
Université ABBES LAGHROUR Khenchela



جامعة عباس لغرور خنشلة

Faculté de Sciences et Technologie

كلية العلوم و التكنولوجيا

Département de Génie Mécanique

قسم الهندسة الميكانيكية



Mémoire

de fin d'études Pour l'obtention du diplôme

MASTER (LMD)

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Thème

Modélisation et commande d'un robot
manipulateur 6dd dans une cellule de
production

Réalisé par :

- Aidel Ilyas
- Belouaar med anis

Dirigé par : Messaoudi A

Année universitaire : 2020-2021



Remerciements



Avant tout je tiens à remercier Dieu tout puissant qui m'a donné la faculté d'atteindre ce niveau.

Mes vifs remerciements s'adressent à mon aimable encadreur Monsieur Messaoudi Atissam Enseignant à l'université de Khenchela qui, par son expérience et son efficacité n'a ménagé aucun effort pour mener à bien ce travail.

Mes remerciements s'adressent également à tous les enseignants et camarades du département génie mécanique qui ont assisté ma formation.



Dédicace :



Avant tous, je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience pour réaliser ce travail malgré toutes les difficultés rencontrées.

Je dédie ce modeste travail, avec l'expression de mon profond amour, aux personnes les plus chères du monde.

A mon père, aucun hommage ne pourra être à la mesure de ce qu'il mérite, je prie Dieu qu'il te fasse don de sa miséricorde et sa grâce.

Et toute ma famille pour leurs encouragements et leurs soutiens inconditionnel.

Et Je dédie Mes frères:

dawoud ,chahine

Je dédie aussi ce travail a tous mes amis surtout ceux qui m'ont apporté un soutien moral, une amitié inoubliable et précieuse et un dévouement qui fut particulièrement indispensable surtout à mespartenaires anes ,mossaab.



Sommaire

Remerciement

Dédicaces

Liste des figures

Liste des tableaux

Introduction générale 2

Chapitre I : Généralité sur la robotique

Introduction..... 5

I.1. Historique 5

I.2. Evolution du robot 6

I.3. Définition d'un robot 6

 La définition de l'Oxford English Dictionary 7

 La définition de l'institut American 7

 La définition de la normalisation française(AFNOR) 7

I.4 . Classification de l'association française de robotique industrielle (AFRI) 8

 I.4.1 Manipulateur manuel 8

 I.4.2 Manipulateur automatique 8

 I.4.3 Manipulateur automatique à séquence fixe 8

 Manipulateur automatique à séquence variable 8

 Robots programmables 8

I.5.Caractéristique des performances des robots 9

 I.5.1 Versatilité du robot 9

 I.5.2 Auto adaptabilité à l'environnement 9

 I.5.3 Critère relatif à la sécurité 10

 I.5.4 Exactitude de trajectoire 10

 I.5.5. Répétitivité de trajectoire 10

I.5.6 .Reproductibilité de pose	10
I.5.7. Critère d'ordre économique	10
I.6. Description d'un bras manipulateur	10
I.6.1. Structure générale	10
I.6.2.Système actionneur.....	11
I.7 Architecture d'un robot manipulateur	12
I.7.1 Degré de liberté	12
I.7.2 Degré de mobilité	12
I.7.3 Les variable articulaires	12
I.7.4 Les architectures les plus courantes	12
I.7.5 La structure cartésienne	13
I.7.6 La structure cylindrique	13
I.7.7 La structure sphérique	14
I.7.8 La structure polaire	15
I.7.9 La structure de type SCARA	16
I.8. Les champs d'application des robots manipulateurs.....	16
I.9 Le Robot ABB étudiée	18
I.10 Conclusion	19
Chapitre II :Modélisation mathématique des robots manipulateurs	
II.1 Introduction	21
II.2 Paramètre deDenavit-Hartenberg pour les structures ouvertes simple	21
II.3 Modèle géométrique direct.....	24
II.4 Modèle géométrique inverse (M.G.I)	25
II.4.1 Introduction.....	25
II.4.2Position du problème	26
II.4.3Nombre de solutions au problème inverse	26
II.4.4Calcul du modèle géométrique inverse (MGI)	27

II.4.4.1	Présentation de la méthode.....	27
II.4.4.2	Solutions aux types d'équations rencontrés	30
II.5	Modélisation cinématique	31
II.5.1	Introduction.....	31
II.5.2	Modèle cinématique direct	31
II.5.3	Calcul de la matrice jacobienne de base	31
II.5.4	Calcul de la matrice J_n^i	32
II.6	Modèle cinématique inverse	33
II.6.1	Forme générale du modèle cinématique	33
II.6.2	Modèle cinématique inverse dans le cas régulier	34
II.6.3	Pseudo-inverse	34
II.7	Modélisation dynamique	35
II.7.1	Formalisme de Lagrange.....	36
II.7.1.1	Forme générale des équations dynamiques.....	36
II.7.1.2	Calcul de l'énergie.....	36
II.7.1.3	Propriétés du modèle dynamique.....	37
II.7.1.4	Prise en compte des frottements	37
II.7.2	Formalisme de Newton-Euler	37
II.8	Conclusion	39

Chapitre III : Les lois de commande des robots manipulateurs

III	Commande	41
III.1	Introduction	41
III.2	Equations du mouvement	41
III.3	Commande classique.....	42
III.3.1	Commande PID dans l'espace articulaire	42
III.3.2	Commande PID dans l'espace opérationnel	46

III.4 Commande par découplage non linéaire	47
III.4 .1 Introduction.....	47
III.4.2 Commande dans l'espace articulaire	48
III.4.2.1 Principe de la commande	48
III.4.2.2 Cas où le mouvement est complètement spécifié	49
III.4.2.3. Cas où seule la position finale est spécifiée.....	51
III.4.2.4. Commande dynamique prédictive	52
III.4.2.5 Calcul pratique des lois de commande par découplage non linéaire..	52
III.4.3 Commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel.....	53
III.5 Conclusion	55

Chapitre IV :Application et simulation numérique

IV.1 Introduction	57
IV.2 Définition et présentation d'un MAPLE	57
IV.3 Définition et présentation d'un robot « ABB »	58
IV.4 Application numérique de modèle géométrique	59
IV.4.1 Paramètres de Denavit–Hartenberg.....	59
IV.5 Application numérique de modèle géométrique directe	66
IV.5.1 Les matrices de transformation homogène ${}^{j-1}T_j$	66
IV.5.2 Simulation numérique de modèle géométrique direct (MGD)	68
IV.5.3 Le programme (MGD)	70
IV.6 Conclusion.....	89
Conclusion générale	91

Glossaire

Références bibliographies

Résumé

LISTE DES FIGURES

Liste des figures

Chapitre I : Généralité sur la robotique

Figure I.1 : système robotique	5
Figure I.2 Composants essentiel d'un bras manipulateur.....	11
Figure I.3 structure cartésienne.....	13
Figure I.4 A Robot structure cylindrique 1R 2T	13
Figure I.4 B Robot Acma- Renault TH 8 1R 2T	14
Figure I.5 A structure sphérique 2R 1T.....	14
Figure I.5 B : Robot De Chargement	15
Figure I.6 Robot a structure polaire.....	15
Figure I.7 A :robot.a structure de type SCARA 2R 1T.....	16
Figure I.7 B : Robot SCARA 3RT.....	16
Figure I.8 Robot ABB 6 axes	17
Figure I.9 Présentation les rotations et les mouvements des articulations du Robot ABB 6 axes....	18

Chapitre II :Modélisation mathématique des robots manipulateurs

Figure II.1 Paramètres géométrique d'une structure ouverte simple.....	22
Figure II.2 transformation entre l'organe terminal et le repère atelier	25

Chapitre III : Les lois de commande des robots manipulateurs

Figure III.1 Schéma classique d'une commande PID.....	43
Figure III.2 Schéma d'une commande PID dans l'espace opérationnel.....	47
Figure III.3 Loi de commande pour un mouvement complètement spécifié.....	50
Figure III.4 Découplage non linéaire où seule la position finale est spécifiée.....	51
Figure III.5 commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel.....	54

Chapitre IV :Application et simulation numérique

Figure IV.1 :le robot industriel ABB	59
Figure IV.2 :Placement des angles de rotation Θ_j	60
Figure IV.3 :Placement des repères et notations pour le robot ABB	61

Liste des tableaux

Chapitre I : Généralité sur la robotique

Tableau I.1 comparaison entre le système Bras + cerveau et bras manipulateur11

Chapitre II :Modélisation mathématique des robots manipulateurs

Tableau II.1 Systèmes d'équations possibles30

Chapitre IV :Application et simulation numérique

Tableau IV.1 Paramètres géométriques du robot.....65

**INTRODUCTION
GENERALE**

INTRODUCTION GENERALE

INTRODUCTION GENERALE

La robotique joue un rôle important dans l'industrie. Surtout pour accélérer le processus de production.

Un système robotisé fait référence à trois entités:

Un environnement de travail, une source d'énergie et une source d'information. Cette dernière entité est fondamentale dans l'utilisation des robots dans une cellule ou un atelier de production, car c'est à son niveau que se situe le dialogue homme - machine (programmation, apprentissage, commande, intervention de maintenance, etc...).

Le système robotique lui-même se décompose en :

Une unité informationnelle qui reçoit les instructions décrivant la tâche à accomplir, les mesures relatives à l'état interne de la structure mécanique

qui constitue le bras manipulateur, les observations plus ou moins élaborées concernant son environnement, et qui élabore en conséquence les commandes de ses différentes articulations en vue d'une tâche précise.

Une unité opérationnelle qui exerce les actions commandées en empruntant la puissance nécessaire à la source d'énergie.

Cette partie qui constitue le robot physique intègre en son sein la structure mécanique (segment, articulation, architecture,...), les modulateurs d'énergie (amplificateurs, servovalves;...), les convertisseurs d'énergie (moteurs, vérins,...), les chaînes cinématiques de transmission mécanique (réducteurs vis à billes; courroies crantées;...), les capteurs proprioceptifs placés sur chaque axe pour mesurer leur position et leur vitesse, les effecteurs qui sont des organes d'interaction avec l'environnement [1].

Et pour l'importance de ce domaine (robotique) Nous avons fait cette étude de modélisation de commande géométrique d'un robot ABB à 6 degrés de liberté.

Ce travail sera divisé en quatre chapitres :

INTRODUCTION GENERALE

Le premier chapitre présente des notions générales sur la robotique, ainsi que quelques définitions sur les robots, leur classification, les problèmes de caractérisations de leurs performances.

Dans le deuxième chapitre, on présente la modélisation de robot pour la commande et les calculs de tous les modèles (modèle géométrique direct et inverse).

Le troisième chapitre présente les lois de commande des robots, et le dernier chapitre les résultats de simulation et enfin le mémoire se termine par une conclusion générale.

Chapitre I

Généralité sur la

Robotique

Introduction

Dans ce chapitre nous allons présenter des définitions et des notions de base relatives à la robotique , de leur caractérisations, et classification .

I.1 Historique

La robotique est un ensemble de techniques (mécanique, électrique, automatique, informatique), articulées autour d'un objet commun. Cet objectif est l'automatisation flexible de nombreux secteurs de l'activité humaine réputés jusqu'à très récemment comme ne pouvant se passer de la présence de l'homme, et l'objet est le robot, une sorte de machine universelle dont l'homme rêve depuis toujours (mais qui n'a pas encore la forme de ce rêve!)[1].



FigureI.1 : système robotique

D'où vient le mot robot :

Le mot "robot" a été inventé par l'écrivain tchèque Karel Čapek à partir du mot "robota" qui veut dire un travail forcé, utilisé dans sa pièce de théâtre Rossum's Universal Robots en 1920, pour désigner des hommes-machines. Ce n'est qu'avec Isaac Asimov que le mythe des robot-hommes a été fondé, lorsqu'il a défini en 1942 " les trois lois de la robotique"

- **Premier loi:** "un robot ne peut porter atteinte à un être humain ni, restant passif, laisser cet être humain exposé au danger".
- **Deuxième loi:** "un robot ne peut porter atteinte à un être humain, sauf si de tels ordres sont en contradiction avec la premier loi".
- **Troisième loi :** "un robot doit protéger son existence dans la mesure où cette protection n'est pas en contradiction avec la premier loi".

I.2 Evolution du robot

C'est un jeune ingénieur américain, J.Engelberger qui a ouvert le champ des applications industrielles en 1961, en créant le robot Unimate qui faisait office d'assistant mécanique et de compagnon. Depuis, les robots ont évolué sur 3 générations :

- **1^{ère} génération:** elle est définie par un fonctionnement purement mécanique, dans lequel le robot exécute aveuglement des mouvements définis par rapport à une base fixe, sans retour d'information sur la tâche en cours.ils ne peuvent pas vérifier le bon fonctionnement de leur intervention.
- **2^{ème} génération:** les robots de la 2^{ème} génération modulent leurs actions en fonction de leur perception. Ils font appel à des principes de régulation issus de l'automatisme, grâce auxquels ils ajustent leur mouvement à leur environnement. Ils peuvent donc corriger le déroulement de leur action.
- **3^{ème} génération :**Les robots de troisième génération sont capables de déterminer la succession des actions élémentaire à accomplir pour réaliser la tâche qui leur est soumise en fonction de l'état réel de celle ci, ils font appel à l'intelligence artificielle pour simuler des raisonnements. Ils réalisent une interaction intelligent entre perception et action qui se traduit par une grande autonomie décisionnelle en présence de variation importantes dans les conditions d'exécution de leurs tâche .les robots à poste fixe agissent dans un univers de travail parfaitement défini et relativement restreint.les robots mobiles sont confortés à des environnements vastes, variables et évolutifs, ils doivent donc appréhender la structure de l'espace dans lequel ils se déplacent. Un robot mobile de 3eme génération est ainsi amené à acquérir, modéliser et traiter une grande quantité d'informations, souvent complexes, sans aucune intervention humaine.il doit agir et contrôler les processus physiques qu'il met en œuvre en permanence et ceci de façon autonome[1].

I.3 Définition d'un robot [2]

Un robot est un dispositif mécanique articulé capable d'imiter certaines fonctions humaines telles que la manipulation d'objets ou la locomotion, dans le but de se substituer à l'homme pour la réalisation de certaines tâches matérielles. Cette réalisation est plus au moins autonome selon les

facultés de conception de l'environnement dont est doté le robot. la robotique est l'ensemble des activités de construction et de mise en œuvre des robots.

Les terme "robot" n'est pas vraiment récent. En effet, dès 1920 Karel Capek a employé le mot "robota" dans l'une de ses pièces de théâtre pour désigner une capacité d'accomplir des tâches, ainsi le mot "robota" veut dire en Russe travail, ou en tchèque corvée, ou travail forcé,

Le robot désigne des machines dont les mouvements sont complexes et adaptable à la tâche et aux modifications de l'état de l'environnement[2].

Il y a plusieurs définitions d'un robot ; nous citons trois d'entre elles:

- **La définition de l'Oxford English Dictionary**

"A mechanical apparatus resembling the work of human being"

C'est à dire: un dispositif mécanique ressemble et faisant le travail d'un être humain. Cette définition reste toujours incorrecte, car même si le robot a de faire du travail d'un être humain, il ne peut pas ressembler à l'homme.

- **la définition de l'institut American**

un manipulateur programmable et multifonctionnel conçu pour transporter des matériaux, des pièces, etc. avec des mouvements variés et programmés, dans le but d'exécuter des tâches variées. Cette définition montre qu'un robot est un moyen de transport, mais cela n'est pas exactement correct, car le robot aujourd'hui fait plusieurs fonctions, parmi lesquels le transport.

- **La définition de la normalisation française (AFNOR)**

un robot est un manipulateur commande en position, programmable, à plusieurs degrés de liberté, capable de manipuler des matériaux, des pièces et des dispositifs spécialisés, pour l'exécution d'une tâche. son unité de commande utilise, notamment, un dispositif de mémoire et éventuellement de perception et d'adaptation à l'environnement. ces machines sont étudiées pour effectuer la même fonction de façon cyclique et peuvent être adaptées à d'autres fonctions sans modifications permanente du matériel.

D'après cette définition, il est très clair qu'un robot manipulateur doit atteindre son objectif tout seul c'est-à-dire qu'il doit situer l'organe terminal, porteur d'outil, dans la position et suivant la direction que le programmeur lui a donné.

I.4 Classification de l'association française de robotique industrielle (AFRI)

Tout les équipements de la présente classification doivent être adaptables à de multiples application et comporte un moyen de préhension ou un outil pour effectuer des taches à caractère industriel, y compris le contrôle[3].

I.4.1 Manipulateur manuel

Engin de manipulation motorisé, commandé par l'homme ayant au moins quatre degrés de liberté, parmi ces engins.

- Manipulateur d'assistance musculaire : la commande se fait par l'action directe sur la charge ou dans son voisinage, par exemple une girafe de déplacement de charge.
- Télémanipulateurs : la commande se fait à distance à l'aide de leviers ou boutons, tel que : manipulation en ambiance dangereuse, forge, industrie nucléaire, milieu subaquatique (sous marine).

I.4.2 Manipulateur automatique

Engin de manipulateur à deux axes et plus, non asservi, à cycle automatique.

I.4.3 Manipulateur automatique à séquence fixe

Réglé mécaniquement par butée, cames et portant un organe terminal, pince, pistolet de projection à titre d'exemple les robots de peinture, chargement ou déchargement de presse et chargeur d'outil.

- **Manipulateur automatique à séquence variable**

Programmable par l'utilisation à l'aide de matrice de diodes, automate programmable, microprocesseur et ou chaque axe et réglable mécaniquement par butée ou came tel que : chargement des machines outil et l'assemblage.

- **Robots programmables**

- Manipulateur automatique de trois axes et plus : dont au moins deux axes sont programmables par apprentissage ou langage symbolique.
- Manipulateur automatique comportant moins de cinq axes programmables :

Manipulateur automatique comportant cinq axes programmables

A titre d'exemple : robot vertical, horizontal, portique, SCARA

Enfin nous avons les robots dit « intelligent » qui sont des : Manipulateur automatique programmable capable d'analyser les modifications de son environnement et de réagir en conséquence, a l'exécution des modifications triviales données par les capturés. Par exemples :

Manipulateur avec reconnaissance de forme, assemblage avec contrôle d'effort, soudage avec suivi de joint.

I.5 Caractéristique des performances des robots

Contrairement aux autres machines, les robots présentent une grande flexibilité et une grande souplesse dans leur utilisation .ils seront prochainement adapter aux modifications de l'environnement car ils intègrent différentes technologiques [4].

Le robot est une machine complexe qui intègre de multiples technologies : mécanique, asservissement, électromécanique, électronique, informatique .les interactions entre ces différents éléments et leur contribution aux performances du robot sont difficile à établir.

Actuellement, bien qu'étant consciences du rôle essentiel de l'armoire de commande, nous ne la dissociions pas de la structure mécanique du robot qui est une partie très importante dans la conception de ce dernier. Par conséquent le robot est évalué comme un ensemble complet.

I.5.1 Versatilité du robot

Les différents types de structures mécaniques du robot permettent l'exécution des tâches diverses ou parfois les même tâche de différentes façons, d'une manière générale.les performances dépendent : de la posture du robot, de la position du robot au sien de l'espace de travail, de la charge, de l'inertie de l'objet manipulé, et de la vitesse avec laquelle la tâche sera exécutée. Contrairement aux machines outils, la connaissance des performances est plus difficile à acquérir : il n'y a pas une performance unique, mais un « champs de performance ».

I.5.2 Auto adaptabilité à l'environnement

Elle caractérise la capacité d'initiative du robot pour mener à bien des tâches incomplètement spécifiées, et ce ci malgré des modifications imprévues de l'environnement.

Cette propriété conduit le robot à m'être en jeu .

Ses capacités d'appréhension de l'environnement (captures, caméras).

Ses capacités de réflexion pour analyser l'espace et la tâche, et élaborer une stratégie d'exécution.

Ses modes de commandes automatiques.

Bien qu'encore peut présente dans la réalité industrielle, l'auto adaptation devrait apporter des améliorations considérables dans l'utilisation des robots ainsi qu'une amélioration des performances.

I.5.3 Critère relatif à la sécurité

Un système mécanique en mouvement présente, en cas de choc un danger d'autant plus grand que son énergie cinétique est élevée. En conséquence, le concepteur devra (tout en respectant les contraintes technologiques visant à assurer à la structure du robot une solidité suffisante) minimiser l'inertie du bras manipulateur en utilisant des matériaux appropriés et en allégeant les différents éléments constituant le manipulateur. De plus il devra définir une vitesse maximale de déplacement et l'organe terminal afin de limiter l'énergie cinétique du manipulateur.

I.5.4 Exactitude de trajectoire

Elle caractérise l'aptitude d'un robot à faire suivre l'interface mécanique une trajectoire commandée « n » fois dans la même direction, et « n » fois dans la direction opposée.

I.5.5 Répétitivité de trajectoire

C'est l'écart de l'accord entre les trajectoires atteintes pour la même trajectoire commandée « n » fois.

I.5.6 Reproductibilité de pose

Elle permet de quantifier les écarts entre les atteintes avant et après un arrêt du robot, Cet arrêt du robot peut être un arrêt du système, un arrêt d'urgence ou tout simplement l'arrêt en fin de journée et la reprise le lendemain matin. La valeur de cette caractéristique permettra de se rendre compte si le robot est capable d'accomplir une tâche sans programmation de certains points.

I.5.7 Critère d'ordre économique

Le prix de robot étant du en grande partie à la configuration de sa structure (élément rigide, lourd et encombrant), ainsi qu'au soin apporté à la réalisation de celle-ci (qualité et précision d'usinages), la solution d'avenir est probablement de remplacer les structures actuelles (rigides, précises) par des structures plus légères, dont la construction plus simple et moins précise entraîne des coûts de fabrication réduits.

I.6 Description d'un bras manipulateur

I.6.1 Structure générale

Allons jusqu'aux limites extrêmes de comparaison possible entre un robot manipulateur et le système « bras + cerveau » humaine au niveau fonctionnel, en se référant à la « figure I.2 »

Nous rencontrons les principaux éléments de système que nous avons porté sur le tableau avec leur fonctionnalité et leur équivalent pour un robot.

