibre de (2.6) est un vecteur $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ solution du système

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha \bar{x}_1 + \bar{x}_2^2, \\ \bar{x}_2 = \bar{x}_1 + \beta \bar{x}_2, \end{cases}$$

ce qui donne deux points d'équilibre

$$\bar{x} = (0, 0) \quad \text{et} \quad \bar{x} = \left((1 - \alpha)(1 - \beta)^2, (1 - \alpha)(1 - \beta) \right).$$

3. L'équation de croissance d'une population

$$\dot{x}(t) = a \left[1 - \frac{x(t)}{c} \right] x(t), \quad (2.7)$$

où $a > 0$ et $c > 0$ a deux points d'équilibre $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = c$.

Le point $\bar{x} = 0$ est instable et $\bar{x} = c$ est asymptotiquement stable.

4. Considérons le système discret qui apparaît en génétique

$$x(k+1) = \frac{x(k)}{1 + x(k)}. \quad (2.8)$$

Dans ce cas, $\bar{x} = 0$ est un point d'équilibre. Si $x(0) > 0$, $x(k) \rightarrow 0$ et si $x(0) < 0$, $x(k) \rightarrow 0$; d'où \bar{x} est instable.

Remarque 2.1

Les définitions formulées ci-dessus caractérisent le comportement local du système, c'est-à-dire l'évolution de l'état lorsqu'il est perturbé de son point d'équilibre. Le concept de la stabilité globale est donné par la définition suivante.

Définition 2.3

La fonction $x(t)$ est solution de (2.1) si pour tout $t \in I$, $(t, x(t)) \in D$ et $x(t)$ vérifie (2.1) Si f est continue sur L , alors il est clair que x est de classe C^1 sur I et vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (2.9)$$

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.10)$$

Définition 2.4

On appelle domaine de stabilité asymptotique du système dynamique (2.10) tout voisinage du point d'équilibre \bar{x} du système tel que toutes les trajectoires partant d'un état initial dans ce voisinage tendent vers \bar{x} quand t tend vers l'infini.

Définition 2.5

Un ensemble Ω est dit invariant pour le système (2.10) si pour tout x_0 dans Ω , la solution $x(t, x_0)$ est dans Ω pour tout $t \geq 0$. Un ensemble invariant trivial est l'ensemble des états tout entier.

Définition 2.6

- Un point $p \in \mathbb{R}^n$ est dit point limite de (2.10) s'il existe une suite $(t_n)_{n \geq 0}$ de termes positifs tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n, x_0) = p$.
- L'ensemble des points limites sera noté Ω^+ .

Lemme 2.1

Si la solution $x(t, x_0)$ est bornée pour tout $t \geq 0$, alors Ω^+ est non vide, compact et invariant.

Démonstration : Voir le livre [1] ■

Théorème 2.2 (Ensemble invariant local)

Soit V une fonction différentiable de dérivées partielles continues. Soit $\ell > 0$ et Ω_ℓ la région où $V(x) < \ell$. On suppose que

1. Ω_ℓ est borné.
2. $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$, pour tout $x \in \Omega_\ell - \bar{x}$.
3. $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega_\ell$. Soit alors l'ensemble Y défini par :

$$Y = \{x \in \Omega_\ell / \dot{V}(x) = 0\},$$

et M le plus grand sous-ensemble invariant de Y , alors pour tout $x_0 \in \Omega_\ell$, on a $x(t, x_0)$ converge dans M .

Démonstration : Soit $x_0 \in \Omega_\ell$. V est décroissante le long de la solution, donc $x(t, x_0) \in \Omega_\ell$ pour tout $t \geq 0$. De plus $V(x(t, x_0))$ converge vers ℓ_0 avec $\ell_0 < \ell$. On a donc $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t, x_0)) = 0$ sur Ω^+ . Par conséquent $\Omega^+ \subset Y$ et puisque Ω^+ est invariant $\Omega^+ \subset M$. On conclut que $x(t, x_0)$ converge dans M . ■

Remarque 2.2

1. Si l'ensemble M est réduit à \bar{x} alors \bar{x} est (a.s).
2. Les résultats énoncés dans cette section restent valables dans le cas des systèmes discrets.

Exemple 2.2

Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 + x_2^2 - 2) - x_1x_2^2, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2(x_1^2 + x_2^2 - 2). \end{cases} \quad (2.11)$$

L'origine est un point d'équilibre de ce système.

