Université Abbes Laghrour
M1 Maths 2024-2025
Théorie de Distribution

Examen final de S2

Exercice 1(08pts) :

1. calculer dans $D'(\mathbb{R})$ les limites : $\lim_{n\to+\infty} n(\delta_{\frac{1}{n}}-\delta_{\frac{-1}{n}})$ $\lim_{n\to+\infty}\cos(nx)$, $\lim_{n\to+\infty} ne^{-nx}H(x)$.

01 (a) $\lim_{n\to+\infty}\langle n(\delta_{\frac1n}-\delta_{-\frac1n}),\varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi(\frac1n)-\varphi(-\frac1n)}{\frac1n} = 2\varphi'(0) = \langle 2\delta,\varphi'\rangle = \langle -2\delta',\varphi\rangle$

$\Rightarrow \lim n(\delta_{\frac1n}-\delta_{-\frac1n}) = -2\delta'$

01 (b) $\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos nx\,\varphi(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac1n \sin nx\,\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \lim \frac1n\int_{-a}^{a}\sin(nx)\varphi'(x)dx$ / supp $\varphi\subset[-a,a]$

et $\left|\frac1n\int_{-a}^{a}\sin nx\,\varphi'(x)dx\right| \le \frac1n\int_{-a}^{a}|\varphi'(x)| \le \frac{2a}{n}\|\varphi'\|_\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\cos nx = 0$

01 c) $\lim_{n\to+\infty}\langle ne^{-nx}H(x),\varphi\rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} ne^{-nx}\varphi(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u}\varphi(\frac{u}{n})du$

par convergence dominée $\lim\langle ne^{-nx}H(x),\varphi\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-u}\varphi(0)du = \varphi(0)$

$\Rightarrow \lim ne^{-nx}H(x) = \delta$

2. résoudre dans $D'(\mathbb{R})$:
$\sin(2x)T=0$, $(x^3-1)T=0$, $T'+e^{-x}T=\delta$, $T''-4T=\delta$.

01 (a) ~~On a supp sin 2x~~ $x = \frac{k\pi}{2}$ / $k\in\mathbb{Z}$ $\Rightarrow \sin x\,T=0 \Rightarrow T=\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\delta_{\frac{k\pi}{2}}$

01.5 (b) $T'+e^{-x}T=\delta \Leftrightarrow (T'+e^{-x}T)e^{-e^{-x}} = e^{-e^{-x}}\delta \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(Te^{-e^{-x}}) = e^{-1}\delta$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}(Te^{-e^{-x}}) = (e^{-1}H(x))' \Leftrightarrow Te^{-e^{-x}} = e^{-1}H(x)+C$

$\Leftrightarrow \boxed{T = e^{e^{-x}}(H(x)e^{-1}+C)}$

01.5 (d) $T''-4T=\delta$ on cherche la solution particulière de la forme : $T_p = fH$

$\Leftrightarrow f''-4f=0$, $f'(0)=1$, $f(0)=0 \Rightarrow f(x)=\frac{sh(2x)}{2}$, $\Rightarrow T_p = H(x)\frac{sh(2x)}{2}$

et T_h solution de $T''-(2)^2T=0 \Rightarrow T_h = A\,ch(2x)+B\,sh(2x)$

$\Leftrightarrow \boxed{T=T_p+T_h = A\,ch(2x)+B\,sh(2x)+H(x)\frac{sh(2x)}{2}}$

01 (c) $(x^3-1)T=0 \Rightarrow \boxed{T=C\delta_1}$

Exercice 2(12pts) :Soit $Pf(\frac{H}{x^2})$ la forme linéaire sur $D(\mathbb{R})$:

$$\langle Pf(\tfrac{H}{x^2}),\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0)ln(\varepsilon)\right) \text{ telle que } H(x)=\begin{cases}1, & x\in]0,+\infty[\\ 0, & x\in]-\infty,0]\end{cases}$$

est une fonction de Heaviside .

1. montre que $Pf(\frac{H}{x^2})$ est une distribution d'ordre au plus 2 sur R.

01 a) C'est claire que $Pf(\frac{H}{x^2})$ est linéaire.

01 b) On a $\forall x\in\mathbb{R} : \varphi(x)=\varphi(0)+x\varphi'(0)+\frac{x^2}{2}\psi(x)$ / $\|\psi\|_\infty \leq \|\varphi''\|_\infty$

et $supp\,\varphi\subset[-a,a]$, donc $\langle Pf(\frac{H}{x^2}),\varphi\rangle = \int_0^a \psi(x)dx - \frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0)\log a$

donc : $|\langle Pf(\frac{H}{x^2}),\varphi\rangle| \leq \frac{|\varphi|}{a} + \|\varphi'\|_\infty \log a + a\|\psi\|_\infty$; $\|\psi\|_\infty \leq \|\varphi''\|_\infty$

$\leq C\, P_{2,K}(\varphi)$

donc $Pf(\frac{H}{x^2})$ est une distribution d'ordre au plus 2

02 2. Déterminer le support de $Pf(\frac{H}{x^2})$. : soit $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, si $supp\,\varphi\subset]-\infty,0[$, alors

$\langle Pf(\frac{H}{x^2}),\varphi\rangle = 0$ car $\varphi=0$ sur $\mathbb{R}_+$, Ainsi $supp\,Pf(\frac{H}{x^2})\subset[0,+\infty[$