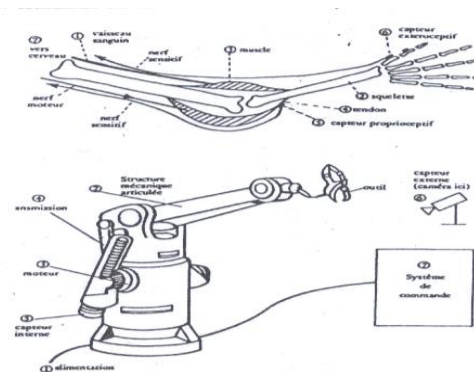


Figure I.2 Composants essentiel d'un bras manipulateur

I.6.2 Système actionneur

Le rôle du système actionneur est d'appliquer des forces ou couples à des points précis du manipulateur dans le but d'effectuer une opération de serrage, ou de modifier la position des éléments mobiles de la structure.

Bras + cerveau	Fonction	Équipement sur robot
Vaisseaux sanguins	Arrivée du sang chargé des éléments énergétique	Arrivée de la source énergétique
Os	Squelette bras + main	Système mécanique articulé (bras + préhenseur ou outil)
Muscles	Fonction motrice	Actionneurs (moteurs)
Tendons	Liaisons muscle- os	Transmissions
Capteurs proprioceptifs	Contrôle du niveau de contraction des muscles	Capture internes
Capture extéroceptive	Information sur l'environnement	Capture externe
Moelle épinière et cerveau	Command	Calculateur ou système de commande

Tableau I.1 comparaison entre le système Bras + cerveau et bras manipulateur

Le système actionneur comprend deux parties : l'organe actionneur proprement dit, générateur de force ou couple (moteur, vérin) et l'organe transmetteur, qui assure le déplacement du point d'application des forces.

I.7 Architecture d'un robot manipulateur [1]

I.7.1 Degré de liberté

Le degré de liberté (DDL) d'un robot manipulateur représente le nombre des mouvements élémentaire (rotation et translation par rapport au référentiel de base) appliqués à un solide indéformable, lié à l'extrémité de la structure mécanique c'est-à-dire que ce nombre est égal au nombre des paramètres indépendants qui fixe la situation de l'organe terminale[1].

I.7.2 Degré de mobilité

Le degré de mobilité est un indice qui nous permet de savoir la position des corps du robot manipulateur[1].

I.7.3 Les variable articulaires

Un manipulateur, est un cas concert d'une structure comportant (n) corps rigide (B_1, B_2, \dots, B_n) articulés entre eux figure I. 18, chaque configuration géométrique du manipulateur (associé à chaque position et orientation de l'organe terminal) peut être définie par un ensemble des variables dites « articulaire », une variable articulaire traduit les déplacements relatifs intervenant entre deux corps rigides adjacents B_i et B_{i-1} sous l'action d'une force extérieure produit par un ou plusieurs actionneurs. Les déplacements sont liés aux variables moteurs (θ_i) correspondant, aux positions linéaires des vérins. Ainsi, les variables (appelé également coordonnées articulaires ou coordonnées généralisées) seront-elle égale aux degrés de liberté du manipulateur [5]

I.7.4 Les architectures les plus courantes

Le porteur correspond à l'empilement de trois mobilités en rotation et/ou en translation, définissant 3DDL. On conçoit que la façon de répartir à la suite les modules de translation et/ou les modules de rotation d'une part, et la possibilité de jouer sur l'orientation (verticale et horizontale) de leur axe d'autre part, entraînent la conception de structures de porteurs d'allures fort différentes les unes des autres ; architecture qui prennent des appellations particulières liées au type de coordonnées qui est privilégié. Parmi toutes les combinaisons possibles, seules quelques-unes se sont révélées intéressantes pour les applications industrielles. On note que : T : désigne une translation, R : une rotation .

I.7.5 La structure cartésienne

Elle a 3 liaisons prismatiques (modules de translation) dont 2 horizontales et 1 verticale (TTT ou 3T) , l'axe Z, toujours vertical, est souvent appelé monte et baisse figure I.4



Figure I.3 structure cartésienne

I.7.6 La structure cylindrique

Elle associe une articulation rotoïde à un axe vertical à deux translations. On la désigne donc par RTT (ou R.2T) ou par TRT selon l'ordre des articulations en partant de la base

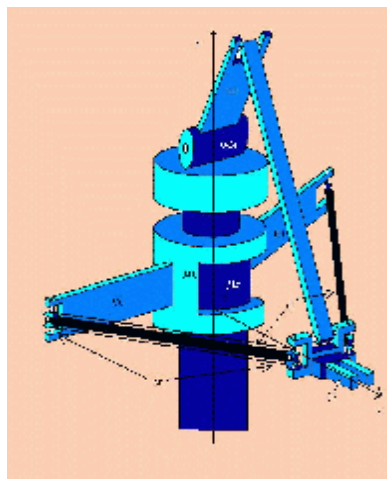


Figure I.4 A Robot structure cylindrique 1R 2T

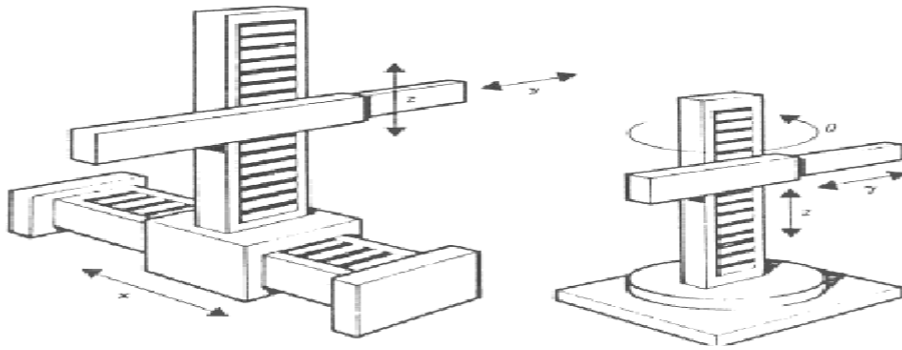


Figure I.4 B Robot Acma- Renault TH 8 1R 2T

I.7.7 La structure sphérique

Elle utilise successivement une rotation à axe vertical, une rotation à axe horizontal et une translation. C'est donc une architecture de type RRT ou (R 2T) FIGURE I.6.a-b



Figure I.5 A structure sphérique 2R 1T

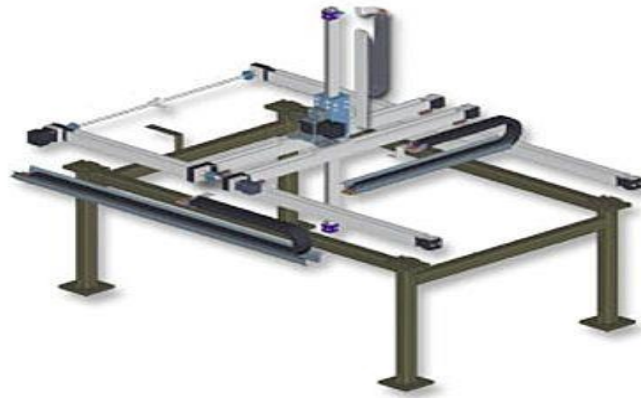


Figure I.5 B : Robot De Chargement

I.7.8 La structure polaire

Elle permet d'amener un solide en un point de l'espace par action sur les 3 axes de rotation : un a axe vertical et les deux suivant a axe horizontal figure I.7



FigureI.6 Robot a structure polaire

I.7.9 La structure de type SCARA

Elle (de la marque japonaise du premier robot de ce type) associe, tout comme la structure sphérique, deux rotations et une translation. Seulement ici, la translation est verticale et les articulations rotoides sont toutes deux à axe vertical. le cas est intéressant car il permet de constater qu'une même

association de liaisons (2R.1T) conduit à des architectures foncièrement différents, et par voie de conséquence à des applications industrielles totalement opposées.



Figure I.7 A: robot.a structure de type SCARA 2R 1T



Figure I.7 B: Robot SCARA 3RT

I.8 Les champs d'application des robots manipulateurs

Les applications des systèmes robotique sont multiples. Si pour les manipulateurs séquentiels, elles sont généralement limitées et claires (transfert de pièce, chargement – déchargement de machine outils), la situation est tout à fait différente lorsqu'il s'agit des robots industriels. Dans certains cas on utilisera des robots spécialisés en peinture et en soudage par exemple on peut cependant donner taches qui sont les plus significatives et qui apparaissent le plus souvent dans les ateliers automatisés :

- Manutention : chargement – déchargement de machines-outils, palettisation- dé palettisation alimentation de poster, manutentions particulières.
- la soude par points, à l'arc fusion, le découpage au chalumeau
- Le pistorage : robot de peinture. (pulvérisation)
- L'ébarbage et le polissage de pièce. (parachèvement).

- Mesure (capture portée par le robot).

- L'assemblage.

Il y a une autre fonction telle que la surveillance de réacteurs nucléaire, l'inspection des circuits imprimés ...[1].

I.9 Le Robot ABB étudiée

Le robot qui étudiée possède 6. D.D.L (à des articulations rotationnel)



FigureI.8 Robot ABB 6 axes

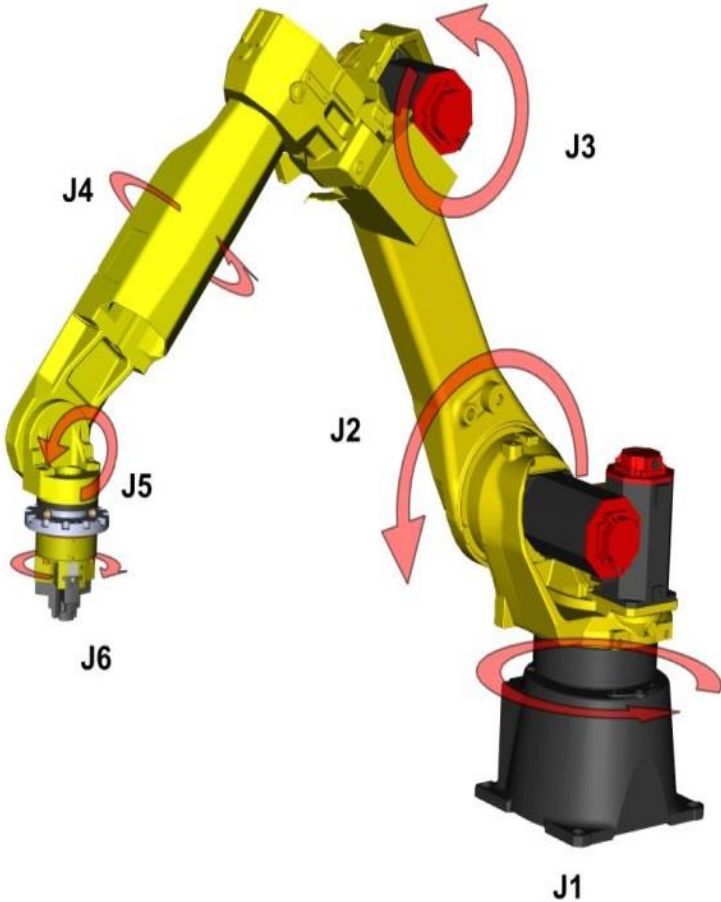


Figure I.9 Présentation les rotations et les mouvements des articulations du Robot ABB 6 axes.

I.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous allons présenter des définitions et des notions générale et de base relatives au la robotique, de leur caractérisations, et classification.

Chapitre II

Modélisation mathématique des robots manipulateurs

II.1 Introduction

Pour calculer ou étudier le modèle géométrique (MGD et MGI, MCD, MCI, MDD, MDI) il ya plusieurs méthodes et notations ont été proposées, en a base sur la méthode la plus répandue est celle de Denavit-Hartenberg cette méthode développée pour des structures ouvertes simples.

II.2 Paramètre de Denavit-Hartenberg pour les structures ouvertes simple

Les paramètre de Denavit-Hartenberg sont quasi universellement adoptés par les roboticiens pour définir , avec un nombre minimum de paramètres, les matrices de transformations homogènes élémentaires qui permettent de passer du repère associé à un corps du robot au corps qui le suit dans la chaîne cinématique , les corps sont supposés parfaitement rigides et les articulations sont considérées comme idéales [5].

Le repère de référence R_j est assigné pour chaque corps C_j du robot à l'articulation j

dont elle rencontre le corps précédent C_{j-1} ce repère est défini comme suit :

- L'axe Z_j est porté par l'axe de l'articulation j .
- L'axe X_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes Z_j et Z_{j+1} . Si les axes Z_j et Z_{j+1} sont parallèles ou colinéaires, le choix de X_j n'est pas unique.
- L'axe Y_j , non représenté sur la figure, est choisi de manière à former un trièdre orthonormé direct avec X_j et Z_j .

Les transformations élémentaires qui permettent le passage du repère R_{j-1} au repère R_j

Voilà les paramètres de D-H :

- a_j : l'angle de rotation entre les axes Z_{j-1} et Z_j correspondant à une rotation autour de l'axe X_{j-1} .
- d_j : la distance entre Z_{j-1} et Z_j mesurée le long de l'axe X_{j-1} .
- θ_j : l'angle de rotation entre les axes X_{j-1} et X_j correspondant à une rotation autour de l'axe Z_j .
- r_j : la distance entre X_{j-1} et X_j mesurée le long de l'axe Z_j .

Il est à noter que les angles sont positifs quand la rotation est dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

La variable articulaire q_j associée à la $j^{\text{ème}}$ articulation est soit θ_j soit r_j , selon que cette articulation est de type rotoïde ou prismatique, ce qui se traduit par la relation

$$q_j = \bar{\sigma}_j \cdot \theta_j + \sigma_j \cdot r_j \quad (\text{II.1})$$

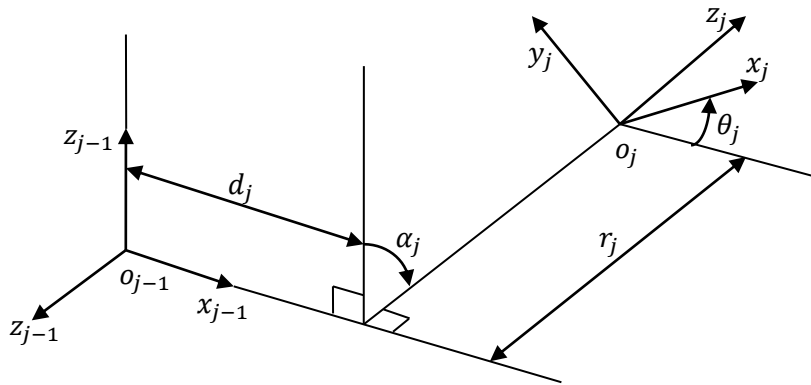


Figure II.1 Paramètres géométrique d'une structure ouverte simple

Avec :

- $\sigma_j = 0$ si l'articulation j est rotoïde
- $\sigma_j = 1$ si l'articulation j est prismatique
- $\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$

En termes de matrice de transformation homogène, les quatre transformations élémentaires définissant le repère R_j dans le repère R_{j-1} donnent la matrice suivante :

$${}^{j-1}T_j = \text{Rot}(X, \alpha_j) \times \text{Trans}(X, d_j) \times \text{Rot}(Z, \theta_j) \times \text{Trans}(Z, r_j) \quad (\text{II.2})$$

Après son développement, on obtient :

$${}^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & d_j \\ \cos \alpha_j \sin \theta_j & \cos \alpha_j \cos \theta_j & -\sin \alpha_j & r_j \sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j \sin \theta_j & \sin \alpha_j \cos \theta_j & \cos \alpha_j & r_j \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.3})$$

Ou :

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} d_j & & & \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1A}_j & -r_j \sin \alpha_j & \\ & & r_j \cos \alpha_j & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

La matrice de transformation définissant le repère R_{j-1} dans R_j est donnée par

$${}^j\mathbf{T}_{j-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \cos \alpha_j \sin \theta_j & \sin \alpha_j \sin \theta_j d_j \cos \theta_j & \\ -\sin \theta_j & \cos \alpha_j \cos \theta_j & \sin \alpha_j \cos \theta_j d_j \sin \theta_j & \\ 0 & -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j & -r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

Ou

$${}^j\mathbf{T}_{j-1} = \begin{bmatrix} d_j \cos \theta_j & & & \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1A}_j^T d_j \sin \theta_j & & \\ & & -r_j & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Avec la matrice d'orientation ${}^{j-1}\mathbf{A}_j$ et ce transposé est comme suite :

$${}^{j-1}\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 \\ \cos \alpha_j \sin \theta_j & \cos \alpha_j \cos \theta_j & -\sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j \sin \theta_j & \sin \alpha_j \cos \theta_j & \cos \alpha_j \end{bmatrix} \quad (\text{II.7})$$

Et

$${}^{j-1}\mathbf{A}_j^T = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \cos \alpha_j \sin \theta_j & \sin \alpha_j \sin \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \alpha_j \cos \theta_j & \sin \alpha_j \cos \theta_j \\ 0 & -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j \end{bmatrix} \quad (\text{II.8})$$

Où **Rot(u,α)** et **Trans(u ,d)** sont des matrices de transformation homogène (4*4) représentant respectivement une rotation α autour de l'axe **u** et une translation d le long de **u**. [2]

❖ **Remarques :**

- Pour la définition du repère de référence R_0 , le choix plus simple consiste à

reprendre R_0 confondu avec le repère R_1 quand $q_1=0$, ce qui signifie que z_0 est confondu avec z_1 et $O_0=O_1$ lorsque l'articulation 1 est rotoïde, et z_0 et confondu avec z_1 et x_0 est parallèle à x_1 lorsque l'articulation 1 est prismatique. Ce choix rend les paramètres α_1 et d_1 nuls.

- De même, on définit l'axe x_n du repère R_n comme étant colinéaire à x_{n-1} lorsque $q_n=0$.
- Pour une articulation j prismatique, l'axe z_j est parallèle à l'axe de l'articulation mais la position de cet axe dans l'espace peut être quelconque : on le place donc de telle sorte que d_j ou d_{j+1} soit nul.
- Lorsque z_j est parallèle à z_{j+1} , on place x_j de telle sorte que r_j ou r_{j+1} soit nul.
- En pratique, le vecteur des variables articulaires \mathbf{q} est donné par $\mathbf{q}=\mathbf{q}_e+\mathbf{q}_0$ ou q_0 représente un décalage (offset) et \mathbf{q}_e sont les variables codeurs. [2]

II.3 Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct (MGD) est l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer la situation de l'organe terminal, c'est-à-dire les coordonnées opérationnelles du robot, en fonction de ses coordonnées articulaires. Dans le cas d'une chaîne ouverte simple, il peut être représenté par la matrice de transformation 0T_n :

$${}^0T_n = {}^0T_1(q_1) {}^1T_2(q_2) \dots {}^{n-1}T_n(q_n) \quad (\text{II.9})$$

Le modèle géométrique direct du robot peut aussi être représenté par la relation :

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (\text{II.10})$$

\mathbf{q} étant le vecteur des variables articulaires tel que :

$$\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]^T \quad (\text{II.11})$$

Les coordonnées opérationnelles sont définies par :

$$\mathbf{X} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m]^T \quad (\text{II.12})$$

Plusieurs possibilités existent pour la définition du vecteur \mathbf{X} . Par exemple, avec les éléments de la matrice 0T_n :

$$\mathbf{X} = [P_x P_y \ P_z s_x s_y s_z n_x n_y n_z a_x \ a_y a_z]^T \quad (\text{II.13})$$

ou bien, sachant que $\mathbf{s} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}$:

$$\mathbf{X} = [P_x P_y \ P_z n_x n_y n_z a_x \ a_y a_z]^T \quad (\text{II.14})$$

Pour les rotations, d'autres représentations sont couramment utilisées comme les angles d'Euler, les angles de Roulis-Tangage-Lacet (RTL) ou les paramètres d'Euler (quaternions).

On peut facilement passer des cosinusdirecteurs, n, a à l'une quelconque de ces représentations et inversement.[2]

II.4 Modèle géométrique inverse (M.G.I)

II.4.1 Introduction

On a vu que le modèle géométrique direct d'un robot permettait de calculer les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires, par contre Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal.

Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (MGI). On peut distinguer trois méthodes de calcul du MGI :

- La méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plupart des robots industriels.
- La méthode de Pieper qui permet de résoudre le problème pour les robots à six degrés de liberté possédant trois articulations rotoïdes d'axes concourants ou trois articulations prismatiques.
- La méthode générale de Raghavan et Roth, donnant la solution générale des robots à six articulations à partir d'un polynôme de degré au plus égal à 16.

On s'intéresse à travailler par la méthode de Paul, car elle convient pour la plupart des robots industriels .[7]

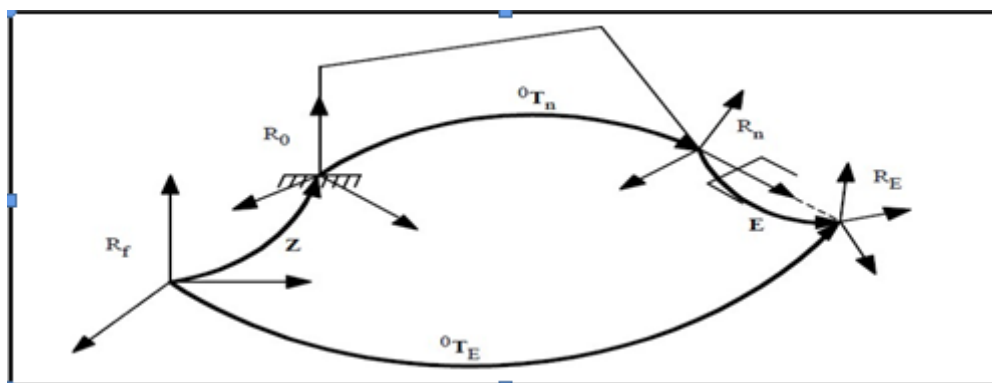


Figure II.2 transformation entre l'organe terminal et le repère atelier.

II.4.2 Position du problème

Soit ${}^f\mathbf{T}_E$ la matrice de transformation homogène représentant la situation désirée du repère outil R_E par rapport au repère atelier R_f . Dans le cas général, on peut exprimer ${}^f\mathbf{T}_E$ sous la forme :

$${}^f\mathbf{T}_E = \mathbf{Z} {}^0\mathbf{T}_n \mathbf{E} \quad (\text{II.15})$$

Avec :

- \mathbf{Z} est la matrice de transformation définissant la situation du robot (repère R_0) dans le repère atelier .
- ${}^0\mathbf{T}_n$ est la matrice de transformation du repère terminal R_n dans le repère R_0 ,
- \mathbf{E} est la matrice de transformation définissant le repère outil R_E dans le repère terminal R_n .

