الجمهوريةالجزائريةالديمقراطيةالشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارةالتعليمالعاليو البحثالعلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعةعباسلغرورخنشلة
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR- KHENCHELA

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Mathématiques & Informatique

N° de série :……

THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat LMD

Spécialité : Mathématiques

Option : Analyse Fonctionnelle et Application

Par :

GOSSA Mohamed Laid

Thème :

Analyse Variationnelle de Quelques Problèmes aux Limites en Electro-Élasticité et Electro-Viscoélasticité avec Endommagement

Devant le jury :

M. Said KOUACHI	Prof.	U. Khenchela	Président
M. Tedjani HADJ AMMAR	Prof.	U. El Oued	Encadreur
M. Khaled SAOUDI	Prof.	U. Khenchela	Co-Encadreur
M. Tedjani MENACER	Prof.	U. Biskra	Examinateur
M. Rachid MECHRAOUI	Prof.	U. Khenchela	Examinateur
M. Elmehdi ZAOUECHE	MCA	U. El Oued	Examinateur

Date de soutenance : .. / .. / 2023

Dédicaces

***À** . . .*

***Mes généreux parents**.*

***Mon épouse** .*

***Mon fils Oussama** et **sa femme**.*

***Ma fille Messaouda** et **son marie**.*

***Ma fille Nour El Iman**.*

***Ma fille Doua**.*

*Mon neveu **Aymen**.*

*Ma petite fille **Nourcine Souad**.*

*Mon petit fis **Mohamed**.*

*Ma petite fille **Bechra El djana** .*

*Mes fréres **Abderrezzak** et **azzeddine** avec **ses familles***

*Mes soeures **Nacira**, **Djahida** et **Rafika** avec **ses familles** .*

*Mon Professeur **Hadj Ammar Tedjani** et **sa famille** .*

*Mon Professeur **Saoudi Khaled** et **sa famille** .*

*Tout **mes Professeurs** et **mes Etudients** .*

*Tout la famille **GOSSA** .*

*Tout **mes camarades** et **mes collégues** .*

***Je dédie ce travail**.*

Remerciements et Gratitude

*je remercie beaucoup **Dieu** Tout-Puissant pour ses bénédictions sur moi et son aide pour terminer cette thèse..*

*je remercie beaucoup **Mes généreux parents** de leur avoir inculqué l'amour des sciences et du savoir depuis l'enfance.*

*J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à mon encadreur **Professeur, Hadj Ammar Tedjani** pour ses encouragements, ses conseils et sa patience jusqu'à la fin de cette thèse..*

*J'adresse mes remerciements les plus chaleureuses et sincères à mon co-encadreur **Professeur, Saoudi Khaled** pour ses encouragements et ses conseils*

*Je suis très honorée que Monsieur **le Professeur, Said Kouachi** a accepté de présider le jury de ma soutenance de ma thèse.*

*Je voudrais adresser tous mes remerciements sincèrement et apprécions aux membres du jure Messieurs **le Professeur Menacer Tedjani** , **le Professeur Rachid Mechraoui** ,**le Docteur Elmehdi Zaouche** .*

*Je voudrais adresser tous mes remerciements sincèrement et apprécions à mes collégues professeurs **Hofani Nadjib, Guerguazi Lahcen, Youcef Mohamed et Daci Chiraz Ali.***

À tous ceux qui ont contribué à l'achèvement de ces travaux, de près ou de loin, nous remercions et apprécions beaucoup.

Table des matières

Introduction générale

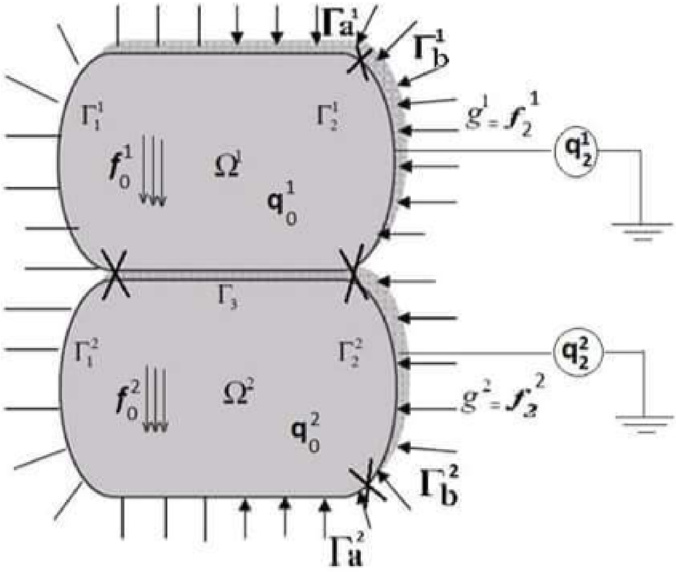
Dans notre vie quotidienne, il existe plusieurs phénomènes qui font appel à des processus de contact entre un corps déformable et une fondation ou entre deux corps déformables, comme les pneus de roue et la route, les plaquettes de frein avec roues etc....
La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent lorsqu'elles subissent ces derniéres. Les processus de contact s'accompagnent d'un certain nombre de phénomènes dont les principaux sont le frottement, l'adhésion des surfaces de contact, la géneration de chaleur, l'endommagement matériels ainsi que les effets mécaniques, physiques et chimiques à différentes échelles.

La piézoélectricité est la propriété que possèdent certains matériaux de se polariser électriquement sous l'action d'une contrainte mécanique et réciproquement de se déformer lorsqu'on leur applique un champ électrique.

La première application de la piézoélectricité fut le sonar développé par Paul Langevin et ses collaborateurs pendant la première Guerre mondiale. Ce sonar était composé de lames de quartz collées entre deux plaques d'acier et d'un hydrophone et permettant, par la mesure du temps écoulé entre l'émission d'une onde acoustique et la réception de son écho, de calculer la distance à l'objet. Au cours de la seconde Guerre mondiale, la recherche des matériaux diélectriques plus performants amena différents groupes de recherche au Japon, aux Etats-Unis et en Russie à découvrir les propriétés piézoélectriques de céramiques de synthèses composées d'oxydes à structure pérovskite : le titanate de baryum ($BaTiO_3$) puis un peu plus tard les titano-zirconate de plomb (PZT). La mise au point de ces matériaux représente une étape décisive dans le développement des dispositifs piézoélectriques.

En mécanique et en physique, l'adhésion est l'ensemble des phénoménes physico-chmiques qui se produisent lorsque l'on met en contact intime deux matériaux, dans le but de créer une résidence mécaniqueà la séparation. L'importance accrue des processus d'adhésion dans les montages industriels a attiré l'attention des chercheurs ces derniers temps ce qui enrichit les études et la littérature mathématique sur ce sujet, donc il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact comme dans les deux premier chapitres de ma thése et on remplacé l'adhésion par un autre variable dans le troisième chapitre.

Dans cette thèse, On considére deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^1 \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega^2 \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. Pour chaque $\alpha = 1.2$, on suppose que la frontière $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$ est régulière et partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\alpha, \Gamma_2^\alpha$ et Γ_3^α d'une part et en deux parties mesurables Γ_a^α et Γ_b^α d'autre part telles que $mes\Gamma_1^\alpha > 0$ et $mes\Gamma_a^\alpha > 0$. On note que ν^α la normale unitaire sortante à Γ^α et les corps sont encastrées sur Γ_1^α . Sur Γ_2^α agissent des tractions surfaciques de densité f_2^α et dans Ω^α agissent des forces volumiques de densités f_0^α, voir figure 2. On suppose que f_2^α et f_0^α, varient très lentement par rapport au temps et soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps. En plus de l'action des forces des tractions, le corps Ω^α est soumis à l'action des chaleurs électriques de densité volumiques q_0^α et de chaleurs électriques surface. Les deux corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a^α de la frontiére ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^α, agissent sur Γ_b^α.



On désigne par $\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \boldsymbol{\sigma}^\alpha(x,t)$ le champ des contraintes, $\boldsymbol{u}^\alpha = \boldsymbol{u}^\alpha(x,t)$, le champ des déplacements et $\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha)$ le champ des déformations infinitésimales.

Ma thèse est composée de trois chapitres où on étudie respectivement trois problèmes de contact distincts entre deux corps piézoelectrique avec endomagement. Pour chaque problème, on va donner sa formulation, présenter sa formulation variationnelle et etudier l'existence d'une solution faible du problème. Dans le premier chapitre le contact est entre deux corps thermo-électro-élastique avec adhésion et frottement. Dans le deuxiéme le contact est entre deux corps thérmo-électro-viscoélastique avec adhésion et endommagement, le contenu du deuxième chapitre a fait l'objet de la publication [6]. Dans le dernier chapitre le contact est entre deux corps thérmo-électro-viscoélastiques avec endommagement et un variable interne, le contenu du troisième chapitre a fait l'objet de la publication [5].

Notations générales

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i\psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante x : $\partial_i\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}$,
$\nabla\psi$	Gradient de l'application ψ : $\nabla\psi = (\partial_1\psi, \ldots, \partial_d\psi)$,
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
Divψ	Divergence de l'application,ψ : Div$\psi = \partial_1\psi + \ldots + \partial_d\psi)$,
$(.,.)_{\mathrm{X}}$	le produit scalaire de X,
$\Vert\cdot\Vert_{\mathrm{X}}$	la norme de X,
p.p.	Presque partout,
Ω^α	Ouvert de $\mathbb{R}^d$, parfois domaine L'hertzien,
$\bar{\Omega}^\alpha$	l'adhérence de Ω^α,
Γ^α	La frontière de Ω^α : $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$,
Γ_i^α	Les parties de frontière $\Gamma^\alpha, (i = 1, 2, 3)$,
$mes\Gamma_i^\alpha$	Mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_i^α,
$d\Gamma_i^\alpha$	Mesure superficielle sur Γ_i^α,
$\boldsymbol{\nu}^\alpha$	la normale unitaire sortante à Γ^α,
$v_\nu^\alpha, \boldsymbol{v}_\tau^\alpha$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v_ν^α défini sur $\bar{\Omega}^\alpha$,
$L^2(\Omega^\alpha)$	Espace des fonctions u^α mesurables sur Ω^α telles que $\int_{\Omega^\alpha} \vert u^\alpha\vert^2 dx < +\infty$,
$\Vert\cdot\Vert_{L^2(\Omega^\alpha)}$	La norme de $L^2(\Omega^\alpha)$ définie par $\Vert u^\alpha \Vert_{L^2(\Omega^\alpha)} = (\int_{\Omega^\alpha} \vert u^\alpha\vert^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\alpha)$	Espace des fonctions u^α mesurables sur Ω^α telles que,
	$\exists c > 0 : \vert u^\alpha \vert < c$, p.p., sur Ω^α,

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\alpha)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^α,
$\mathrm{H}_{\Gamma^\alpha}$	L'espace$(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\alpha))^d$,
$\mathrm{H}'_{\Gamma^\alpha}$	l'espace dual de $\mathrm{H}_{\Gamma^\alpha}$.
$C([0,T];\mathrm{H})$	L'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans H,
$C^1([0,T];\mathrm{H})$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0,T]$ dans H,
$L^p([0,T];\mathrm{H})$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$ dans H,
$\|\cdot\|_{L^p([0,T];\mathrm{H})}$	La norme de $L^p([0,T];\mathrm{H})$,
$\mathrm{W}^{k,p}([0,T];\mathrm{H})$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p,
$\|\cdot\|_{\mathrm{W}^{k,p}([0,T];\mathrm{H})}$	La norme de $\mathrm{W}^{k,p}([0,T];\mathrm{H})$,
$\Gamma_3^1=\Gamma_3^2=\Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1,Ω^2,
u^α	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^α, on écrit u_i^α les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^α	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^α, on écrit σ_i^α les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^α	normale des contraintes à la frontière du domaine :$\sigma_\nu^\alpha=(\sigma^\alpha\nu^\ell).\nu^\alpha$,
$\boldsymbol{\sigma}_\tau^\alpha$	le composante tangentielle du champ tensoriel $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$,
ψ^α	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^α,
β	Vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3,
$\boldsymbol{D}^\alpha$	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^α,
$\dot{u}^\alpha,\ddot{u}^\alpha$	Les dérivées première et seconde de u^α par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\alpha)$	Tenseur linéarisé des déformations :$\varepsilon(u^\alpha)_{ij}=\frac{1}{2}(\partial_i u_j^\alpha+\partial_j u_i^\alpha)$.

Chapitre 1

Contact entre Deux Corps thérmo-électro-élastiques avec frottement, adhésion et endomagement

Dans ce premier chapitre, on s'intéresse à l'étude variationnelle d'un problème de contact entre deux corps thérmo-éléctro-élastique dans un processus quasistatique avec mémoire longue et endommagement, cet contact est modélisé par les conditions de compliance normale avec l'adhésion.

Ce chapitre est organisé en trois sections. Dans la premiére, on décrit la formulation du probléme tandis que dans la deuxième, on donne des hypothéses et sa formulation variationnelle mais dans la troisième, on démontre l'existense d'une solution faible et sa unicité en se basant sur les méthodes du point fixe et les résultats des équations variationnelles.

1.1 Position du problème

Problème $\mathcal{P}$. pour $\alpha = 1, 2$, trouver respectivement les champs des déplacements $\boldsymbol{u}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, des températures $\theta^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, d'endommagements $\xi^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, des potentiels électriques $\zeta^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, déplacements électriques $\mathbf{D}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\varsigma : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R}$, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \theta^\alpha, \xi^\alpha) + \int_0^t \mathcal{Q}^\alpha(t-s, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(s)), \theta^\alpha(s), \xi^\alpha(s))ds - (\mathcal{E}^\alpha)^* E^\alpha(\zeta^\alpha), \quad (1.1)$$

$$\text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T),$$

$$\mathbf{D}^\alpha = \mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha) + \mathcal{G}^\alpha(E^\alpha(\zeta^\alpha)) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \quad (1.2)$$

$$\dot{\xi}^\alpha - \kappa^\alpha \Delta \xi^\alpha + \partial \psi_{K^\alpha}(\xi^\alpha) \ni \phi^\alpha(\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \theta^\alpha, \xi^\alpha) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \quad (1.3)$$

$$\dot{\theta}^\alpha - \kappa_0^\alpha \Delta \theta^\alpha = \Theta^\alpha(\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \theta^\alpha, \xi^\alpha) + \rho^\alpha \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \quad (1.4)$$

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma}^\alpha = -f_0^\alpha \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \quad (1.5)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D}^\alpha = q_0^\alpha \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \quad (1.6)$$

$$\boldsymbol{u}^\alpha = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1^\alpha \times (0,T), \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha = f_2^\alpha \qquad \text{sur } \Gamma_2^\alpha \times (0,T), \quad (1.8)$$

$$\dot{\varsigma} = \mathbf{H}_{ad}(\varsigma, \xi_\varsigma, R_\nu([u_\nu])), \mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau])) \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu([u_\nu]) \end{cases} \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \\ \| \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \varsigma^2 \mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) \| \leq \mu p_\nu([u_\nu]) \\ \| \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \varsigma^2 \mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) \| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\boldsymbol{u}_\tau] = 0 \\ \| \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \varsigma^2 \mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) \| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geqslant 0 \\ \text{telle que } \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \varsigma^2 \mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) = -\lambda [\boldsymbol{u}_\tau] \end{cases} \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \nu^\alpha} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^\alpha \times (0,T), \quad (1.12)$$

$$\kappa_0^\alpha \frac{\partial \theta^\alpha}{\partial \nu^\alpha} + \lambda_0^\alpha \theta^\alpha = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^\alpha \times (0,T), \tag{1.13}$$

$$\zeta^\alpha = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_a^\alpha \times (0,T), \tag{1.14}$$

$$\mathbf{D}^\alpha \cdot \boldsymbol{\nu}^\alpha = q_2^\alpha \qquad \text{sur } \Gamma_b^\alpha \times (0,T), \tag{1.15}$$

$$\mathbf{D}^\alpha \cdot \boldsymbol{\nu}^\alpha = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{u}^\alpha(0) = \boldsymbol{u}_0^\alpha,\ \theta^\alpha(0) = \theta_0^\alpha,\ \xi^\alpha(0) = \xi_0^\alpha \qquad \text{dans } \Omega^\alpha, \tag{1.17}$$

$$\varsigma(0) = \varsigma_0 \qquad \text{sur } \Gamma_3. \tag{1.18}$$

Les relations (1.1) et (1.2) désignent la loi constitutive du problème, où $\mathcal{B}^\alpha$ est l'opérateur thérmo-élasticité avec endommagement, $\mathcal{G}^\alpha$ est l'opérateur de permitivité électrique $\varepsilon(u^\alpha)$ représente le tenseur linéarisé de contrainte, $E^\alpha(\varphi^\alpha) = -\nabla\zeta^\alpha$ est le champ électrique, $\mathcal{E}^\alpha$ désigne le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, et $(\mathcal{E}^\alpha)^*$ son transposé. La relation (1.3) représente l'inclusion qui décrit l'évolution du champ d' endommagement. La conservation énergitique est représenée par (1.4). (1.5) et (1.6) dèsignent respectivement les relations d'équilibre qui concernant les champs de contrainte et de déplacement électrique. (1.7) et (1.8) definissent les conditions aux limites respectivement de déplacement et de traction. (1.9) qui décrit l'évolution d'adhésion est dépendante de ς. La relation (1.10) désigne le contact sur Γ_3. (1.11) représente les conditions de contacte de frottement de Colomb avec compliance normale et adhésion. La relation (1.12) met en évidence les condition aux limites de Neumann homogène où $\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \nu^\alpha}$ s'obtient par la dérivation normale de ξ^α. (1.13) représente la condition aux limites de Fourier pour la température sur Γ^α. Les conditions aux limites électriques sont présentées par les équations (1.14), (1.15) et (1.16). Finalement les fonctions $\boldsymbol{u}_0, \theta_0, \xi_0$ et ς_0 dans (1.17) et (1.18) sont les conditions initiales.

