

Exercice 1(8pts)

1. (a) Montrer la formule d'Adam- Bashforth a **3** pas AB₃ suivante**(2pt)**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23g_n - 16g_{n-1} + 5g_{n-2}); \quad y_n \simeq y(x_n) \text{ et } g_n = g(x_n, y_n)$$

Soit l'equa diff

$$y' = g(x, y); \quad x \in [a, b] \dots\dots(1)$$

On utilise une subdivision uniforme de $[a, b]$ comme suit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_N = b$

on intègre (1) sur $[x_n, x_{n+1}]$ on trouve

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x, y) dx;$$

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} g(x, y) dx$$

$g(x, y) \simeq p_n(x)$, tq $p_n(x)$ passe par les pts $(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1})$ et (x_{n-2}, y_{n-2})
 $p_n(x)$ est le polynome de Lagrange aux points $(x_n, y_n), (x_{n-1}, y_{n-1})$ et (x_{n-2}, y_{n-2}) (la sol voir le cours)

1. b Montrer que l'erreur globale de cette méthode est d'ordre 3.**(2pt)**

on a

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23g_n - 16g_{n-1} + 5g_{n-2}); \quad y_n \simeq y(x_n) \text{ et } g_n = y'_n$$

d'après la formule de Taylor on a

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n + \frac{h^3}{6} y'''_n + \frac{h^4}{24} y^{(4)}_n + \dots \quad (1)$$

$$y_{n-1} = y_n - hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n - \frac{h^3}{6} y'''_n + \dots$$

$$y_{n-2} = y_n - 2hy'_n + 2h^2 y''_n - \frac{4h^3}{3} y'''_n + \dots$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} \left(23y'_n - 16 \left(y'_n - hy''_n + \frac{h^2}{2} y'''_n - \frac{h^3}{6} y^{(4)}_n \right) + 5 \left(y'_n - 2hy''_n + 2h^2 y'''_n - \frac{4h^3}{3} y^{(4)}_n \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{12} \left(12y'_n + 6hy''_n + 2h^2y'''_n - 4h^3y_n^{(4)} + \dots \right) \\
y_{n+1} &= y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''_n - \frac{1}{9}h^4y_n^{(4)} + \dots \\
y_{n+1} &= y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{6}y'''_n + e_n \tag{2}
\end{aligned}$$

Par comparaison (2) et (3) on obtient

$$\begin{aligned}
e_n &= \frac{h^4}{24}y_n^{(4)}(\xi); \xi \in]x_{n-2}, x_{n+1}[\\
|e_n| &= \left| \frac{h^4}{24}y_n^{(4)}(\xi) \right| \leq M \frac{h^4}{24} = Ch^4
\end{aligned}$$

l'erreur locale est d'ordre 4 et l'erreur globale d'ordre 3.

2 Soit l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} y' + 2y = 2(\cos 2x - \sin 2x); x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y(x_0 = 0) = 1 \end{cases}$$

(a) On prend $h = \frac{\pi}{12}$. Calculer $y_1 = y(\frac{\pi}{12})$ par la méthode AB₁ c'est à dire Euler explicite.....(1pt)

$$y_{n+1} = y_n + hg(x_n, y_n), g(x_n, y_n) = 2(\cos 2x_n - \sin 2x_n) - 2y_n$$

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + hg(x_0, y_0) = y_0 + hg_0 \\
y_1 &= 1 + \frac{\pi}{12}g_0 = 1, g_0 = 0
\end{aligned}$$

(b) Utiliser la méthode RK₂ pour calculer y_2(1pt)