Lorsque $n \geq 6$, on peut écrire la relation suivante en regroupant dans le membre de droite tous les termes connus :

$$U_0 = {}^0\mathbf{T}_n = \mathbf{Z}^{-1} {}^f\mathbf{T}_E \mathbf{E}^{-1} \quad (\text{II.16})$$

Et :

$\underline{\mathbf{X}}$	\rightarrow	${}^f\mathbf{T}_E$	\rightarrow	U_0	\rightarrow	\mathbf{q}
Convention						Méthode de paul

(II.17)

❖ Remarque

Lorsque $n < 6$, l'espace opérationnel du robot est de dimension inférieure à six. Il n'est pas possible de faire coïncider le repère outil R_E avec un repère R_E décrivant la tâche sauf lorsque les repères R_E et R_E sont conditionnés de façon bien particulière pour s'adapter au nombre insuffisant de degrés de liberté. Pratiquement, au lieu d'amener le repère R_E sur le repère R_E , on cherchera à faire coïncider entre eux des éléments géométriques liés à ces repères (points, droites).

II.4.3 Nombre de solutions au problème inverse

Dans le calcul du MGI, trois cas se présentent :

- **Absence de solution**

lorsque la situation désirée est en dehors de la zone accessible du robot. Celle-ci est limitée par le nombre de degrés de liberté, les débattements articulaires et la dimension des segments .

- **Infinité de solutions**

Ce cas se présente lorsque :

- Le robot est redondant vis-à-vis de la tâche .
- Le robot se trouve dans certaines configurations singulières .

- **Solutions en nombre fini**

exprimées par un ensemble de vecteurs $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_r\}$. On dit qu'un robot manipulateur est résoluble [Pieper 68], [Roth 76] lorsqu'il est possible de calculer toutes les configurations permettant d'atteindre une situation donnée. Aujourd'hui, tous les manipulateurs série ayant jusqu'à six degrés de liberté et qui ne sont pas redondants peuvent être considérés comme résolubles . Le nombre de solutions dépend de l'architecture du robot manipulateur.[7]

II.4.4 Calcul du modèle géométrique inverse (MGI)

II.4.4.1 Présentation de la méthode

Considérons un robot manipulateur dont la matrice de transformation homogène a pour expression :

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n \quad (\text{II.18})$$

Soit \mathbf{U}_0 la situation désirée telle que :

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} S_x & n_x a_x P_x \\ S_y & n_y a_y P_y \\ S_z & n_z a_z P_z \\ 0 & 0 \ 0 \ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$\mathbf{U}_0 = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n \quad (\text{II.20})$$

Chapitre II modélisation mathématique des robots manipulateurs

Pour trouver les solutions de l'équation (II.19) a proposé une méthode qui consiste à prémultiplier successivement les deux membres de l'équation (II.19) par les matrices ${}^jT_{j-1}$ pour j variant de 1 à $n-1$, opérations qui permettent d'isoler et d'identifier l'une après l'autre les variables articulaires que l'on recherche. Pour un robot à six degrés de liberté par exemple, on procède comme suit :

– multiplication à gauche de l'expression (II.19) par 1T_0

$${}^1T_0U_0 = {}^1T_2{}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \quad (\text{II.21})$$

Le terme de droite est fonction des variables q_2, \dots, q_6 . Le terme de gauche n'est fonction que des éléments de U_0 et de la variable q_1 .

- Identification terme à terme des deux membres de l'équation (II.20) . On se ramène à un système d'une ou de deux équations fonction de q_1 uniquement, dont la structure appartient à un type particulier parmi une dizaine de types possibles ;
- Multiplication à gauche de l'expression (II.20) par 2T_1 et calcul de q_2 .

La succession des équations permettant le calcul de tous les q_j est la suivante :

$$\begin{aligned} U_0 &= {}^0T_1{}^1T_2{}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \\ {}^1T_0U_0 &= {}^1T_2{}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \\ {}^2T_1{}^1T_0U_0 &= {}^2T_3{}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \\ {}^3T_2{}^2T_1{}^1T_0U_0 &= {}^3T_4{}^4T_5{}^5T_6 \\ {}^4T_3{}^3T_2{}^2T_1{}^1T_0U_0 &= {}^4T_5{}^5T_6 \\ {}^5T_4{}^4T_3{}^3T_2{}^2T_1{}^1T_0U_0 &= {}^5T_6 \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Les éléments des deuxièmes membres ayant déjà été calculés lors du calcul du MGD :

$$U_j = {}^jT_6 = {}^jT_{j-1}U_{j-1} \quad (\text{II.23})$$

L'utilisation de la méthode sur un grand nombre de robots industriels a permis de constater que les types d'équations rencontrés sont peu nombreux et que leur résolution même si elle nécessite parfois quelques développements reste cependant relativement simple.

❖ Remarques :

- Lorsqu'un robot possède plus de six degrés de liberté, le système à résoudre contient plus d'inconnues que de paramètres décrivant la tâche : il manque $(n-6)$ relations. Deux stratégies sont possibles :
 - La première consiste à fixer $(n-6)$ articulations. On se ramène alors au problème à six degrés de liberté. Le choix de ces articulations est dicté par les spécifications de la tâche et par la morphologie du robot. On peut ensuite reconfigurer le robot autour des valeurs obtenues en vue de satisfaire des critères d'optimisation supplémentaires.
 - La deuxième stratégie consiste à introduire $(n-6)$ relations supplémentaires décrivant la redondance, comme par exemple dans [Hollerbach 84b] pour des robots à sept degrés de liberté.
- Lorsque le robot possède moins de six degrés de liberté, il ne peut pas donner à son organe terminal n'importe quelles positions et orientations. Il n'est pas possible d'amener le repère terminal R_E sur un autre repère R_E désiré sauf si certains éléments de 0T_E sont imposés de façon à compenser le nombre insuffisant de degrés de liberté. Sinon, on est amené à réduire le nombre d'équations en ne considérant que certains éléments géométriques liés aux repères R_E et R_E .

II.4.4.2 Solutions aux types d'équations rencontrés

Ces équations peuvent avoir des solutions évidentes, ou se ramènent aux principaux types rencontrés en robotique, mentionnés dans le tableau ci-dessous : [7]

Type d'équations	Forme du système d'équations
Type 1	$X.r_i=Y$
Type 2	$X.\sin\theta_i+Y.\cos\theta_i=Z$
Type 3	$\begin{array}{l} X_1.\sin\theta_i=Y_1 \quad X_1.\sin\theta_i+Y_1.\cos\theta_i=Z_1 \\ \text{ou} \\ X_2.\cos\theta_i=Y_2 \quad X_2.\sin\theta_i+Y_2.\cos\theta_i=Z_2 \end{array}$
Type 4	$\begin{array}{l} X_1.r_j.\sin\theta_i=Y_1 \\ X_2.r_j.\cos\theta_i=Y_2 \end{array}$
Type 5	$\begin{array}{l} X_1.\sin\theta_i=Y_1+Z_1.r_j \\ X_2.\cos\theta_i=Y_2+Z_2.r_j \end{array}$
Type 6	$\begin{array}{l} W.\sin\theta_j=X.\cos\theta_i+Y.\sin\theta_i+Z_1 \\ W.\cos\theta_j=X.\sin\theta_i-Y.\cos\theta_i+Z_2 \end{array}$
Type 7	$\begin{array}{l} W_1.\cos\theta_j+ W_2.\sin\theta_j= X.\cos\theta_i+ Y.\sin\theta_i+Z_1 \\ W_1.\sin\theta_j- W_2.\cos\theta_j= X.\sin\theta_i- Y.\cos\theta_i+Z_2 \end{array}$
Type 8	$\begin{array}{l} X.\cos\theta_i+Y.\cos(\theta_i+\theta_j)= Z_1 \\ X.\sin\theta_i+Y.\sin(\theta_i+\theta_j)= Z_2 \end{array}$
Type 9	$X.\cos\theta_i=Y$
Type 10	$X.\sin\theta_i=Y$

Tableau II.1 Systèmes d'équations possibles

II.5 Modélisation cinématique

II.5.1 Introduction

Le modèle cinématique est littéralement, un modèle des vitesses. Il exprime les relations entre les vitesses articulaires de chaque liaison et les vitesses cartésiennes d'un corps de la chaîne cinématique, généralement l'organe terminal.

Ce modèle est donc un modèle par accroissements infinitésimaux: chaque variation élémentaire de la valeur d'une articulation implique une variation de position de l'organe terminal, et inversement. Lorsque ces variations infinitésimales sont exprimées par rapport au temps, on peut les considérer comme des vitesses.

Le modèle cinématique permet donc non seulement de compléter éventuellement le modèle géométrique en tenant compte des vitesses, mais aussi de remplacer le modèle géométrique en agissant par accroissements successifs, le robot peut se déplacer d'un point donné à un autre.

II.5.2 Modèle cinématique direct

Le modèle cinématique direct d'un robot manipulateur décrit les vitesses des coordonnées opérationnelles en fonction des vitesses articulaires. Il est noté:

$$\dot{X} = J\dot{q} \quad (\text{II.24})$$

où $J(q)$ désigne la matrice jacobienne de dimension $(m \times n)$ du mécanisme, qui est fonction de la variable articulaire q . [9]

II.5.3 Calcul de la matrice jacobienne de base

On peut obtenir la matrice jacobienne par une méthode de calcul direct, fondée sur la relation entre les vecteurs des vitesses de translation (V_n) et vitesses de rotation (ω_n) du repère R_n d'une part et les vitesses articulaires \dot{q} d'autre part.

$$\begin{bmatrix} V_n \\ \omega_n \end{bmatrix} = J_n \dot{q} \quad (\text{II.25})$$

On note que V_n est la dérivée par rapport au temps du vecteur P_n . En revanche, ω_n n'est pas la dérivée d'une représentation quelconque de l'orientation.

Considérons la k^{ieme} articulation d'une chaîne articulée. La vitesse \dot{q}_k induit sur le repère terminal R_n la vitesse de translation $V_{k,n}$ et la vitesse de rotation $\omega_{k,n}$. On rappelle que a_k est le vecteur unitaire porté par l'axe z_k de l'articulation k et on désigne par $L_{k,n}$ le vecteur d'origine O_k et d'extrémité O_n . En appliquant le théorème de composition des vitesses, les vitesses de translation et de rotation du repère terminal s'écrivent:

$$\begin{cases} V_n = \sum_{k=1}^n V_{k,n} = \sum_{k=1}^n [\sigma_k a_k + \bar{\sigma}_k (a_k \times L_{k,n})] \dot{q}_k \\ \omega_n = \sum_{k=1}^n \omega_{k,n} = \sum_{k=1}^n \bar{\sigma}_k a_k \dot{q}_k \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

En mettant ce système sous forme matricielle et en l'identifiant à la relation (2), on déduit que:

$$J_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 a_1 + \bar{\sigma}_1 (a_1 \times L_{1,n}) & \dots & \sigma_n a_n + \bar{\sigma}_n (a_n \times L_{n,n}) \\ \bar{\sigma}_1 a_1 & \dots & \bar{\sigma}_n a_n \end{bmatrix} \quad (\text{II.27})$$

En général, on exprime V_n et ω_n soit dans le repère R_n , soit dans le repère R_0 . La matrice jacobienne correspondante est notée J_n^n ou J_n^0 respectivement. Ces matrices peuvent aussi être calculées en utilisant une matrice J_n^i , $i = 0, \dots, n$, grâce à la relation suivant de transformation de la matrice jacobienne entre repères:

$$J_n^s = \begin{bmatrix} A_i^s & 0_3 \\ 0_3 & A_i^s \end{bmatrix} J_n^i \quad (\text{II.28})$$

où A_i^s est la matrice d'orientation, de dimension (3 x 3), du repère R_i exprimée dans le repère R_s .

La matrice J_n^s peut donc être décomposée en deux matrices, la première étant toujours de rang plein.

Les deux matrices J_n^i et J_n^s ayant les mêmes positions singulières, on cherche pratiquement à utiliser le repère de projection R_i qui simplifie les éléments de la matrice J_n^i .

II.5.4 Calcul de la matrice J_n^i

En remarquant que le produit vectoriel $a_k \times L_{k,n}$ peut se transformer en $\hat{a}_k^k L_{k,n}^k$ la k^{ieme} colonne de J_n^i notée $J_{n,k}^i$ devient :

$$J_{n,k}^i = \begin{bmatrix} \sigma_k a_k^i + \bar{\sigma}_k A_i^i \hat{a}_k^k L_{k,n}^k \\ \bar{\sigma}_k a_k^i \end{bmatrix} \quad (\text{II.29})$$

Avec :

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.30})$$

En développant et en notant que $a_k^k = [0 \ 0 \ 1]^T$ et que $L_{k,n}^k = P_n^k$ on obtient:

$$J_{n,k}^i = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_k a_k^i + \bar{\sigma}_k (-P_{ny}^k s_k^i + P_{nx}^k n_k^i) \\ \bar{\sigma}_k a_k^i \end{bmatrix} \quad (\text{II.31})$$

où P_{nx}^k , et P_{ny}^k sont respectivement les composantes x et y du vecteur P_n^k . [10]

II.6 Modèle cinématique inverse

L'objectif du modèle cinématique inverse est de calculer, à partir d'une configuration q donnée, les vitesses articulaires \dot{q} qui assurent au repère terminal une vitesse opérationnelle \dot{X} imposée. Pour obtenir le modèle cinématique inverse, on inverse le modèle cinématique direct en résolvant un système d'équations linéaires. La mise en œuvre peut être faite de façon analytique ou numérique:

- la solution analytique a pour avantage de diminuer considérablement le nombre d'opérations, mais on doit traiter séparément tous les cas singuliers

- les méthodes numériques sont plus générales, la plus répandue étant fondée sur la notion de pseudo-inverse: les algorithmes traitent de façon unifiée les cas réguliers, singuliers et redondants. Elles nécessitent un temps de calcul relativement important.

Nous présentons, dans ce paragraphe, les techniques à mettre en œuvre pour établir un modèle cinématique inverse dans les cas réguliers. [11]

II.6.1 Forme générale du modèle cinématique

Soit $X = (X_p^T X_r^T)$ une représentation quelconque dans le repère R_0 de la situation du repère R_n fixé à un solide, les éléments X_p et X_r désignant respectivement la position et l'orientation opérationnelles du solide. Les relations entre les vitesses \dot{X}_p et \dot{X}_r et les vitesses V_n^0 et ω_n^0 du repère R_n sont telles que:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_p \\ \dot{X}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_p & 0_3 \\ 0_3 & \Omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} = \Omega \begin{bmatrix} V_n^0 \\ \omega_n^0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.32})$$

Les matrices Ω_p et Ω_r dépendent de la représentation choisie respectivement pour la position et pour l'orientation .

Le modèle cinématique direct a pour forme générale:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \Omega_p 0_3 \\ 0_3 \Omega_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_i^0 0_3 \\ 0_3 A_i^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_3 - \hat{L}_{j,n}^i \\ 0_3 \quad I_3 \end{bmatrix} J_{n,j}^i \dot{q} \quad (\text{II.33})$$

ou, sous forme condensée:

$$\dot{X} = J \dot{q} \quad (\text{II.34})$$

II.6.2 Modèle cinématique inverse dans le cas régulier

Dans ce cas, la matrice jacobienne J est carrée d'ordre n et son déterminant est non nul. La méthode la plus générale consiste à calculer J^{-1} , la matrice inverse de J , qui permet de déterminer les vitesses articulaires \dot{q} grâce à la relation:

$$\dot{q} = J^{-1} \dot{X} \quad (\text{II.35})$$

Lorsque la matrice J a la forme suivante:

$$J = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

Les matrices A et C étant carrées inversibles, il est facile de montrer que l'inverse de cette matrice s'écrit:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

La résolution du problème se ramène donc à l'inversion, beaucoup plus simple, de deux matrices de dimension moindre. Lorsque le robot manipulateur possède six degrés de liberté et un poignet de type rotule, la forme générale de J est celle de la relation (2.33), A et C étant de dimension (3×3) .

II.6.3 Pseudo-inverse

Il faut utiliser la pseudo-inverse J^+ pour inverser la matrice jacobienne J_4^0 , Parce que dans notre cas la matrice jacobienne J_4^0 est de dimension (6×4) c.à.d. n'est pas carrée . **[10]**

$$J^+ = (J^T J)^{-1} J^T \quad (\text{II.38})$$

$$J^+ = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} & J_{15} & J_{16} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} & J_{25} & J_{26} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} & J_{35} & J_{36} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} & J_{45} & J_{46} \end{bmatrix} \text{ de dimension } (4 \times 6) \quad (\text{II.39})$$

II.7 Modélisation dynamique

Le modèle dynamique est la relation entre les couples (et/ou forces) appliqués aux actionneurs et les positions, vitesses et accélérations articulaires. On représente le modèle dynamique par une relation de la forme :

$$\Gamma = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{f}_e) \quad (\text{II.40})$$

avec :

- Γ : vecteur des couples/forces des actionneurs, selon que l'articulation est rotoïde ou prismatique. Dans la suite, on écrira tout simplement couples.
- \mathbf{q} : vecteur des positions articulaires .
- $\dot{\mathbf{q}}$: vecteur des vitesses articulaires .
- $\ddot{\mathbf{q}}$: vecteur des accélérations articulaires .
- \mathbf{f}_e : vecteur représentant l'effort extérieur (forces et moments) qu'exerce le robot sur l'environnement.

On convient d'appeler modèle dynamique inverse, ou tout simplement modèle dynamique, la relation de la forme.

Le modèle dynamique direct est celui qui exprime les accélérations articulaires en fonction des positions, vitesses et couples des articulations. Il est alors représenté par la relation :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \Gamma, \mathbf{f}_e) \quad (\text{II.41})$$

Parmi les applications du modèle dynamique, on peut citer :

- la simulation, qui utilise le modèle dynamique direct .
- le dimensionnement des actionneurs .
- l'identification des paramètres inertiels et des paramètres de frottement du robot .
- la commande, qui utilise le modèle dynamique inverse.

Plusieurs formalismes ont été utilisés pour obtenir le modèle dynamique des robots. Les formalismes les plus souvent utilisés sont : **[10]**

- Le formalisme de Lagrange
- Le formalisme de Newton-Euler

II.7.1 Formalisme de Lagrange

Le but de ce paragraphe est d'étudier la forme générale du modèle dynamique, de mettre en évidence les différents termes qui y interviennent et de déduire leurs propriétés caractéristiques. La méthode présentée n'est pas celle qui donne le modèle le plus performant du point de vue du nombre d'opérations, mais c'est la méthode la plus simple compte tenu de ces objectifs. Nous considérerons un robot idéal sans frottement, sans élasticité et ne subissant ou n'exerçant aucun effort extérieur.

Le formalisme de Lagrange décrit les équations du mouvement, lorsque l'effort extérieur sur l'organe terminal est supposé nul, par l'équation suivante :

$$\Gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 1, \dots, n \quad (\text{II.42})$$

avec :

- L : lagrangien du système égal à $E - U$.
- E : énergie cinétique totale du système.
- U : énergie potentielle totale du système.

II.7.1.1 Forme générale des équations dynamiques

L'énergie cinétique du système est une fonction quadratique des vitesses articulaires :

$$E = \frac{1}{2} \dot{q}^T A \dot{q} \quad (\text{II.43})$$

II.7.1.2 Calcul de l'énergie

L'énergie cinétique du système est donnée par la relation :

$$E = \sum_{j=1}^n E_j \quad (\text{II.44})$$

où E_j désigne l'énergie cinétique du corps C_j , qui s'exprime par :

$$E_j = \frac{1}{2} (\omega_j^T I_{G_j} \omega_j + M_j V_{G_j}^T V_{G_j}) \quad (\text{II.45})$$

Etant donné que :

$$V_{G_j} = V_j + \omega_j \times S_j \quad (\text{II.46})$$

et sachant que :

$$J_j = I_{G_j} - M_j S_j \wedge S_j^{\wedge} \quad (\text{II.47})$$

$$E_j = \frac{1}{2} [(\omega_j^T J_j \omega_j + M_j V_j^T V_j + 2 M_j S_j^T (V_j \times \omega_j))] \quad (\text{II.48})$$

II.7.1.3 Propriétés du modèle dynamique

- La matrice \mathbf{A} est symétrique et définie positive, donc $A_{ij} = A_{ji}$.
- Les énergies du corps C_j sont fonction de (q_1, \dots, q_j) et de $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_j)$.
- A partir de la propriété b, on peut prouver que Γ_i est fonction des paramètres inertiels des corps C_i et des corps aval C_{i+1}, \dots, C_n .
- On montre que, \mathbf{C} étant défini selon la relation, la matrice $[\frac{d}{dt}\mathbf{A} - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]$ est antisymétrique, ce qui est une propriété intéressante pour la commande.
- Le modèle dynamique est linéaire vis-à-vis des éléments des paramètres inertiels M_j , $^j\mathbf{M}\mathbf{S}_j$ et $^j\mathbf{J}_j$, appelés paramètres inertiels standard. Cette propriété sera mise à profit pour identifier les paramètres inertiels et diminuer le nombre d'opérations du modèle dynamiques.

II.7.1.4 Prise en compte des frottements

De nombreuses études ont été réalisées afin de mieux analyser les frottements au niveau des articulations, des réducteurs et des transmissions. Les frottements non compensés provoquent en effet des erreurs statiques, des retards et des cycles limites. Différents modèles de frottement ont été proposés dans la littérature. Citons par exemple les travaux .

Dans bon nombre d'applications, le modèle du frottement se ramène à un terme constant pour le frottement sec (ou de Coulomb) et un terme fonction de la vitesse pour le frottement visqueux . L'expression du couple de frottement Γ_{fi} de l'articulation i s'écrit alors :

$$\Gamma_{fi} = \mathbf{F}_{si}\text{sign}(\dot{q}_i) + \mathbf{F}_{vi}\dot{q}_i \quad (\text{II.49})$$

II.7.2 Formalisme de Newton-Euler

Les équations de Newton-Euler expriment le torseur dynamique en \mathbf{G}_j des efforts extérieurs sur un corps j par les équations :

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}_j \quad (\text{II.50})$$

$$\mathbf{M}_{G_j} = \mathbf{I}_{G_j} \dot{\boldsymbol{\omega}}_j + \boldsymbol{\omega}_j \times (\mathbf{I}_{G_j} \boldsymbol{\omega}_j) \quad (\text{II.51})$$

La méthode de Luh, Walker et Paul, considérée comme une avancée importante vers la possibilité de calculer en ligne le modèle dynamique des robots, utilise ces équations et est

Chapitre II modélisation mathématique des robots manipulateurs

fondée sur une double récurrence. La récurrence avant, de la base du robot vers l'effecteur, calcule successivement les vitesses et accélérations des corps, puis leur torseur dynamique. Une récurrence arrière, de l'effecteur vers la base, permet le calcul des couples des actionneurs en exprimant pour chaque corps le bilan des efforts.