1.2 Formulation variationnelle

a) Hypothéses

On considère les hypothèses suivantes :

$\mathcal{B}^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\begin{cases} (a)\,\text{Il existe } L_{\mathcal{B}^\alpha} > 0\,\text{telle que :} \\ \quad |\mathcal{B}^\alpha(x,\eta_1,s_1,r_1) - \mathcal{B}^\alpha(x,\eta_2,s_2,r_2)| \le L_{\mathcal{B}^\alpha}(|\eta_1-\eta_2| + |s_1-s_2| + |r_1-r_2|), \\ \quad \forall \eta_1,\eta_2 \in \mathbb{S}^d, s_1,s_2,r_1,r_2 \in \mathbb{R}\ \text{ p.p.}\, x \in \Omega^\alpha. \\ (b)\,\text{Il existe } m_{\mathcal{B}^\alpha} > 0\,\text{tel que :} \\ \quad (\mathcal{B}^\alpha(x,\eta_1,s,r) - \mathcal{B}^\alpha(x,\eta_2,s,r)).(\eta_1-\eta_2) \ge m_{\mathcal{B}^\alpha}\|\eta_1-\eta_2\|^2, \\ \quad \forall \eta_1,\eta_2 \in \mathbb{S}^d, s,r \in \mathbb{R}\ \text{ p.p.}\, x \in \Omega^\alpha. \\ (c)\quad x \mapsto \mathcal{B}^\alpha(x,\eta,s,r)\,\text{est mesurable dans } \Omega^\alpha,\ \forall \eta \in \mathbb{S}^d, s,r \in \mathbb{R}. \\ (d)\quad x \mapsto \mathcal{B}^\alpha(x,0,0,0)\ \in \mathcal{H}^\alpha. \end{cases} \tag{1.19}$$

$\mathcal{Q}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} (a)\,\text{Il existe } L_{\mathcal{Q}^\alpha} > 0\,\text{telle que :} \\ \quad |\mathcal{Q}^\alpha(x,t,\epsilon_1,s_1,r_1) - \mathcal{Q}^\alpha(x,t,\epsilon_2,s_2,r_2)| \le L_{\mathcal{Q}^\alpha}(|\epsilon_1-\epsilon_2| + |s_1-s_2| + |r_1-r_2|), \\ \quad \forall t \in (0,T),\quad \forall \epsilon_1,\epsilon_2 \in \mathbb{S}^d,\ s_1,s_2,r_1,r_2 \in \mathbb{R} \quad \text{p.p.}\, x \in \Omega^\alpha, \\ (b)\quad x \mapsto \mathcal{Q}^\alpha(x,t,\epsilon,s,r)\,\text{est mesurable dans } \Omega^\alpha, \text{pour tout } t \in (0,T), \\ \quad \epsilon \in \mathbb{S}^d,\ s,r \in \mathbb{R}, \\ (c)\quad t \mapsto \mathcal{Q}^\alpha(x,t,\epsilon,s,r)\,\text{est continue dans } (0,T), \text{pour tout } \epsilon \in \mathbb{S}^d, \\ \quad \forall s,r \in \mathbb{R},\ \text{p.p. } x \in \Omega^\alpha, \\ (d)\quad x \mapsto \mathcal{Q}^\alpha(x,t,0,0,0)\ \in \mathcal{H}^\alpha,\ \forall t \in (0,T). \end{cases} \tag{1.20}$$

$\Theta^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait :

$$\begin{cases} (a)\,\text{Il existe } L_{\Theta^\alpha} > 0\,\text{telle que :} \\ \quad |\Theta^\alpha(x,h_1,\eta_1,s_1,r_1) - \Theta^\alpha(x,h_2,\eta_2,s_2,r_2)| \le L_{\Theta^\alpha}(|h_1-h_2| + |\eta_1-\eta_2| + |s_1-s_2| \\ \quad +|r_2-r_2|),\ \forall h_1,h_2,\eta_1,\eta_2 \in \mathbb{S}^d,\ s_1,s_2,r_1,r_2 \in \mathbb{R},\ \text{p.p.}\, x \in \Omega^\alpha, \\ (b)\quad x \mapsto \Theta^\alpha(x,h,\eta,s,r)\,\text{est mesurable sur } \Omega^\alpha,\ \text{pour tout } h,\eta \in \mathbb{S}^d \\ \quad\ \text{et } s,r \in \mathbb{R}, \\ (c)\quad x \mapsto \Theta^\alpha(x,0,0,0,0)\ \in L^2(\Omega^\alpha) \\ (d)\quad \Theta^\alpha(x,h,\eta,s,r)\,\text{est bornée pour tous } h,\eta \in \mathbb{S}^d,\ s,r \in \mathbb{R},\quad \text{p.p. } x \in \Omega^\alpha. \end{cases} \tag{1.21}$$

$\phi^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait :

$$\begin{cases} (a)\,\text{Il existe } L_{\phi^\alpha} > 0\,\text{telle que :} \\ \quad |\phi^\alpha(x,h_1,\eta_1,s_1,r_1) - \phi^\alpha(x,h_2,\eta_2,s_2,r_2)| \le L_{\phi^\alpha}(|h_1-h_2| + |\eta_1-\eta_2| + |s_1-s_2| \\ \quad +|r_1-r_2|),\ \forall h_1,h_2,\eta_1,\eta_2 \in \mathbb{S}^d,\ s_1,s_2,r_1,r_2 \in \mathbb{R},\ \text{p.p.}\, x \in \Omega^\alpha. \\ (b)\quad x \mapsto \phi^\alpha(x,h,\eta,s,r)\,\text{est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\alpha,\ \forall h,\ \eta \in \mathbb{S}^d \\ \quad \text{et}\, s,r \in \mathbb{R}, \\ (c)\quad x \mapsto \phi^\alpha(x,0,0,0,0)\,\text{appartient à } \mathrm{L}^2(\Omega^\alpha), \\ (d)\quad \phi^\alpha(x,h,\eta,s,r)\,\text{est bornée}\,\forall h,\ \eta \in \mathbb{S}^d\,, s,r \in \mathbb{R}, \text{p.p.}\, x \in \Omega^\alpha. \end{cases} \tag{1.22}$$

$\mathcal{E}^\alpha : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} (a)\,\mathcal{E}^\alpha(x,\tau) = (e^\alpha_{ijk}(y)\tau_{jk}),\ \ \forall \tau = (\tau_{ij})\ \in \mathbb{S}^d,\ \text{p.p. } x \in \Omega^\alpha, \\ (b)\,e^\alpha_{ijk} = e^\alpha_{ikj} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega^\alpha),\quad 1 \le i,j,k \le d. \end{cases} \tag{1.23}$$

$\mathcal{G}^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} (a)\ \mathcal{G}^\alpha(x,E) = (b^\alpha_{ij}(x)E_j),\ b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji},\ b^\alpha_{ij} \in L^\infty(\Omega^\alpha),\quad 1 \le i,j \le d, \\ (b)\,\text{Il existe } m_{\mathcal{G}^\alpha} > 0\,\text{telle que :} \\ \quad \mathcal{G}^\alpha E.E \ge m_{\mathcal{G}^\alpha}|E|^2,\ \forall E \in \mathbb{R}^d,\ \text{p.p. } x \in \Omega^\alpha. \end{cases} \tag{1.24}$$

H_{ad} :$\Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$\begin{cases} (a)\,\text{Il existe } L_{ad} > 0\,\text{telle que :} \\ \quad |H_{ad}(x,h_1,\epsilon_1,s_1,r_1) - H_{ad}(x,h_2,\epsilon_2,s_2,r_2)| \leq L_V(|h_1-h_2| + |\epsilon_1-\epsilon_2| + |s_1-s_2| \\ \quad +|r_1-r_2|), \forall h_1,h_2,\epsilon_1,\epsilon_2,s_1,s_2 \in \mathbb{R},\ r_1,r_2 \in \mathbb{R}^{d-1},\ \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b)\quad x \mapsto H_{ad}(x,h,\epsilon_, s,r)\,\text{est mesurable sur } \Gamma_3,\ \forall h,\epsilon,\ s \in \mathbb{R}\, r \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ (c)\quad (h,\epsilon_, s,r) \mapsto H_{ad}(x,h,\epsilon_, s,r)\,\text{est continu sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1} \\ \quad \text{p.p.}\, x \in \Gamma_3, \\ (d)\quad H_{ad}(x,0,\epsilon_, s,r) = 0\ ,\forall \xi, s \in \mathbb{R}\ \ r \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{p.p.}\, x \in \Gamma_3, \\ (e)\quad H_{ad}(x,h,\epsilon_, s,r) \geq 0\ ,\forall h \leq 0,\ \epsilon, s \in \mathbb{R}\ \ r \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{p.p.}\, x \in \Gamma_3,\ \text{et} \\ \quad H_{ad}(x,h,\epsilon_, s,r) \leq 0\ ,\forall h \geq 1,\ \epsilon, s \in \mathbb{R}\ \ r \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{p.p.}\, x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{1.25}$$

$p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\begin{cases} (a)\,\text{Il existe}\,\mathtt{L}_\nu > 0\,\text{telle que :} \\ \quad |p_\nu(x,s_1) - p_\nu(x,s_2)| \leq \mathtt{L}_\nu|s_1-s_2|, \quad \forall s_1,s_2 \in \mathbb{R}, \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (b)\ p_\nu(x,s_1) - p_\nu(x,s_2))(s_1-s_2) \geq 0, \quad \forall s_1,s_2 \in \mathbb{R}, \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\ (c)\quad x \longmapsto p_\nu(x,s)\,\text{est mesurable sur}\,\Gamma_3,\ \forall s \in \mathbb{R}, \\ (d)\quad p_\nu(x,s) = 0 \text{ pour tout } s \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \tag{1.26}$$

On suppose que f_0^α, f_2^α, q_0^α, q_2^α et ρ^α vérifient :

$$f_0^\alpha \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathtt{L}^2(\Omega^\alpha)^d), \quad f_2^\alpha \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathtt{L}^2(\Gamma_2^\alpha)^d), \tag{1.27}$$

$$q_0^\alpha \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathtt{L}^2(\Omega^\alpha)), \quad q_2^\alpha \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathtt{L}^2(\Gamma_b^\alpha)), \quad \rho^\alpha \in \mathrm{L}^2(0,T;(\mathtt{L}_1^\alpha)'). \tag{1.28}$$

Aussi γ_ν et γ_τ vérifient :

$$\gamma_\nu,\ \gamma_\tau \in \mathtt{L}^\infty(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu, \gamma_\tau \geq 0 \quad \text{p.p. sur}\,\Gamma_3. \tag{1.29}$$

Et κ_0^α, κ^α satisfaient :

$$\kappa_0^\alpha > 0, \quad \kappa^\alpha > 0. \tag{1.30}$$

Puit μ satisfait :

$$\mu \in L^{\infty}(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \qquad \text{p.p. sur}\, \Gamma_3. \tag{1.31}$$

Les conditions initials de déplacement, d'endomagement, de temperature et d'adhésion vérifient :

$$\boldsymbol{u}_0^{\alpha} \in \mathrm{V}^{\alpha}. \tag{1.32}$$

$$\xi_0^{\alpha} \in \mathrm{K}^{\alpha}. \tag{1.33}$$

$$\theta_0^{\alpha} \in \mathrm{L}_1^{\alpha}. \tag{1.34}$$

$$\varsigma_0 \in \mathrm{L}^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \varsigma_0 \leq 1, \text{ p.p. sur}\, \Gamma_3, \tag{1.35}$$

Maintenant on va définir des fonctions qu'on va utiliser dans la formulation variationnelle.

Le théoréme de représentation de Riesez, entraine l'existence de $f = (f^1, f^2) : [0,T] \to \mathrm{V}$ et $q = (q^1, q^2) : [0,T] \to \mathrm{W}$ telles que :

$$(f(t), \boldsymbol{v})_{\mathrm{V}} = \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^{\alpha}} f_0^{\alpha}(t) \cdot \boldsymbol{v}^{\alpha} dx + \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_2^{\alpha}} f_2^{\alpha}(t) \cdot \boldsymbol{v}^{\alpha} da, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, t \in [0,T], \tag{1.36}$$

$$(q(t), \zeta)_{\mathrm{W}} = \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^{\alpha}} q_0^{\alpha}(t) \cdot \zeta^{\alpha} dx - \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_b^{\alpha}} q_2^{\alpha}(t) \cdot \zeta^{\alpha} da, \quad \forall \zeta \in \mathrm{W}, t \in [0,T]. \tag{1.37}$$

Les relations (1.27) et (1.28) impliquent que :

$$f \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{V}), \quad q \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{W}). \tag{1.38}$$

Aussi, $a_0 : \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \to \mathbb{R}$ et $a : \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \to \mathbb{R}$ par

$$a_0(\zeta, \xi) = \sum_{\alpha=1}^{2} \kappa_0^{\alpha} \int_{\Omega^{\alpha}} \nabla \zeta^{\alpha} \cdot \nabla \xi^{\alpha} dx + \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_0^{\alpha} \int_{\Gamma^{\alpha}} \zeta^{\alpha} \xi^{\alpha} da. \tag{1.39}$$

$$a(\zeta, \xi) = \sum_{\alpha=1}^{2} \kappa^{\alpha} \int_{\Omega^{\alpha}} \nabla \zeta^{\alpha} \cdot \nabla \xi^{\alpha} dx. \tag{1.40}$$

Puit, la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : \mathrm{L}^2(\Gamma_3) \times \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\varsigma, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_{\nu} \varsigma^2 R_{\nu}([u_{\nu}])[v_{\nu}] + \gamma_{\tau} \varsigma^2 \mathbf{R}_{\tau}([\boldsymbol{u}_{\tau}]) \cdot [\boldsymbol{v}_{\tau}]) da, \tag{1.41}$$

la fonctionnelle de compliance normale $j_{\nu c} : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ par

$$j_{\nu c}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} p_{\nu}([u_{\nu}])[v_{\nu}] da, \tag{1.42}$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \to \mathbb{R}$ par

$$j_{fr}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \parallel [\boldsymbol{v}_\tau] \parallel da. \tag{1.43}$$

La relation (1.26) implique que les intégrales dans (1.42) et (1.43) sont bien définies.

b) formulation variationnelle du probléme

Par application des formules de Green, on remarque que si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}$ et ς sont des fonctions suffisamment régulières qui vérifient (1.5), (1.7), (1.10) et (1.11) avec (1.41), (1.42) et (1.43) pour t out $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) - \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha} + (Div \boldsymbol{\sigma}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t))_{H^\alpha} = \int_{\Gamma^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \cdot (\boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t)) da, \quad \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in \mathrm{V}^\alpha.$$

On a

$$\int_{\Omega^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha (\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) - \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t))) dx + \int_{\Omega^\alpha} Div \boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot (\boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t)) dx = \int_{\Gamma_1^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \cdot (\boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t)) da$$
$$+ \int_{\Gamma_2^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \cdot (\boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t)) da + \int_{\Gamma_3^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \cdot (\boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t)) da, \quad \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in \mathrm{V}^\alpha.$$

d'aprés (1.5) et (1.7)-(1.8) on a donc :

$$\int_{\Omega^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha (\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) - \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t))) dx - \int_{\Omega^\alpha} f_0^\alpha \cdot (\boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t)) dx = \int_{\Gamma_2^\alpha} f_2^\alpha \cdot (\boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t)) da$$
$$+ \int_{\Gamma_3^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \cdot (\boldsymbol{v}^\alpha - \boldsymbol{u}^\alpha(t)) da, \quad \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in \mathrm{V}^\alpha$$

Pour $\alpha = 1$ on obtien :

$$\int_{\Omega^1} \boldsymbol{\sigma}^1 (\varepsilon(\boldsymbol{v}^1) - \varepsilon(\boldsymbol{u}^1(t))) dx - \int_{\Omega^1} f_0^1 \cdot (\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{u}^1(t)) dx = \int_{\Gamma_2^1} f_2^1 \cdot (\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{u}^1(t)) da$$
$$+ \int_{\Gamma_3^1} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{u}^1(t)) da, \quad \forall \boldsymbol{v}^1 \in \mathrm{V}^1, \tag{1.44}$$

et pour $\alpha = 2$:

$$\int_{\Omega^2} \boldsymbol{\sigma}^2 (\varepsilon(\boldsymbol{v}^2) - \varepsilon(\boldsymbol{u}^2(t))) dx - \int_{\Omega^2} f_0^2 \cdot (\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{u}^2(t)) dx = \int_{\Gamma_2^2} f_2^1 \cdot (\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{u}^2(t)) da$$
$$+ \int_{\Gamma_3^2} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{u}^2(t)) da, \quad \forall \boldsymbol{v}^2 \in \mathrm{V}^2 \tag{1.45}$$

avec l'addition de (1.44) et (1.45)

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}\boldsymbol{\sigma}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)-\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)))dx-\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))dx=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3^\alpha}\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da,\quad\forall\boldsymbol{v}^\alpha\in\mathrm{V}^\alpha.$$

alors :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\boldsymbol{\sigma}^\alpha,\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)-\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))dx=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da+$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3^\alpha}\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da,\quad\forall\boldsymbol{v}^\alpha\in\mathrm{V}^\alpha.$$

C'est-à-dire :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\boldsymbol{\sigma}^\alpha,\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)-\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da+$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3^\alpha}\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da,\quad\forall\boldsymbol{v}^\alpha\in\mathrm{V}^\alpha,$$

et d'aprés (1.36) on a :

$$(f(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))_{\mathrm{V}}=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha(t)\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))\,dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha(t)\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))\,da.$$

En suite :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\boldsymbol{\sigma}^\alpha,\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)-\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}=(f(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))_{\mathrm{V}}+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da,\quad\forall\boldsymbol{v}^\alpha\in\mathrm{V}^\alpha.$$

Maintenant, on calcule $\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da$

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da&=\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}^1\boldsymbol{\nu}^1\cdot(\boldsymbol{v}^1-\boldsymbol{u}^1(t))da+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\nu}^2\cdot(\boldsymbol{v}^2-\boldsymbol{u}^2(t))da\\
&=\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\nu^1(\boldsymbol{v}_\nu^1-\boldsymbol{u}_\nu^1(t))da+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\nu^2(\boldsymbol{v}_\nu^2-\boldsymbol{u}_\nu^2(t))da\\
&+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau^1(\boldsymbol{v}_\tau^1-\boldsymbol{u}_\tau^1(t))da+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau^2(\boldsymbol{v}_\tau^2-\boldsymbol{u}_\tau^2(t))da\\
&=\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\nu([v_\nu-u_\nu(t)])da+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da\\
&=\int_{\Gamma_3}(-p_\nu([u_\nu])+\gamma_\nu\varsigma^2R_\nu([u_\nu]))([v_\nu-u_\nu(t)])da\\
&+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da,\end{aligned}$$

alors

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot(\boldsymbol{v}^\alpha-\boldsymbol{u}^\alpha(t))da=\int_{\Gamma_3}(-p_\nu([u_\nu])+\gamma_\nu\varsigma^2R_\nu([u_\nu]))([v_\nu-u_\nu(t)])da$$
$$+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da. \tag{1.46}$$

On pose $\Gamma_3=\Gamma_3^+\cup\Gamma_3^-$.
où $\Gamma_3^+=\{x\in\Gamma_3\ /\quad\|\ \boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau])\ \|<\mu p_\nu([u_\nu])\}$
et $\Gamma_3^-=\{x\in\Gamma_3\ /\quad\|\ \boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau])\ \|=\mu p_\nu([u_\nu])\}$.