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_0 + \frac{h}{2} [g(x_0, y_0) + g(x_1, y_1)] \\
g_1 &= 2 \left(\cos 2\frac{\pi}{12} - \sin 2\frac{\pi}{12} \right) - 2 = -1.2679 \\
y_2 &= 1 + \frac{\pi}{24} [1 - 1.2679] = 0.96493
\end{aligned}$$

c Utiliser la formule AB₃ pour calculer $y_3 = y(\frac{\pi}{4})$(1pt)

$$\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{12} (23g_n - 16g_{n-1} + 5g_{n-2}) \\
y_3 &= y_2 + \frac{\pi}{12 * 12} (23g_2 - 16g_1 + 5g_0) \\
g_2 &= 2 \left(\cos 2\frac{\pi}{6} - \sin 2\frac{\pi}{6} \right) - 2 * 0.96493 = -2.6619 \\
y_3 &= 0.96493 + \frac{\pi}{12 * 12} (23(-2.6619) - 16(-1.2679)) = 7.1817 \times 10^{-2}
\end{aligned}$$

d Expliquer comment utiliser la méthode (**prédiction-correction**) pour calculer y_3(1pt)

On fait une combinaison des méthodes AB3 et AM3 comme suit

$$AB3 : y_{n+1}^p = y_n + \frac{h}{12} (23g_n - 16g_{n-1} + 5g_{n-2})$$

$$AM3 : y_{n+1}^c = y_n + \frac{h}{12} (5g_{n+1} + 8g_n - g_{n-1})$$

$$AM3 : y_{n+1}^c = y_n + \frac{h}{12} (5g(x_{n+1}, y_{n+1}^p) + 8g_n - g_{n-1})$$

$$AB3 : y_3^p = y_2 + \frac{h}{12} (23g_2 - 16g_1 + 5g_0) = 7.1817 \times 10^{-2}$$

$$AM3 : y_3^c = y_2 + \frac{h}{12} (5g(x_3, y_3^p) + 8g_2 - g_1) = \dots$$

Exercice 2 (12pts)

1. Soit le problème suivant

$$(PC) \begin{cases} -u''(x) + \beta u(x) = f(x), \beta < 0, x \in I =]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad u \in C^2([a, b]) \text{ et } f \in C^1([a, b])$$

On pose $f(x) = \sin(\alpha x)$; $\alpha > 0$.

(a) Trouver une relation entre α et β pour que $u(x) = f(x)$ soit une solution de (PC).....(1pt)

$$\begin{aligned} -u''(x) + \beta u(x) &= f(x) \\ \alpha^2 \sin(\alpha x) + \beta \sin(\alpha x) &= \sin(\alpha x) \\ \alpha^2 + \beta &= 1 \end{aligned}$$

(b) on prend $\beta = -3$, $I =]0, \pi[$, $h = \frac{\pi}{4}$. $\alpha^2 + \beta = 1$ donc $\alpha^2 = 4$ donc $\alpha^2 = 4$ or $\alpha = 2$

la solution exacte de (PC) est $u(x) = \sin(2x)$.

2 Trouver la formulation variationnelle (FV) du problème (PC).....(2pt)

$$(PC) \begin{cases} -u''(x) + \beta u(x) = f(x), \beta < 0, x \in I =]a, b[\dots(1) \\ \text{et} \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

Soit une fonction $v \in C^1([a, b])$, nulle en a et b .
 Soit $V = \{v \in C^1([a, b]); v(a) = v(b) = 0\}$ un sous espace de $C^1([a, b])$.

$$-u''(x)v(x) + \beta u(x)v(x) = g(x)v(x)$$

En intégrant par partie

$$\int_0^1 [u''(x)v(x) + \beta u(x)v(x)] dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

donc

$$(PV) \int_0^1 [-u'(x)v'(x) + \beta u(x)v(x)] dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \dots \dots \dots (3)$$