Cette méthode permet d'obtenir directement le modèle dynamique inverse sans avoir à calculer explicitement les matrices \mathbf{A} , \mathbf{C} et \mathbf{Q} . Les paramètres inertiels utilisés sont M_j , \mathbf{S}_j et $\mathbf{I}G_j$. Le modèle ainsi obtenu n'est pas linéaire par rapport aux paramètres inertiels.[12]

II.8 Conclusion

On a exposé dans ce chapitre le calcul du modèle géométrique direct des robots à structure ouverte simple en l'utilisation des matrices de transformation homogène leur application exige le respect des règles et conventions de repérage.

Partant de la connaissance du modèle géométrique direct du robot, on a abordé le modèle géométrique inverse, c'est à dire, de trouver les valeurs de chaque variable articulaire pour que l'effecteur terminal atteigne un point désiré dans l'espace de travail en utilisant la méthode de Paul. Cette méthode intuitive en ce sens qu'elle laisse à l'utilisateur le choix des équations à résoudre, est applicable à un grand nombre de chaînes cinématiques possédant surtout des paramètres géométriques particuliers: distance nulles ou angles dont les sinus et cosinus sont égaux à 0, 1, -1, En plus, cette méthode analytique donne toutes les solutions possibles du modèle géométrique inverse.

En suite on a abordé le modèle cinématique direct d'un robot en calculant sa matrice jacobienne de base ; l'intérêt de la matrice jacobienne est multiple :

- Elle est à la base du modèle différentiel inverse, permettant de calculer une solution locale des variables articulaires q connaissant les coordonnées opérationnelles X .
- En statique, on utilise la jacobienne pour établir la relation liant les efforts exercés par l'organe terminal sur l'environnement aux forces et couples des actionneurs.

La détermination de l'inverse de la jacobienne permet le calcul du modèle cinématique inverse.

Ce chapitre se termine par l'établissement de l'espace de travail, s'il est correctement défini, est certainement l'outil efficace pour évaluer les performances géométriques globales. Les limites articulaires du robot et les obstacles de l'environnement ont souvent pour conséquence de limiter les possibilités de déplacement au sein de l'espace de travail, ce que soit mouvement point à point ou en suivi de trajectoire continues.

Chapitre III
Les lois de commande
des robots
Manipulateurs

III Commande

III.1 Introduction

La commande des robots-manipulateurs a fait l'objet de nombreux travaux. Les principales approches utilisées sont :

- La commande classique de type PID .
- La commande par découplage non linéaire .
- La commande passive .
- La commande fondée sur une fonction de Lyapunov .
- La commande adaptative .
- La commande robuste à structure variable (modes glissants).

Il n'est pas possible, dans le cadre de ce cours, de traiter en détail l'ensemble de ces approches. Aussi, après avoir rappelé le principe d'une commande classique de type PID (commande proportionnelle, intégrale et dérivée), on insistera sur la commande par découplage non linéaire, méthode qui est considérée comme la solution théorique idéale pour la commande des robots manipulateurs. Pour une étude plus détaillée de la commande des robots, le lecteur pourra consulter.

III.2 Equations du mouvement

Pour alléger les notations, on se limite aux robots à chaîne ouverte simple. Afin de bien appréhender la problématique de la commande des robots-manipulateurs, il est utile de rappeler les équations du modèle dynamique du robot dont la forme générale, pour un robot à n degrés de liberté, est la suivante :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + Q(q) + \text{diag}(q) F_v + \text{diag}(\text{sign}(\dot{q})) F_s \quad (\text{III.1})$$

ou, sous une forme plus compacte :

$$\Gamma = A(q)\ddot{q} + H(q, \dot{q}) \quad (\text{III.2})$$

ou encore, le modèle ayant une forme linéaire par rapport aux paramètres dynamiques :

$$\Gamma = \Phi(q, \dot{q}, \ddot{q})\chi \quad (\text{III.3})$$

On rappelle que Γ est le vecteur (nx1) des couples/forces articulaires, $A(\mathbf{q})$ est la matrice (nxn) d'inertie du robot, $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ est le vecteur (nx1) représentant les forces centrifuges et les forces de Coriolis, $Q(\mathbf{q})$ est le vecteur des forces de gravité, F_v et F_s sont les vecteurs des paramètres de frottement respectivement visqueux et sec, χ représente le vecteur des paramètres dynamiques (paramètres inertiels et paramètres de frottement).

En supposant que les organes de transmission ne comportent ni jeux ni élasticité, le couple transmis à l'articulation j par un moteur électrique à courant continu ou synchrone commandé en courant s'exprime par :

$$\Gamma_j = N_j K_{aj} K_{Tj} u_j \quad (\text{III.4})$$

où N_j est le rapport de réduction, K_{aj} est le gain de l'amplificateur, K_{Tj} est la constante de couple du moteur et u_j est le signal d'entrée de l'amplificateur.

La synthèse de la commande consiste à calculer Γ_j , puis à calculer le signal u_j permettant de suivre la consigne désirée.

III.3 Commande classique

III.3.1 Commande PID dans l'espace articulaire

Le modèle dynamique décrit un système de n équations différentielles du second ordre non linéaires et couplées, n étant le nombre d'articulations. Pourtant, dans une commande classique, qui est celle de la plupart des robots industriels actuels, le mécanisme est considéré comme un système linéaire et chacune de ses articulations est asservie par une commande décentralisée de type PID à gains constants. Ses avantages sont la facilité d'implantation et le faible coût en calcul. En contrepartie, la réponse temporelle du robot varie selon sa configuration, on constate des dépassements de consigne et une mauvaise précision de suivi dans les mouvements rapides. Dans beaucoup d'applications, ces inconvénients ne représentent pas un gros handicap. En pratique, une telle commande est réalisée selon le schéma de la figure [9]

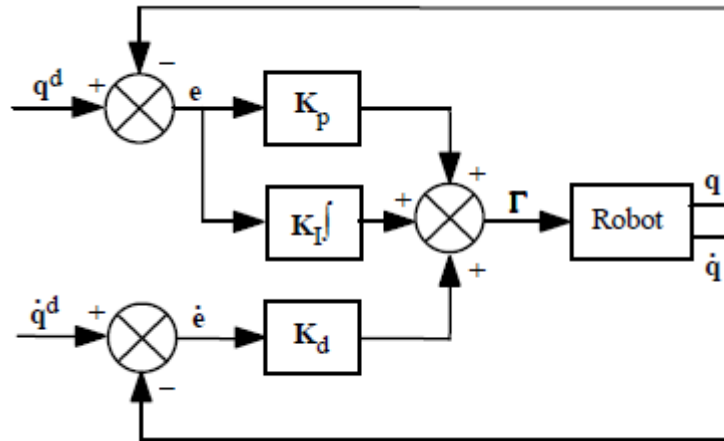


Figure III.1 Schéma classique d'une commande PID

La loi de commande est donnée par :

$$\Gamma = K_p (q^d - q) + K_d (\dot{q}^d - \dot{q}) + K_I \int_{t_0}^t (q^d - q) dt \quad (III.5)$$

où $\dot{q}^d(t)$ et $q^d(t)$ désignent les vitesse et position désirées dans l'espace articulaire et où K_p , K_d et K_I sont des matrices diagonales définies positives, de dimension $(n \times n)$, dont les éléments génériques sont respectivement les gains proportionnels K_{pj} , dérivés K_{dj} et intégraux K_{Ij} .

Le calcul des gains K_{pj} , K_{dj} et K_{Ij} est effectué en considérant le modèle de l'articulation j représenté par le système linéaire du deuxième ordre à coefficients constants suivant :

$$\Gamma_j = a_j \ddot{q}_j + F_{vj} \dot{q}_j + \gamma_j \quad (III.6)$$

équation dans laquelle $a_j = A_{jjmax}$ désigne la valeur maximale de l'élément A_{jj} de la matrice d'inertie du robot et γ_j représente un couple perturbateur.

La fonction de transfert en boucle fermée pour $\gamma = 0$ est alors donnée par :

$$\frac{q_j(s)}{q_j^d(s)} = \frac{K_{dj}s^2 + K_{pj}s + K_{Ij}}{a_j s^3 + (K_{dj} + F_{vj})s^2 + K_{pj}s + K_{Ij}} \quad (III.7)$$

et l'équation caractéristique s'écrit :

$$\Delta(s) = a_j s^3 + (K_{dj} + F_{vj})s^2 + K_{pj}s + K_{Ij} \quad (III.8)$$

La solution la plus courante en robotique consiste à choisir les gains de manière à obtenir un pôle triple réelnégatif, ce qui donne une réponse rapide sans oscillations. Par conséquent, l'équation caractéristique se factorise de la façon suivante :

$$\Delta (s) = a_j (s + \omega_j)^3 \quad (\text{III.9})$$

Avec $\omega_j > 0$.

On en déduit pour les gains :

$$\begin{cases} K_{pj} = 3a_j \omega_j^2 \\ K_{aj} + F_{vj} = 3a_j \omega_j \\ K_{Ij} = a_j \omega_j^3 \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Remarques :

- ω_j est choisi le plus grand possible ; toutefois, cette pulsation ne devra pas être supérieure à la pulsation de résonance ω_{rj} correspondant aux modes de vibration mécanique afin de ne pas déstabiliser le système. Une valeur $\omega_j = \omega_{rj} / 2$ représente un bon compromis .
- En l'absence de terme intégral, une erreur statique due à la force de gravité et aux frottements peut subsister autour de la position finale. En pratique, on désactive la composante intégrale lorsque l'erreur en position est très grande, le terme proportionnel étant suffisant ; on la désactive aussi lorsque l'erreur devient très petite pour éviter les oscillations que pourraient induire les frottements secs .
- Le terme d'anticipation $\mathbf{K}_a \dot{\mathbf{q}}^d$ de l'équation permet de réduire les erreurs de suivi du mouvement désiré. En automatique classique, ce terme n'est pas couramment utilisé.
- Les performances d'une telle méthode sont d'autant plus acceptables que le rapport de réduction est important (augmentant ainsi la partie invariante de A_{jj}), que les vitesses sont faibles et que les gains proportionnels et dérivés sont grands.

Lorsque les effets de la gravité sont compensés, par construction mécanique comme pour le robot SCARA par exemple ou grâce à la commande, on montre qu'une loi de type PD est asymptotiquement stable pour une position désirée \mathbf{q}^d fixe .La démonstration s'appuie sur la définition d'une fonction de Lyapunov ayant la forme suivante :

$$V = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \mathbf{e} \quad (\text{III.11})$$

où \mathbf{e} désigne l'erreur de consigne :

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}^d - \mathbf{q} \quad (\text{III.12})$$

Puisque \mathbf{q}^d est constant, alors la loi de commande PD est égale à :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \quad (\text{III.13})$$

A partir des équations et on obtient en négligeant les frottements :

$$\mathbf{K}_p \mathbf{e} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{III.14})$$

En dérivant la fonction V , on trouve :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{A}} \dot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{e}^T \mathbf{K}_p \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{III.15})$$

et, après substitution de $\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}}$ par sa valeur à partir de l'équation, on obtient :

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{A}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{III.16})$$

La matrice $(\dot{\mathbf{A}} - 2\mathbf{C})$ étant antisymétrique le terme $\dot{\mathbf{q}}^T (\dot{\mathbf{A}} - 2\mathbf{C}) \dot{\mathbf{q}}$ est nul. On en conclut que :

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (\text{III.17})$$

Cette expression montre que V diminue tant que $\dot{\mathbf{q}} \neq \mathbf{0}$, ce qui n'est pas suffisant pour démontrer la stabilité asymptotique. En effet, on doit s'assurer que lorsque $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ le robot n'atteint pas une configuration dans laquelle $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}^d$. Pour montrer que ce n'est pas le cas, on utilise le principe d'invariance de La Salle. Pour que $\dot{V} = 0$, il faut nécessairement que $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ et par conséquent que $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. A partir de l'équation du mouvement on obtient alors que $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. L'équilibre ($\mathbf{e} = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$) est donc l'ensemble invariant le plus grand inclus dans $\dot{V} = 0$ et on en déduit que la stabilité est asymptotique au point d'équilibre.

Il a été démontré que la stabilité du système est assurée si l'on utilise dans l'équation le terme $\mathbf{Q}(\mathbf{q}^d)$,

constant pour \mathbf{q}^d donné, qui correspond aux couples de gravité sur la position finale, plutôt que le terme $\mathbf{Q}(\mathbf{q})$. La stabilité est aussi assurée si l'on prend $\mathbf{K}_{pj} > \|\partial \mathbf{Q}(\mathbf{q}) / \partial \mathbf{q}\|$, terme qui

représente la norme 2 de la matrice jacobienne des couples de gravité par rapport au vecteur des variables articulaires \mathbf{q} .

L'utilisation de grands gains pour \mathbf{K}_p et \mathbf{K}_d diminue l'erreur de suivi mais amène le système au voisinage du domaine d'instabilité. Pour un réglage des gains qui tienne compte du modèle dynamique, le lecteur pourra consulter.

III.3.2 Commande PID dans l'espace opérationnel

Lorsque le mouvement est défini dans l'espace opérationnel, une des deux solutions suivantes peut être choisie pour réaliser la commande du système :

- On transforme le mouvement défini dans l'espace opérationnel en un mouvement dans l'espace articulaire, puis on met en œuvre la commande dans l'espace articulaire. Le signal d'erreur minimisé est alors exprimé dans l'espace articulaire.
- on spécifie directement la commande dans l'espace opérationnel.

Pour une commande PID dans l'espace opérationnel, la loi de commande est obtenue en remplaçant \mathbf{q} par \mathbf{X} dans l'équation et en multipliant l'erreur dans l'espace opérationnel par \mathbf{J}^T pour l'exprimer dans l'espace articulaire.

$$\Gamma = \mathbf{J}^T [\mathbf{K}_p(\mathbf{X}^d - \mathbf{X}) + \mathbf{K}_d(\dot{\mathbf{X}}^d - \dot{\mathbf{X}}) + \mathbf{K}_I \int_{t_0}^t (\mathbf{X}^d - \mathbf{X}) dt] \quad \text{III.18}$$

Pour décrire le mouvement désiré dans l'espace articulaire lorsque celui-ci est spécifié dans l'espace

opérationnel, deux solutions sont possibles : soit seul le modèle géométrique inverse est utilisé, puis avec une procédure numérique, on dérive la position désirée pour obtenir la vitesse et l'accélération désirées ; soit on calcule les positions, vitesses et accélérations articulaires :

- à partir du modèle géométrique inverse (MGI) pour les positions articulaires :

$$\mathbf{q}^d = \text{MGI}(\mathbf{X}^d) \quad \text{III.19}$$

- à partir du modèle cinématique inverse dans les positions régulières :

$$\dot{\mathbf{q}}^d = \mathbf{J}(\mathbf{q}^d)^{-1} \dot{\mathbf{X}}^d \quad \text{III.20}$$

Dans les positions singulières ou pour les robots redondants, on remplace J^{-1} par une inverse généralisée telle que la pseudo inverse :

- à partir du modèle cinématique inverse du deuxième ordre :

$$\ddot{q}^d = J^{-1}(\ddot{X}^d - \dot{J}\dot{q}^d) \tag{III.21}$$

Avec :

$$\dot{J}(q^d, \dot{q}^d) = \frac{d}{dt}J(q^d) \tag{III.22}$$

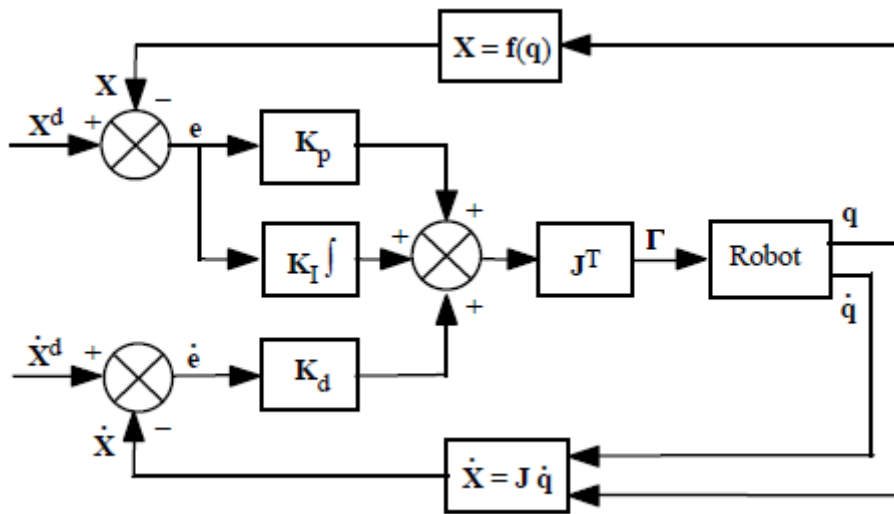


Figure III.2 Schéma d'une commande PID dans l'espace opérationnel

III.4 Commande par découplage non linéaire

III.4.1 Introduction

Lorsque l'application exige des évolutions rapides du robot et une grande précision dynamique, il est nécessaire de concevoir un système de commande plus sophistiqué qui prenne en compte tout ou partie des forces d'interaction dynamiques. L'utilisation de la commande par découplage non linéaire constitue une bonne approche en ce sens... Ce type de commande est aussi connu sous le nom de *commande dynamique* (ou "couple calculé", *computed torque* dans la littérature anglo-saxonne) parce qu'il est fondé sur l'utilisation du modèle dynamique. Théoriquement, il assure le découplage et la linéarisation des équations du modèle, ayant pour effet une réponse uniforme quelle que soit la configuration du robot.

La mise en oeuvre de cette méthode exige le calcul du modèle dynamique en ligne et la connaissance des valeurs numériques des paramètres inertiels et de frottements, ce qui ne constitue plus maintenant une limite rédhibitoire. Le problème du calcul en ligne est en effet résolu pratiquement grâce aux méthodes de modélisation et grâce aux évolutions technologiques en micro-informatique. Le développement des techniques d'identification permet une bonne évaluation des paramètres dynamiques.

La commande par découplage non linéaire consiste à transformer par retour d'état le problème de commande d'un système non linéaire en un problème de commande d'un système linéaire. Dans le cas général, le problème de linéarisation par retour d'état d'un système non linéaire n'est pas facile à résoudre. Cependant, dans le cas des robots-manipulateurs rigides, l'élaboration d'une loi de commande qui linéarise et découple les équations est simplifiée par le fait que le nombre d'actionneurs est égal au nombre de variables articulaires et que le modèle dont on dispose est un modèle inverse qui exprime l'entrée Γ du système en fonction du vecteur d'état $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ et de $\ddot{\mathbf{q}}$. Ces propriétés font que les équations du robot définissent un *système plat* dont les *sorties plates* sont les variables articulaires \mathbf{q} . Etant donné que la loi de commande utilise seulement les variables d'état \mathbf{q} et $\dot{\mathbf{q}}$, on qualifie cette loi, qui est équivalente à une commande plate, de commande par découplage statique. Dans ce qui suit, on développe cette méthode, tout d'abord dans l'espace articulaire, puis dans l'espace opérationnel [10].

III.4.2 Commande dans l'espace articulaire

III.4.2.1 Principe de la commande

Soit $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{H}}$ les estimations respectives de \mathbf{A} et \mathbf{H} . On suppose que les positions et vitesses articulaires sont mesurables et que les mesures ne sont pas bruitées. Partant de l'équation (III.22), si l'on choisit une commande Γ telle que :

$$\Gamma = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \mathbf{w}(t) + \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (\text{III.23})$$

alors, dans le cas idéal où le modèle est supposé parfait, le système est régi par l'équation :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}(t) \quad (\text{III.24})$$

$w(t)$ peut être considéré comme un nouveau vecteur de commande. On se ramène donc à un problème de commande de n systèmes linéaires, invariants, découplés et du second ordre (doubles intégrateurs). Plusieurs choix peuvent être envisagés pour $w(t)$. Nous étudierons notamment, le cas où le mouvement désiré est complètement spécifié et le cas où seulement la position finale est donnée.

III.4.2.2 Cas où le mouvement est complètement spécifié

On désigne respectivement par $\ddot{q}^d(t)$, $\dot{q}^d(t)$ et $q^d(t)$ l'accélération, la vitesse et la position désirées dans l'espace articulaire. Si l'on calcule $w(t)$ selon la relation suivante :

$$w(t) = \ddot{q}^d + K_d (\dot{q}^d - \dot{q}) + K_p (q^d - q) \quad (\text{III.25})$$

où K_p et K_d sont des matrices diagonales définies positives de dimension $(n \times n)$ alors, d'après l'équation , la réponse du système en boucle fermée est décrite par l'équation linéaire découplée suivante :

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = 0 \quad (\text{III.26})$$

$$\text{Où } e = q^d - q. \quad (\text{III.27})$$

La solution de l'équation de l'erreur $e(t)$ est globalement exponentiellement stable. Les gains K_{pj} et K_{dj} sont choisis pour imposer à l'erreur de l'axe j la dynamique désirée d'amortissement ξ_j et de pulsation ω_j quelle que soit la configuration du robot :

$$\begin{cases} K_{pj} = \omega_j^2 \\ K_{dj} = 2 \xi_j \omega_j \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

En général, on choisit un amortissement égal à 1 pour avoir une réponse sans dépassement. Le schéma-bloc de cette loi de commande est représenté sur la figure 20. Le signal de commande aux actionneurs comporte trois parties : la première compense les couples et forces de Coriolis, centrifuges, de gravité et de frottement, la deuxième est une correction de position et de vitesse à gains variables représentée respectivement par \hat{K}_p et \hat{K}_d tandis que la troisième constitue une anticipation des forces d'accélération désirées $\hat{A}\ddot{q}^d$.