Réciproquement, soit $x_0>0$ et $\varphi\in D(\mathbb{R}_+)$ tq : $\varphi=1$ en x_0 et $\varphi=0$ sur $[\frac{x_0}{2},\frac{3x_0}{2}]$

et soit $\varepsilon>0$: $\varepsilon<\frac{x_0}{2}$, alors : $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x^2}-\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}+\varphi'(0)\log\varepsilon = \int_{\frac{x_0}{2}}^{\frac{3x_0}{2}}\frac{\varphi(x)}{x^2}+0+0>0$

donc $\langle Pf(\frac{H}{x^2}),\varphi\rangle>0$, Donc $x_0\in supp\,Pf(\frac{H}{x^2}) \Rightarrow]0,+\infty[\subset supp\,Pf(\frac{H}{x^2})\subset[0,+\infty[$

Comme $supp\,Pf(\frac{H}{x^2})$ est un fermé $\Longrightarrow$ $supp\,Pf(\frac{H}{x^2})=[0,+\infty[$.

3. $\forall n\geq 1$, Soit $\varphi_n\in D(\mathbb{R})$ telle que $\begin{cases}0\leq\varphi_n\leq 1\\ supp\varphi_n\subset[\frac{1}{2n},2]\\ \varphi_n = 1 sur[\frac{1}{n},1]\end{cases}$

4. montre par absourde que $Pf(\frac{H}{x^2})$ n'est pas d'ordre 0.

02 Si par l'absurde $Pf(\frac{H}{x^2})$ était d'ordre 0 sur $[0,2]$ $\Rightarrow \exists C>0$: et $\forall\varphi\in D(\mathbb{R})$

tq $supp\,\varphi\subset[0,2]$ $|\langle Pf(\frac{H}{x^2}),\varphi\rangle|\leq C\|\varphi\|_\infty$, on a : $\forall n\geq 1$: $\|\varphi_n\|_\infty=1$ et

$\langle Pf(\frac{H}{x^2}),\varphi_n\rangle = \int_{\frac{1}{2n}}^{2}\frac{\varphi_n(x)}{x^2}+0+0 \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{x^2} = n-1 \geq 0$

donc : $n-1 \leq \langle Pf(\frac{H}{x^2}),\varphi_n\rangle \leq C\|\varphi_n\|_\infty = C$

$\to +\infty$

donc cela est impossible Ainsi

$Pf(\frac{H}{x^2})$ n'est pas d'ordre 0.

5. vérifier que $x^2 Pf(\frac{H}{x^2}) = H(x)$ et résoudre dans $D'(\mathbb{R})$: $x^2T' + 2xT = \delta$

01 soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\langle x^2 pf(\frac{H}{x^2}), \varphi \rangle = \langle pf(\frac{H}{x^2}), x^2\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon} \int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x) + 0 + 0 = \int_0^{+\infty} 1\varphi(x) = \langle H(x), \varphi \rangle$

$\Rightarrow x^2 pf(\frac{H}{x^2}) = H(x)$.

on a : $x^2T' + 2xT = \delta \Rightarrow (x^2T)' = H'(x) \Rightarrow (x^2T - H(x))' = 0 \Rightarrow x^2T = H(x) + c$

et on a : $x^2 pf(\frac{H}{x^2}) = H(x) \Rightarrow x^2(T - pf(\frac{H}{x^2})) = c \Rightarrow \boxed{x^2 \frac{1}{c}(T - pf(\frac{H}{x^2})) = 1}$

02 et on a : $x^2 pf(\frac{1}{x^2}) = 1 \Rightarrow x^2 \left(\frac{1}{c}(T - pf(\frac{H}{x^2})) - pf(\frac{1}{x^2})\right) = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{c}(T - pf(\frac{H}{x^2})) - pf(\frac{1}{x^2}) = c_0\delta + c_1\delta'$

$\Rightarrow T = c_0\delta + c_1\delta' + pf(\frac{H}{x^2}) + pf(\frac{1}{x^2})$

6. on pose dans $D(\mathbb{R})$: $\langle Vp(\frac{H}{x}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} (\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \varphi(0) ln(\varepsilon))$, montre $D'(\mathbb{R})$ que $Vp(\frac{H}{x})' = -Pf(\frac{H}{x^2}) - \delta'$, et résoudre dans $D'(\mathbb{R})$: $T' + Pf(\frac{H}{x^2}) = 0$.

soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ~~tq supp $\varphi \subset [-a, a]$, $a > 0$~~, on a :

$\langle Vp(\frac{H}{x})', \varphi \rangle = -\langle Vp(\frac{H}{x}), \varphi' \rangle = -\lim \left(\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x} dx + \varphi'(0) \log \varepsilon\right)$

011 $= -\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_\varepsilon^a + \int_\varepsilon^a \frac{\varphi(x)}{x^2} + \varphi'(0) \log \varepsilon \right)$

$= -\langle pf(\frac{H}{x^2}), \varphi \rangle - \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\varphi(0) - \varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = \langle pf(\frac{H}{x^2}), \varphi \rangle - \delta'(0) = (-pf(\frac{H}{x^2}) - \delta')$

donc $Vp(\frac{H}{x})' = -pf(\frac{H}{x^2}) - \delta'$

b) on a : $T' = -pf(\frac{H}{x^2}) = Vp(\frac{H}{x})' + \delta' = (Vp(\frac{H}{x}) + \delta)'$

01 $\Rightarrow \boxed{T = Vp(\frac{H}{x}) + \delta + c}$

bonne chance