Soit V la fonction définie par

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

La dérivée de V le long de la trajectoire est

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2(x_1^2 + x_2^2)^2(x_1^2 + x_2^2 - 2).$$

Pour $\ell = 1$, la région Ω_ℓ définie par $V(x) < 1$, est bornée. L'ensemble Y est réduit à 0, et est un ensemble invariant. Les conditions du théorème de l'ensemble invariant local sont satisfaites.

Théorème 2.3 (Ensemble invariant global)

Soit V une fonction différentiable de dérivées partielles continues. On suppose que

1. $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$, pour tout $x \neq \bar{x}$.
2. $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout x .
3. $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.

Soit l'ensemble $Y = \{x \in \mathbb{R}^n / \dot{V}(x) = 0\}$ et M le plus grand sousensemble invariant de Y , alors pour tout x_0 , on a $x(t, x_0)$ converge dans M (toutes les solutions convergent asymptotiquement globalement vers M).

2.3 Fonction de Lyapunov

2.3.1 Cas des systèmes continus

Considérons à nouveau le système (2.10) et soit \bar{x} un point d'équilibre de ce système, alors on a la définition suivante :

Définition 2.7

Une fonction V définie sur une région Ω qui contient \bar{x} est une fonction de Lyapunov pour le système (2.10) et le point d'équilibre \bar{x} si

1. V est continue et ses dérivées partielles sont continues.
2. V admet un minimum unique en \bar{x} sur Ω .
3. La fonction $\dot{V}(x) = \nabla V(x) \cdot f(x)$ satisfait $\dot{V}(x) \leq 0$ sur Ω .

Si $x(t)$ est la trajectoire de (2.10) alors $V(x(t))$ représente la valeur de V le long de la trajectoire. Afin que V soit décroissante le long de la trajectoire, on doit avoir $\dot{V}(x(t)) \leq 0$

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2(t) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n(t),$$

utilisant (2.10), on obtient

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x(t)) + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2(x(t)) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x(t)) = \Delta V(x(t)) \cdot f(x(t)),$$

avec $f = (f_1, \dots, f_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ et $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Théorème 2.4

S'il existe une fonction de Lyapunov $V(x)$ associée au système (2.10) dans une boule $B(\bar{x}, R_0)$, alors le point d'équilibre \bar{x} est stable. Si, de plus, la fonction $\dot{V}(x) < 0$ en tout point sauf au point \bar{x} , alors \bar{x} est asymptotiquement stable.

Démonstration : Pour toute condition initiale x_0 dans $B(\bar{x}, R_0)$, V est décroissante le long de la trajectoire. Donc $V(x(t)) \leq V(x_0)$ pour tout $t \geq 0$, ou encore $x(t) \in B(\bar{x}, R_0)$

1. La preuve de la stabilité du point d'équilibre est identique au cas discret.
2. Si maintenant $\dot{V}(x) < 0$ en tout point de $B(\bar{x}, R_0)$ sauf \bar{x} , alors $V(x(t))$ est positive et décroît, donc converge.

Soit $\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = l$. Alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0$. Sinon, il existe une constante $a > 0$ telle que $0 < a \leq -\dot{V}(x(t))$. On a :

$$V(x(t)) - V(x(0)) = \int_0^t \dot{V}(x(s)) ds \leq -ta,$$

et par conséquent

$$V(\bar{x}) \leq V(x(t)) \leq V(x(0)) - ta,$$

ce qui est contradictoire lorsque $t \rightarrow \infty$. Et par suite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(x(t)) = 0.$$

Or $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \in B(\bar{x}, R_0)$ sauf \bar{x} ; par conséquent

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = V(\bar{x}).$$

On conclut donc que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ pour tout $t \geq 0$. ■

Exemple 2.3

Soit le système régi par l'équation de Vanderpool donnée par

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon < 0, \quad (2.12)$$

qui s'écrit encore sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \left(\frac{x^3}{3} - x \right), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$. On pose $V(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$ Alors le long de la

trajectoire on a :

$$\Delta V(x, y) = y\dot{y} + x\dot{x} = -\varepsilon x^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right).$$

Dans $\Omega = \{(x, y)/x^2 + y^2 < 3\}$, V est une fonction de Lyapunov associée au système avec $\dot{V} < 0$ pour $x^2 + y^2 \neq 0$. On conclut donc, que le point d'équilibre $(0, 0)$ est asymptotiquement stable. Soit le système autonome suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ f(0) = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

où $f \in C^1$ et soit $A(x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ la matrice jacobienne de f . Nous avons le résultat préliminaire suivant.