Lorsqu'il y a des erreurs de modélisation, l'équation de la boucle fermée correspondant à la commande de la figure 20 est obtenue en utilisant les relations:

$$\hat{A} (\ddot{q}^d + K_d \dot{e} + K_p e) + \hat{H} = A \ddot{q} + H \quad (\text{III.29})$$

et on en déduit que :

$$\ddot{e} + K_d \dot{e} + K_p e = \hat{A}^{-1}[(A - \hat{A})\ddot{q} + H - \hat{H}] \quad (\text{III.30})$$

On remarque avec la relation que les erreurs de modélisation constituent une excitation pour l'équation de l'erreur. Il en résulte que lorsque ces erreurs sont importantes, il faut augmenter d'autant les gains de position et de vitesse, mais ces valeurs sont limitées par la stabilité du système. Pour une étude détaillée de la robustesse et de la stabilité de cette loi de commande, le lecteur pourra consulter l'ouvrage de Samson et al. Pour que le système soit stable, on montre en particulier que la matrice \hat{A} doit être définie positive. On montre aussi que les erreurs e et \dot{e} diminuent lorsque les gains augmentent.

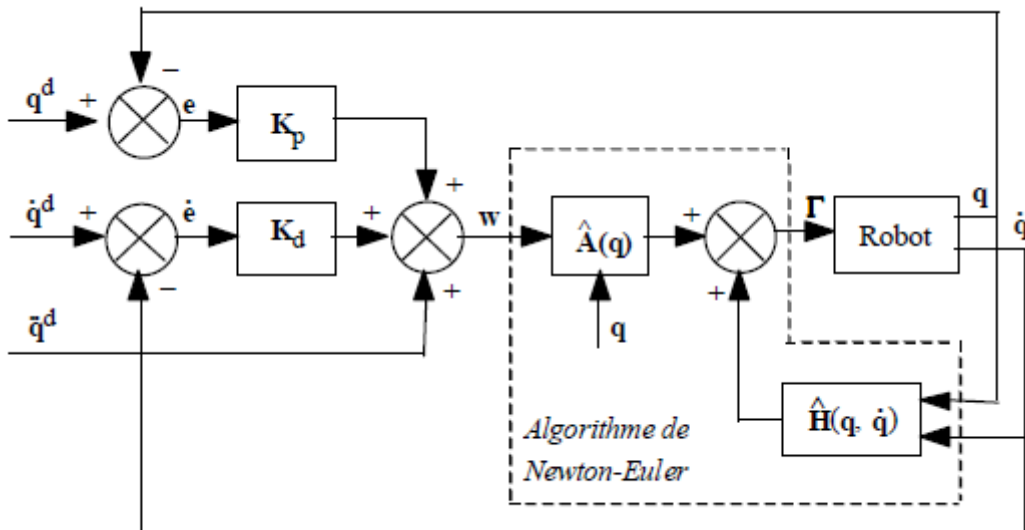


Figure III.3 Loi de commande pour un mouvement complètement spécifié

III.4.2.3 Cas où seule la position finale est spécifiée

Dans ce cas, le but à atteindre est la position q^d . Un choix possible pour $w(t)$ est de prendre :

$$w(t) = K_p (q^d - q) - K_d \dot{q} \quad (III.31)$$

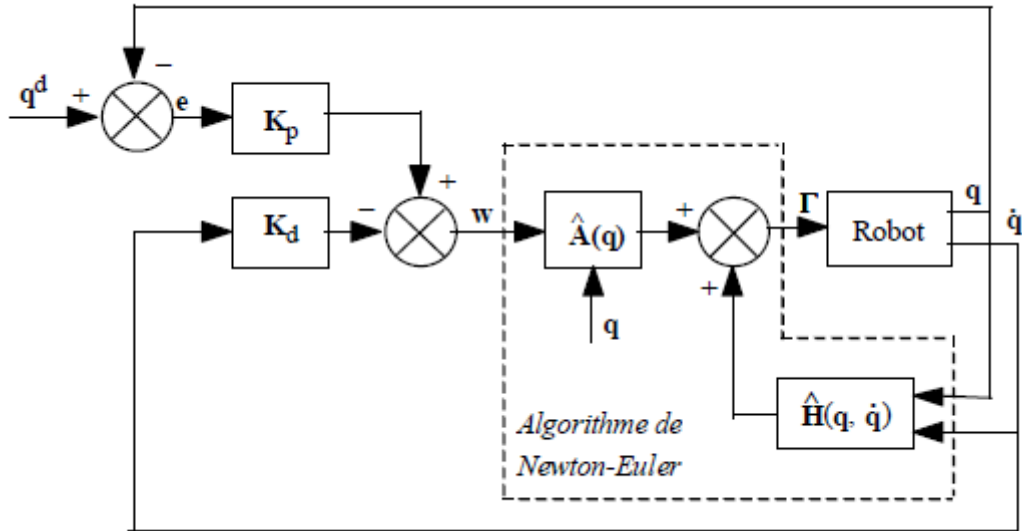


Figure III.4 Découplage non linéaire où seule la position finale est spécifiée

A partir des équations ,si la modélisation est parfaite et pour des erreurs initiales nulles, on déduit l'équation de la boucle fermée du système :

$$\ddot{q} + K_d \dot{q} + K_p q = K_p q^d \quad (III.32)$$

Bases de la modélisation et de la commande des robots-manipulateurs de type série qui est une équation linéaire découplée du deuxième ordre dont la solution $q(t)$ est globalement exponentiellement stable. Les gains K_p et K_d sont choisis pour imposer la dynamique désirée à $q(t)$.

III.4.2.4 Commande dynamique prédictive

Un autre schéma de commande peut être établi en utilisant une commande dynamique prédictive dans laquelle le calcul de $\hat{\mathbf{A}}$ et de $\hat{\mathbf{H}}$ se fait, non pas en fonction des valeurs courantes de \mathbf{q} et de $\dot{\mathbf{q}}$, mais plutôt en fonction des variables du mouvement désiré \mathbf{q}^d et $\dot{\mathbf{q}}^d$. Dans ce cas, la loi de commande a pour expression :

$$\Gamma = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}^d) \mathbf{w}(t) + \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}^d, \dot{\mathbf{q}}^d) \quad (\text{III.33})$$

le vecteur de commande $\mathbf{w}(t)$ étant donné par l'équation

Si le suivi est correct, on peut supposer que $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}^d)$ et que $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}^d, \dot{\mathbf{q}}^d)$. En l'absence d'erreurs de modélisation et pour des erreurs initiales nulles, la loi de commande linéarise et découple les équations du système comme dans le cas précédent. L'avantage essentiel de cette loi est que le calcul de $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{q}^d)$ et $\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{q}^d, \dot{\mathbf{q}}^d)$ n'est pas contaminé par les bruits de mesure[9].

III.4.2.5 Calcul pratique des lois de commande par découplage non linéaire

Les lois de commande représentées par les relations peuvent être calculées par l'algorithme de calcul du modèle dynamique inverse de Newton-Euler (§ 1.4.2.) sans nécessiter la connaissance explicite des matrices \mathbf{A} et \mathbf{H} . On rappelle que cet algorithme fournit les valeurs des couples moteurs en fonction des positions, vitesses et accélérations articulaires. En comparant les relations, on conclut que :

- Le calcul des lois de commande qui correspondent à l'équation peut être réalisé par l'algorithme de Newton-Euler en utilisant comme arguments d'entrée .
- La position articulaire égale à la position articulaire courante \mathbf{q} .
- La vitesse articulaire égale à la vitesse articulaire courante $\dot{\mathbf{q}}$.
- L'accélération articulaire égale à $\mathbf{w}(t)$.
- le calcul de la loi de commande prédictive peut être réalisé en choisissant comme arguments .
- La position articulaire égale à la position articulaire désirée \mathbf{q}^d .
- La vitesse articulaire égale à la vitesse articulaire désirée $\dot{\mathbf{q}}^d$.
- L'accélération articulaire égale à $\mathbf{w}(t)$.

Le coût en calcul de la commande par découplage non linéaire dans l'espace articulaire est donc quasiment égal au nombre d'opérations nécessaires pour établir le modèle dynamique. Ainsi, pour réaliser cette commande, on doit essentiellement disposer d'un algorithme de calcul du modèle dynamique performant, problème considéré comme résolu. On commence à trouver sur certaines baies de commande de robots industriels une implémentation partielle de la commande par découplage non linéaire.

III.4.3 Commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel

Le comportement dynamique du robot dans l'espace opérationnel est décrit par l'équation suivante, obtenue en exprimant dans la relation \ddot{q} en fonction de \ddot{X} en utilisant le modèle cinématique du deuxième ordre :

$$\Gamma = \mathbf{A} \mathbf{j}^{-1}(\ddot{X} - \dot{\mathbf{j}}\dot{q}) + \mathbf{H} \quad (\text{III.34})$$

Comme il a été fait dans l'espace articulaire, une loi de commande qui linéarise et découple les équations dans l'espace opérationnel est donnée par :

$$\Gamma = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{j}^{-1}(\mathbf{w}(t) - \dot{\mathbf{j}}\dot{q}) + \hat{\mathbf{H}} \quad (\text{III.35})$$

Avec cette loi et en supposant un modèle parfait, le système est régi par l'équation du double intégrateur dans l'espace opérationnel :

$$\ddot{X} = \mathbf{w}(t) \quad (\text{III.36})$$

Comme pour la commande dans l'espace articulaire, on peut proposer plusieurs schémas. On détaille ici le cas d'une correction PD lorsque le mouvement est complètement spécifié. On pose alors :

$$\mathbf{w}(t) = \ddot{X}^d + \mathbf{K}_d(\dot{X}^d - \dot{X}) + \mathbf{K}_p(X^d - X) \quad (\text{III.37})$$

Avec cette loi, dans l'hypothèse d'une modélisation parfaite et d'erreurs initiales nulles, le comportement du robot est décrit par l'équation :

$$\ddot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}_x + \mathbf{K}_p \mathbf{e}_x = \mathbf{0} \quad (\text{III.38})$$

avec :

$$\mathbf{e}_x = X^d - X \quad (\text{III.39})$$

Le schéma-bloc correspondant est représenté sur la figure. La valeur de Γ est calculée par l'algorithme de Newton-Euler en choisissant comme arguments d'entrée :

- La position articulaire égale à la position articulaire courante q .
- La vitesse articulaire égale à la vitesse articulaire courante \dot{q} .

- L'accélération articulaire égale à $j^{-1}(w(t) - j\dot{q})$.

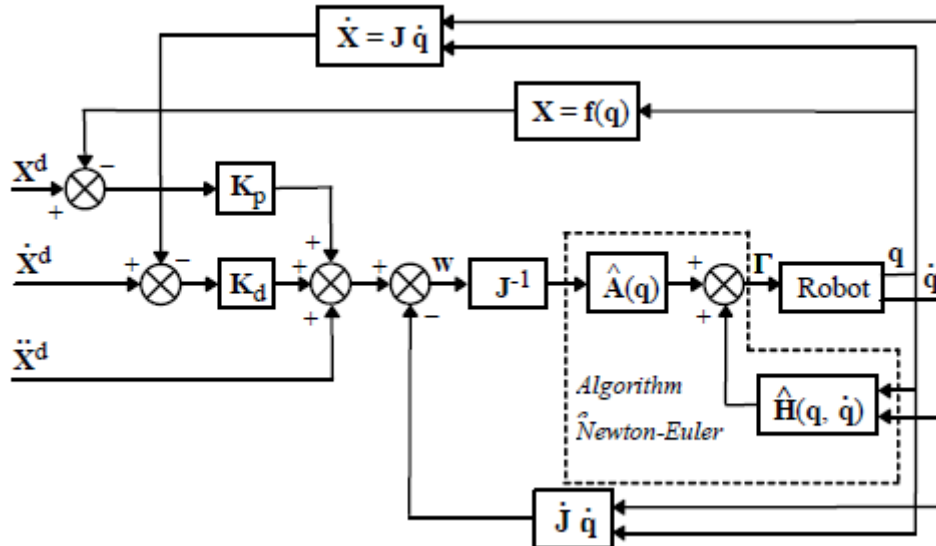


Figure III.5 commande par découplage non linéaire dans l'espace opérationnel

Remarque :

Lorsque le robot est redondant, on remplace dans la relation la matrice J^{-1} par une inverse généralisée. On montre que, dans les configurations régulières, le robot est aussi régi par l'équation . Le terme d'optimisation associé à l'inverse généralisée doit être convenablement choisi afin d'éviter les mouvements articulaires dans le noyau de J .

III.5 Conclusion

Comme indiqué en introduction, les outils méthodologiques présentés dans ce document constituent les bases pour la modélisation, la génération de mouvement et la commande des robots-manipulateurs de type série, bases nécessaires avant d'aborder l'étude des cinématiques plus complexes, notamment à chaînes fermées ou parallèles. Les nombreuses références qui accompagnent le texte permettront à l'étudiant d'approfondir ses connaissances sur ces sujets. Elles reflètent le foisonnement des travaux et des approches depuis presque 40 ans qui ont permis à la Robotique de devenir une discipline à part entière avec de nombreuses applications qui, même si elles n'ont pas encore atteint le déploiement que l'on attendait à l'époque, sont très prometteuses dans de nombreux domaines.

Chapitre IV

Application et simulation numérique

IV.1 Introduction

Comme nous avons parlé dans le chapitre II la modélisation géométrique permet d'exprimer la situation de l'organe terminal en fonction de la configuration du mécanisme.

Nous avons dans ce chapitre l'application et simulation numérique de modèle géométrique direct et le modèle géométrique inverse d'un robot série porteur type rotoïde à six degrés de liberté (6 d.d.l) avec un programme de calcul.

IV.2 Définition et présentation d'un MAPLE

Maple est un logiciel propriétaire de calcul formel développé depuis les années 1980 et aujourd'hui édité par la société canadienne Maplesoft. La dernière version est la version 2016.

Les objets de base du calcul sont les expressions mathématiques, représentées sous forme de graphes orientés acycliques. Maple fournit un langage de programmation spécifique, inspiré d'Algol, qui est à la fois le langage d'utilisation interactive et celui dans lequel est écrite la plus grande partie de la bibliothèque mathématique du logiciel.

Maple a été initialement développé au sein du Symbolic Computation Group de l'université de Waterloo en Ontario (Canada) à partir de décembre 1981. La première version publique date de 1985 (version 3.3).

Maple a été utilisé dans un nombre remarquable d'applications des sciences et des mathématiques allant de la démonstration du dernier théorème de Fermat en théorie des nombres, à des problèmes de la relativité générale et de la mécanique quantique. Ces applications sont présentées dans un numéro spécial d'un bulletin d'information créé par les développeurs de Maple appelé MapleTech.

Le logiciel permet aussi bien de travailler sur des quantités numériques (entières, réelles, complexes) qu'avec des polynômes, des fonctions, ou des séries. Maple réalise des dérivations, des intégrations, des résolutions de systèmes d'équations linéaires, des inversions de matrices, des développements asymptotiques ou encore des résolutions d'équations différentielles sous forme symboliques, c'est-à-dire en gardant des inconnues dans la résolution. Le système Maple offre aussi de nombreuses fonctionnalités en théorie des nombres et en combinatoire.

Maple est un système interprété. Dans son utilisation la plus courante, l'utilisateur entre une ligne de commande écrite dans un langage spécifique, et le système retourne un résultat. Par exemple, la commande suivante calcule la solution de l'équation différentielle du second ordre.

Il est également possible d'écrire, dans le même langage, des programmes qui ne seront pas compilés, mais interprétés à leur appel, et d'enrichir ainsi le système avec de nouvelles commandes[8].

IV.3 Définition et présentation d'un robot « ABB »

Les robots de la famille ABB série Rotoide sont du type poly articulé à 6 degrés de liberté, Ils se composent, voir figure ci-dessous, d'un organe mécanique bras (A à F) et d'une baie de commande (H), le tout étant reliés par un câble de liaison (G).

Le bras est constitué de segments reliés entre eux par des articulations. Chaque articulation constitue un axe autour du quel deux segments pivotent. Les mouvements des articulations du robot sont générés par des servomoteurs (moteurs asservis) sans balais, couplés à des résolveurs (capteurs de précision). Les différents éléments du bras du robot sont le pied (A) , l'épaule (B), le bras(C), le coude (D), l'avant bras (E) et le poignet (F) (voir figure ci-dessous). L'ensemble bras du robot contient la motorisation, les freins, les mécanismes de transmission du mouvement, le faisceau de câbles, les circuits pneumatique et électrique pour l'utilisateur et le système d'équilibrage (effectué par un système intégré de ressorts) du bras[4].

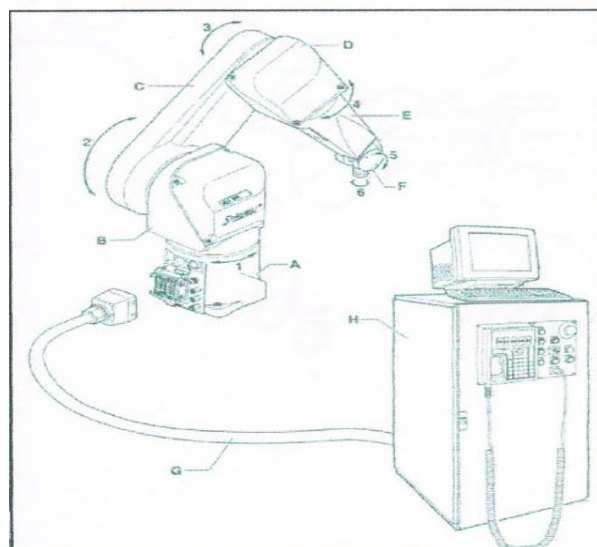




Figure IV.1 :le robot industriel ABB

IV.4 Application numérique de modèle géométrique

La modélisation géométrique du robot manipulateur ABB (chaîne ouverte simple) est réalisée en utilisant les translations homogène, selon la méthode de D-H.