D'où $\displaystyle\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{\sigma}_\tau([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da=\int_{\Gamma_3^+}\boldsymbol{\sigma}_\tau([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da+\int_{\Gamma_3^-}\boldsymbol{\sigma}_\tau([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da.$

Pour$[\boldsymbol{u}_\tau]$:

L'inégalité de Cauchy-Schwartz, me donne

$$\int_{\Gamma_3^+}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{u}_\tau])da\geq-\int_{\Gamma_3^+}\|\ \boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau])\ \|\|\ [\boldsymbol{u}_\tau]\ \|\ da.$$

Maintenant, en utilisant (1.11).

$$\int_{\Gamma_3^+}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{u}_\tau])da\geq-\int_{\Gamma_3^+}\mu p_\nu([u_\nu])\ \|\ [\boldsymbol{u}_\tau]\ \|\ da=0, \tag{1.47}$$

et

$$\int_{\Gamma_3^-}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{u}_\tau(t)])da=-\int_{\Gamma_3^-}\lambda[\boldsymbol{u}_\tau(t)][\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{\tau}}\boldsymbol{(t)}]da.$$

On applique aussi, l'inégalité de Cauchy-Schwartz, pour obtenir

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3^-}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{u}_\tau(t)])da&=-\lambda\int_{\Gamma_3^-}\|\ [\boldsymbol{u}_\tau]\ \|^2\ da\\&=-\int_{\Gamma_3^-}\|\ \boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau])\ \|\|\ [\boldsymbol{u}_\tau]\ \|\ da,\\&=-\int_{\Gamma_3^-}\mu p_\nu([u_\nu])\ \|\ [\boldsymbol{u}_\tau]\ \|\ da,\end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Gamma_3^-}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{u}_\tau(t)])da=-\int_{\Gamma_3^-}\mu p_\nu([u_\nu])\ \|\ [\boldsymbol{u}_\tau]\ \|\ da. \tag{1.48}$$

Pour $[\boldsymbol{v}_\tau]$: on a

$$\int_{\Gamma_3^-}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{v}_\tau])da=-\int_{\Gamma_3^-}\lambda([u_\nu])[\boldsymbol{v}_\tau]da,$$

donc

$$\int_{\Gamma_3^-}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{v}_\tau])da \geq -\lambda\int_{\Gamma_3^-}\parallel[\boldsymbol{u}_\tau]\parallel\parallel[\boldsymbol{v}_\tau]\parallel da.$$
$$\geq -\int_{\Gamma_3^-}\mu p_\nu([u_\nu])\parallel[\boldsymbol{v}_\tau]\parallel da, \qquad (1.49)$$

l'égalité (1.48) et l'inégalité (1.49) me donnent,

$$\int_{\Gamma_3^-}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da \geq -\int_{\Gamma_3^-}\mu p_\nu([u_\nu])(\parallel[\boldsymbol{v}_\tau]\parallel-\parallel[\boldsymbol{u}_\tau]\parallel)da, \qquad (1.50)$$

on applique (1.47) et (1.50) pour déduire :

$$\int_{\Gamma_3}(\boldsymbol{\sigma}_\tau+\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da \geq -\int_{\Gamma_3}\mu p_\nu([u_\nu])(\parallel[\boldsymbol{v}_\tau]\parallel-\parallel[\boldsymbol{u}_\tau]\parallel)da. \qquad (1.51)$$

Maintenant, on utilise (1.46) et (1.51) pour obtenir :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\boldsymbol{\sigma}^\alpha,\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)-\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha} \geq (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))_{\mathrm{V}}-\int_{\Gamma_3}p_\nu([u_\nu])([v_\nu-u_\nu(t)])da$$
$$+\int_{\Gamma_3}\gamma_\nu\varsigma^2R_\nu([u_\nu])([v_\nu-u_\nu(t)])da-\int_{\Gamma_3}\mu p_\nu([u_\nu])(\parallel[\boldsymbol{v}_\tau]\parallel-\parallel[\boldsymbol{u}_\tau]\parallel)da$$
$$-\int_{\Gamma_3}\gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]))([\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau(t)])da.$$

D'aprés (1.41)-(1.42) et (1.43) on a :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\boldsymbol{\sigma}^\alpha,\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)-\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}+j_{ad}(\varsigma(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))+j_{\nu c}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))$$
$$+j_{fr}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})-j_{fr}(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t)) \geq (\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}(t))_{\mathrm{V}},\ \forall\boldsymbol{v}^\alpha\in\mathrm{V}^\alpha. \qquad (1.52)$$

Pour les inconnues électrique du problème, on utilise la formule de Green (B.8) ainsi que les conditions (1.6), (1.14) et la définition (1.37) on a :

$$(\mathbf{D}^\alpha,\nabla\zeta^\alpha)_{\mathcal{H}^\alpha}+(div\mathbf{D}^\alpha,\zeta^\alpha)_{H^\alpha}=\int_{\Gamma^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot\zeta^\alpha da, \quad \forall\zeta^\alpha\in H_1^\alpha,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\cdot\nabla\zeta^\alpha dx+\int_{\Omega^\alpha}div\mathbf{D}^\alpha\cdot\zeta^\alpha dx=\int_{\Gamma_a^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot\zeta^\alpha da+\int_{\Gamma_b^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot\zeta^\alpha da, \quad \forall\zeta^\alpha\in H_1^\alpha. \qquad (1.53)$$

Pour $\alpha = 1, 2$, on a d'aprés (1.14) :

$$\int_{\Gamma_a^\alpha} \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \cdot \zeta^\alpha da = 0,$$

alors

$$\int_{\Omega^\alpha} \mathbf{D}^\alpha \cdot \nabla\zeta^\alpha dx + \int_{\Omega^\alpha} div\mathbf{D}^\alpha \cdot \zeta^\alpha dx = \int_{\Gamma_b^\alpha} \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha \cdot \zeta^\alpha da, \quad \forall \zeta^\alpha \in H_1^\alpha. \tag{1.54}$$

On a d'aprés (1.6) et (1.15) :

$$\int_{\Omega^\alpha} \mathbf{D}^\alpha \cdot \nabla\zeta^\alpha dx + \int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha \cdot \zeta^\alpha dx = \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha \cdot \zeta^\alpha da, \quad \forall \zeta^\alpha \in H_1^\alpha. \tag{1.55}$$

D'où pour $\alpha = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla\zeta^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1 \cdot \zeta^\alpha dx = \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^1 \cdot \zeta^1 da, \quad \forall \zeta^1 \in H_1^1, \tag{1.56}$$

et pour $\alpha = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla\zeta^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2 \cdot \zeta^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^\alpha \cdot \zeta^2 da, \quad \forall \zeta^2 \in H_1^2, \tag{1.57}$$

avec l'addition de (1.56) et (1.57) on a :

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} \mathbf{D}^\alpha \cdot \nabla\zeta^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha \cdot \zeta^\alpha dx = \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha \cdot \zeta^\alpha da,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathbf{D}^\alpha, \nabla\zeta^\alpha)_{H^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha \cdot \zeta^\alpha dx - \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha \cdot \zeta^\alpha da = 0.$$

On a d'aprés (1.37)

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha \cdot \zeta^\alpha dx - \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha \cdot \zeta^\alpha da = (q(t), \zeta)_{\mathrm{W}}.$$

Donc

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathbf{D}^\alpha, \nabla\zeta^\alpha)_{H^\alpha} + (q(t), \zeta)_{\mathrm{W}} = 0.$$

De (1.2), on obtient :

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)) + \mathcal{G}^\alpha(E^\alpha(\varphi^\alpha(t))), \nabla\zeta^\alpha)_{H^\alpha} = (-q(t), \zeta)_{\mathrm{W}}, \quad \forall \zeta \in \mathrm{W},\ t \in (0, T). \tag{1.58}$$

Maintenant, pour tout $t \in [0, T]$ et de (1.4) , on obtient :

$$(\dot{\theta}^\alpha(t) - \rho^\alpha(t), \omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} - (\kappa_0^\alpha \Delta\theta^\alpha(t), \omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} = (\Theta^\alpha(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t), \varepsilon(\mathbf{u(t)}^\alpha), \theta^\alpha(t), \xi^\alpha(t)), \omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)},$$

$$\forall \omega^\alpha \in \mathbb{L}_1. \tag{1.59}$$

En utilisant la formule de Green on a :

$$-\kappa_0^\alpha(\Delta\theta^\alpha(t),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} = \kappa_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\theta^\alpha(t)\cdot\nabla\omega^\alpha dx - \kappa_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \frac{\partial^\alpha\theta^\alpha(t)}{\partial\nu^\alpha}\,\omega^\alpha dx, \quad \forall\omega^\alpha \in \mathbb{L}_1$$

on a d'après (1.13) :

$$-\kappa_0^\alpha(\Delta\theta^\alpha(t),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} = \kappa_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\theta^\alpha(t)\cdot\nabla\omega^\alpha dx + \lambda_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \theta^\alpha(t)\;\xi^\alpha dx, \quad \forall\omega^\alpha \in \mathbb{L}_1. \tag{1.60}$$

Maintenant, en utilisant (1.60) et l'égalité (1.59), on trouve :

$$\begin{aligned}(\dot\theta^\alpha(t)-\rho^\alpha(t),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} + \kappa_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\theta^\alpha(t)\cdot\nabla\omega^\alpha dx + \lambda_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \theta^\alpha(t)\cdot\omega^\alpha dx \\ = (\Theta^\alpha(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t),\varepsilon(\boldsymbol{u(t)}^\alpha),\theta^\alpha(t),\xi^\alpha(t)),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall\omega^\alpha \in \mathbb{L}_1,\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\dot\theta^\alpha(t)-\rho^\alpha(t),\omega^\alpha\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\theta^\alpha(t)\cdot\nabla\omega^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2}\lambda_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \theta^\alpha(t)\cdot\omega^\alpha dx \\ = \sum_{\alpha=1}^{2}(\Theta^\alpha(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t),\varepsilon(\boldsymbol{u(t)}^\alpha),\theta^\alpha(t),\xi^\alpha(t)),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall\omega^\alpha \in \mathbb{L}_1.\end{aligned}$$

D'après (1.39), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\dot\theta^\alpha(t)-\rho^\alpha(t),\omega^\alpha\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)} + a_0(\theta(t),\omega) \\ = \sum_{\alpha=1}^{2}(\Theta^\alpha(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t),\varepsilon(\boldsymbol{u(t)}^\alpha),\theta^\alpha(t),\xi^\alpha(t)),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall\omega^\alpha \in \mathbb{L}_1.\end{aligned} \tag{1.61}$$

Enfin, soit $\xi^\alpha(t) \in K^\alpha$ pour tout $t \in [0,T]$. De la définition (B.32) de $\partial\psi_{K^\alpha}(\xi^\alpha)$ et de (1.3), on obtient

$$\Big(\phi^\alpha\big(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t),\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)),\theta^\alpha(t),\omega^\alpha(t)-\dot\xi^\alpha(t)+\kappa^\alpha\Delta\xi^\alpha(t),\omega^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)} \le 0, \quad \forall\omega^\alpha \in K^\alpha.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\Big(\phi^\alpha\big(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t),\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)),\theta^\alpha(t),\xi^\alpha(t)\big),\omega^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)} \\ \le \Big(\dot\xi^\alpha(t),\omega^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)} - \kappa^\alpha\left(\Delta\xi^\alpha(t),\omega^\alpha-\xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)}.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green et (1.12)

$$(\Delta\xi^\alpha(t), \omega^\alpha - \xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)} = -\int_{\Omega^\alpha} \nabla\xi^\alpha(t)\cdot\nabla(\omega^\alpha - \xi^\alpha(t))dx.$$

En suite :

$$\begin{aligned}&\left(\dot{\xi}^\alpha(t), \omega^\alpha - \xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + \kappa^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\xi^\alpha(t)\cdot\nabla(\omega^\alpha - \xi^\alpha(t))dx \\ &\geq \left(\phi^\alpha\big(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t), \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)), \theta^\alpha(t), \xi^\alpha(t)\big), \omega^\alpha - \xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)},\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\dot{\xi}^\alpha(t), \omega^\alpha - \xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\kappa^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\xi^\alpha(t)\cdot\nabla(\omega^\alpha - \xi^\alpha(t))dx \\ &\geq \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\phi^\alpha\big(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t), \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)), \theta^\alpha(t), \xi^\alpha(t)\big), \omega^\alpha - \xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall\omega^\alpha \in K^\alpha.\end{aligned}$$

D'aprés (1.40), on trouve

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\dot{\xi}^\alpha(t), \omega^\alpha - \xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + a\left(\xi(t), \omega - \xi(t)\right) \\ &\geq \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\phi^\alpha\big(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t), \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)), \theta^\alpha(t), \xi^\alpha(t)\big), \omega^\alpha - \xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall\omega^\alpha \in K^\alpha. \qquad (1.62)\end{aligned}$$

De (1.1), (1.2), (1.52), (1.61), (1.58), (1.62), (1.9) ,(1.17)et (1.18), on déduit la formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$.

Problem PV. Trouver respectivement les champs des déplacements $\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2) : [0,T] \to \mathrm{V}$, des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = (\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2) : [0,T] \to \mathcal{H}$, des potentielles électriques $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) : [0,T] \to \mathrm{W}$, des températeures $\theta = (\theta^1, \theta^2) : [0,T] \to \mathbb{L}_1$, des endommagements $\xi = (\xi^1, \xi^2) : [0,T] \to \mathbb{L}_1$, d'adhésions $\varsigma : [0,T] \to \mathrm{L}^\infty(\Gamma_3)$ et les champs des déplacements $\boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}^1, \boldsymbol{D}^2) : [0,T] \to \mathcal{W}$, tels que, pour tout $t \in (0,T)$:

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathbf{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \theta^\alpha, \xi^\alpha) + \int_0^t \mathcal{Q}^\alpha(t-s, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(s)), \theta^\alpha(s), \xi^\alpha(s))ds - (\mathcal{E}^\alpha)^* E^\alpha(\zeta^\alpha), \quad (1.63)$$

$$\mathbf{D}^\alpha = \mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha) + \mathcal{G}^\alpha(E^\alpha(\zeta^\alpha)), \qquad (1.64)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{\alpha=1}^{2}(\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) - \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + j_{ad}(\varsigma, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j_{\nu c}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \\ + j_{fr}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j_{fr}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq (f, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_{\mathrm{V}}, \ \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, \end{array}\right. \qquad (1.65)$$

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\dot{\theta}^\alpha(t) - \rho^\alpha(t), \delta^\alpha\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + a_0(\theta(t), \delta) = \\ \sum_{\alpha=1}^{2} (\Theta^\alpha(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t), \varepsilon(\boldsymbol{u(t)}^\alpha), \theta^\alpha(t), \xi^\alpha(t)), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \forall \delta \in \mathbb{L}_1, \end{cases} \tag{1.66}$$

$$\begin{cases} \xi(t) \in K, \quad \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\dot{\xi}^\alpha(t), \delta^\alpha - \xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + a\left(\xi(t), \delta - \xi(t)\right) \geq \\ \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\phi^\alpha\left(\boldsymbol{\sigma}^\alpha(t), \varepsilon(\boldsymbol{u}^\xi(t)), \theta^\alpha(t), \xi^\alpha(t)\right), \delta^\alpha - \xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall \delta \in K, \end{cases} \tag{1.67}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(t)) + \mathcal{G}^\alpha(E^\alpha(\zeta^\alpha(t))), \nabla\phi^\alpha)_{H^\alpha} = (-q(t), \phi)_{\mathrm{W}}, \quad \forall \phi \in \mathrm{W}, \tag{1.68}$$

$$\dot{\varsigma}(t) = \mathbf{H}_{ad}(\varsigma(t), \xi_\varsigma(t), R_\nu([u_\nu(t)]), R_\tau([u_\tau(t)])), \tag{1.69}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad \varsigma(0) = \varsigma_0. \tag{1.70}$$

Remarque 1.2.1 *On Note que, dans le problème P et dans le problème PV, on n'a pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \varsigma \leq 1$. En effet, (1.69) garantit que $\varsigma(x,t) \leq \varsigma_0(x)$ et, par conséquent, l'hypothèse (1.35) montre que $\varsigma(x,t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$.*
D'autre part, si $\varsigma(x,t_0) = 0$ à l'instant t_0, alors il s'ensuit de (1.69) que $\dot{\varsigma}(x,t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et ainsi $\varsigma(x,t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p $x \in \Gamma_3$.
On conclue que $0 \leq \varsigma(x,t) \leq 1$ pour tous $t \in [0;T]$, p.p $x \in \Gamma_3$.