1. **3** Montrer que la formulation variationnelle (F V) admet une solution unique.....**(2.5pt)**

$$(PV) \int_0^1 [u'(x)v'(x) + \beta u(x)v(x)] dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \dots \dots \dots (4)$$

on pose

$$a(u, v) = \int_0^1 [u'(x)v'(x) + \beta u(x)v(x)] dx, \quad l(v) = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

on trouve

$$a(u, v) = l(v); \quad u, v \in V \quad (5)$$

On applique le theoreme de Lax-Milgram

a est une forme bilinéaire, et l est un opérateur linéaire

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_0^1 [u'(x)v'(x) + \beta u(x)v(x)] dx \right| \leq \left| \int_0^1 |u'(x)v'(x)| dx + \int_0^1 |\beta u(x)v(x)| dx \right| \\ &\leq \|u'(x)\|_{L^2([a,b])} \|v'(x)\|_{L^2([a,b])} + |\beta| \|u(x)\|_{L^2([a,b])} \|v(x)\|_{L^2([a,b])} \quad (C.Shwartz) \\ &\leq \|u'(x)\|_{L^2([a,b])} \|v'(x)\|_{L^2([a,b])} + C_1 |\beta| \|u'(x)\|_{L^2([a,b])} \|v'(x)\|_{L^2([a,b])} \quad (Poincare) \\ &\leq \|u'(x)\|_{L^2([a,b])} \|v'(x)\|_{L^2([a,b])} (1 + C_1 |\beta|) \\ &\leq (1 + C_1 |\beta|) \|u'(x)\|_V \|v'(x)\|_V \end{aligned}$$

donc a est bilinéaire continue.

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_0^1 [u'(x)^2 + \beta u(x)^2] dx = \int_0^1 u'(x)^2 dx + \beta \int_0^1 u(x)^2 dx \\ \int_0^1 u'(x)^2 dx &= \|u'(x)\|_{L^2([a,b])}^2 \geq \frac{1}{c} \|u(x)\|_{L^2([a,b])}^2, \quad \int_0^1 u(x)^2 dx = \|u(x)\|_{L^2([a,b])}^2 \\ a(u, u) &\geq \frac{1}{c} \|u(x)\|_{L^2([a,b])}^2 + \beta \|u(x)\|_{L^2([a,b])}^2 \\ &\geq \left(\frac{1}{c} + \beta \right) \|u(x)\|_{L^2([a,b])}^2 = \gamma \|u(x)\|_{L^2([a,b])}^2 \end{aligned}$$

donc

$$a(u, u) \geq \gamma \|u(x)\|_{L^2([a,b])}^2, \text{ avec } \gamma = \frac{1}{c} + \beta$$

donc a coercive.

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_0^1 f(x)v(x)dx \right| \leq \|f(x)\|_{L^2([a,b])} \|v(x)\|_{L^2([a,b])} \quad (C.Shwartz) \\ &\leq \|f(x)\|_{L^2([a,b])} C_2 \|v'(x)\|_{L^2([a,b])} \\ &\leq C_2 \|f(x)\|_{L^2([a,b])} \|v(x)\|_V \\ &\leq K \|v(x)\|_V \end{aligned}$$

donc l est linéaire continue.

4 Appliquons **de MEF** sur (PV) avec une discrétisation de $[0, 1]$ ($h = \frac{1}{N}, x_j = jh$).....**(0.25pt)**

Une solution de la forme variationnelle (1) s'appelle solution faible du problème différentiel de départ.

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Soit $\tilde{V} = \{\tilde{u} \in C^1([0, 1]); u(0) = u(1) = 0\}$ un sous-espace vectoriel de V de dimension finie **N-1**.....**(0.25pt)**

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ N fonctions linéairement indépendantes de V . Ces fonctions constituent une base du sous-espace \tilde{V} **(0.25pt)**

Si $\tilde{u} \in \tilde{V}$ alors $\tilde{u} = \sum_{j=1}^{N-1} \varphi_j u_j$, on remplace dans (1) on trouve

$$\int_0^1 \left[-\sum_{j=1}^{N-1} \varphi_j' u_j \tilde{v}'(x) + \beta \sum_{j=1}^{N-1} \varphi_j u_j \tilde{v}(x) \right] dx = \int_0^1 f(x) \tilde{v}(x) dx, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \dots\dots \mathbf{(0.25pt)}$$

$$\left[\sum_{j=1}^{N-1} \int_0^1 [-\varphi_j' \tilde{v}'(x) + \beta \varphi_j \tilde{v}(x)] u_j \right] dx = \int_0^1 f(x) \tilde{v}(x) dx, \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \dots\dots \mathbf{(0.25pt)}$$