IV.4.1 Paramètres de Denavit -Hartenberg

a) Placement des angles de rotation (Θ_j) et des repères sur le robot

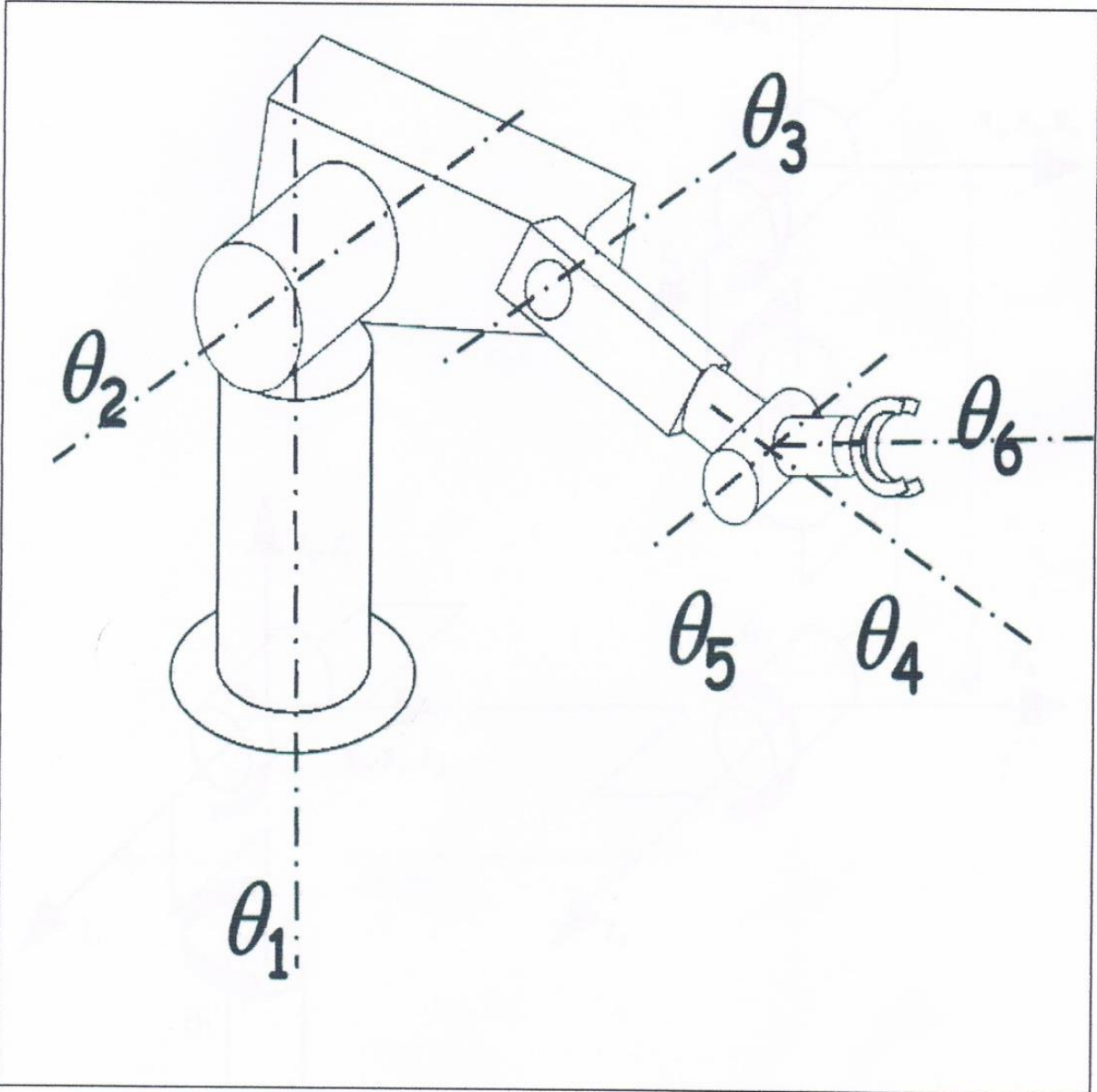


Figure IV.2 :Placement des angles de rotation Θ_j

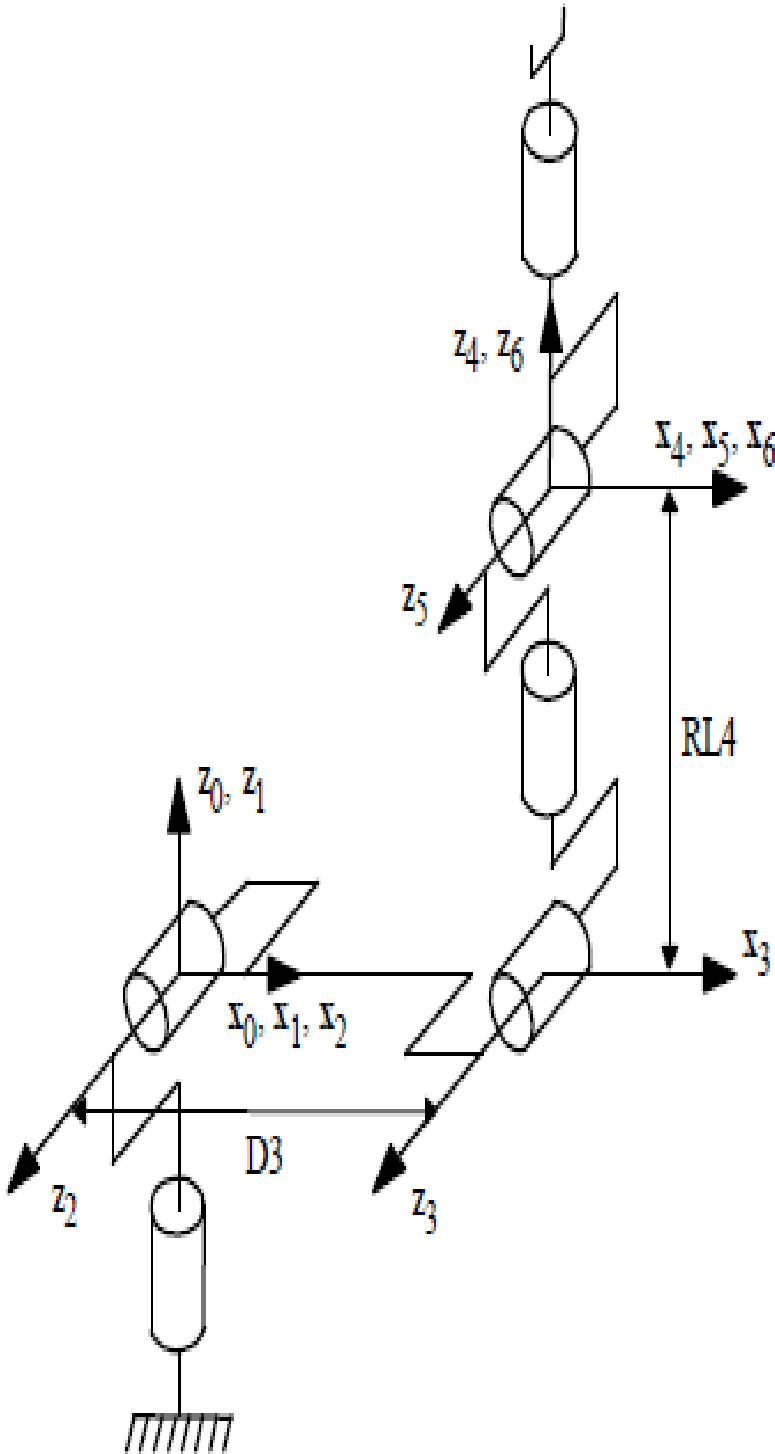
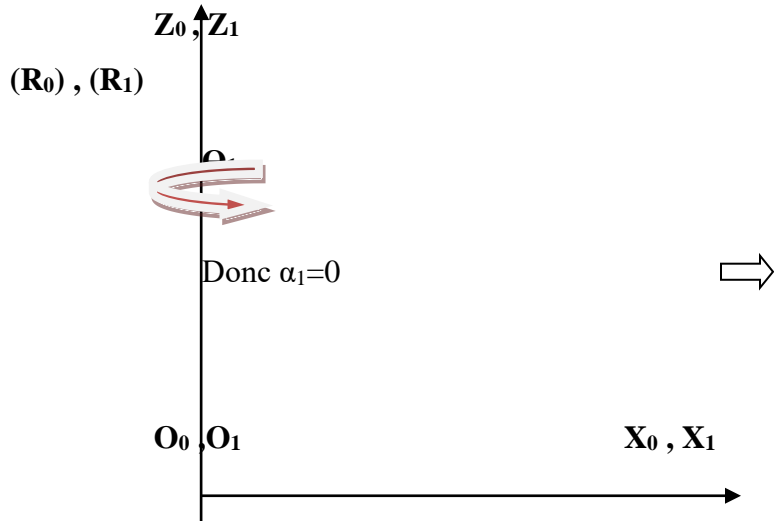


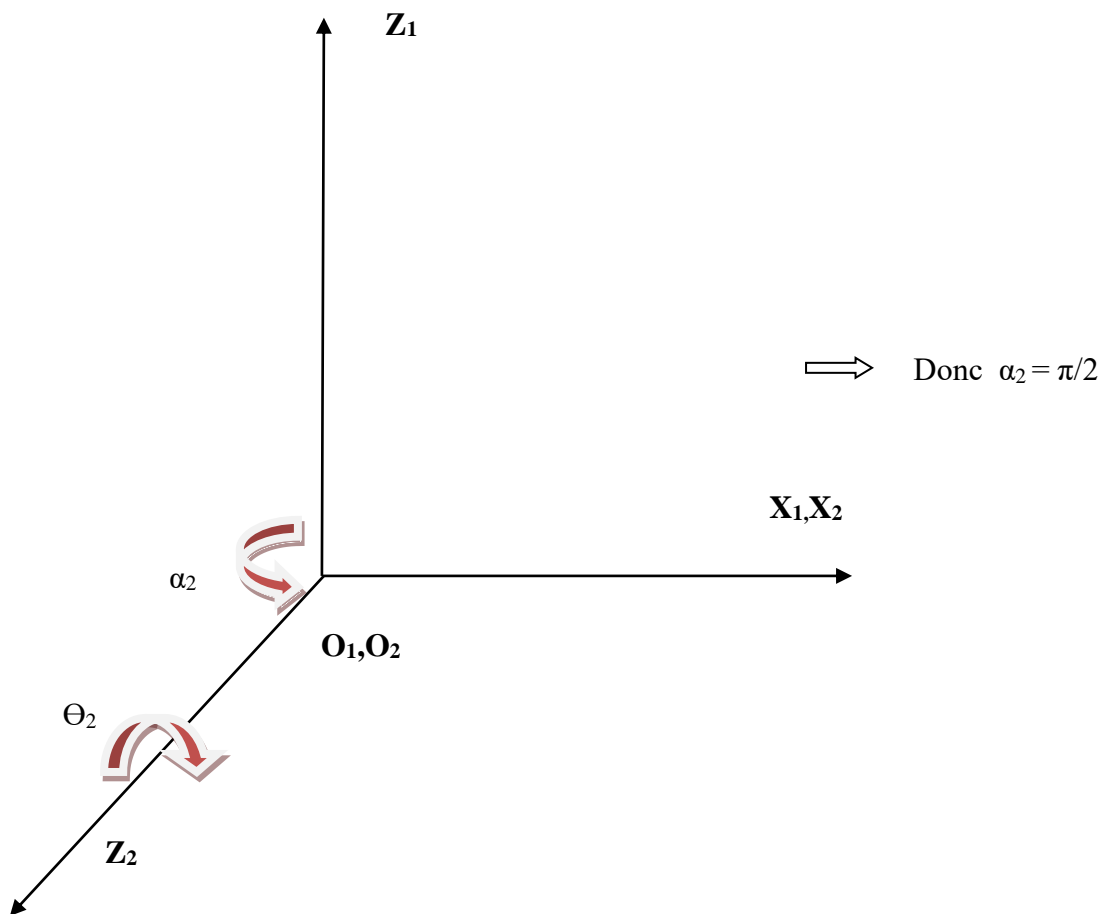
Figure IV.3 :Placement des repères et notations pour le robot ABB.

b) Représentation de changement des repères et des angles de rotation (θ_j, α_j)

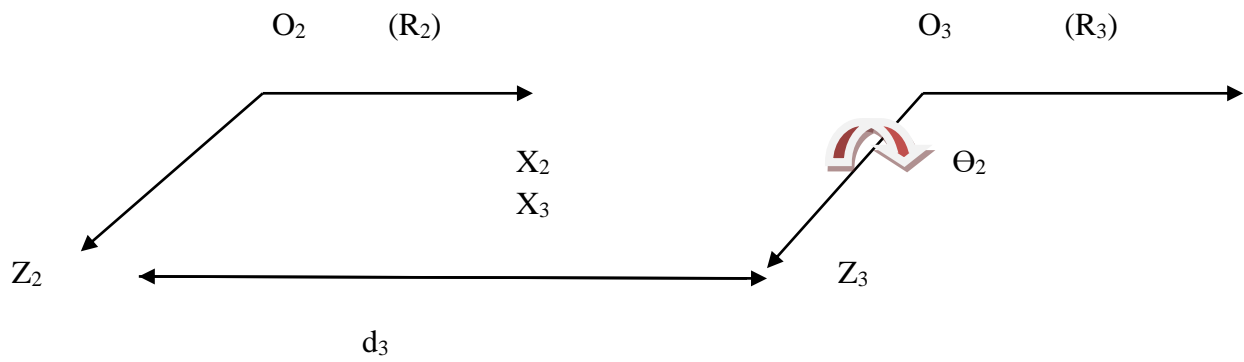
- Entre les repères : (R_0) et (R_1) :



- Entre les repères : (R_1) et (R_2) :

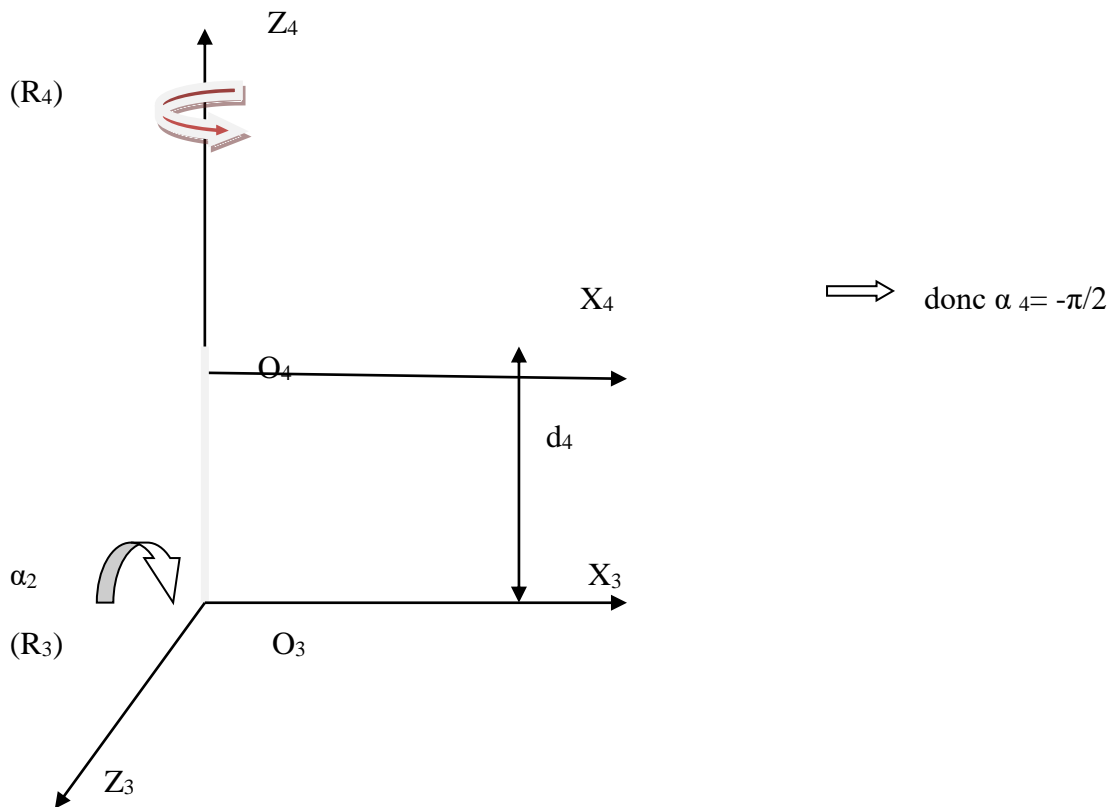


- Entre les repères (R_2) et (R_3) :



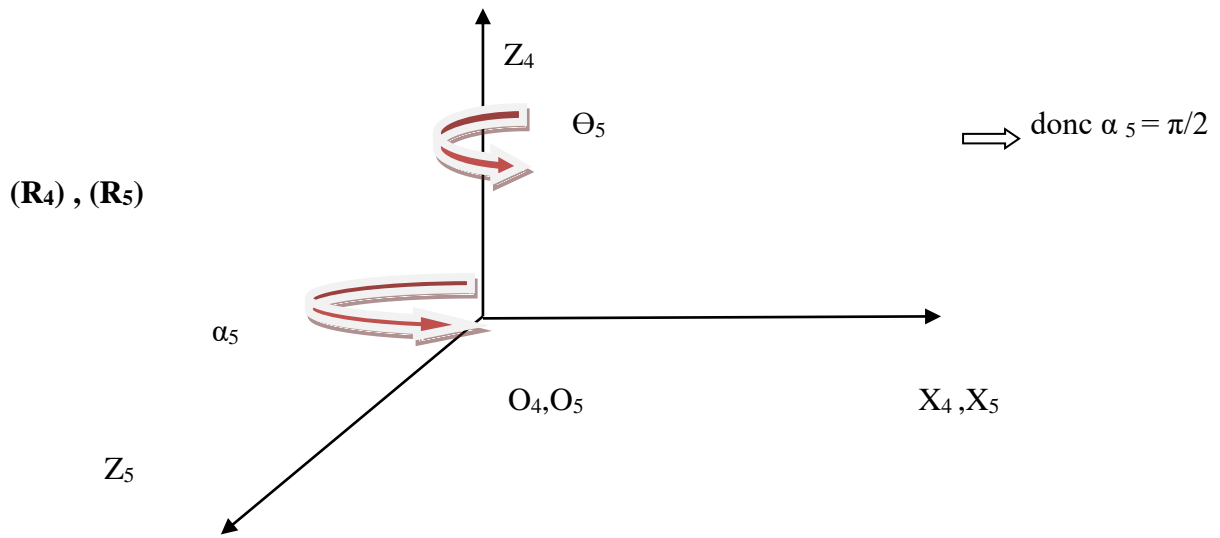
\Rightarrow donc $\alpha_3 = 0$

- Entre les repères (R_3) et (R_4) :

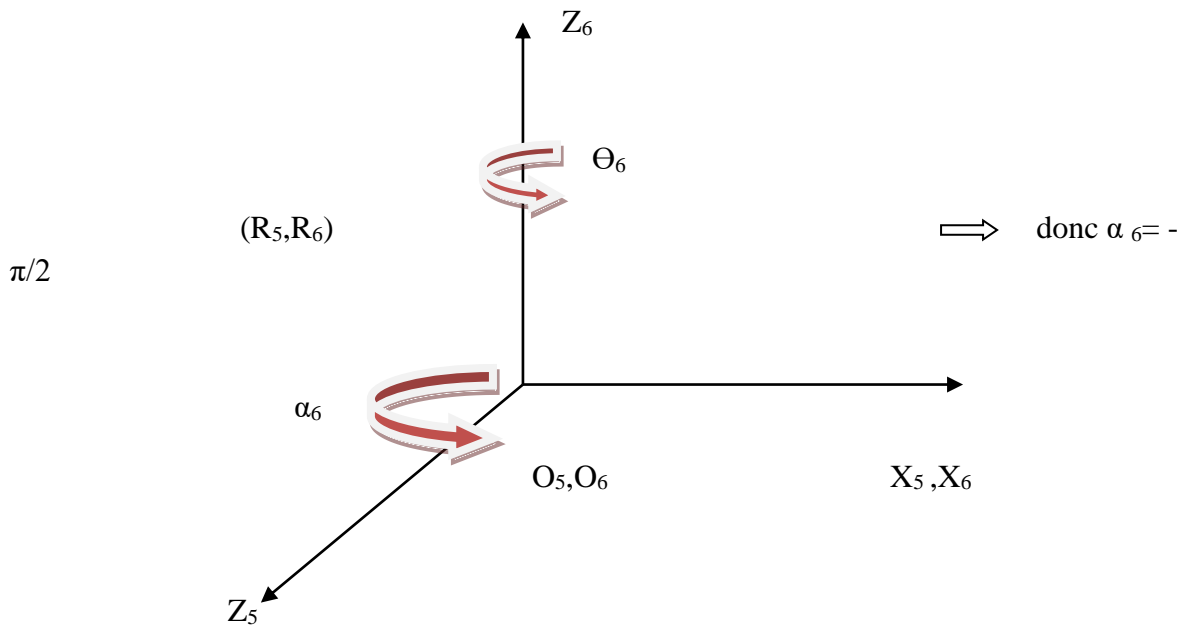


\Rightarrow donc $\alpha_4 = -\pi/2$

- Entre les repères (R_4) et (R_5)



- Entre les repères (R_5) et (R_6) :



j	σ_j	α_j	d_j	Θ_j	r_j
1	0	0	0	Θ_1	0
2	0	$\pi/2$	0	Θ_2	0
3	0	0	d_3	Θ_3	0
4	0	$-\pi/2$	0	Θ_4	r_4
5	0	$\pi/2$	0	Θ_5	0
6	0	$-\pi/2$	0	Θ_6	0

Tableau IV.1 :paramètres géométriques du robot.

A partir du tableau et compte tenu de la matrice de passage élémentaire de Denavit-Hartenberg, on écrit les matrices des transformations homogènes ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$:

- La matrice de transformation définissant le repère R_j dans le repère R_{j-1} est donné.

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\sin \theta_j & 0 & d_j \\ \cos \alpha_j \sin \theta_j & \cos \alpha_j \cos \theta_j & -\sin \alpha_j & -r_j \sin \alpha_j \\ \sin \alpha_j \sin \theta_j & \sin \alpha_j \cos \theta_j & \cos \alpha_j & r_j \cos \alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- La matrice de transformation définissant le repère R_{j-1} dans le repère R_j est donné.

$${}^j\mathbf{T}_{j-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_j & \cos \alpha_j \sin \theta_j & \sin \alpha_j \sin \theta_j & -d_j \cos \theta_j \\ -\sin \theta_j & \cos \alpha_j \cos \theta_j & \sin \alpha_j \cos \theta_j & d_j \sin \theta_j \\ 0 & -\sin \alpha_j & \cos \alpha_j & -r_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV.5 Application numérique de modèle géométrique directe

IV.5.1 Les matrices de transformation homogène ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$

La relation géométrique entre la base et l'effecteur notée par ${}^0\mathbf{T}_6$ est déterminée par les produits des matrices élémentaires de transformations entre les corps \mathbf{S}_{j-1} et \mathbf{S}_j avec ($j=1$ à 6).

D'après les positions des repères dans la figure et les paramètres géométriques dans le tableau, le robot présente six transformations principales :

$$\mathbf{R}_0 \rightarrow \mathbf{R}_1 \rightarrow \mathbf{R}_2 \rightarrow \mathbf{R}_3 \rightarrow \mathbf{R}_4 \rightarrow \mathbf{R}_5 \rightarrow \mathbf{R}_6$$

- Pour $j=1$: La transformation (exprime le repère \mathbf{R}_1 dans le repère \mathbf{R}_0)

$${}^0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour $j=2$: La transformation (exprime le repère \mathbf{R}_2 dans le repère \mathbf{R}_1)

$${}^1\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour $j=3$: La transformation (exprime le repère \mathbf{R}_3 dans le repère \mathbf{R}_2)

$${}^2\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & d_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour $j=4$: La transformation (exprime le repère \mathbf{R}_4 dans le repère \mathbf{R}_3)

$${}^3\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_4 \\ -\sin \theta_4 & -\cos \theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour $j=5$: La transformation (exprime le repère \mathbf{R}_5 dans le repère \mathbf{R}_4)

$${}^4\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & -\sin \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin \theta_5 & \cos \theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Pour $j=6$: La transformation (exprime le repère \mathbf{R}_6 dans le repère \mathbf{R}_5)

$${}^5\mathbf{T}_6 = \begin{bmatrix} \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_6 & -\cos \theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\mathbf{T}(1) = {}^0\mathbf{T}_1$$

$$\mathbf{T}(2) = {}^1\mathbf{T}_2$$

$$\mathbf{T}(3) = {}^2\mathbf{T}_3$$

$$\mathbf{T}(4) = {}^3\mathbf{T}_4$$

$$\mathbf{T}(5) = {}^4\mathbf{T}_5$$

$$\mathbf{T}(6) = {}^5\mathbf{T}_6$$

Nous avons la matrice de transformation homogène ${}^0\mathbf{T}_6$ (ou $U(0)$) qui est la multiplication des matrices précédant comme suite :

$${}^0\mathbf{T}_6 = {}^0\mathbf{T}_1 * {}^1\mathbf{T}_2 * {}^2\mathbf{T}_3 * {}^3\mathbf{T}_4 * {}^4\mathbf{T}_5 * {}^5\mathbf{T}_6$$

Ou bien

$$\mathbf{V}(6) = \mathbf{T}(1) * \mathbf{T}(2) * \mathbf{T}(3) * \mathbf{T}(4) * \mathbf{T}(5) * \mathbf{T}(6)$$

Nous avons calculer la multiplication de ces matrices avec deux méthodes :