Proposition 2.1

Si la matrice $F = A + A^T$ est définie négative sur un voisinage Ω de 0, alors le point d'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

Démonstration : Soit $x \in \Omega$ et $y \in \mathbb{R}^n$.

$$\langle F(x)y, y \rangle = \langle (A(x) + A^T(x))y, y \rangle = 2 \langle A(x)y, y \rangle < 0.$$

Donc $A(x)$ est inversible pour tout $x \in \Omega$. D'après le théorème de la fonction inverse, f est bijective et puisque $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \Omega - \{0\}$, $f(x) \neq 0$. Considérons la fonction V définie par

$$V(x) = \langle f(x), f(x) \rangle.$$

On a $V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ pour $x \in \Omega - \{0\}$. Calculons la dérivée de V le long de la trajectoire. On a

$$\dot{V}(x) = \langle F(x)f(x), f(x) \rangle > 0 \text{ pour } x \neq 0.$$

On conclut donc que le point d'équilibre est (a.s). ■

Remarque 2.3

Une situation importante est celle où une fonction de Lyapunov peut être trouvée et reste constante le long de la trajectoire, ce qui correspond à $\Delta V(x) = 0$ dans le cas discret ou à $\dot{V}(x) = 0$ dans le cas continu. Dans ce cas on conclut que toute trajectoire du système se trouve dans le contour de la fonction V .

Les théorèmes énoncés ci-dessus concernent la stabilité locale du point d'équilibre. Pour avoir la stabilité asymptotique globale d'un système, il serait logique d'étendre le voisinage (ou la boule) Ω à tout l'espace.

Théorème 2.5 (*Stabilité globale*)

Supposons qu'il existe une fonction V de Lyapunov définie sur \mathbb{R}^n , associée au système (2.10) de point d'équilibre \bar{x} , telle que $\dot{V} < 0$ sauf en \bar{x} et

$$V(x) \longrightarrow \infty \text{ quand } \|x\| \longrightarrow \infty,$$

alors le point d'équilibre \bar{x} est globalement asymptotiquement stable.

Démonstration : La preuve est identique au cas local ; en considérant le fait que la fonction V est non bornée et que $\dot{V} < 0$ sauf en \bar{x} , on conclut que pour une condition initiale donnée x_0 , la trajectoire reste dans une région bornée définie par $V(x) \leq V(x_0)$. ■

Remarquons que le résultat de la stabilité globale implique aussi que le point \bar{x} est le seul point d'équilibre du système.

Exemple 2.4

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = - (1 + x_2(t) + x_3^2(t)) x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + x_3^2(t), \\ \dot{x}_3(t) = -(2 + \cos t)x_3(t). \end{cases} \quad (2.14)$$

On a $x_3(t)$ tend vers 0 exponentiellement, donc $x_3^2(t)$ tend aussi vers 0 exponentiellement. En appliquant le théorème ci-dessus pour la première équation du système, on conclut que ce système est (g.e.s).

2.3.2 Cas des systèmes discrets

Considérons le système (2.15), rappelé ci-dessous,

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.15)$$

et soit \bar{x} un point d'équilibre de ce système, alors on a la définition suivante :

Définition 2.8

Une fonction V définie sur Ω , une région de l'espace d'état du système discret (2.15) et contenant \bar{x} est de Lyapunov si elle vérifie les conditions :

1. V est continue sur Ω .
2. V admet un minimum unique au point \bar{x} sur Ω .
3. La fonction $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$ sur Ω .

Remarque 2.4

1. La condition 3. de la définition est équivalente à dire que le long de la trajectoire du système contenue dans Ω , la fonction V est décroissante. En effet :
 - (a) Si à l'instant k , l'état du système est x alors à l'instant $k + 1$, l'état du système est $f(x)$, les valeurs de la fonction de Lyapunov en ces points sont $V(x)$ et $V(f(x))$ et donc la variation est $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$.
 - (b) Si V est une fonction de Lyapunov sur Ω , $\Delta V(x) \leq 0$ pour tout $x \in \Omega$.
2. L'interprétation géométrique permet de conclure que si la fonction de Lyapunov existe, le point d'équilibre doit être stable.
3. La condition 2. de la définition peut être remplacée par $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ sur Ω . En effet, il suffit de considérer la fonction W définie par $W(x) = V(x) - V(\bar{x})$.