(6)

On prend $\tilde{v}(x) = \varphi_i(x)$ on trouve

$$\left[\sum_{j=1}^{N-1} \int_0^1 [-\varphi_j'(x) \varphi_i'(x) + \beta \varphi_j(x) \varphi_i(x)] u_j \right] dx = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx, \quad \forall \varphi_i \in \tilde{V}, i = \overline{1, N-1} \dots \mathbf{(0.5pt)}$$

(2)

On pose

$$A_{ij} = \int_0^1 [-\varphi_j'(x) \varphi_i'(x) + \beta \varphi_j(x) \varphi_i(x)] u_j dx, \quad D_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx \dots \mathbf{(0.5pt)}$$

(7)

Choix des fonctions φ_i

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h} & , x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{-h} & , x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \quad \dots(0.5\text{pt})$$

a Trouvons le système linéaire $AU = D$ associé au problème (PV).....(2pt)

l'équation (2) devient

$$\left(\sum_{j=1}^{N-1} A_{i,j} \right) u_j = D_i, \quad i = \overline{1, N-1} \dots(0.5\text{pt}) \quad (8)$$

$$A = (A_{i,j}), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{1, N-1}$$

$$A_{i,i} = \frac{2}{h} + \frac{2\beta h}{3}, \quad A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = \frac{-1}{h} - \frac{\beta h}{3}, \quad D_i = \int_0^1 f(x_i)\varphi_i(x)dx = hf(x_i) \dots(0.5\text{pt}) + (0.5\text{pt})$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{i,i} & A_{i,i+1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ A_{i,i+1} & A_{i,i} & A_{i,i+1} & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & A_{i,i+1} & A_{i,i} & A_{i,i+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{i,i+1} & A_{i,i} & A_{i,i+1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & A_{i,i+1} & A_{i,i} & A_{i,i+1} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & A_{i,i+1} & A_{i,i} \end{pmatrix}, \quad D = h \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix} \dots(0.5\text{pt})$$

b On prend $\beta = -3, I =]0, \pi[, h = \frac{\pi}{4} \dots\dots(1.5\text{pt})$

$$A_{i,i} = \frac{2}{h} + \frac{\beta h}{6} = \frac{8}{\pi} - \frac{\pi}{2}, \quad A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = \frac{-4}{\pi} + \frac{\pi}{4}, \quad D_i = \int_0^1 f(x_i)\varphi_i(x)dx = hf(x_i) \dots(0.5\text{pt})$$

$$A_{i,i} = \frac{16 - \pi^2}{2\pi}, \quad A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = \frac{\pi^2 - 16}{4\pi}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{16-\pi^2}{2\pi} & \frac{\pi^2-16}{4\pi} & 0 \\ \frac{\pi^2-16}{4\pi} & \frac{16-\pi^2}{2\pi} & \frac{\pi^2-16}{4\pi} \\ 0 & \frac{\pi^2-16}{4\pi} & \frac{16-\pi^2}{2\pi} \end{pmatrix}, \quad D = hF(x) \dots(0.25\text{pt})$$

$$D = h \begin{pmatrix} f(0.25) \\ f(0.5) \\ f(0.75) \end{pmatrix} = \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{\pi}{2}) \\ \sin(2\frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.78540 \\ 0 \\ -0.78540 \end{pmatrix} \dots(0.25\text{pt})$$

(a) Trouvons la solution approchée du problème (PC). $U = A^{-1}.D =$

$$\begin{pmatrix} 1.537 & 1.0249 & 0.5124 \\ 1.024 & 2.0498 & 1.0249 \\ 0.5124 & 1.0249 & 1.5374 \end{pmatrix} \frac{\pi}{4} \begin{pmatrix} \sin(2\frac{\pi}{4}) \\ \sin(2\frac{\pi}{2}) \\ \sin(2\frac{3\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.804 \\ 0 \\ -0.804 \end{pmatrix} \dots(0.5\text{pt})$$