- **1^{er} méthode :**

$$V(1) = T(1)$$

$$V(2) = T(1)*T(2)$$

$$V(3) = T(1)*T(2)*T(3)$$

$$V(4) = T(1)*T(2)*T(3)*T(4)$$

$$V(5) = T(1)*T(2)*T(3)*T(4)*T(5)$$

$$V(6) = T(1)*T(2)*T(3)*T(4)*T(5)*T(6)$$

- **2^{ème} méthode :**

$$U(6) = T(6)$$

$$U(5) = T(5)*T(6)$$

$$U(4) = T(4)*T(5)*T(6)$$

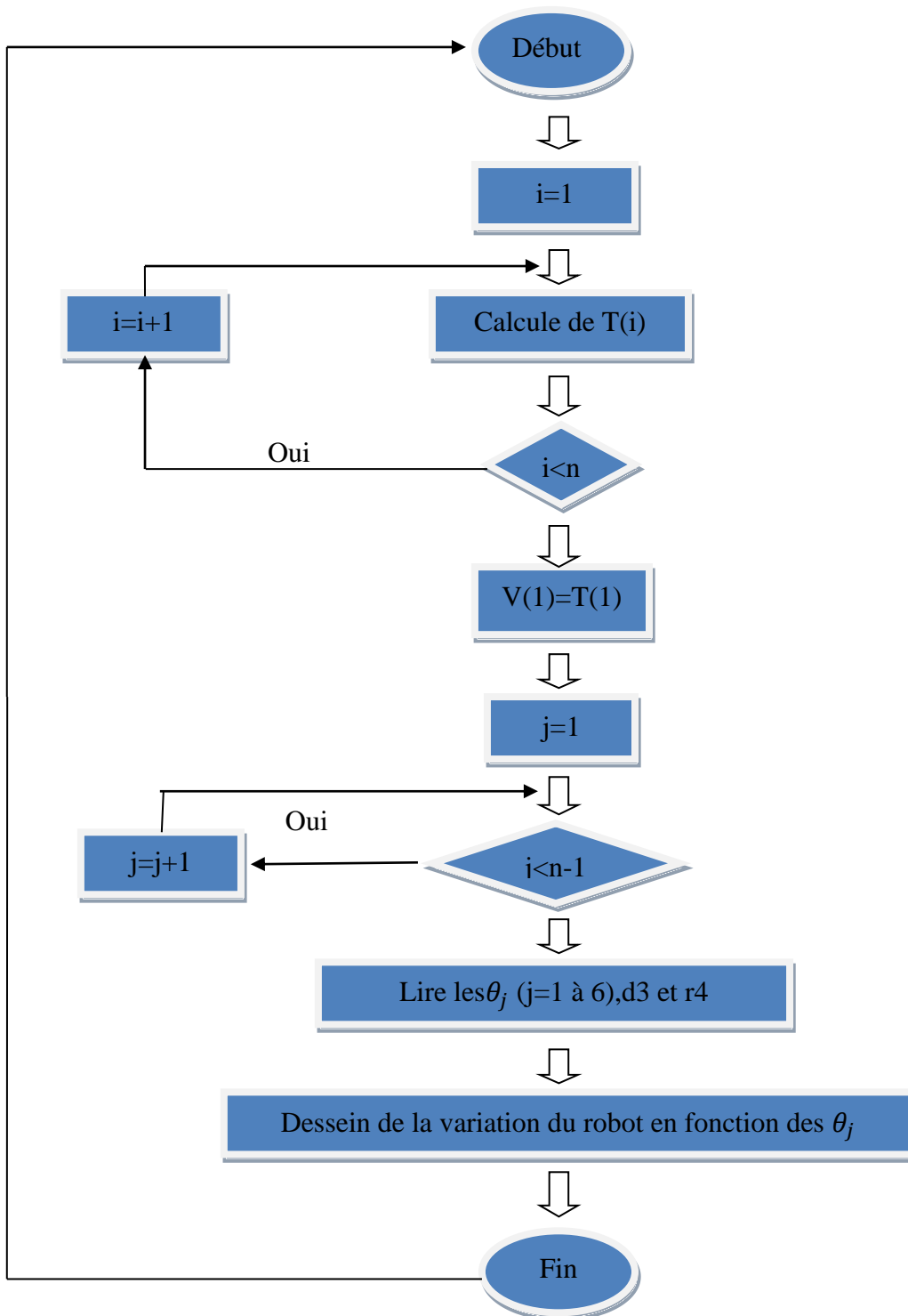
$$U(3) = T(3)*T(4)*T(5)*T(6)$$

$$U(2) = T(2)*T(3)*T(4)*T(5)*T(6)$$

$$U(1) = T(1)*T(2)*T(3)*T(4)*T(5)*T(6)$$

IV.5.2 Simulation numérique de modèle géométrique direct (MGD)

Pour calculer le modèle géométrique direct de notre bras nous avons utilisé la matrice de passage homogène, dans cette partie nous avant la présentons de la simulation numérique de modèle géométrique direct avec l'organigramme suivant :



Organigramme utilisant la matrice de passage homogène « MGD »

IV.5.3 Le programme (MGD)

```
> restart;
>with (linalg);
```

[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

I - MODÈLE GÉOMÉTRIQUE DIRECTE DU ROBOT ABB6DD(RRRRRR)

1/ Les paramètres géométriques du Robot

1.1/ Pour le calcul des différents éléments de la matrice Jacobienne il faut introduire

:

i " indice de la matrice Jacobienne "

n" le nombre de degrés de liberté "

Remarque : Pour pouvoir calculer les diverses matrices Jacobiennes il va falloir changer la valeur de " i " a chaque fois.

Pour i = 0, on aura 0J6.

Pour i = 3, on aura 3J6.

Pour i = 6, on aura 6J6.

```
> i:=0; n:=6;
```

```
i := 0
```

```
n := 6
```

1.2/Définition du tableau donnant les différents valeurs d'après DENAVIT-HARTENBERG pour le type de Robot.

Remarque: Afin de calculer les diverses matrices Jacobiennes il va falloir activer les paramètres du Robot voulu.

122/ Robot COMAU-POLAR 6000

```
> #NotationDH:=<<sigma[1]|alpha[1]| d[1]| theta[1]|r[1]>>;
DH:=Matrix([[0,0,0,theta[1],0],[0,Pi/2,0,theta[2],0],[1,Pi/2,0,0,R3],[0,0,0,theta[4],R4],[0,-Pi/2,0,theta[5],0],[0,Pi/2,0,theta[6],0]]):
```

123/ Robot STAUBLI RX-90

```
>NotationDH:=<<sigma[1]|alpha[1]| d[1]| theta[1]|r[1]>>;
DH:=Matrix([[0,0,0,theta[1],0],[0,Pi/2,0,theta[2],0],[0,0,D3,theta[3],0],[0,-Pi/2,0,theta[4],RL4],[0,Pi/2,0,theta[5],0],[0,-Pi/2,0,theta[6],0]]);
```

$$NotationDH := \begin{bmatrix} \sigma_l & \alpha_l & d_l & \theta_l & r_l \end{bmatrix}$$

$$DH := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \theta_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\pi & 0 & \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & D3 & \theta_3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\pi & 0 & \theta_4 & RL4 \\ 0 & \frac{1}{2}\pi & 0 & \theta_5 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\pi & 0 & \theta_6 & 0 \end{bmatrix}$$

/ Calcul des diffén déPour des raisons de commodité, on adopte les notations suivantes:

- 0T1=T(1).
- 1T2=T(2).
- 2T3=T(3).
- 3T4=T(4).
- 4T5=T(5).
- 5T6=T(6).

```
>for j from 1 to 6 do
T(j):=Matrix([[cos(DH[j,4]),-sin(DH[j,4]),0,DH[j,3]],[cos(DH[j,2])*sin(DH[j,4]),cos(DH[j,2])*cos(DH[j,4]),-sin(DH[j,2]),-DH[j,5]*sin(DH[j,2])],[sin(DH[j,2])*sin(DH[j,4]),sin(DH[j,2])*cos(DH[j,4]),cos(DH[j,2]),DH[j,5]*cos(DH[j,2])],[0,0,0,1]]);
end do;
```

$$T(1) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(2) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(3) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & D3 \\ \sin(\theta_3) & \cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(4) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_4) & -\sin(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & RL4 \\ -\sin(\theta_4) & -\cos(\theta_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(5) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) & -\sin(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta_5) & \cos(\theta_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(6) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_6) & -\cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14/ Calcul des divers matrices intermédiaires

Soit U la situation désirée telle que : $U(6) = T(6)$

$$U(5) = T(5,6) = T(5).U(6).$$

$$U(4) = T(4,6) = T(4).U(5).$$

$$U(3) = T(3,6) = T(3).U(4).$$

$$U(2) = T(2,6) = T(2).U(3).$$

$$U(1) = T(1,6) = T(1).U(2).$$

> $U(6) := T(6)$;

$$U(6) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_6) & -\cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

>for j from n-1 by -1 to 1 do $U(j) := T(j).U(j+1)$;end do ;

$$U(5) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) & -\cos(\theta_5) \sin(\theta_6) & -\sin(\theta_5) & 0 \\ \sin(\theta_6) & \cos(\theta_6) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_5) \cos(\theta_6) & -\sin(\theta_5) \sin(\theta_6) & \cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
U(4) := & \left[\left[\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6), -\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin(\theta_4) \cos(\theta_6), -\cos(\theta_4) \sin(\theta_5), 0 \right], \right. \\
& \left[\sin(\theta_5) \cos(\theta_6), -\sin(\theta_5) \sin(\theta_6), \cos(\theta_5), RL4 \right], \\
& \left[-\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \cos(\theta_4) \sin(\theta_6), \sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \right. \\
& \left. - \cos(\theta_4) \cos(\theta_6), \sin(\theta_4) \sin(\theta_5), 0 \right], \\
& \left[0, 0, 0, 1 \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(3) := & \left[\left[\cos(\theta_3) \left(\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6) \right) - \sin(\theta_3) \sin(\theta_5) \cos(\theta_6), \right. \right. \\
& \cos(\theta_3) \left(-\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) - \sin(\theta_4) \cos(\theta_6) \right) + \sin(\theta_3) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6), \\
& \left. \left. -\cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \sin(\theta_5) - \sin(\theta_3) \cos(\theta_5), -\sin(\theta_3) RL4 + D3 \right], \right. \\
& \left[\sin(\theta_3) \left(\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6) \right) + \cos(\theta_3) \sin(\theta_5) \cos(\theta_6), \right. \\
& \sin(\theta_3) \left(-\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) - \sin(\theta_4) \cos(\theta_6) \right) - \cos(\theta_3) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6), \\
& \left. \left. -\sin(\theta_3) \cos(\theta_4) \sin(\theta_5) + \cos(\theta_3) \cos(\theta_5), \cos(\theta_3) RL4 \right], \right. \\
& \left[-\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \cos(\theta_4) \sin(\theta_6), \sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \right. \\
& \left. - \cos(\theta_4) \cos(\theta_6), \sin(\theta_4) \sin(\theta_5), 0 \right], \\
& \left[0, 0, 0, 1 \right] \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(2) := & \left[\left[\cos(\theta_2) (\cos(\theta_3) (\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6)) \right. \right. \\
 & - \sin(\theta_3) \sin(\theta_5) \cos(\theta_6)) - \sin(\theta_2) (\sin(\theta_3) (\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) \\
 & - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6)) + \cos(\theta_3) \sin(\theta_5) \cos(\theta_6)), \cos(\theta_2) (\cos(\theta_3) (\\
 & - \cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) - \sin(\theta_4) \cos(\theta_6)) + \sin(\theta_3) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6)) \\
 & - \sin(\theta_2) (\sin(\theta_3) (-\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) - \sin(\theta_4) \cos(\theta_6)) \\
 & - \cos(\theta_3) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6)), \cos(\theta_2) (-\cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \sin(\theta_5) - \sin(\theta_3) \cos(\theta_5)) \\
 & - \sin(\theta_2) (-\sin(\theta_3) \cos(\theta_4) \sin(\theta_5) + \cos(\theta_3) \cos(\theta_5)), \cos(\theta_2) (-\sin(\theta_3) RL4 \\
 & + D3) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_3) RL4 \Big], \\
 & \left[\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) + \cos(\theta_4) \sin(\theta_6), -\sin(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) \right. \\
 & \left. + \cos(\theta_4) \cos(\theta_6), -\sin(\theta_4) \sin(\theta_5), 0 \right], \\
 & \left[\sin(\theta_2) (\cos(\theta_3) (\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6)) \right. \\
 & - \sin(\theta_3) \sin(\theta_5) \cos(\theta_6)) + \cos(\theta_2) (\sin(\theta_3) (\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \cos(\theta_6) \\
 & - \sin(\theta_4) \sin(\theta_6)) + \cos(\theta_3) \sin(\theta_5) \cos(\theta_6)), \sin(\theta_2) (\cos(\theta_3) (\\
 & - \cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) - \sin(\theta_4) \cos(\theta_6)) + \sin(\theta_3) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6)) \\
 & + \cos(\theta_2) (\sin(\theta_3) (-\cos(\theta_4) \cos(\theta_5) \sin(\theta_6) - \sin(\theta_4) \cos(\theta_6)) \\
 & - \cos(\theta_3) \sin(\theta_5) \sin(\theta_6)), \sin(\theta_2) (-\cos(\theta_3) \cos(\theta_4) \sin(\theta_5) - \sin(\theta_3) \cos(\theta_5)) \\
 & + \cos(\theta_2) (-\sin(\theta_3) \cos(\theta_4) \sin(\theta_5) + \cos(\theta_3) \cos(\theta_5)), \sin(\theta_2) (-\sin(\theta_3) RL4 \\
 & + D3) + \cos(\theta_2) \cos(\theta_3) RL4 \Big], \\
 & [0, 0, 0, 1] \Big]
 \end{aligned}$$


```
>with(linalg):
>pi:= evalf(Pi);
```

$$\pi := 3.141592654$$

```
>
HD:=matrix(6,4,[0,0,theta(1),0,pi/2,0,theta(2),0,0,d3,theta(3)
,0,-pi/2,0,theta(4),r4,pi/2,0,theta(5),0,-pi/2,0,theta(6),0]);
>cos(pi/2) := 0;
>
```

$$HD := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta(1) & 0 \\ 1.570796327 & 0 & \theta(2) & 0 \\ 0 & d3 & \theta(3) & 0 \\ -1.570796327 & 0 & \theta(4) & r4 \\ 1.570796327 & 0 & \theta(5) & 0 \\ -1.570796327 & 0 & \theta(6) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\cos(1.570796327) := 0$$

```
>cos(-pi/2) :=0;
```

$$\cos(-1.570796327) := 0$$

```
>sin(pi/2) :=1;
```

$$\sin(1.570796327) := 1$$

```
>sin(-pi/2) :=-1;
```

$$\sin(-1.570796327) := -1$$

```
>for i from 1 to 6 do
> T(i):=matrix(4,4,[cos(HD[i,3]),-
sin(HD[i,3]),0,HD[i,2],cos(HD[i,1])*sin(HD[i,3]),cos(HD[i,1])*
cos(HD[i,3]),-sin(HD[i,1]),-
HD[i,4]*sin(HD[i,1]),sin(HD[i,1])*sin(HD[i,3]),sin(HD[i,1])*co
s(HD[i,3]),cos(HD[i,1]),HD[i,4]*cos(HD[i,1]),0,0,0,1]);od;
>
```

$$T(1) := \begin{bmatrix} \cos(\theta(1)) & -\sin(\theta(1)) & 0 & 0 \\ \sin(\theta(1)) & \cos(\theta(1)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(2) := \begin{bmatrix} \cos(\theta(2)) & -\sin(\theta(2)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta(2)) & \cos(\theta(2)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(3) := \begin{bmatrix} \cos(\theta(3)) & -\sin(\theta(3)) & 0 & d3 \\ \sin(\theta(3)) & \cos(\theta(3)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(4) := \begin{bmatrix} \cos(\theta(4)) & -\sin(\theta(4)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r4 \\ -\sin(\theta(4)) & -\cos(\theta(4)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(5) := \begin{bmatrix} \cos(\theta(5)) & -\sin(\theta(5)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(\theta(5)) & \cos(\theta(5)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(6) := \begin{bmatrix} \cos(\theta(6)) & -\sin(\theta(6)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta(6)) & -\cos(\theta(6)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>V(1):=T(1);
> for j from 1 to 5 do
>V(j+1):=multiply(V(j),T(j+1));od;
>
>
```

$$V(1) := \begin{bmatrix} \cos(\theta(1)) & -\sin(\theta(1)) & 0 & 0 \\ \sin(\theta(1)) & \cos(\theta(1)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V(2) := \begin{bmatrix} \cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) & -\cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) & \sin(\theta(1)) & 0 \\ \sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) & -\sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) & -\cos(\theta(1)) & 0 \\ \sin(\theta(2)) & \cos(\theta(2)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 V(3) := & \left[\left[\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)), \right. \right. \\
 & \left. \left. -\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)), \sin(\theta(1)), \right. \right. \\
 & \left. \left. \cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) d3 \right], \right. \\
 & \left[\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)), \right. \\
 & \left. -\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)), -\cos(\theta(1)), \right. \\
 & \left. \sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) d3 \right], \\
 & \left[\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)), -\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \right. \\
 & \left. + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)), 0, \sin(\theta(2)) d3 \right], \\
 & [0, 0, 0, 1]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(4) := & \left[\left[(\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(4)), -(\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) - \sin(\theta(1)) \cos(\theta(4)), \right. \right. \\
 & \left. \left. -\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)), (\right. \right. \\
 & \left. \left. -\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) d3 \right], \right. \\
 & \left[(\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \right. \\
 & \left. + \cos(\theta(1)) \sin(\theta(4)), -(\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \right. \\
 & \left. - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) + \cos(\theta(1)) \cos(\theta(4)), \right. \\
 & \left. -\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)), (\right. \\
 & \left. -\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 \right. \\
 & \left. + \sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) d3 \right], \\
 & \left[(\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)), -(\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \right. \\
 & \left. + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)), -\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)), (\right. \\
 & \left. -\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 + \sin(\theta(2)) d3 \right], \\
 & [0, 0, 0, 1]]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(5) := & [[((\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \\
& - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \cos(\theta(5)) + (-\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
& - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5)), - ((\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \\
& - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \sin(\theta(5)) + (\\
& -\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \cos(\theta(5)), \\
& (\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) \\
& + \sin(\theta(1)) \cos(\theta(4)), (-\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
& - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 + \cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) d3], \\
& [((\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \\
& + \cos(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \cos(\theta(5)) + (-\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
& - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5)), - ((\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \\
& - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) + \cos(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \sin(\theta(5)) + (\\
& -\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \cos(\theta(5)), \\
& (\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) \\
& - \cos(\theta(1)) \cos(\theta(4)), (-\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
& - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 + \sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) d3], \\
& [(\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \cos(\theta(5)) + (\\
& -\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5)), - (\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \\
& + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \sin(\theta(5)) + (-\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
& + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \cos(\theta(5)), (\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \\
& + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)), (-\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 \\
& + \sin(\theta(2)) d3], \\
& [0, 0, 0, 1]]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}(6) := & [[(((\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \\
 & - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \cos(\theta(5)) + (-\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
 & - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5))) \cos(\theta(6)) \\
 & - ((\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) \\
 & + \sin(\theta(1)) \cos(\theta(4))) \sin(\theta(6)), - ((\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \\
 & - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \cos(\theta(5)) + (\\
 & -\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5))) \\
 & \sin(\theta(6)) - ((\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \\
 & - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) + \sin(\theta(1)) \cos(\theta(4))) \cos(\theta(6)), \\
 & - ((\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \\
 & - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \sin(\theta(5)) + (-\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
 & - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \cos(\theta(5)), (-\cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
 & - \cos(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 + \cos(\theta(1)) \cos(\theta(2)) d3], \\
 & [(((\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \\
 & + \cos(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \cos(\theta(5)) + (-\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
 & - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5))) \cos(\theta(6)) \\
 & - ((\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) \\
 & - \cos(\theta(1)) \cos(\theta(4))) \sin(\theta(6)), - ((\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \\
 & - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) + \cos(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \cos(\theta(5)) + (\\
 & -\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5))) \\
 & \sin(\theta(6)) - ((\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) \\
 & - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) - \cos(\theta(1)) \cos(\theta(4))) \cos(\theta(6)), \\
 & - ((\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3)) - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \\
 & + \cos(\theta(1)) \sin(\theta(4))) \sin(\theta(5)) + (-\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
 & - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \cos(\theta(5)), (-\sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
 & - \sin(\theta(1)) \sin(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 + \sin(\theta(1)) \cos(\theta(2)) d3], \\
 & [((\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \cos(\theta(5)) + (\\
 & -\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5))) \cos(\theta(6)) \\
 & - (\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) \sin(\theta(6)), \\
 & - ((\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \cos(\theta(5)) + (\\
 & -\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \sin(\theta(5))) \sin(\theta(6)) \\
 & - (\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \sin(\theta(4)) \cos(\theta(6)), \\
 & - (\sin(\theta(2)) \cos(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \sin(\theta(3))) \cos(\theta(4)) \sin(\theta(5)) + (\\
 & -\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3))) \cos(\theta(5)), (-\sin(\theta(2)) \sin(\theta(3)) \\
 & + \cos(\theta(2)) \cos(\theta(3))) r4 + \sin(\theta(2)) d3], \\
 & [0, 0, 0, 1]]
 \end{aligned}$$

```
>
theta(1):=readstat("theta(1)=");
# theta(1)=0;
>
                                 $\theta(1) := 10$ 
>theta(2):=readstat("theta(2)=");
#theta(2)=0;
>
>
                                 $\theta(2) := 0$ 
>theta(3):=readstat("theta(3)=");
#theta(3)=0;
                                 $\theta(3) := 0$ 
>theta(4):=readstat("theta(4)=");
#theta(4)=0;
>
>
                                 $\theta(4) := 25$ 
>theta(5):=readstat("theta(5)=");
#theta(5)=0;
>
>
                                 $\theta(5) := 45$ 
>theta(6):=readstat("theta(6)=");
#theta(6)=0;
>
>
                                 $\theta(6) := 30$ 
> r4:=readstat("r4=");
#r4=20;
>
>
>
                                 $r4 := 60$ 
> d3:=readstat("d3=");
#d3=30;
>
>
                                 $d3 := 30$ 
>for j from 1 to 4 do
for i from 1 to 4 do
  print(evalf(V(6)[j,i]));od;od;
>
```

-0.4962857147

-0.4029998491

0.7689548824

-25.17214587

0.8581801167

-0.3616375126

0.3643421427

-16.32063333

0.1312531024

0.8407195913

0.5253219888

60.

0.

0.

0.

1.