Maintenant, on donne quelques inégalités concernant les fonctionnelles j_{ad} et $j_{\nu c}$ qui seront utilisées dans la section suivante.
Soient $\varsigma, \varsigma_1, \varsigma_2$ des éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \varsigma \leq 1$, $0 \leq \varsigma_1 \leq 1$ et $0 \leq \varsigma_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3, et u_i, v_i, u^α et v^α où $i = 1,2$ représentent des éléments de V^α, et C est une constante générique positive.
On remarque que

$$j_{ad}(\varsigma, \boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}) = -j_{ad}(\varsigma, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad j_{\nu c}(\boldsymbol{u}, -\boldsymbol{v}) = -j_{\nu c}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}). \tag{1.71}$$

c'est a dire j_{ad} et $j_{\nu c}$ sont linéaires par rapport au dernier argument. On applique (1.41) et $|R_\nu([\nu])| \leq L$, $|R_\tau([\tau])| \leq L$, $|\varsigma_1| \leq 1$, $|\varsigma_2| \leq 1$, on trouve

$$j_{ad}(\varsigma_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_1}) + j_{ad}(\varsigma_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2})| \leq c \int_{\Gamma_3} |\varsigma_1 - \varsigma_2| \|\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}\| da. \tag{1.72}$$

Aprés, on obtient

$$j_{ad}(\varsigma_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_1}) + j_{ad}(\varsigma_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2})| \leq c\|\varsigma_1 - \varsigma_2\|_{L^2(\Gamma_3)}\|\boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}\|_{\mathrm{V}}. \tag{1.73}$$

En choisissant $\varsigma_1 = \varsigma_2 = \varsigma$ dans (1.73) , nous trouvons :

$$j_{ad}(\varsigma_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_1}) + j_{ad}(\varsigma_2, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u_1} - \boldsymbol{u_2}) \leq 0. \tag{1.74}$$

Des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialité des opérateurs R_ν et R_τ montrent que

$$|j_{ad}(\varsigma, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) - j_{ad}(\varsigma, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})| \leq c\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{V}}. \tag{1.75}$$

Aussi, on prend $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}_2 = 0$ dans (1.74) en suite on utilise les égalités $R_\nu(0) = 0, R_\tau(0) = 0$ et (1.73) pour obtenir

$$j_{ad}(\varsigma, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq 0. \tag{1.76}$$

Maintenant, en utilisant (1.42), on obtient

$$\begin{aligned} &j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2) - j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) + j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1) - j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) \\ &= -\int_{\Gamma_3} (p_\nu([\boldsymbol{u}_{1\nu}]) - p_\nu([\boldsymbol{u}_{2\nu}]))([\boldsymbol{v}_{1\nu}] - [\boldsymbol{v}_{2\nu}])da, \end{aligned}$$

et d'après (1.26)(b), on a

$$j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2) - j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) + j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1) - j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) \leq 0. \tag{1.77}$$

Maintenant, on utilise (1.43) pour trouver

$$\begin{aligned} &j_{fr}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2) - j_{fr}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) - j_{fr}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) + j_{fr}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1) \\ &\leq \int_{\Gamma_3} \mu|p_\nu([\boldsymbol{u}_{1\nu}]) - p_\nu([\boldsymbol{u}_{2\nu}])|\|[\boldsymbol{v}_{1\tau}] - [\boldsymbol{v}_{2\tau}]\|. \end{aligned}$$

D'aprés l'hypothèse (1.26)(a) on obtient

$$j_{fr}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2) - j_{fr}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) - j_{fr}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) + j_{fr}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1) \leq c_0^2 \mathrm{L}_\nu \parallel \mu \parallel_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_3)} \parallel \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \parallel_{\mathrm{V}} \parallel \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \parallel_{\mathrm{V}} . \tag{1.78}$$

Les inégalités (1.73)−(1.78) et l'égalité (1.71) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre.

Maintenant, on va énoncer le résultat principal concernant léexistence et l'unicité de la solution du problème $\mathcal{P}$V dont la demonstration sera détaillée dans la section suivante.

Théorème 1.2.1 *Si les hypthéses (1.19)–(1.35) sont vérifiées, alors il existe une solution unique* $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \zeta, \theta, \xi, \varsigma, \boldsymbol{D}\}$ *pour le Problème* $\mathcal{P}\mathrm{V}$.

$$\boldsymbol{u} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}), \tag{1.79}$$

$$\zeta \in L^2(0,T;W), \tag{1.80}$$

$$\varsigma \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap L^\infty(0,T;\mathcal{Z}), \tag{1.81}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0,T;\mathcal{H}_1), \tag{1.82}$$

$$\theta \in L^2(0,T;\mathbb{L}_1) \cap C^1(0,T;\mathbb{L}_0),\ \dot{\theta} \in L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}), \tag{1.83}$$

$$\xi \in L^2(0,T;\mathbb{L}_1) \cap H^1(0,T;\mathbb{L}_0) \cap C^2(0,T;\mathbb{L}_0), \tag{1.84}$$

$$\boldsymbol{D} \in L^2(0,T;\mathcal{W}). \tag{1.85}$$

1.3 Démonstration du Théorème 1.2.1

Dans cette section, on va démontrer l'existence et l'unicité pour le problème variationnel **Problème** $\mathcal{P}$V .

La démonstration s'effectue en trois étapes. Pour ce la, on suppose que (1.19)−(1.35) sont vérifiées.

première étape :

Soit $(\lambda, \pi) \in L^2(0, T; \mathbb{L}_1^{'} \times \mathbb{L}_1^{'})$.

Problème $\mathcal{P}\mathrm{V}_{(\lambda,\pi)}$. Trouver respectivement $\theta_\lambda : [0, T] \to \mathbb{L}_0$, et $\xi_\pi : [0, T] \to \mathbb{L}_0$ tels que

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\dot{\theta}_\lambda^\alpha(t) - \lambda^\alpha(t) - \rho^\alpha(t), \omega^\alpha\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + a_0(\theta_\lambda^\alpha(t), \omega) = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{L}_0, \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned} \xi_\pi(t) \in K \quad \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\dot{\xi}_\pi^\alpha(t) - \pi^\alpha(t), \omega^\alpha - \xi_\pi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + \\ a\left(\xi_\pi(t), \omega - \xi_\pi(t)\right) \geq 0, \quad \forall \omega \in K, \end{aligned} \tag{1.87}$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0, \quad \xi_\pi(0) = \xi_0, \tag{1.88}$$

où $K = K^1 \times K^2$.

Lemme 1.3.1 *Il existe $\{\theta_\lambda, \xi_\pi\}$ solution unique du problème $\mathcal{P}\mathrm{V}_{(\lambda,\pi)}$ vérifiant (1.83)−(1.84).*

Démonstration

L'application d'inclusion de $(\mathbb{L}_1, \|.\|_{\mathbb{L}_1})$ dans $(\mathbb{L}_0, \|.\|_{\mathbb{L}_0})$ est continue et dense. On utilise le Triplet de Gelfand

$$\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_0 = \mathbb{L}_0^{'} \subset \mathbb{L}_1^{'}.$$

où $\mathbb{L}_1^{'}$ et $\mathbb{L}_1^{'}$ sont respectivement l'espace dual de $\mathbb{L}_1^{'}$ et $\mathbb{L}_1^{'}$

On considère l'opérateur linéaire $A_0 : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1^{'}$ défini par

$$(A_0\varphi, \omega)_{\mathbb{L}_1^{'} \times \mathbb{L}_1} = a_0(\varphi, \omega), \quad \forall \varphi, \omega \in \mathbb{L}_1. \tag{1.89}$$

On applique l'inégalité de Hölder, (1.89) et la définition (1.39)

pour tout $\varphi, \omega \in \mathbb{L}_1$, on a :

$$|(A_0\varphi, \omega)_{\mathbb{L}_1^{'} \times \mathbb{L}_1}| \leq \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\kappa_0^\alpha \|\nabla\varphi^\alpha\|_{L^2(\Omega^\alpha)^d} \|\nabla\omega^\alpha\|_{L^2(\Omega^\alpha)^d}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\lambda_0^\alpha \|\varphi^\alpha\|_{L^2(\Gamma^\alpha)} \|\omega^\alpha\|_{L^2(\Gamma^\alpha)}\right). \tag{1.90}$$

Gràce du théoréme de trace de Sobolev (voir Annexe), (1.90) implique que :

$$\|A_0\varphi\|_{\mathbb{L}_1'} \leq C\|\varphi\|_{\mathbb{L}_1}, \tag{1.91}$$

ce qui montre que $A_0 : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1'$ est hemicontinu.

On utilise (1.89), pour obtenir :

$$(A_0\varphi, \varphi)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1} \geq 0,$$

i,e, que $A_0 : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1'$ est monotone.

Maintenant, moyennant (1.89), pour $\lambda_0 > 0$ et pour tout $\varphi \in \mathbb{L}_1$, on a :

$$(A_0\varphi, \varphi)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1} = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\kappa_0^\alpha \|\nabla \varphi^\alpha\|^2_{L^2(\Omega^\alpha)^d} \right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\lambda_0^\alpha \|\varphi^\alpha\|^2_{L^2(\Gamma^\alpha)} \right).$$

on applique l'inégalité de Friedrich-Poincaré (B.18), on déduit

$$(A_0\varphi, \varphi)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1} \geq \sum_{\alpha=1}^{2} C_1 \int_{\Omega^\alpha} |\varphi^\alpha|^2 dx,$$

et d'ou

$$(A_0\varphi, \varphi)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1} \geq C_1 \|\varphi\|^2_{\mathbb{L}_1}.$$

Alors, A_0 satisfait la condition (B.33) du Théorème B.5.9 avec $w = C_1$ et $\lambda = 0$. Aprés, de (1.91) on conclue que A_0 vérifie la deuxiéme condition du méme Théorème. On utilise (1.28) et (1.34) aussi $\lambda \in L^2(0, T; \mathbb{L}_1')$ que $f_\lambda = \lambda + \rho \in L^2(0, T; \mathbb{L}_1')$. Alors, il existe une fonction unique θ_λ qui vérifie (1.86) avec $\theta_\lambda(0) = \theta_0$ ayant la régularité (1.83).

D'un autre coté, l'opérateur $A_1 : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1'$ défini par

$$(A_1\varphi, \omega)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1} = a(\varphi, \omega), \quad \forall \varphi, \omega \in \mathbb{L}_1. \tag{1.92}$$

est linéaire d'aprés (1.92) et la définition (1.40), et pour tout $\varphi, \omega \in \mathbb{L}_1$, on a

$$(A_1\varphi, \omega)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1} = (A_1\omega, \varphi)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1},$$

et

$$|(A_1\varphi, \omega)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1}| \leqslant c\|\varphi\|_{\mathbb{L}_1} \|\omega\|_{\mathbb{L}_1},$$

donc, A_1 continu et symétrique.

Ainsi, pour tout $\omega \in \mathbb{L}_1$, on a :

$$(A_1\omega, \omega)_{\mathbb{L}_1^{)}{}' \times \mathbb{L}_1} = \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\kappa^\alpha \|\nabla \omega^\alpha\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)^d} \right)$$

alors

$$(A_1\omega, \omega)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1} + \kappa \|\omega\|^2_{\mathbb{L}_0} \geq \kappa \left(\sum_{\alpha=1}^{2} \|\nabla \omega^\alpha\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)^d} + \|\omega\|^2_{\mathbb{L}_0} \right),$$

où $\kappa = min(\kappa^1, \kappa^2)$,

donc

$$(A_1\omega, \omega)_{\mathbb{L}_1' \times \mathbb{L}_1} + \kappa \|\omega\|^2_{\mathbb{L}_0} \geq \kappa \|\omega\|^2_{\mathbb{L}_1}.$$

D'où toutes les conditions du Théorème (B.5.10) sont vérifiées, ce qui implique que (1.87) a une solution unique ξ_π avec $\xi_\pi(0) = \xi_0$ ayant la régularité (1.84).

Deuxième étape :

Soit $(\lambda, \pi, \eta) \in L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times C(0,T;\mathrm{V})$, et soit $(\theta_\lambda, \xi_\pi)$ la solution du Lemme 1.3.1 :

Problème $\mathcal{P}\mathrm{V}_{(\lambda,\pi,\eta)}$. Trouver respectivement $\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta} : [0,T] \to \mathrm{V}$, $\zeta_{\lambda\pi\eta} =: [0,T] \to \mathrm{W}$, $\varsigma_{\lambda\pi\eta} : [0,T] \to L^2(\Gamma_3)$ tels que :

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_{\lambda\pi\eta}), \theta^\alpha_\lambda, \xi^\alpha_\pi), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) - \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_{\lambda\pi\eta}(t)))_{\mathcal{H}^\alpha} \\ +j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t)) + j_{fr}(\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t), \boldsymbol{v}) - j_{fr}(\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t), \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t)) \\ +(\eta(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t)) \geq (f(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t))_{\mathrm{V}}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, \end{array}\right\} \tag{1.93}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{E}^\alpha\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_{\lambda\pi\eta}(t)) + \mathcal{G}^\alpha(E^\alpha(\zeta^\alpha_{\lambda\pi\eta}(t))), \nabla\phi^\alpha)_{H^\alpha} = (-q(t), \phi)_{\mathrm{W}}, \quad \forall \phi \in \mathrm{W}, \tag{1.94}$$

$$\dot{\varsigma}_{\lambda\pi\eta}(t) = \mathbf{H}_{ad}(\varsigma_{\lambda\pi\eta}(t), \omega_{\varsigma_{\lambda\pi\eta}}, R_\nu([u_{\nu\lambda\pi\eta}(t)]), R_\tau([u_{\tau\lambda\pi\eta}(t)])), \quad p.p.t \in [0,T], \tag{1.95}$$

$$\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \varsigma_{\lambda\pi\eta}(0) = \varsigma_0. \tag{1.96}$$

On a le Lemme suivant :

Lemme 1.3.2

1. *Il existe* $\mu_0 > 0$ *qui dépend de* $\Omega^\alpha, \Gamma^\alpha_1, \Gamma^\alpha_2, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \boldsymbol{H}_{ad}$ *et* $\mathcal{B}^\alpha, \alpha = 1,2$ *tels que, si* $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, *alors le Problème* $\mathcal{P}\mathrm{V}_{(\lambda,\pi,\eta)}$. *possède un résultat unique* $\{\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}, \zeta_{\lambda\pi\eta}, \varsigma_{\lambda\pi\eta}\}$ *qui vérifie (1.79)–(1.81).*
2. *Si* $\boldsymbol{u}_1$ *et* $\boldsymbol{u}_2$, *sont respectivement solutions du (1.93) et (1.96) correspondant aux* $\eta_1, \eta_2 \in C(0,T;\mathrm{V})$, *d'ou il se trouve* $c > 0$ *tel que pour tout* $t \in [0,T]$,

$$\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_{\mathrm{V}} \leq c\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{\mathrm{V}}. \tag{1.97}$$

Démonstration

soient l'opérateur $A : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, la fonction $\boldsymbol{f}_\eta : [0,T] \to \mathrm{V}$ et la fonction $j : \mathrm{V}\times\mathrm{V} \to \mathbb{R}$ définient par :

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\mathrm{V}} = \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \theta^\alpha_\lambda, \xi^\alpha_\pi), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, \tag{1.98}$$

$$\boldsymbol{f}_\eta(t) = \boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{\eta}(t), \quad \forall t \in [0,T], \tag{1.99}$$

$$j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = j_{\nu c}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + j_{fr}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}. \tag{1.100}$$

Soit $\boldsymbol{v} \in \mathrm{V}$; d'aprés (1.98) on a

$$(A\boldsymbol{u}_1 - A\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})_{\mathrm{V}} = \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_1^\alpha), \theta_\lambda^\alpha, \alpha_\pi^\alpha) - \mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_2^\alpha), \theta_\lambda^\alpha, \xi_\mu^\alpha), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}.$$

En utilisant (1.19)(a)

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{u}_1 - A\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})_{\mathrm{V}} &\leq \sum_{\alpha=1}^{2} \|\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_1^\alpha), \theta_\lambda^\alpha, \xi_\pi^\alpha) - \mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_2^\alpha), \theta_\lambda^\alpha, \xi_\pi^\alpha)\|_{\mathcal{H}^\alpha} \|\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)\|_{\mathcal{H}^\alpha},\\
&\leq \sum_{\alpha=1}^{2} L_{\mathcal{B}^\alpha} \|\boldsymbol{u}_1^\alpha - \boldsymbol{u}_2^\alpha\|_{\mathrm{V}^\alpha} \|\boldsymbol{v}^\alpha\|_{\mathrm{V}^\alpha},\\
&\leq C\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{V}},\end{aligned}$$

alors

$$(A\boldsymbol{u}_1 - A\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})_{\mathrm{V}} \leq C\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}} \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{V}}.$$

On pose $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{u}_1 - A\boldsymbol{u}_2$

$$\|A\boldsymbol{u}_1 - A\boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}} \leqslant C\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}}. \tag{1.101}$$

Soit $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \mathrm{V}$. On utilise (1.98) pour trouver

$$(A\boldsymbol{u}_1 - A\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)_{\mathrm{V}} = \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_1^\alpha), \theta_\lambda^\alpha, \xi_\pi^\alpha) - \mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_2^\alpha), \theta_\lambda^\alpha, \xi_\pi^\alpha), \varepsilon(\boldsymbol{u}_1^\alpha - \boldsymbol{u}_2^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}.$$

Onapplique (1.19) (b), pour trouver

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{u}_1 - A\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)_{\mathrm{V}} &\geq \sum_{\alpha=1}^{2} m_{\mathcal{B}^\alpha} \|\boldsymbol{u}_1^\alpha - \boldsymbol{u}_2^\alpha\|_{\mathrm{V}^\alpha}^2,\\
&\geq \min(m_{\mathcal{B}^1}, m_{\mathcal{B}^2}) \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}}^2,\end{aligned}$$

alors

$$(A\boldsymbol{u}_1 - A\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)_{\mathrm{V}} \geq \min(m_{\mathcal{B}^1}, m_{\mathcal{B}^2}) \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}}^2. \tag{1.102}$$

De (1.101) et (1.102) on déduit que A est fortement monotone et de Lipschitz sur V. Et de(1.42) et (1.43) on trouve que la fonctionnelle j définie dans (1.100) vérifie la condition (1.26)(a). Aussi, on utilise (1.26), (1.31), (1.77), (1.78) et (1.100), pour trouver l'inégalité suivante

$$j(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2) - j(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) - j(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) + j(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1) \leq \mathrm{L}_\nu c_0^2 \parallel \mu \parallel_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_3)} \parallel \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \parallel_{\mathrm{V}} \parallel \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \parallel_{\mathrm{V}},$$

$$\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathrm{V}. \tag{1.103}$$

Alors, la fonctionnelle j vérifie la condition (1.26)(a) sur $X = \mathrm{V}$. Pour $\eta \in C(0,T;\mathrm{V})$, nous déduisons de (1.99) que $f_\eta \in C(0,T;\mathrm{V})$, i.e., f_η vérifie (1.99).