Exemple 2.5

Considérons le système

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{x_2(k)}{1+x_2(k)^2}, \\ x_2(k+1) = \frac{x_1(k)}{1+x_2(k)^2}, \end{cases} \quad (2.16)$$

qui admet $(0, 0)$ pour point d'équilibre. On définit la fonction

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

La fonction V est continue et admet $(0, 0)$ comme minimum. De plus

$$V(x(k+1)) = \frac{x_2(k)^2}{(1+x_2(k)^2)^2} + \frac{x_1(k)^2}{(1+x_2(k)^2)^2} = \frac{V(x(k))}{(1+x_2(k)^2)^2} < V(x(k)).$$

D'où V est une fonction de Lyapunov pour ce système et donc ce point d'équilibre est (a.s).

Un système discret autonome s'écrit sous la forme

$$x(k+1) = f(x(k)); \quad x(k_0) = x_0.$$

Soit \bar{x} un point d'équilibre du système (2.1). (respectivement (2.2))

Instabilité et la stabilisation

3.1 Stabilité des systèmes autonomes

3.1.1 Définitions- Exemples

Lors de l'analyse d'un système, l'étude de la stabilité revêt une importance primordiale, et bien que cette notion soit assez usuelle, elle peut avoir plusieurs interprétations selon l'application envisagée, ce qui conduit à des définitions appropriées mais en général liées au système considéré.

Les systèmes considérés dans cette section sont régis par l'équation

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.1)$$

pour le système continu autonome et par

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)), \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.2)$$

pour le système discret autonome.

3.2 Stabilité et linéarisation

Nous avons vu que la propriété de stabilité dépend de la nature du système autour du point d'équilibre, il est donc naturel pour l'étude de la stabilité d'un système non linéaire, de remplacer ce système par une approximation linéaire autour du point d'équilibre. Souvent une approximation linéaire est suffisante pour l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre. La linéarisation d'un système non linéaire est basée sur la linéarisation de la fonction f au voisinage d'un point d'équilibre \bar{x} . Considérons le système régi par l'équation ci-dessous,

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t), \quad (3.3)$$

de point d'équilibre \bar{x} . On pose $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ et $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et on suppose que f est continument différentiable par rapport à x . Pour t fixé, on considère l'approximation

$$\begin{aligned} f_i(\bar{x}_1 + y_1, \bar{x}_2 + y_2, \dots, \bar{x}_n + y_n, t) &\simeq f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t) \\ &+ \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t)}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t)}{\partial x_2} y_2 \\ &+ \dots + \frac{\partial f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n, t)}{\partial x_n} y_n. \end{aligned}$$

Ainsi on a $f(\bar{x} + y, t) \simeq f(\bar{x}, t) + F(t)y$ où $F(t)$ est la matrice jacobienne de f au point \bar{x} donnée par :

$$F(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Le système (3.3) s'écrit $\dot{y} = F(t)y + h(t, y)$ où $y = x - \bar{x}$.

Si la fonction f peut être approchée par $F(t)$, autrement dit si, pour tout t positif, on a :

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \sup \frac{\|h(t, y)\|}{\|y\|} = 0,$$

alors le système

$$\dot{y} = F(t)y, \quad (3.5)$$

est appelé le linéarisé du système non linéaire (3.3) autour du point d'équilibre \bar{x} . Dans certains cas, la stabilité du système linéarisé assure la stabilité du système lui-même. Si le système linéarisé (3.5) est uniformément asymptotiquement stable, alors le point d'équilibre \bar{x} de (3.3) est aussi uniformément asymptotiquement stable.

Notons que si le système (3.5) est seulement (a.s), alors on ne peut pas conclure à la stabilité du point d'équilibre. Dans le cas d'un système discret

$$x(k+1) = f(x(k), k), \quad (3.6)$$

on pose $x(k) = \bar{x} + y(k)$ et y est solution de l'équation

$$y(k+1) = F(k)y(k).$$

C'est l'approximation linéaire valable pour une petite perturbation $y(k)$ du point d'équilibre \bar{x} .