```
> ll := [[0, 0, -15], [0, 0, 0], [V(1) [1, 4], V(1) [2, 4], V(1) [3, 4]], [V(2) [1, 4], V(2) [2, 4], V(2) [3, 4]], [V(3) [1, 4], V(3) [2, 4], V(3) [3, 4]], [V(4) [1, 4], V(4) [2, 4], V(4) [3, 4]]];
```

```
ll := [[0, 0, -15], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [30 cos(10), 30 sin(10), 0], [30 cos(10), 30 sin(10), 60]]
```

```
> LLN := [[0, 0, -15], [0, 0, 0], [V(1) [1, 4], V(1) [2, 4], V(1) [3, 4]], [V(2) [1, 4], V(2) [2, 4], V(2) [3, 4]], [V(3) [1, 4], V(3) [2, 4], V(3) [3, 4]], [V(4) [1, 4], V(4) [2, 4], V(4) [3, 4]], [V(6) [1, 4]+3*V(6) [1, 1], V(6) [2, 4]+3*V(6) [2, 1], V(6) [3, 4]+3*V(6) [3, 1]], [V(4) [1, 4], V(4) [2, 4], V(4) [3, 4]], [V(6) [1, 4]+3*V(6) [1, 2], V(6) [2, 4]+3*V(6) [2, 2], V(6) [3, 4]+3*V(6) [3, 2]], [V(4) [1, 4], V(4) [2, 4], V(4) [3, 4]], [V(6) [1, 4]+3*V(6) [1, 3], V(6) [2, 4]+3*V(6) [2, 3], V(6) [3, 4]+3*V(6) [3, 3]]];
```

```

LLN := [[0, 0, -15], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [30 cos(10), 30 sin(10), 0], [30 cos(10),
30 sin(10), 60], [30 cos(10) + 3 (cos(10) cos(25) - sin(10) sin(25)) cos(45) cos(30)
- 3 (cos(10) sin(25) + sin(10) cos(25)) sin(30), 30 sin(10) + 3 (cos(10) sin(25)
+ sin(10) cos(25)) cos(45) cos(30) - 3 (sin(10) sin(25) - cos(10) cos(25)) sin(30),
60 + 3 sin(45) cos(30)], [30 cos(10), 30 sin(10), 60], [30 cos(10) - 3 (cos(10) cos(25)
- sin(10) sin(25)) cos(45) sin(30) - 3 (cos(10) sin(25) + sin(10) cos(25)) cos(30),
30 sin(10) - 3 (cos(10) sin(25) + sin(10) cos(25)) cos(45) sin(30)
- 3 (sin(10) sin(25) - cos(10) cos(25)) cos(30), 60 - 3 sin(45) sin(30)], [30 cos(10),
30 sin(10), 60], [30 cos(10) - 3 (cos(10) cos(25) - sin(10) sin(25)) sin(45), 30 sin(10)
- 3 (cos(10) sin(25) + sin(10) cos(25)) sin(45), 60 + 3 cos(45)]]

```

```

>k:=0;
> for x from 0 by 0.1 to .3 do
>for j from 1 to 6 do
> theta(j) :=theta(j)+x;od;k:=k+1;GR(k) :=[[0, 0, -
15], [0, 0, 0], [V(1) [1, 4], V(1) [2, 4], V(1) [3, 4]], [V(2) [1, 4], V(2) [2,
4], V(2) [3, 4]], [V(3) [1, 4], V(3) [2, 4], V(3) [3, 4]], [V(4) [1, 4], V(4) [
2, 4], V(4) [3, 4]], [V(6) [1, 4]+3*V(6) [1, 1], V(6) [2, 4]+3*V(6) [2, 1], V
(6) [3, 4]+3*V(6) [3, 1]], [V(4) [1, 4], V(4) [2, 4], V(4) [3, 4]], [V(6) [1,
4]+3*V(6) [1, 2], V(6) [2, 4]+3*V(6) [2, 2], V(6) [3, 4]+3*V(6) [3, 2]], [V
(4) [1, 4], V(4) [2, 4], V(4) [3, 4]], [V(6) [1, 4]+3*V(6) [1, 3], V(6) [2, 4]
+3*V(6) [2, 3], V(6) [3, 4]+3*V(6) [3, 3]]];od;
>

```

$k:=0$

$k:=1$

```

GR(1) := [[0, 0, -15], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [30 cos(10), 30 sin(10), 0], [30 cos(10),
30 sin(10), 60], [30 cos(10) + 3 (cos(10) cos(25) - sin(10) sin(25)) cos(45) cos(30)
- 3 (cos(10) sin(25) + sin(10) cos(25)) sin(30), 30 sin(10) + 3 (cos(10) sin(25)
+ sin(10) cos(25)) cos(45) cos(30) - 3 (sin(10) sin(25) - cos(10) cos(25)) sin(30),
60 + 3 sin(45) cos(30)], [30 cos(10), 30 sin(10), 60], [30 cos(10) - 3 (cos(10) cos(25)
- sin(10) sin(25)) cos(45) sin(30) - 3 (cos(10) sin(25) + sin(10) cos(25)) cos(30),
30 sin(10) - 3 (cos(10) sin(25) + sin(10) cos(25)) cos(45) sin(30)
- 3 (sin(10) sin(25) - cos(10) cos(25)) cos(30), 60 - 3 sin(45) sin(30)], [30 cos(10),
30 sin(10), 60], [30 cos(10) - 3 (cos(10) cos(25) - sin(10) sin(25)) sin(45), 30 sin(10)
- 3 (cos(10) sin(25) + sin(10) cos(25)) sin(45), 60 + 3 cos(45)]]

```

$k:=2$

```
GR(2) := [[0, 0, -15], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [-23.30005772, -18.65843698,  
2.995002500], [-13.99556024, -11.20749493, 61.79899717], [-15.89099401,  
-8.994246881, 62.51234414], [-13.99556024, -11.20749493, 61.79899717], [  
-14.13488134, -12.23423097, 64.61438395], [-13.99556024, -11.20749493,  
61.79899717], [-11.67437079, -9.461829962, 62.55048460]]
```

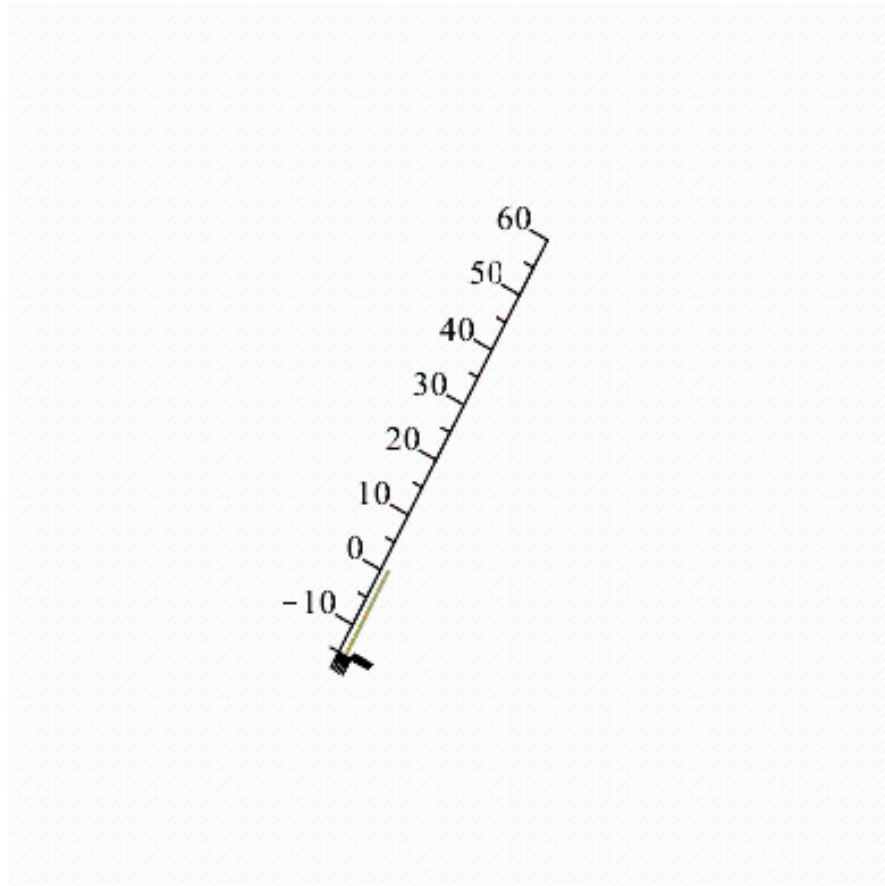
 $k:=3$

```
GR(3) := [[0, 0, -15], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [-18.36614580, -22.00194799,  
8.865606201], [3.34412301, 4.00613288, 58.38574309], [1.398606035, 5.736485944,  
59.87599205], [3.34412301, 4.00613288, 58.38574309], [5.136282054, 3.949688457,  
60.79094162], [3.34412301, 4.00613288, 58.38574309], [4.759442642, 6.456172125,  
57.38865832]]
```

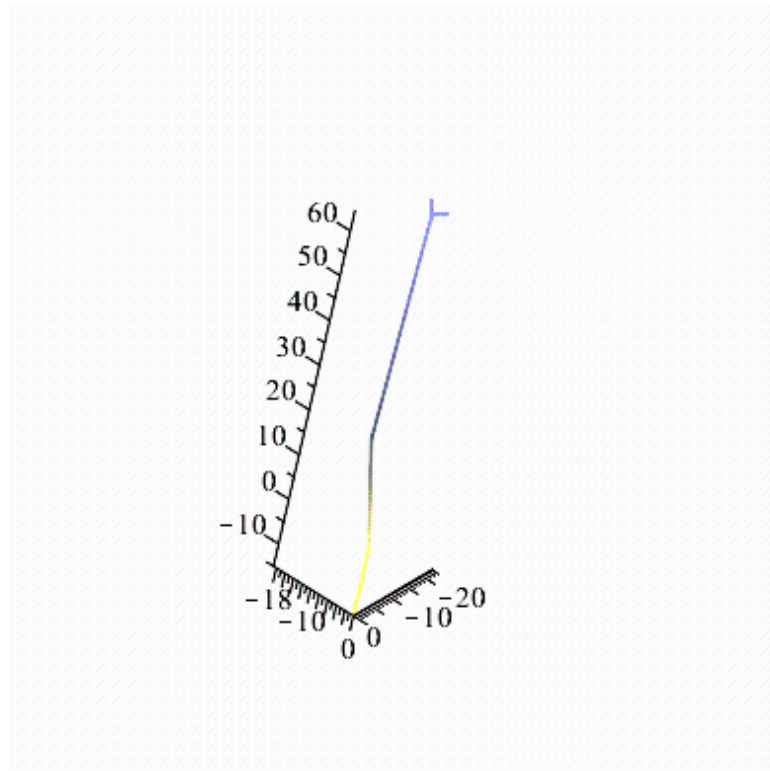
 $k:=4$

```
GR(4) := [[0, 0, -15], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0], [-9.540999978, -22.84798260,  
16.93927420], [12.00801532, 28.75578302, 38.68073946], [10.77978609, 30.98990199,  
40.26193059], [12.00801532, 28.75578302, 38.68073946], [14.58490784, 30.28381105,  
38.52340131], [12.00801532, 28.75578302, 38.68073946], [11.08547648, 30.04955378,  
36.13612174]]
```

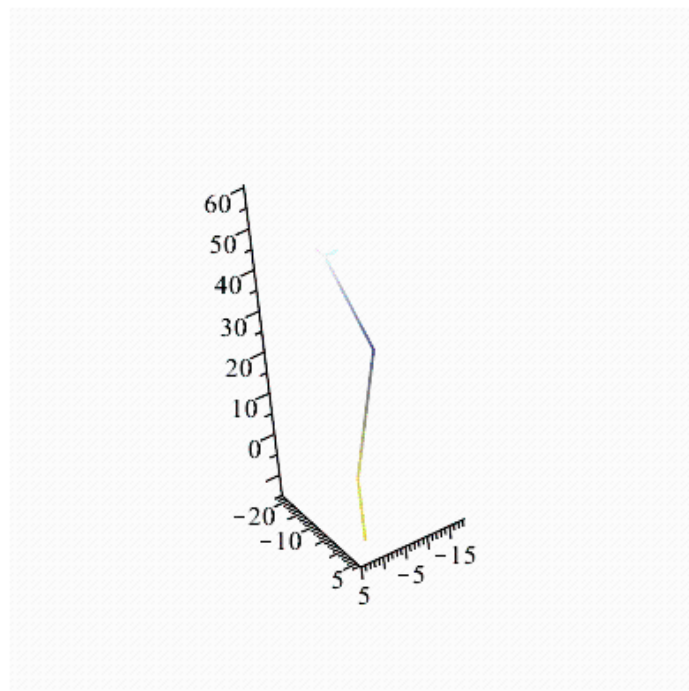
```
>PLOT3D ( (CURVES (GR(1)) ) ,  
AXESSTYLE (FRAME) , SCALING (CONSTRAINED) ) ;  
>
```



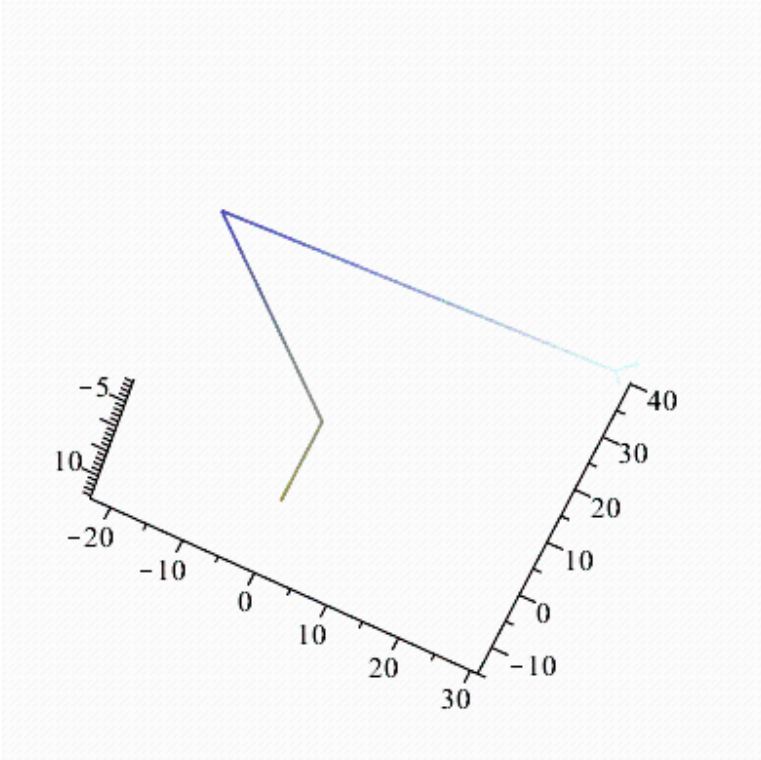
```
>PLOT3D ( (CURVES (GR(2)) ) ,  
AXESSTYLE (FRAME) , SCALING (CONSTRAINED) ) ;
```



```
>
>PLOT3D ( (CURVES (GR(3)) ) ,
AXESSTYLE (FRAME) , SCALING (CONSTRAINED) ) ;
```

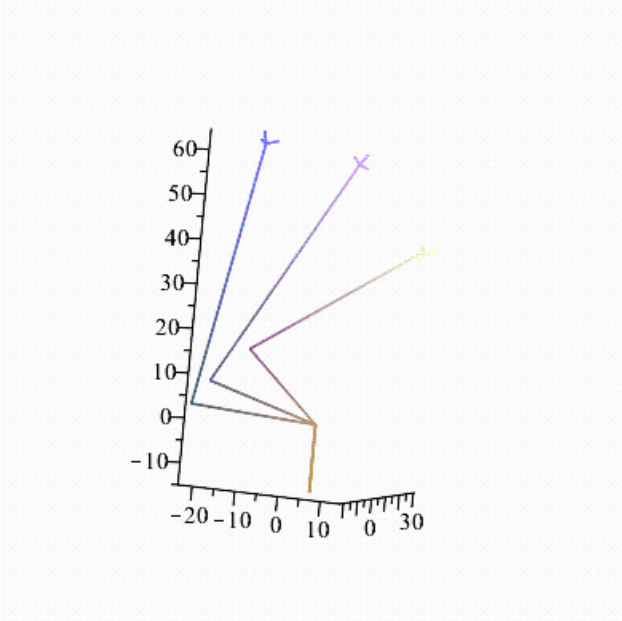


```
>PLOT3D ( (CURVES (GR(4)) ) ,
>  AXESSTYLE (FRAME) , SCALING (CONSTRAINED) ) ;
>
```



```
>PLOT3D ( (CURVES (GR (1) , GR (2) , GR (3) , GR (4) ) ) ,  
AXESSTYLE (FRAME) , SCALING (CONSTRAINED) ) ;  
>
```

>



IV.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré comment obtenir le modèle géométrique avec le robot manipulateur ABB à partir de la méthode de D-H si le modèle géométrique direct et la méthode de Paul avec des données initiales(position initiale du robot),aussi nous avons proposé une expérience de ce robot manipulateur. Nous avons crée un contrôleur basé sur une droite représente le chemin de la variation de l'organe terminal mobile du robot. Nous avons remarquons que l'algorithme est très simple et produit de bons résultats tels que :

- Le chemin de déplacement est proche de l'optimal.
- Le chemin de déplacement est proche de notre décision organisé.
- Quelque soit la position du robot on aura toujours un déplacement orienté du notre bras.

Conclusion générale

Conclusion générale

Conclusion générale

La structure mécanique d'un robot manipulateur est composée de plusieurs corps connectés les uns aux autres par des liaisons appelées articulations, a un seul degré de liberté de translation ou de rotation, cette structure mécanique peut constituer une chaîne cinématique continue ouverte simple, En rappelons que pour les robots sériels, les trois premiers degrés de liberté définissent ce que l'on appelle le porteur, alors que les trois suivants constituent le poignet.

On a vu que le modèle géométrique direct d'un robot permettait de calculer les coordonnées opérationnelles donnant la situation de l'organe terminal en fonction des coordonnées articulaires. Le problème inverse consiste à calculer les coordonnées articulaires correspondant à une situation donnée de l'organe terminal. Lorsqu'elle existe, la forme explicite qui donne toutes les solutions possibles (il y a rarement unicité de solution) constitue ce que l'on appelle le modèle géométrique inverse (MGI). On a distingué la méthode de Paul.

Le MGD se trouve de façon systématique. (Paramètres DenavitHartenberg, matrices homogènes), Il y a toujours une solution dans le domaine de travail. Le MGI ne peut pas se calculer systématiquement dans tous les cas (besoin d'astuces) Solutions multiples (postures) possible, Nombre de solutions inconnu en général, Méthodes numériques ne donnent pas toutes les solutions. La méthode de Paul qui traite séparément chaque cas particulier et convient pour la plupart des robots industriels.

L'obtention de ce modèle n'est pas aisée, la difficulté variant selon la complexité de la cinématique de la chaîne articulée. Entrent en ligne de compte le nombre de degrés de liberté, le type des articulations mais aussi le fait que la chaîne peut être ouverte simple.

Glossaire

Glossaire

I. Abréviations

AFNOR : Association Française de **N**ormalisation

AFRI: Association Française de **R**obotique **I**ndustrielle

d.d.l : degré de liberté

MGD : Modèle **G**éométrique **D**irect

MGI : Modèle **G**éométrique **I**nverse

D-H : **D**ENAVIT-**H**ARTENBERG

Rot : **R**otation

Trans : **T**ranslation

II. Notations

Θ_j : L'angle de rotation sur l'axe Z_j

σ_j : L'angle de rotation sur l'axe X_j

\vec{q} : Le vecteur des variables articulaires

${}^{j-1}T_j$: Matrices des transformations homogènes

${}^{j-1}A_j$: Matrices d'orientation

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] B. Gorla et M. Renaud, « Modèles des Robots Manipulateurs » ,Application à leur commande, Cepadues Editions,1984.[2] : Robotique-ISTIA,Université Angers Jean-Louis Boimond
- [2] W. Khalil et E.Dombre, « Modélisation, identification et commande des robots »,2ème Édition revue et augmentée,Hermès Sciences,1999.
- [3] D.Leroux, « Les robots,stratégies industrielle »,Hermès Edition,1986.
- [4] Jean-Louis Boimond, ISTIA,Université Angers.
- [5] <http://www.jdotec.net/s3i/Mécanique/Cinématique/images/robots6axes.gif>.
- [6] https://www.enstabretagne.fr/jaulin/mastersds_cours_robot_boimond.pdf(Morphologies robots manipulateurs)
- [7] T. Château, Université Blaise Pascal 2012/2013 « Eléments de Robotique »
- [8] <https://fr.wikipedia.org/wiki/Mapl>
- [9] Paul R.C.P., Robot manipulators: mathematics, programming and control, MIT Press, Cambridge, 1981.Wenger P., "Aptitude d'un robot manipulateur à parcourir son espace de travail en présence d'obstacles", Thèse de Doctorat, ENSM, Nantes, sept. 1989.
- [10] Khalil W., Dombre E., Modelisation, identification and control of robots, HermesPentonScience, London,ISBN 1-90399-613-9, 2002, 480 p.

ملخص يتمحور مفهوم الروبوتات على انها جهاز ميكانيكي مفصلي قادر على تقليد بعض وظائف الانسان مثل المناولة واللحام الطلاء التجميع الروبوتات الطبية العسكرية والروبوتات الخاصة العمل المقدم في هذه المذكرة موزع على اربعة فصول الفصل الاول يهدف الى وصف المكونات الاساسية للروبوت و تعريف المصطلحات الاساسية في هذا المجال الفصل الثاني قدم للقارئ القواعد و الادوات الاساسية الضرورية لدراسة النموذج الهندسي و الفصل الثالث يحتوي على قوانين نظام الروبوتات اما الفصل الرابع و الاخير فهو يتمحور على مشروعنا في الاساس وهو تصميم برنامج قادر على الدراسة و التحكم في الروبوتات الزراعية المفتوحة ذات الحامل بة اسطة استخدام النموذج الهندسي المباشر (MGD).

كلمات مفتاحية الروبوتات, جهاز ميكانيكي مفصلي, النموذج الهندسي, برنامج, الروبوتات الزراعية المفتوحة ذات الحامل

Abstract: Robots is articulated mechanical device capable of imitating certain human functions such as handling, welding, and assembly painting, and robotics, medical, military and space robotics. The work presented in this memory is spread over three chapter, of the first chapter aims to describe the basic components of the robot and the definition of key terms in this field.

Chapter two provides the reader with the necessary rules for the geometric model study, the final chapter is structured on the basis of our project and it basically involves designing a program to study and control the carrier robots series.

Keywords: Robots, articulated mechanical, geometric model, program, robots bearer series.

Résumé: Les robots c'est dispositif mécanique articulé capable d'imiter certaines fonctions humaines telles que : manutention, soudage, peinture assemblage , robotique, médicale , militaire et robotique spatiale. Le travail présenté dans cette mémoire est répartie sur trois chapitres.

L'objectif du premier chapitre est de décrire les composants de base du robot et la définition des termes clés dans ce domaine. Le chapitre deux fournit au lecteur les règles nécessaires à l'étude de modèle géométrique et le chapitre troisième donne les lois de commande d'un robot, le dernier chapitre est structuré sur la base de notre projet et il consiste essentiellement à concevoir un programme capable d'étudier et contrôler les robots série porteur (MGD).

Mots-clés : les robots, mécanique articulé, modèle géométrique, programme, les robots série porteur.