Soit

$$\mu_0 = \frac{\min(m_{\mathcal{B}^1}, m_{\mathcal{B}^2})}{c_0^2 \mathrm{L}_\nu},$$

dépend de $\Omega^\alpha, \Gamma_1^\alpha, \Gamma_2^\alpha,\ \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \mathbf{H}_{ad}$. On pose que $\|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$. Alors

$$c_0^2 \mathrm{L}_\nu \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_3)} < \min(m_{\mathcal{B}^1}, m_{\mathcal{B}^2}), \tag{1.104}$$

et, en utilisant le Théorème B.5.2, il existe un élément unique $\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta} \in \mathrm{V}$ qui satisfait

$$(A\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}, v - \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta})_\mathrm{V} + j(\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}, v) - j(\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}, \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}) \geq (f_\eta, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta})_\mathrm{V} \quad \forall v \in \mathrm{V}. \tag{1.105}$$

Maintenent, on montre que

$$\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta} \in L^2(0,T;\mathrm{V}).$$

Soient $\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t_i) = \boldsymbol{u}_i,\ \theta_\lambda(t_i) = \theta_i,\ \xi_\pi(t_i) = \xi_i,\ \eta(t_i) = \eta_i,\ f(t_i) = f_i,\ i = 1,2$, en utilisant des arguments basés sur (1.93) on obtient

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_1^\alpha - \boldsymbol{u}_2^\alpha), \theta_1^\alpha - \theta_2^\alpha, \xi_1^\alpha - \xi_2^\alpha), \varepsilon(\boldsymbol{u}_1^\alpha - \boldsymbol{u}_2^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} \leq j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1)$$

$$+ j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2) + j_{fr}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) - j_{fr}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1) + j_{fr}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1)$$

$$- j_{fr}(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2) + (\eta_1 - \eta_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)_\mathrm{V} + (f_1 - f_2, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2)_\mathrm{V}. \tag{1.106}$$

On utilise l'hypothése (1.19), (1.75) et (1.78) pour déduire l'inégalités suivante

$$m_{\mathcal{B}^\alpha} \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_\mathrm{V}^2 \leq c_0^2 \mathrm{L}_\nu \parallel \mu \parallel_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_3)} \parallel \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \parallel_\mathrm{V}^2 + \|\eta_1 - \eta_2\|_\mathrm{V} \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_\mathrm{V}$$

$$+ \|f_1 - f_2\|_\mathrm{V} \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_\mathrm{V}.$$

Ce qui méne à l'inégalité suivante

$$\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_\mathrm{V} \leq \frac{1}{m_{\mathcal{B}^\mathcal{B}} - c_0^2 \mathrm{L}_\nu \parallel \mu \parallel_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_3)}} (\|\eta_1 - \eta_2\|_\mathrm{V} + \|f_1 - f_2\|_\mathrm{V}). \tag{1.107}$$

Donc :

$$\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_\mathrm{V} \leq c(\|\eta_1 - \eta_2\|_\mathrm{V} + \|f_1 - f_2\|_\mathrm{V}), \tag{1.108}$$

où $c = \dfrac{1}{m_{\mathcal{B}^\alpha} - c_0^2 \mathrm{L}_\nu \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty(\Gamma_3)}}$.
Puisque $f \in L^2(0,T;\mathrm{V})$, et $c_0^2 \mathrm{L}_\nu \|\mu\|_{\mathrm{L}^\infty} < m_{\mathcal{B}^\alpha}$ on déduit de (1.108) que l'application $\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta} \in L^2(0,T;\mathrm{V})$. Soit la forme bilinéaire $G : \mathrm{W} \times \mathrm{W} \to \mathbb{R}$ définie par

$$G(\zeta,\phi) = \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{G}^\alpha \nabla\zeta^\alpha, \nabla\phi^\alpha)_{H^\alpha} \qquad \forall \zeta,\phi \in \mathrm{W}. \tag{1.109}$$

D'après (1.24), (1.109) et l'inégalité de Cauchy-Schwartz on démontere que la forme bilinéaire G est continue, symétrique et coercive sur W.
Cependant, en utilisant le théorème de représentation de Riesz on peut définir une forme liniéaire continue $w_{\lambda\mu\eta} : [0,T] \to \mathrm{W}$ par

$$(w_{\lambda\pi\eta}(t),\phi)_{\mathrm{W}} = (q(t),\phi)_{\mathrm{W}} + \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_{\lambda\mu\eta}(t)), \nabla\phi^\alpha)_{H^\alpha}, \quad \forall \phi \in \mathrm{W}, t \in [0,T].$$

En utilisant le Théorème de Lax-Milgram, pour trouver un élément unique $\varphi_{\lambda\pi\eta}(t) \in \mathrm{W}$ tel que

$$\begin{aligned} G(\zeta_{\lambda\pi\eta}(t),\phi) &= (w_{\lambda\pi\eta}(t),\phi)_W \\ &= (q(t),\phi)_{\mathrm{W}} + \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_{\lambda\pi\eta}(t)), \nabla\phi^\alpha)_{H^\alpha} \quad \forall \phi \in \mathrm{W}. \end{aligned} \tag{1.110}$$

On peut dire maintenant que $\zeta_{\lambda\pi\eta} \in L^2(0,T;\mathrm{W})$, soit $t_1, t_2 \in [0,T]$ et on pose $\zeta_{\lambda\pi\eta}(t_i) = \zeta_i, \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t_i) = \boldsymbol{u}_i, q(t_i) = q_i$ pour $i = 1,2$ et $\phi = \zeta_1 - \zeta_2$, on obtient

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{G}^\alpha(\nabla\zeta_1 - \nabla\zeta_2), \nabla\zeta_1 - \nabla\zeta_2))_{H^\alpha} = (q_1 - q_2, \zeta_1 - \zeta_2))_{\mathrm{W}} + \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2), \nabla\zeta_1 - \nabla\zeta_2))_{H^\alpha}.$$

En utilisant (1.23)et (1.24)(b), pour trouver

$$m_{\mathcal{G}} \|\zeta_1 - \zeta_2\|^2_{\mathrm{W}} \leq C_{\mathcal{E}} \|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}} \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{\mathrm{W}} + \|q_1 - q_2\|_{\mathrm{W}} \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{\mathrm{W}},$$

ce qui implique que

$$\|\zeta_1 - \zeta_2\|_{\mathrm{W}} \leq C(\|\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2\|_{\mathrm{V}} + \|q_1 - q_2\|_{\mathrm{W}}), \tag{1.111}$$

où C est une constante positive. On note aussi que les hypothéses (1.28) combinées avec la définition (1.37) impliquent que $q \in L^2(0,T;\mathrm{W})$ avec $\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta} \in L^2(0,T;\mathrm{V})$, (1.111) implique que $\zeta_{\lambda\pi\eta} \in L^2(0,T;\mathrm{W})$.
Soit $H_{\lambda\pi\eta} : [0,T] \times L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ définie par :

$$H_{\lambda\pi\eta}(t,\varsigma) = H_{ad}(\varsigma_{\lambda\pi\eta}(t), \omega_{\varsigma_{\lambda\pi\eta}}, R_\nu([u_{\nu\lambda\pi\eta}(t)]), \mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{\tau\lambda\pi\eta}(t)])),$$

pour $t \in [0,T]$ et $\varsigma \in \mathtt{L}^2(\Gamma_3)$.

Les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et $\boldsymbol{R}_\tau$ que $H_{\lambda\pi\eta}$ est de Lipschitz par rapport au deuxième argument, et cela uniformément dans le temps. De plus, pour tout $\varsigma \in \mathtt{L}^2(\Gamma_3)$ l'application $t \to H_{\lambda\pi\eta}(t,\varsigma)$ appartient à $\mathtt{L}^\infty(0,T;\mathtt{L}^2(\Gamma_3))$. On utilise le Théorème de Cauchy-Lipschitz, on trouve une fonction unique $\varsigma_{\lambda\pi\eta\omega} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(0,T;\mathtt{L}^2(\Gamma_3))$ tel que

$$\dot{\varsigma}_{\lambda\pi\eta}(t) = \mathbf{H}_{ad}(\varsigma_{\lambda\pi\eta}(t), \omega_{\varsigma_{\lambda\pi\eta}}, R_\nu([u_{\nu\lambda\pi\eta}(t)]), \mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{\tau\lambda\pi\eta}(t)])), \quad p.p.t \in [0,T], \tag{1.112}$$

$$\varsigma_{\lambda\pi\eta}(0) = \varsigma_0. \tag{1.113}$$

On utilise la remarque 1.1.1, pour démontrer que $\varsigma_{\lambda\pi\eta} \in \mathcal{Z}$, ce qui conclut la preuve du Lemme 1.3.2.

Troisième étape :

Soit l'opérateur :

$$\boldsymbol{\Lambda} : L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times C(0,T;\mathrm{V}) \to L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times C(0,T;\mathrm{V}),$$

définie par :

$$\boldsymbol{\Lambda}(\lambda,\pi,\eta)(t) = (\boldsymbol{\Lambda}^1(\lambda,\pi,\eta)(t), \boldsymbol{\Lambda}^2(\lambda,\pi,\eta)(t), \boldsymbol{\Lambda}^3(\lambda,\pi,\eta)(t)) \in \mathbb{L}_1^{'} \times \mathbb{L}_1^{'} \times \mathrm{V}, \tag{1.114}$$

avec :

$$\boldsymbol{\Lambda}^1(\lambda,\pi,\eta)(t)) = \left(\Theta^1\left(\boldsymbol{\sigma}^1_{\lambda\pi\eta}, \varepsilon(\boldsymbol{u}^1_{\lambda\pi\eta}), \theta^1_\lambda, \xi^1_\pi\right), \Theta^2\left(\boldsymbol{\sigma}^2_{\lambda\pi\eta}, \varepsilon(\boldsymbol{u}^2_{\lambda\pi\eta}), \theta^2_\lambda, \xi^2_\pi\right)\right), \tag{1.115}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^2(\lambda,\pi,\eta)(t)) = \left(\phi^1\left(\boldsymbol{\sigma}^1_{\lambda\pi\eta}, \varepsilon(\boldsymbol{u}^1_{\lambda\pi\eta}), \theta^1_\lambda, \xi^1_\pi\right), \phi^2\left(\boldsymbol{\sigma}^2_{\lambda\pi\eta}, \varepsilon(\boldsymbol{u}^2_{\lambda\pi\eta}), \theta^2_\lambda, \xi^2_\pi\right)\right). \tag{1.116}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Lambda}^3(\lambda,\pi,\eta)(t)), \boldsymbol{v})_{\mathrm{V}} = &-\sum_{\alpha=1}^{2}((\mathcal{E}^\alpha)^* E^\alpha(\zeta^\alpha_{\lambda\pi\eta}), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + j_{ad}(\varsigma_{\lambda\pi\eta}(t), \boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}(t), \boldsymbol{v}) \\ &+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\int_0^t \mathcal{Q}^\alpha(t-s, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_{\lambda\pi\eta}(s)), \theta^\alpha_\lambda(s), \xi^\alpha_\pi(s))ds, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)\right)_{\mathcal{H}^\alpha}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V},\end{aligned} \tag{1.117}$$

Pour tout $(\lambda, \pi, \eta) \in L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times C(0,T;\mathrm{V})$, on considére $\{\theta_\lambda, \xi_\pi\}$ la solution unique obtenue dans le lemme 1.3.1, $\{\boldsymbol{u}_{\lambda\pi\eta}, \zeta_{\lambda\pi\eta}, \varsigma_{\lambda\pi\eta}\}$ la solution unique obtenue dans le Lemme 1.3.2 et $\boldsymbol{\sigma}^\alpha_{\lambda\pi\eta}$ définie par :

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha_{\lambda\pi\eta} = \mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_{\lambda\pi\eta}), \theta^\alpha_\lambda, \xi^\alpha_\pi) + \int_0^t \mathcal{Q}^\alpha(t-s, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_{\lambda\pi\eta}(s)), \theta^\alpha_\lambda(s), \xi^\alpha_\pi(s))ds - (\mathcal{E}^\alpha)^* E^\alpha(\zeta^\alpha_{\lambda\pi\eta}). \tag{1.118}$$

On a le Lemme suivant.

Lemme 1.3.3 *Il existe un point fixe unique pour l'opérateur* $\boldsymbol{\Lambda}$ $(\lambda^*, \pi^*, \eta^*) \in L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times C(0,T;\mathrm{V})$.

Démonstration

On va montrer que $\boldsymbol{\Lambda}^m$ est une contraction dans $L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times C(0,T;\mathrm{V})$ où $\boldsymbol{\Lambda}^m$ est la puissance m ième de $\boldsymbol{\Lambda}$ et m un nombre entier positif.

Soient $(\lambda_1, \pi_1, \eta_1), (\lambda_2, \pi_2, \eta_2) \in L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}) \times C(0,T;\mathrm{V})$ et pour simplicité l'écriture, on pose $\boldsymbol{u}_{\lambda_i,\pi_i,\eta_i} = \boldsymbol{u}_i$, $\zeta_{\lambda_i,\pi_i,\eta_i} = \zeta_i$, $\varsigma_{\lambda_i,\pi_i,\eta_i} = \varsigma_i$, $\theta_{\lambda_i} = \theta_i, \xi_{\pi_i} = \xi_i$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\lambda_i,\pi_i,\eta_i} = \boldsymbol{\sigma}_i$, pour $i = 1, 2$.