Dans le cas discret ou continu, l'approximation linéaire du système non linéaire admet F comme matrice du système.

Proposition 3.1

Si la matrice Jacobienne $F(t) = F$ est constante, alors

1. Si les valeurs propres de F sont à parties réelles négatives, le système continu (3.3) est asymptotiquement stable au point \bar{x} .
2. S'il existe au moins une valeur propre λ de F telle que $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, le système continu (3.3) est instable au point \bar{x} .
3. S'il existe λ telle que $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, le système continu (3.3) peut être stable, asymptotiquement stable ou instable.
4. Si les valeurs propres de F sont toutes dans le disque unité, le système discret (3.6) est asymptotiquement stable au point \bar{x} .
5. Si les valeurs propres de F sont dans le disque unité et une valeur propre λ est telle que $\lambda = 1$, le système discret (3.6) peut être stable, asymptotiquement stable ou instable.
6. S'il existe au moins une valeur propre λ telle que $|\lambda| > 1$, le système discret (3.6) est instable au point \bar{x} .

Exemple 3.1

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = ax(t) + cx(t)^2, \quad (3.7)$$

0 est un point d'équilibre pour tout a et c . Le système linéaire associé au point 0 est donné par $\dot{y}(t) = ay(t)$. On a alors

1. Si $a < 0$, le système est asymptotiquement stable.
2. Si $a > 0$, le système est instable.
3. Si $a = 0$, on ne peut rien dire et cela nécessite une étude directe.

Pour $a = 0$, on a $\dot{x}(t) = cx(t)^2$.

Si $c = 0$, il est clair que 0 est marginalement stable. Si $c \neq 0$ il est facile de déduire que 0 est instable. En effet, la solution s'écrit

$$x(t) = \frac{x(0)}{1 - cx(0)t} \quad (3.8)$$

Pour $t = \frac{1}{cx(0)}$ la solution n'est pas définie.

Exemple 3.2

Considérons le système discret

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1(k) + x_2(k)^2, \\ x_2(k+1) = x_1(k) + \beta x_2(k), \end{cases} \quad (3.9)$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$.

Ce système admet deux points d'équilibre

$$\bar{x} = (0, 0) \text{ et } \bar{x} = \left((1 - \alpha)(1 - \beta)^2, (1 - \alpha)(1 - \beta) \right).$$

- Pour $\bar{x} = (0, 0)$, on trouve

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix},$$

et le système linéaire correspondant s'écrit

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \alpha y_1(k), \\ y_2(k+1) = y_1(k) + \beta y_2(k). \end{cases}$$

Les valeurs propres de F sont α et β , on conclut que le point $\bar{x} = (0, 0)$ est asymptotiquement stable.

- Pour $\bar{x} = \left((1 - \alpha)(1 - \beta)^2, (1 - \alpha)(1 - \beta) \right)$, on trouve

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & 2(1 - \alpha)(1 - \beta) \\ 1 & \beta \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de F sont solutions de l'équation

$$(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = 2(1 - \alpha)(1 - \beta)$$

Le membre de gauche croît avec λ et plus petit que le membre de droite en $\lambda = 1$. Il est clair qu'il existe une racine $\lambda > 1$. D'où ce point d'équilibre est instable.

3.3 Instabilité des systèmes

Dans cette partie, nous donnons quelques théorèmes qui sont aussi basés sur la méthode directe mais pour montrer l'instabilité du point d'équilibre \bar{x} .

Théorème 3.1

Si dans un voisinage Ω de \bar{x} , il existe une fonction $V(x, t)$ continument différentiable et deux fonctions $V_0(x), V_1(x)$ telles que

1. $V(\bar{x}, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$.
2. $0 < V_0(x) \leq V(x, t) \leq V_1(x)$ pour tout $x \in \Omega - \bar{x}$ et $t \geq t_0$.
3. $V(x, t_0) > 0$ et bornée dans Ω .
4. $\dot{V}(x, t) > 0$ dans Ω .

alors \bar{x} à t_0 est instable.

Exemple 3.3

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t) (x_1^2(t) + x_2^2(t)), \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) (x_1^2(t) + x_2^2(t)). \end{cases} \quad (3.10)$$

Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$. Soit alors la fonction

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2).$$

Le long de la trajectoire, on a

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)^2.$$

Ainsi V et \dot{V} sont définies positives, le théorème ci-dessus montre que le système est instable (dans ce cas, comme le système est autonome, on a $V_0(x) = V(x, t) = V_1(x)$).