En utilisant (1.115), (1.118) et (1.21), on obtient :

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\Lambda}^1(\lambda_1, \pi_1, \eta_1)(t) - \boldsymbol{\Lambda}^1(\lambda_2, \pi_2, \eta_2)(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq C \Big(\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|^2_{\mathrm{V}} \\ &+ \int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|^2_{\mathrm{V}} ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} + \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds \\ &+ \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|^2_W \Big). \end{aligned} \tag{1.119}$$

De même, l'utilisation de (1.22) implique :

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\Lambda}^2(\lambda_1, \pi_1, \eta_1)(t) - \boldsymbol{\Lambda}^2(\lambda_2, \pi_2, \eta_2)(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq C \Big(\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|^2_{\mathrm{V}} \\ &+ \int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|^2_{\mathrm{V}} ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} + \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds \\ &+ \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|^2_W \Big). \end{aligned} \tag{1.120}$$

D'autre part, (1.118),(1.41) impliquent :

$$\|\mathbf{\Lambda}^3(\lambda_1,\pi_1,\eta_1)(t)-\mathbf{\Lambda}^3(\lambda_2,\pi_2,\eta_2)(t)\|_{\mathrm{V}}^2\leq\sum_{\alpha=1}^{2}\|(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\zeta_1^\alpha(t)-(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\zeta_2^\alpha(t)\|_{\mathcal{H}^\alpha}^2$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_0^t\|\mathcal{Q}^\alpha(t-s,\varepsilon(\boldsymbol{u}_1^\alpha(s)),\theta_1^\alpha(s),\xi_\pi^1(s))-\mathcal{Q}^\alpha(t-s,\varepsilon(\boldsymbol{u}_2^\alpha(s)),\theta_2^\alpha(s),\xi_\pi^2(\pi))\|_{\mathcal{H}^\alpha}^2ds$$
$$+c\;\|\varsigma_1^2(t)R_\nu([u_{1\nu}])-\varsigma_2^2(t)R_\nu([u_{2\nu}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2$$
$$+c\;\|\varsigma_1^2(t)\boldsymbol{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{1\tau}(t)])-\varsigma_2^2(t)\boldsymbol{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2.$$

Aprés, en utilisant (1.20) et (1.23)

$$\|\mathbf{\Lambda}^3(\lambda_1,\pi_1,\eta_1)(t)-\mathbf{\Lambda}^3(\lambda_2,\pi_2,\eta_2)(t)\|_{\mathrm{V}}^2\leq\sum_{\alpha=1}^{2}\|(\mathcal{E}^\alpha)^*\|_{L^\infty(\Omega^\alpha)}^2\|\nabla\zeta_1^\alpha(t)-\nabla\zeta^\alpha(t)\|_{H^\alpha}^2$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}L_{\mathcal{Q}^\alpha}\left(\int_0^t\|\boldsymbol{u}_1^\alpha(s)-\boldsymbol{u}_2^\alpha(s)\|_{\mathrm{V}^\alpha}^2ds+\int_0^t\|\theta_1^\alpha(s)-\theta_2^\alpha(s)\|_{L^2(\Omega^\alpha)}^2ds\right.$$
$$\left.+\int_0^t\|\xi_1^\alpha(s)-\xi_2^\alpha(s)\|_{L^2(\Omega^\alpha)}^2ds\right)+c\;\|\varsigma_1^2(t)R_\nu([u_{1\nu}])-\varsigma_2^2(t)R_\nu([u_{2\nu}])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2$$
$$+c\;\|\varsigma_1^2(t)\boldsymbol{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{1\tau}(t)])-\varsigma_2^2(t)\boldsymbol{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2,$$

Aussi, on a

$$\|\mathbf{\Lambda}^3(\lambda_1,\pi_1,\eta_1)(t)-\mathbf{\Lambda}^3(\lambda_2,\pi_2,\eta_2)(t)\|_{\mathrm{V}}^2\leq\max(L_{\mathcal{Q}^1},L_{\mathcal{Q}^2})\left(\int_0^t\|\boldsymbol{u}_1(s)-\boldsymbol{u}_2(s)\|_{\mathrm{V}}^2ds\right.$$
$$+\int_0^t\|\theta_1(s)-\theta_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2ds+\int_0^t\|\xi_1(s)-\xi_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2ds+\|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega)}^2\|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)\|_W^2$$
$$\left.+c\,\|\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2\right).$$

Alors :

$$\|\mathbf{\Lambda}^3(\lambda_1,\pi_1,\eta_1)(t)-\mathbf{\Lambda}^3(\lambda_2,\pi_2,\eta_2)(t)\|_{\mathrm{V}}^2\leq C\left(\int_0^t\|\boldsymbol{u}_1(s)-\boldsymbol{u}_2(s)\|_{\mathrm{V}}^2ds\right.$$
$$+\int_0^t\|\theta_1(s)-\theta_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2ds+\int_0^t\|\xi_1(s)-\xi_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2ds$$
$$\left.+\|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)\|_W^2+\|\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2\right). \tag{1.121}$$

Où $C=\max(\max(L_{\mathcal{Q}^1},L_{\mathcal{Q}^2}),\|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega)}^2,c)$.

Donc, de (1.121), (1.119) et (1.120) on obtient

$$\begin{aligned}\|\mathbf{\Lambda}(\lambda_1,\pi_1,\eta_1)(t)-\mathbf{\Lambda}(\lambda_2,\pi_2,\eta_2)(t)\|^2_{\mathrm{V}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0} &\le C\,\Big(\|\boldsymbol{u}_1(t)-\boldsymbol{u}_2(t)\|^2_{\mathrm{V}}\\ +\int_0^t\|\boldsymbol{u}_1(s)-\boldsymbol{u}_2(s)\|^2_{\mathrm{V}}ds+\|\xi_1(t)-\xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}&+\int_0^t\|\xi_1(s)-\xi_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0}ds\\ +\|\theta_1(t)-\theta_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}&+\int_0^t\|\theta_1(s)-\theta_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0}ds\\ +\|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)\|^2_W&+\|\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)}\Big).\end{aligned}\tag{1.122}$$

Utilisant (1.95) pour trouver

$$\varsigma_i(t)=\varsigma_0-\int_0^t\mathbf{H}_{ad}(\varsigma_i(s),\xi_{\varsigma_i}(s),R_\nu([u_{i\nu}(s)]),\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{i\tau}(s)]))ds$$

et, en utilisant la définition de R_ν et (1.25), on obtient que

$$\begin{aligned}\|\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\le C\int_0^t\|\varsigma_1(s)-\varsigma_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\,ds\\ +C\int_0^t\|R_\nu([u_{1\nu}(s)])-R_\nu([u_{2\nu}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)}ds\\ +C\int_0^t\|\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{1\tau}(s)])-\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{2\tau}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)}ds.\end{aligned}$$

En écrivant $\varsigma_1=\varsigma_1-\varsigma_2+\varsigma_2$, on obtient

$$\|\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\le C\left(\int_0^t\|\varsigma_1(s)-\varsigma_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}\,ds+\int_0^t\|\boldsymbol{u}_1(s)-\boldsymbol{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d}\,ds\right).\tag{1.123}$$

Appliquant l'inégalité de Gronwall pour déduire

$$\|\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}\le C\int_0^t\|\boldsymbol{u}_1(s)-\boldsymbol{u}_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d}\,ds,$$

ce qui implique

$$\|\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)\|^2_{L^2(\Gamma_3)}\le C\int_0^t\|\boldsymbol{u}_1(s)-\boldsymbol{u}_2(s)\|^2_{\mathrm{V}}\,ds.\tag{1.124}$$

On utilise maintenant (1.23), (1.24) et (1.94) pour trouver

$$\|\zeta_1(t)-\zeta_2(t)\|^2_W\le C\,\|\boldsymbol{u}_1(t)-\boldsymbol{u}_2(t)\|^2_{\mathrm{V}}.\tag{1.125}$$

De (1.86) on déduit que

$$(\dot\theta_1-\dot\theta_2,\theta_1-\theta_2)_{\mathbb{L}_0}+a_0(\theta_1-\theta_2,\theta_1-\theta_2)=(\lambda_1-\lambda_2,\theta_1-\theta_2)_{\mathbb{L}_0}.$$

On intégre cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ et l'inégalité $a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) \geq 0$,on obtient

$$\frac{1}{2}\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq \int_0^t (\lambda_1(s) - \lambda_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{\mathbb{L}_0} ds.$$

Ce qui implique que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} \, ds + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} \, ds.$$

Aussi, on utilise l'inégalité de Gronwall pour trouver

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} \, ds \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{1.126}$$

De plus, de (1.87) 0n déduit que $t \in [0, T]$

$$(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2, \xi_1 - \xi_2)_{\mathbb{L}_0} + a(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2) \leq (\pi_1 - \pi_2, \xi_1 - \xi_2)_{\mathbb{L}_0}.$$

Intégrer l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\xi_1(0) = \xi_2(0) = \xi_0$ et l'inégalité $a(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2) \geq 0$,on obtient

$$\frac{1}{2}\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq \int_0^t (\pi_1(s) - \pi_2(s), \xi_1(s) - \xi_2(s))_{\mathbb{L}_0} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} \, ds + \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} \, ds.$$

Autre fois, on applique l'inégalité de Gronwall et on trouve

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq C \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} \, ds. \tag{1.127}$$

DE (1.97) ,(1.124)-(1.127) et (1.122) on obtient

$$\|\mathbf{\Lambda}(\lambda_1, \pi_1, \eta_1)(t) - \mathbf{\Lambda}(\lambda_2, \pi_2, \eta_2)(t)\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}_1') \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1') \times C(0,T;\mathrm{V})} \leq$$

$$C \int_0^t \|(\lambda_1, \pi_1, \eta_1)(s) - (\lambda_2, \pi_2, \eta_2)(s)\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}_1') \times L^2(0,T;\mathbb{L}_1') \times C(0,T;\mathrm{V})} \, ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$\|\mathbf{\Lambda}^m(\lambda_1,\pi_1,\eta_1)-\mathbf{\Lambda}^m(\lambda_2,\pi_2,\eta_2)\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times C(0,T;\mathrm{V})}\leq$$
$$\frac{C^mT^m}{m!}\|(\lambda_1,\pi_1,\eta_1)-(\lambda_2,\pi_2,\eta_2)\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times C(0,T;\mathrm{V})}.$$

Ainsi, l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^m$ est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times C(0,T;\mathrm{V})$, pour m assez grand, donc il existe un point fixe unique $(\lambda^*,\pi^*,\eta^*)\in L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times C(0,T;\mathrm{V})$, et donc (λ^*,π^*,η^*) est le seul point fixe de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$.

Maintenant, on a tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 1.2.1

Démonstration

Existence.

Soit $(\lambda^*,\pi^*,\eta^*)\in L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'})\times L^2(0,T;\mathbb{L}_1^{'}\times C(0,T;\mathrm{V}))$ est un point fixe de l'opérateur $\mathbf{\Lambda}$, et soit $\{\theta_{\lambda^*},\xi_{\pi^*}\}$ est les solutions du Problème $\mathcal{P}\mathrm{V}_{(\lambda^*,\pi^*)}$ et $\{\boldsymbol{u}_{\lambda^*\pi^*\eta^*},\zeta_{\lambda^*\pi^*\eta^*},\varsigma_{\lambda^*\pi^*\eta^*}\}$ les solutions du Problème $\mathcal{P}\mathrm{V}_{(\lambda^*,\pi^*,\eta^*)}$, pour $\lambda=\lambda^*$, $\pi=\pi^*$ et $\eta=\eta^*$. On utilise les notations suivantes :

$$\boldsymbol{u}_*=\boldsymbol{u}_{\lambda^*\pi^*\eta^*},\quad \zeta_*=\zeta_{\lambda^*\pi^*\eta^*},\quad \varsigma_*=\varsigma_{\lambda^*\pi^*\eta^*},\quad \theta_*=\theta_{\lambda^*},\quad \xi_*=\xi_{\pi^*},\tag{1.128}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_*^\alpha=\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha),\theta_*^\alpha,\xi_*^\alpha)+\int_0^t\mathcal{Q}^\alpha(t-s,\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(s)),\theta_*^\alpha(s),\xi_*^\alpha(s))ds-(\mathcal{E}^\alpha)^*E^\alpha(\zeta_*^\alpha),\tag{1.129}$$

$$\mathbf{D}_*^\alpha=\mathcal{E}^\alpha\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha)+\mathcal{G}^\alpha(E^\alpha(\zeta_*^\alpha)).\tag{1.130}$$

On preuve que $(\boldsymbol{u}_*,\boldsymbol{\sigma}_*,\zeta_*,\theta_*,\xi_*,\varsigma_*,\boldsymbol{D}_*)$ satisfait (1.63)−(1.69) et la régularité (1.79)−(1.85). En effet, on écrit (1.93) pour $(\lambda^*,\pi^*,\eta^*)=(\lambda,\pi,\eta)$ et utilise (1.128), pour obtenir

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^2(\mathcal{B}^\alpha\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha),\theta_*^\alpha,\xi_*^\alpha),\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)-\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}\\&+j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_*(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_*(t))+j_{fr}(\boldsymbol{u}_*(t),\boldsymbol{v})-j_{fr}(\boldsymbol{u}_*(t),\boldsymbol{u}_*(t))\\&+(\eta^*(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_*(t))_{\mathrm{V}}\geq(f(t),\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}_*(t))_{\mathrm{V}},\quad\forall\boldsymbol{v}\in\mathrm{V}.\end{aligned}\tag{1.131}$$

On combine les égalités $\mathbf{\Lambda}^1(\lambda^*,\pi^*,\eta^*)=\lambda^*$, $\mathbf{\Lambda}^2(\lambda^*,\pi^*,\eta^*)=\pi^*$ et $\mathbf{\Lambda}^3(\lambda^*,\pi^*,\eta^*=\eta^*$

avec (1.117), (1.115) et (1.116) pour obtenir

$$(\eta^*(t), \boldsymbol{v})_{\mathrm{V}} = -\sum_{\alpha=1}^{2}((\mathcal{E}^\alpha)^* E^\alpha(\zeta_*^\alpha(t)), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + j_{ad}(\varsigma_*(t), \boldsymbol{u}_*(t), \boldsymbol{v})$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\int_0^t \mathcal{Q}^\alpha(t-s, \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(s)), \theta_*^\alpha(s), \xi_*^\alpha(s))ds, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)\right)_{\mathcal{H}^\alpha}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V}, \tag{1.132}$$

$$\lambda_*^\alpha(t) = \Theta^\alpha\left(\boldsymbol{\sigma}_*^\alpha(t), \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)), \theta_*^\alpha(t), \xi_*^\alpha(t)\right), \alpha = 1, 2, \tag{1.133}$$

$$\pi_*^\alpha(t) = \phi^\alpha\left(\boldsymbol{\sigma}_*^\alpha(t), \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)), \theta_*^\alpha(t), \xi_*^\alpha(t)\right), \alpha = 1, 2. \tag{1.134}$$

Maintenant, En utilisant (1.132) dans (1.131) pour obtenir

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha), \theta_*^\alpha, \xi_*^\alpha), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) - \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\int_0^t \mathcal{Q}^\alpha(t-s, \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(s)), \theta_*^\alpha(s), \xi_*^\alpha(s))ds, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) - \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t))\right)_{\mathcal{H}^\alpha}$$
$$+j_{ad}(\varsigma_*(t), \boldsymbol{u}_*(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_*(t)) + j_{\nu c}(\boldsymbol{u}_*(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_*(t)) + j_{fr}(\boldsymbol{u}_*(t), \boldsymbol{v})$$
$$-j_{fr}(\boldsymbol{u}_*(t), \boldsymbol{u}_*(t)) - \sum_{\alpha=1}^{2}((\mathcal{E}^\alpha)^* E^\alpha(\zeta_*^\alpha(t)), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) - \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}$$
$$\geq (f(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_*(t))_{\mathrm{V}}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathrm{V},\ p.p.\, t \in [0, T]. \tag{1.135}$$

Et en utilisant (1.133) dans (1.86) on obtient

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\dot{\theta}_*^\alpha(t), \omega^\alpha\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + a_0(\theta_*^\alpha(t), \omega) = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(\lambda_*^\alpha(t) - \rho^\alpha(t), \omega^\alpha\right)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \tag{1.136}$$

pour tout $\omega \in \mathbb{L}_0$, $p.p.\, t \in [0, T]$. Ensuite, de (1.134) et (1.87), $\xi_*(t) \in K$ on a

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\dot{\xi}_*^\alpha(t), \omega^\alpha - \xi_*^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + a\left(\xi_*(t), \omega^\alpha - \xi_*(t)\right) \geq$$
$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\phi^\alpha\left(\boldsymbol{\sigma}_*^\alpha(t), \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)), \theta_*^\alpha(t), \xi_*^\alpha(t)\right), \omega^\alpha - \xi_*^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \tag{1.137}$$

pour tout $\omega \in K$, $p.p.\, t \in [0, T]$, on écrit (1.94) pour $(\eta, \lambda, \pi) = (\eta^*, \lambda^*, \pi^*)$ et en employant (1.128), on obtient

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{G}^\alpha(E^\alpha(\zeta_*^\alpha(t))), \nabla\phi^\alpha)_{H^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t))_{H^\alpha} = (-q(t), \phi)_{\mathrm{W}}, \tag{1.138}$$

pour tout $\phi \in \mathrm{W}$, $p.p.\, t \in [0,T]$. De plus, on utilise $\boldsymbol{u}_{\lambda^*\pi^*\eta^*}$ dans (1.95) et (1.128) on obtient

$$\dot{\varsigma}_*(t) = \mathbf{H}_{ad}(\varsigma_*(t), \omega_{\varsigma_*}(t), R_\nu([u_{*\nu}(t)]), \mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_{*\tau}(t)])), \quad p.p.\, t \in [0,T]. \tag{1.139}$$

Les relations (1.129), (1.130), (1.135)−(1.139) implique que $\{\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \zeta_*, \theta_*, \xi_*, \varsigma_*, \boldsymbol{D}_*\}$ est une solution du problème (1.63)−(1.70). Et d'après les lemmes 1.3.1 et 1.3.2 on a les régularité (1.79)−(1.85). Puisque $\boldsymbol{u}_*$, ζ_*, θ_* et ξ_* satisfait (1.79), (1.80), (1.83) et (1.84) on a

$$\boldsymbol{\sigma}_* \in L^2(0,T;\mathcal{H}). \tag{1.140}$$

Pour $\alpha = 1,2$, on choisit $v = \boldsymbol{u} \pm \phi$, avec $\phi = (\phi^1, \phi^2)$, $\phi^\alpha \in D(\Omega^\alpha)^d$ et $\phi^{3-\alpha} = 0$, on obtient

$$\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma}_*^\alpha(t) = -f_0^\alpha(t) \quad \forall t \in [0,T], \quad \alpha = 1,2. \tag{1.141}$$

La régularité (1.82) suit les formes (1.27), (1.140) et (1.141). Soit $t_1, t_2 \in [0,T]$, d'après (1.23), (1.24) et (1.130), on conclue qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifiant

$$\|\boldsymbol{D}_*(t_1) - \boldsymbol{D}_*(t_2)\|_H \leqslant C\,(\|\zeta_*(t_1) - \zeta_*(t_2)\|_W + \|\boldsymbol{u}_*(t_1) - \boldsymbol{u}_*(t_2)\|_{\mathrm{V}}).$$

En rappelant les régularités pour $\boldsymbol{u}_*$ et ζ_* dans (1.79) et (1.80), on a

$$\boldsymbol{D}_* \in L^2(0,T;H). \tag{1.142}$$

Pour $\alpha = 1,2$, on choisit $\phi = (\phi^1, \phi^2)$,avec $\phi^\alpha \in D(\Omega^\alpha)^d$ et $\phi^{3-\alpha} = 0$, dans (1.138) et de (1.37) on obtient

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}_*^\alpha(t) = q_0^\alpha(t) \quad \forall t \in [0,T], \quad \alpha = 1,2. \tag{1.143}$$

Et de (1.85), (1.28), (1.142) et (1.143) on trouve que

$$\boldsymbol{D}_* \in L^2(0,T;\mathcal{W}).$$

Enfin, on conclue que $\{\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \zeta_*, \theta_*, \xi_*, \varsigma_*, \boldsymbol{D}_*\}$ est une solution du problème $\mathcal{PV}$ qui satisfait les régularités (1.79)−(1.85), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du Théorème 1.2.1.

unicité.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur $\boldsymbol{\Lambda}$ qui est défini par (1.114)−(1.117).

Chapitre 2

Contact entre deux corps thérmo-électro-Viscoélastiques avec adhésion et endommagement

Dans ce deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude variationnelle d'un problème de contact entre deux corps thérmo-éléctro-élastique dans un processus dynamique avec endommagement, cet contact est modélisé par les conditions de compliance normale avec l'adhésion.

Dans la premiére section, on décrit la formulation du probléme tandis que dans la deuxième, on donne des hypothéses sa formulation variationnelle mais dans la troisième, démontre l'existense d'une solution faible et sa unicité en se basant sur les méthodes du point fixe et les résultats des équations d'évolutions non linéaire .
Ce chapitre fait l'objet de la publication [6].

2.1 Position du problème

Problème $\mathcal{P}$. Pour $\alpha = 1, 2$, trouver respectivement les champs déplacements $\boldsymbol{u}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, températures $\tau^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, d'endommagements $\xi^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, potentiels électriques $\zeta^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, déplacements électriques $\boldsymbol{D}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et un champ d'adhésion $\varsigma : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R}$, tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}^\alpha)) + \mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \tau^\alpha, \xi^\alpha) - (\mathcal{E}^\alpha)^* E^\alpha(\zeta^\alpha) \quad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{D}^\alpha = \mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha) - B^\alpha \nabla \zeta^\alpha \quad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{2.2}$$

$$\dot{\tau}^\alpha - \kappa_0^\alpha \Delta \tau^\alpha = \Theta^\alpha\big(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \tau^\alpha, \xi^\alpha\big) + \chi^\alpha \quad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{2.3}$$

$$\dot{\xi}^\alpha - \kappa^\alpha \Delta \xi^\alpha + \partial \varphi_{K^\alpha}(\xi^\alpha) \ni \Psi^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \tau^\alpha, \xi^\alpha) \quad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{2.4}$$

$$\rho^\alpha \ddot{\boldsymbol{u}}^\alpha = \mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}^\alpha + \boldsymbol{f}_0^\alpha \quad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{2.5}$$

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D}^\alpha - q_0^\alpha = 0 \quad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{u}^\alpha = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\alpha \times (0,T), \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha = \boldsymbol{f}_2^\alpha \quad \text{sur } \Gamma_2^\alpha \times (0,T), \tag{2.8}$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) - \gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) \;\; \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.9}$$

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\varsigma) R_\tau(|\boldsymbol{u}_\tau^1 - \boldsymbol{u}_\tau^2|) \;\; \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.10}$$

$$\dot{\varsigma} = H_{ad}(\varsigma, \hat{\varsigma}, R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2), R_\tau(|\boldsymbol{u}_\tau^1 - \boldsymbol{u}_\tau^2|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{2.11}$$

$$\kappa_0^\alpha \frac{\partial \tau^\alpha}{\partial \nu^\alpha} + \lambda_0^\alpha \tau^\alpha = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\alpha \times (0,T), \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \nu^\alpha} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\alpha \times (0,T), \tag{2.13}$$

$$\zeta^\alpha = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\alpha \times (0,T), \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{D}^\alpha.\boldsymbol{\nu}^\alpha = q_2^\alpha \quad \text{sur } \Gamma_b^\alpha \times (0,T), \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{u}^\alpha(0) = \boldsymbol{u}_0^\alpha,\ \dot{\boldsymbol{u}}^\alpha(0) = \boldsymbol{v}_0^\alpha,\ \xi^\alpha(0) = \xi_0^\alpha,\ \tau^\alpha(0) = \tau_0^\alpha \quad \text{dans } \Omega^\alpha, \tag{2.16}$$

$$\varsigma(0) = \varsigma_0 \text{ sur } \Gamma_3. \tag{2.17}$$

(2.1) - (2.2) désignent la loi de comportement thermo-électro-viscoélast ique avec endommagement où $\mathcal{A}^\alpha$ est l'opérateur de viscosité du matériau, $\mathcal{B}^\alpha$, $\mathcal{B}^\alpha$, $\varepsilon(u^\alpha)$ et $\mathcal{E}^\alpha$ ont la méme représentation que dans le problème du chapitre précident.
La conservation énergitique est représentée par l'équation (2.3). La relation (2.4) représente l'inclusion qui décrit l'évolution du champ d' endommagement. (2.5) et (2.6) désignent respectivement les relations de contrainte et de déplacement électrique. Aussi, (2.7) et (2.8) désignent les conditions aux limites respectivement de déplacement et de traction. Les condition (2.9) et (2.10) représente respectivement les conditions de compliance normal et de contact tangentiel.
(2.11) décrit l'évolution du champ d'adhésion. Les relations (2.12), (2.13) représentent respectivement sur Γ^α une condition aux limites de Fourier et de Neumann. Les conditions aux limites électriques sont représentées par (2.14) et (2.15). Finalement u_0, τ_0, ξ_0 et ς_0 dans (2.16) et (2.17) sont les conditions initiales.

2.2 Formulation Variationnelle

a) Hypothéses sur les données

On considère les hypothèses suivantes.

$\mathcal{A}^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} \text{(a)il existe } C^1_{\mathcal{A}^\alpha}, C^2_{\mathcal{A}^\alpha} > 0 \text{ telle que,} \\ \qquad |\mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta})| \leq C^1_{\mathcal{A}^\alpha}|\boldsymbol{\eta}| + C^2_{\mathcal{A}^\alpha} \quad \forall\, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)il existe } m_{\mathcal{A}^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad (\mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_1) - \mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_2)) \cdot (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) \geq m_{\mathcal{A}^\alpha}|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^2 \\ \qquad \forall\, \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(c)} \quad \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\alpha, \\ \qquad \text{pour tout } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d)} \quad \boldsymbol{\eta} \mapsto \mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) \ \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \end{cases} \tag{2.18}$$

$\mathcal{B}^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } \ M_{\mathcal{B}^\alpha} > 0 \ \text{ telle que} \\ \qquad |\mathcal{B}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_1, s_1, r_1) - \mathcal{B}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_2, s_2, r_2)| \\ \qquad \leq M_{\mathcal{B}^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2| + |r_1 - r_2|) \\ \qquad \forall \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall s_1, s_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)} \quad \boldsymbol{x} \to \mathcal{B}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}, s, r) \ \text{ est Lebesgue} \\ \qquad \text{mesurable sur } \Omega^\alpha, \text{ pour tous } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d \text{ et } r, d \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \quad \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{B}^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}^\alpha. \end{cases} \tag{2.19}$$

$\mathcal{R}^\alpha = \left(r^\alpha_{ij}\right) : \Omega^\alpha \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifie

$$\begin{cases} \text{(a) } r^\alpha_{ij} = r^\alpha_{ji} \in L^\infty\big(\Omega^\alpha\big), \ 1 \leq i, j \leq d. \\ \text{(b) Il existe une constante } M_{\mathcal{R}^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad \mathcal{R}^\alpha \pi.\pi \geq M_{\mathcal{R}^\alpha}|\pi|^2 \quad \forall \pi = (\pi_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } \ x \in \Omega^\alpha. \end{cases} \tag{2.20}$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\alpha = (e^\alpha_{ijk}) : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait

$$e^\alpha_{ijk} = e^\alpha_{ikj} \in L^\infty(\Omega^\alpha), \ 1 \leq i, j, k \leq d. \tag{2.21}$$

$\Theta^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sérifie :

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{(a)} & \text{Il existe } L_{\Theta^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ & |\Theta^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_1, s_1, r_1) - \Theta^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_2, s_2, r_2)| \\ & \leq L_{\Theta^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2| + |r_1 - r_2|) \\ & \text{ pour tous } \ \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tous } s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \\ & \text{pour tous } r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \ \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)} & \quad \boldsymbol{x} \mapsto \Theta^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}, s, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\alpha \\ & \text{pour tous } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tous } s, r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} & \quad \boldsymbol{x} \mapsto \Theta^\alpha(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, 0, 0) \in L^2(\Omega^\alpha). \end{array}\right. \tag{2.22}$$

$\Psi^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(a) Il existe } \ M_{\Psi^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\Psi^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_1, s_1, r_1) - \Psi^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_2, s_2, r_2)| \\ \quad \leq M_{\Psi^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2| + |r_1 - r_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \ \forall s_1, s_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \ \text{p.p.} \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b) } \ \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d \text{ et } s, r \in \mathbb{R}, \ \ \Psi^\alpha(., \boldsymbol{\eta}, s, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\alpha. \\ \text{(c) } \ \boldsymbol{x} \mapsto \Psi^\alpha(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\alpha). \end{array}\right. \tag{2.23}$$

$p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\nu(\boldsymbol{x}, s_1) - p_\nu(\boldsymbol{x}, s_2)| \leq L_\nu |s_1 - s_2| \ \ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \ \ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } p_\nu(., s) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \ \text{ pour tout } s \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_\nu(\boldsymbol{x}, s) = 0 \ \text{ pour tout } s \leq 0, \ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \end{array}\right. \tag{2.24}$$

$p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(a) } \ \text{Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(\boldsymbol{x}, s_1) - p_\tau(\boldsymbol{x}, s_2)| \leq L_\tau |s_1 - s_2| \ \ \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R} \ , \ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) Il existe } M_\tau > 0 \ \text{ telle que} \\ \qquad |p_\tau(\boldsymbol{x}, s)| \leq M_\tau \ \forall s \in \mathbb{R}, \ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } p_\tau(., s) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \ \text{pour tout } s \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } \ \boldsymbol{x} \mapsto p_\tau(\boldsymbol{x}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array}\right. \tag{2.25}$$

$H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{(a) il existe } L_{ad} > 0 \text{ telle que :} \\
\quad |H_{ad}(\boldsymbol{x}, s_1, r_1, z_1, h_1) - H_{ad}(\boldsymbol{y}, s_2, r_2, z_2, h_2)| \\
\quad \leq L_\nu |s_1 - s_2| + |r_1 - r_2| + |z_1 - z_2| + |h_1 - h_2|, \\
\quad \forall\, s_1, s_2, r_1, r_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R},\ h_1, h_2 \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\
\text{(b)} \qquad \boldsymbol{x} \mapsto H_{ad}(\boldsymbol{x}, s, r, z, h) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \\
\quad \text{pour tout } s, r, z \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}^{d-1}. \\
\text{(c) } (s, r, z, h) \mapsto H_{ad}(\boldsymbol{x}, s, r, z, h) \text{ est continue sur} \\
\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1},\ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\
\text{(d) } H_{ad}(\boldsymbol{x}, 0, r, z, h) = 0, \quad \forall\, r, z \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}^{d-1},\ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \\
\text{(e) } H_{ad}(\boldsymbol{x}, s, r, z, \lambda) \geq 0, \quad \forall\, s \leq 0, r, z \in \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}^{d-1},\ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \text{ et} \\
\quad H_{ad}(\boldsymbol{x}, s, r, z, \lambda) \leq 0, \quad \forall\, s \geq 1, r, z \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}^{d-1},\ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3.
\end{array}\right. \tag{2.26}$$

La masse volumique ρ^α vérifie

$$\rho^\alpha \in L^\infty(\Omega^\alpha), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \quad \rho^\alpha \geq \rho^* \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \tag{2.27}$$

On assume aussi que $\boldsymbol{f}_0^\alpha$, $\boldsymbol{f}_2^\alpha$, $\boldsymbol{q}_0^\alpha$ et $\boldsymbol{q}_2^\alpha$ ont les régularités :

$$\boldsymbol{f}_0^\alpha \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2^\alpha)^d), \quad \boldsymbol{f}_2^\alpha \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2^\alpha)^d), \tag{2.28}$$

$$q_0^\alpha \in C(0, T; L^2(\Omega^\alpha)), \quad q_2^\alpha \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\alpha)), \tag{2.29}$$

$$q_2^\alpha(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \ \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.30}$$

Le coefficient de l'adhésion γ_ν satisfait

$$\gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu \geq 0 \ \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \tag{2.31}$$

k_0^α et k_1^α satisfaient :

$$k_0^\alpha > 0, \quad k_1^\alpha > 0. \tag{2.32}$$

En fin les conditions initiales vérifient :

$$\boldsymbol{u}_0^\alpha \in \boldsymbol{V}^\alpha, \quad \boldsymbol{v}_0^\alpha \in H^\alpha, \quad \tau_0^\alpha \in \mathbb{L}_1^\alpha, \quad \xi_0^\alpha \in K^\alpha \ \text{ p.p.} x \in \Omega^\alpha, \tag{2.33}$$

$$\varsigma_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \varsigma_0 \leq 1, \quad \text{p.p.} x \in \Gamma_3. \tag{2.34}$$

On utilise le produit $((.,.))_H$ sur l'espace de Hilbert,definé par :

$$((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))_H = \sum_{\alpha=1}^{2}(\rho^\alpha \boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha)_{H^\alpha} \quad \forall\ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in H. \tag{2.35}$$

et la norme $|||.|||_H$ definie par :

$$|||\boldsymbol{v}|||_H = ((\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}))_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in H. \tag{2.36}$$

On utilise l'équivalence des normes $|||.|||_H$ et $||.||_H$ et la continuitée puis la densitée de l'application d'inclusion de $(\boldsymbol{V}, ||.||_{\boldsymbol{V}})$ dans $(H, ||.||_H)$ pour déduire le triple de Gelfand

$$\boldsymbol{V} \subset H = H' \subset \boldsymbol{V}'.$$

On utilise la notation $(.,.)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}$ représentant la dualité entre $\boldsymbol{V}'$ et $\boldsymbol{V}$, on rappelle que

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = ((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))_H \quad \forall \boldsymbol{u} \in H, \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}. \tag{2.37}$$

On introduit les fonctions continues suivantes $a :\ \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \to \mathbb{R}$, $a_0 :\ \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \to \mathbb{R}$, par

$$a(\xi,\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{2} k^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\xi^\alpha.\nabla\zeta^\alpha\ dx, \tag{2.38}$$

$$a_0(\xi,\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{2} \kappa_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\xi^\alpha.\nabla\zeta^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \xi^\alpha\zeta^\alpha da, \tag{2.39}$$

On définit la fonction $f = (f^1, f^2) :\ [0,T] \to \boldsymbol{V}'$,par :

$$(\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha} \boldsymbol{f}_0^\alpha(t).\boldsymbol{v}^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha} \boldsymbol{f}_2^\alpha(t).v^\alpha da \quad \forall\ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{2.40}$$

et, la fonction $q = (q^1, q^2) :\ [0,T] \to W$, par

$$(q(t),\Psi)_W = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha(t)\Psi^\alpha dx - \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha(t)\Psi^\alpha da \quad \forall \Psi \in W, t \in [0,T], \tag{2.41}$$

Les conditions (2.40), (2.41) impliquent

$$\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}'), \qquad q \in C(0,T;W).$$

On définit respectivement la fonctionnelle d'adhésion et la fonctionnelle de compliance normale comme suit $j_{ad} :\ L^\infty(\Gamma_3) \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\varsigma,u,v) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu\varsigma^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2)v_\nu + p_\tau(\varsigma)R_\tau(|\boldsymbol{u}_\tau^1 - \boldsymbol{u}_\tau^2|)).v_\tau)da, \tag{2.42}$$

et $j_{vc}:\ L^\infty(\Gamma_3)\times \boldsymbol{V}\times V\to\mathbb{R}$ par

$$j_{vc}(u,v)=\int_{\Gamma_3}p_\nu(u_\nu^1+u_\nu^2)v_\nu da. \tag{2.43}$$

D'aprés les hypothèses (2.23), (2.24) et (2.27)–(2.30) on vérifie que les intégrales dans (2.38)–(2.43) sont bien définies.

b) formulation variationnelle du probléme

Par application des formules de Green, on remarque que si $\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma}$ et ς sont des fonctions suffisamment régulières qui vérifient (2.5), (2.7), (2.9) et (2.10) avec (2.42) et (2.43) pour tout $t\in[0,T]$ on obtient que :

$$(\sigma^\alpha,\varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}+(\mathrm{Div}\sigma^\alpha,v^\alpha)_{H^\alpha}=\int_{\Gamma^\alpha}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da,\quad \forall v^\alpha\in V^\alpha,$$

On a

$$\int_{\Omega^\alpha}\sigma^\alpha\varepsilon(v^\alpha)dx+\int_{\Omega^\alpha}\mathrm{Div}\sigma^\alpha\cdot v^\alpha dx=\int_{\Gamma_1^\alpha}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da+\int_{\Gamma_2^\alpha}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da+\int_{\Gamma_3^\alpha}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da,$$
$$\forall v^\alpha\in V^\alpha,$$

d'aprés (2.5) et (2.7)-(2.8) on a :

$$\int_{\Omega^\alpha}\sigma^\alpha\varepsilon(v^\alpha)dx+\int_{\Omega^\alpha}\rho^\alpha\ddot{u}^\alpha\cdot v^\alpha dx-\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha\cdot v^\alpha dx=\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha\cdot v^\alpha da+\int_{\Gamma_3^\alpha}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da,$$
$$\forall v^\alpha\in V^\alpha,$$

La formule de Green pour $\alpha=1$:

$$\int_{\Omega^1}\sigma^1\varepsilon(v^1)dx+\int_{\Omega^1}\rho^1\ddot{u}^1\cdot v^1dx-\int_{\Omega^1}f_0^1\cdot v^1dx=\int_{\Gamma_2^1}f_2^1\cdot v^1da$$
$$+\int_{\Gamma_3^1}\sigma^1\nu^1\cdot v^1da,\quad \forall v^1\in V^1, \tag{2.44}$$