Exemple 3.4

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_2^2(t) + x_1(t). \end{cases} \quad (3.11)$$

Le seul point d'équilibre est $(0, 0)$. Soit la fonction

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + \frac{1}{3}x_2^3.$$

Dans $\Omega = \{(x_1, x_2) / x_1 > 0, x_2 > 0\}$, on a $V > 0$ et

$$\dot{V}(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2)^2 + (x_1 + x_2^2)^2 > 0,$$

et donc le point d'équilibre est instable.

Théorème 3.2

Si dans un voisinage de Ω du point d'équilibre, il existe une fonction, $V(x, t)$ continuellement différentiable et deux fonctions $V_1(x)$ et $V_0(x)$ telles que

1. $V(\bar{x}, t_0) = 0$.
2. $0 < V_0(x) \leq V(x, t) \leq V_1(x)$ pour tout $t \geq t_0$ et $x \neq \bar{x}$.
3. $V(x, t_0) > 0$ et bornée dans Ω .
4. $\dot{V}(x, t) - \lambda V(x, t) \geq t_0$ pour tout $t \geq t_0$, pour tout $x \in \Omega, \lambda > 0$.

Alors le point d'équilibre \bar{x} à t_0 est instable.

Théorème 3.3

Soit Ω un voisinage du point d'équilibre \bar{x} . Supposons qu'il existe une fonction $V(x, t)$ continue de dérivées partielles premières continues dans Ω , deux fonctions $V_0(x)$ et $V_1(x)$ et Ω_ℓ une partie de Ω telles que

1. $0 < V_0(x) \leq V(x, t) \leq V_1(x)$ pour $x \in \Omega - \bar{x}$ et pour tout $t \geq t_0$.
2. $0 < V(x, t)$ et $0 < \dot{V}(x, t)$ dans $\Omega_\ell, x \neq \bar{x}$ et $\dot{V}(\bar{x}, t) = 0$.
3. $\bar{x} \in \partial\Omega_\ell$.
4. Pour tout $x \in \partial\Omega, V(x, t) = 0$, pour tout $t \geq t_0$.

Alors le point d'équilibre \bar{x} à t_0 est instable.

Résumé

La notion de la stabilité traite la stabilité des solutions d'équations différentielles et des trajectoires des systèmes dynamiques sous des petites perturbations des conditions initiales.

Les fonctions de Lyapunov sont des fonctions scalaires qui peuvent être utilisées pour prouver la stabilité d'un équilibre d'une équations différentielles ordinaires. Ils sont importantes pour la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques et la théorie du contrôle. Il n'y a pas de technique générale pour construire des fonctions de Lyapunov pour les équations différentielles ordinaires, dans de nombreux cas spécifiques, la construction de fonctions de Lyapunov est connue. Par exemple, les fonctions quadratiques.

Le théorème d'instabilité linéaire fournit une condition suffisante d'instabilité de l'équilibre d'un système différentiel non linéaire. Cette condition suffisante est obtenue sur le système différentiel linéarisé. Si une valeur propre de ce linéarisé possède une partie réelle strictement positive, alors l'équilibre est instable.

Bibliographie

- [1] A. EL JAI ET E. ZERRIK. *Stabilité des systèmes dynamiques*. Ae J-EZ Livre-Stabilité, 24 Juin 2013.
- [2] A.EL JAI, E. ZERRIK ET K.ZTOT, *Systemes dynamiques, analyse et contrôle des systemes localisés*, presses universitaires de perpignan 2008.
- [3] BELALHAL HADDA, *Étude des systèmes a coefficients périodiques*, soutenus publiquement le 30/05/2017
- [4] E. ZERRIK, *Stabilité des Systèmes Dynamiques Book*, Université Moulay Ismail. July 2014
- [5] FREDERIC JEAN, *Systemes dynamiques stabilite et commande cours et exercices corrigés* Edition 2017/2018.
- [6] LAURENT SMOCH, *diagonalisation*, universitaire du littoral –cote d’opale mars 2013 .
- [7] SONIA HAMMAMI, *la stabilisation de système dynamique continu non lumière exploitant les matrices de formes en flèche* ,soutenu le 21 décembre 2009.
- [8] https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_de_la_stabilit%C3%A9.