La formule de Green pour $\alpha=2$:

$$\int_{\Omega^2}\sigma^2\varepsilon(v^2)dx+\int_{\Omega^2}\rho^2\ddot{u}^2\cdot v^2dx-\int_{\Omega^2}f_0^2\cdot v^2dx=\int_{\Gamma_2^2}f_2^2\cdot v^2da$$
$$+\int_{\Gamma_3^2}\sigma^2\nu^2\cdot v^2da,\quad \forall v^2\in V^2, \tag{2.45}$$

on additione (2.44) et (2.45)

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}\sigma^\alpha\varepsilon(v^\alpha)dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}\rho^\alpha\ddot{u}^\alpha\cdot v^\alpha dx-\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha\cdot v^\alpha dx=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha\cdot v^\alpha da$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3^\alpha}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da,\quad \forall v^\alpha\in V^\alpha,$$

alors :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\sigma^\alpha,\varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\rho^\alpha\ddot{u}^\alpha,v^\alpha)_{H^\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha\cdot v^\alpha dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha\cdot v^\alpha da$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3^\alpha}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da,\quad \forall v^\alpha\in V^\alpha,$$

La définition du produit scalaire implique que

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\rho^\alpha\ddot{u}^\alpha,v^\alpha)_{H^\alpha}=((\ddot{u},v))_{H^\alpha}=(\ddot{u},v)_{V'\times V},\quad \forall\ddot{u}\in H,\,\forall v\in V,$$

on a

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\sigma^\alpha,\varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}+(\ddot{u},v)_{V'\times V}=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha\cdot v^\alpha dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha\cdot v^\alpha da$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3^\alpha}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da,\quad \forall v^\alpha\in V^\alpha,$$

d'aprés (2.40)

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\sigma^\alpha,\varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}+(\ddot{u}(t),v)_{V'\times V}=(f(t),v)_{V'\times V}+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da,\quad \forall v^\alpha\in V^\alpha.$$

On calcule $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da$:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da&=\int_{\Gamma_3}\sigma^1\nu^1\cdot v^1 da+\int_{\Gamma_3}\sigma^2\nu^2\cdot v^2 da\\&=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu^1 v_\nu^1\,da+\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu^2 v_\nu^2\,da+\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau^1 v_\tau^1\,da+\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau^2 v_\tau^2\,da\\&=\int_{\Gamma_3}\sigma_\nu\left(v_\nu^1+v_\nu^2\right)da+\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau\left(v_\tau^1-v_\tau^2\right)da\\&=\int_{\Gamma_3}\left(-p_\nu(u_\nu^1+u_\nu^2)+\gamma_\nu\varsigma^2R_\nu(u_\nu^1+u_\nu^2)\right)(v_\nu^1+v_\nu^2)da\\&+\int_{\Gamma_3}\left(-p_\tau(\varsigma)R_\tau(|u_\tau^1-u_\tau^2|)\right)\left(v_\tau^1-v_\tau^2\right)da,\end{aligned}$$

alors

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha\nu^\alpha\cdot v^\alpha da=\int_{\Gamma_3}\gamma_\nu\varsigma^2R_\nu(u_\nu^1+u_\nu^2)\,[v_\nu]\,da-\int_{\Gamma_3}p_\tau(\varsigma)R_\tau(|u_\tau^1-u_\tau^2|)\,[v_\tau]\,da$$
$$-\int_{\Gamma_3}p_\nu(u_\nu^1+u_\nu^2)\,[v_\nu]\,da,$$

d'aprés (2.42)et(2.43), on a

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\sigma^\alpha,\varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}+(\ddot u(t),v)_{V'\times V}=(f(t),v)_{V'\times V}-j_{ad}(\varsigma(t),u(t),v)-j_{\nu c}(u(t),v),$$
$$\forall v^\alpha\in V^\alpha,$$

on utilise (2.1) pour trouver

$$\begin{aligned}&(\ddot u(t),v)_{V'\times V}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(\dot u^\alpha(t)),\varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}\\&+\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{B}^\alpha\left(\varepsilon(u^\alpha(t)),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t),\varepsilon(v^\alpha)\right)_{\mathcal{H}^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}((\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\zeta^\alpha(t),\varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}\\&+j_{ad}(\varsigma(t),u(t),v)+j_{\nu c}(u(t),v)=(f(t),v)_{V'\times V}\quad,\forall v^\alpha\in V^\alpha,t\in(0,T).\end{aligned}\tag{2.46}$$

Pour les inconnues électrique du problème, on utilise la formule de Green ainsi que les conditions (2.6), (2.12) on a :

$$(\mathbf{D}^\alpha,\nabla\varphi^\alpha)_{\mathcal{H}^\alpha}+(div\mathbf{D}^\alpha,\varphi^\alpha)_{H^\alpha}=\int_{\Gamma^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot\varphi^\alpha da,\quad\forall\varphi^\alpha\in H_1^\alpha,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\cdot\nabla\varphi^\alpha dx+\int_{\Omega^\alpha}div\mathbf{D}^\alpha\cdot\varphi^\alpha dx=\int_{\Gamma_a^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot\varphi^\alpha da+\int_{\Gamma_b^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot\varphi^\alpha da,\quad\forall\varphi^\alpha\in H_1^\alpha.\tag{2.47}$$

Pour $\alpha=1,2$, on a d'après (2.14) :

$$\int_{\Gamma_a^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot\varphi^\alpha da=0,$$

alors :

$$\int_{\Omega^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\cdot\nabla\varphi^\alpha dx+\int_{\Omega^\alpha}div\mathbf{D}^\alpha\cdot\varphi^\alpha dx=\int_{\Gamma_b^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha\cdot\varphi^\alpha da,\quad\forall\varphi^\alpha\in H_1^\alpha.\tag{2.48}$$

On a d'aprés (2.6) et (2.15) :

$$\int_{\Omega^\alpha}\mathbf{D}^\alpha\cdot\nabla\varphi^\alpha dx+\int_{\Omega^\alpha}q_0^\alpha\cdot\varphi^\alpha dx=\int_{\Gamma_b^\alpha}q_2^\alpha\cdot\varphi^\alpha da,\quad\forall\varphi^\alpha\in H_1^\alpha.\tag{2.49}$$

La formule de Green pour $\alpha = 1$

$$\int_{\Omega^1} \mathbf{D}^1 \cdot \nabla \varphi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1 \cdot \varphi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1 \cdot \phi^1 da, \quad \forall \varphi^1 \in H_1^1. \tag{2.50}$$

La formule de Green pour $\alpha = 2$

$$\int_{\Omega^2} \mathbf{D}^2 \cdot \nabla \varphi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2 \cdot \varphi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2 \cdot \varphi^2 da, \quad \forall \varphi^2 \in H_1^2, \tag{2.51}$$

l'addition de (2.50) et (2.51) donne :

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} \mathbf{D}^\alpha \cdot \nabla \varphi^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha \cdot \varphi^\alpha dx = \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha \cdot \varphi^\alpha da,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathbf{D}^\alpha, \nabla \varphi^\alpha)_{H^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha \cdot \varphi^\alpha dx - \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha \cdot \varphi^\alpha da = 0.$$

D'aprés la fonction(2.41) :

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha \cdot \varphi^\alpha dx - \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha \cdot \varphi^\alpha da = (q, \varphi)_{\mathrm{W}}.$$

Donc :

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathbf{D}^\alpha, \nabla \varphi^\alpha)_{H^\alpha} + (q, \varphi)_{\mathrm{W}} = 0.$$

De (2.2), on obtient :

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{R}^\alpha \nabla \zeta^\alpha, \nabla \varphi^\alpha)_{H^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \nabla \varphi^\alpha)_{H^\alpha} = (q, \varphi)_W \quad \forall \varphi \in W, \tag{2.52}$$

En utilisant la condition (2.3) et la fo rmule de Green, on a

$$(\dot{\tau}^\alpha(t) - \chi^\alpha(t), \omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} - (\kappa_0^\alpha \Delta \tau^\alpha(t), \omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} = (\Theta^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{\alpha}}(t), \tau^\alpha(t), \xi^\alpha(t)), \omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)},$$

$$\forall \omega^\alpha \in L_1^\alpha, \quad . \tag{2.53}$$

$$-\kappa_0^\alpha (\Delta \tau^\alpha(t), \omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} = \kappa_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla \tau^\alpha(t) \cdot \nabla \omega^\alpha dx - \kappa_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \frac{\partial^\alpha \tau^\alpha(t)}{\partial \nu^\alpha} \omega^\alpha dx, \quad \forall \omega^\alpha \in L_1^\alpha.$$

Et d'après (2.12) cette dernière égalité devient :

$$-\kappa_0^\alpha (\Delta \tau^\alpha(t), \omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} = \kappa_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla \tau^\alpha(t) \cdot \nabla \omega^\alpha dx + \lambda_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \tau^\alpha(t)\, \omega^\alpha dx, \quad \forall \omega^\alpha \in L_1^\alpha, \quad . \tag{2.54}$$

on utilise les (2.53) et (2.54), on trouve

$$(\dot{\tau}^\alpha(t)-\chi^\alpha(t),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}+\kappa_0^\alpha\int_{\Omega^\alpha}\nabla\tau^\alpha(t)\cdot\nabla\omega^\alpha dx+\lambda_0^\alpha\int_{\Gamma^\alpha}\tau^\alpha(t)\cdot\omega^\alpha dx$$
$$=(\Theta^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u^\alpha(t)}),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t)),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}\,,\quad \forall\omega^\alpha\in L_1^\alpha,\quad ,$$

d'où

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\tau}^\alpha(t)-\chi^\alpha(t),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}+\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_0^\alpha\int_{\Omega^\alpha}\nabla\tau^\alpha(t)\cdot\nabla\omega^\alpha dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\lambda_0^\alpha\int_{\Gamma^\alpha}\tau^\alpha(t)\cdot\omega^\alpha dx$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{2}(\Theta^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u^\alpha}(t)),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t)),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}\,,\quad \forall\omega^\alpha\in L_1^\alpha.$$

d'après (2.39), on obtient :

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\tau}^\alpha(t)-\chi^\alpha(t),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}+a_0(\tau(t),\omega)=\sum_{\alpha=1}^{2}(\Theta^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u^\alpha(t)}),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t)),\omega^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}\,,$$
$$\forall\omega^\alpha\in L_1^\alpha. \tag{2.55}$$

Maintenant, pour les inconnues d'endommagements, soit $\xi^\alpha(t)\in K^\alpha$ et pour tout $t\in[0,T]$. La définition (B.32) de $\partial\psi_{K^\alpha}(\xi^\alpha)$ et de (2.4), on obtient

$$\Big(\Psi^\alpha\left(\varepsilon(u^\alpha(t)),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t)\right)-\dot{\xi^\alpha}(t)+\kappa^\alpha\Delta\xi^\alpha(t),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)}\leq 0,\quad \forall\delta^\alpha\in K^\alpha,$$

donc

$$\Big(\Psi^\alpha\big(\varepsilon(u^\alpha(t)),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t)\big),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)}$$
$$\leq\Big(\dot{\xi^\alpha}(t),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)}-\kappa^\alpha\left(\Delta\xi^\alpha(t),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)}\,,$$

en utilisant la formule de Green, on a

$$(\Delta\xi^\alpha(t),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}+(\nabla\xi^\alpha(t),\nabla(\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)))_{L^2(\Omega^\alpha)}=\int_{\Gamma^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha(t)}{\partial\nu}\cdot(\delta^\alpha-\xi^\alpha(t))da,$$

d'après (B.16), on obtient

$$(\Delta\xi^\alpha(t),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}=-\int_{\Omega^\alpha}\nabla\xi^\alpha(t)\cdot\nabla(\delta^\alpha-\xi^\alpha(t))dx,$$

en suite

$$\Big(\dot{\xi^\alpha}(t),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)}+\kappa^\alpha\int_{\Omega^\alpha}\nabla\xi^\alpha(t)\cdot\nabla(\delta^\alpha-\xi^\alpha(t))dx$$
$$\geq\Big(\Psi^\alpha\big(\varepsilon(u^\alpha(t)),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t)\big),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)},$$

alors

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\dot{\xi^\alpha}(t),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)}+\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa^\alpha\int_{\Omega^\alpha}\nabla\xi^\alpha(t)\cdot\nabla(\delta^\alpha-\xi^\alpha(t))dx$$
$$\geq\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\Psi^\alpha\big(\varepsilon(u^\alpha(t)),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t)\big),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)},\quad\forall\delta^\alpha\in K^\alpha,$$

d'aprés (2.38), on trouve

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\dot{\xi^\alpha}(t),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)}+a\left(\xi(t),\delta-\xi(t)\right)$$
$$\geq\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\Psi^\alpha\big(\varepsilon(u^\alpha(t)),\tau^\alpha(t),\xi^\alpha(t)\big),\delta^\alpha-\xi^\alpha(t)\Big)_{L^2(\Omega^\alpha)},\quad\forall\delta^\alpha\in K^\alpha.\tag{2.56}$$

En fin, d'aprés (2.1), (2.2), (2.52), (2.55), (2.56) (2.11), (2.16) et (2.17), on déduit la formulation variationnelle suivante du problème thermo-électro-viscoelastique P.

Problem PV. Trouver respectivement un champ de déplacement $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{u}^2):[0,T]\to V$, de contrainte $\boldsymbol{\sigma}=(\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2):[0,T]\to\mathcal{H}$, de potentiel électrique $\zeta=(\zeta^1,\zeta^2):[0,T]\to W$, de température $\tau=(\tau^1,\tau^2):[0,T]\to\mathbb{L}_1$, d'endommagement $\xi=(\xi^1,\xi^2):[0,T]\to\mathbb{L}_1$, et un champ d'adhésion $\varsigma:[0,T]\to L^\infty(\Gamma_3)$ tel que, pour tout

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha=\mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}^\alpha)+\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha),\tau^\alpha,\xi^\alpha)+(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\zeta^\alpha\ \text{ dans } \Omega^\alpha\times(0,T),\tag{2.57}$$

$$\boldsymbol{D}^\alpha=\mathcal{E}^\alpha\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha)-\mathcal{R}^\alpha\nabla\zeta^\alpha\quad\text{dans } \Omega^\alpha\times(0,T),\tag{2.58}$$

$$\begin{cases}(\ddot{\boldsymbol{u}},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}^\alpha),\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}\\+\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(u^\alpha,\tau^\alpha,\xi^\alpha),\varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}\left((\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\zeta^\alpha,\varepsilon(v^\alpha)\right)_{\mathcal{H}^\alpha}\\+j_{ad}(\varsigma,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+j_{vc}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}\quad\forall v\in V,\end{cases}\tag{2.59}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\tau}^\alpha-\chi^\alpha,\delta^\alpha)_{\mathbb{L}_0^\alpha}+a_0(\tau,\delta)=\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\Theta^\alpha\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^\alpha),\tau^\alpha,\xi^\alpha\big),\delta^\alpha\Big)_{\mathbb{L}_0^\alpha}\quad\forall\delta\in\mathbb{L}_1,\tag{2.60}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\xi^\alpha},\delta^\alpha-\xi^\alpha_{L_0^\alpha}+a(\xi,\delta-\xi)\geq\sum_{\alpha=1}^{2}(\Psi^\alpha(\varepsilon(u^\alpha),\tau^\alpha,\xi^\alpha),\delta^\alpha-\xi^\alpha)_{L_0^\alpha}\quad\forall\delta\in K,\tag{2.61}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{R}^{\alpha}\nabla\zeta^{\alpha},\nabla\Psi^{\alpha})_{H^{\alpha}}-\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{E}^{\alpha}\varepsilon(\boldsymbol{u}^{\alpha}),\nabla\Psi^{\alpha})_{H^{\alpha}}=(q,\Psi)_{W}\quad\forall\Psi\in W,\tag{2.62}$$

$$\dot{\varsigma}=H_{ad}(\varsigma,\hat{\varsigma},R_{\nu}(u_{\nu}^{1}+u_{\nu}^{2}),R_{\tau}(|\boldsymbol{u}_{\tau}^{1}-\boldsymbol{u}_{\tau}^{2}|))\quad\text{sur }\Gamma_{3}\times(0,T)\tag{2.63}$$

$$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_{0},\ \dot{\boldsymbol{u}}(0)=\boldsymbol{v}_{0},\ \tau(0)=\tau_{0},\ \xi(0)=\xi_{0},\ \varsigma(0)=\varsigma_{0}.\tag{2.64}$$

Maintenant, on donne quelques inégalités concernant les fonctionnelles j_{ad} et $j_{\nu c}$ qui seront utilisées dans la section suivante et ont des demonstration similaires à celles des inégalités concernant les fonctionnelles j_{ad} et $j_{\nu c}$.
Soient $\varsigma,\varsigma_1,\varsigma_2$ des éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0\leq\varsigma\leq 1$, $0\leq\varsigma_1\leq 1$et $0\leq\varsigma_2\leq 1$ p.p. sur Γ_3, et $u_i, v_i, u^\alpha \,\text{et}\, v^\alpha$ où $i=1,2$ représentent des éléments de V^α, et C est une constante générique positive.
Alors

$$j_{ad}(\varsigma_1,u_1,u_2-u_1)+j_{ad}(\varsigma_2,u_2,u_1-u_2)|\leq C\|\varsigma_1-\varsigma_2\|_{L^2(\Gamma_3)}\|u_1-u_2\|_V,\tag{2.65}$$

en choisissant $\varsigma_1=\varsigma_2=\varsigma$ dans (2.65), on trouve

$$j_{ad}(\varsigma_1,u_1,u_2-u_1)+j_{ad}(\varsigma_2,u_2,u_1-u_2)\leq 0,\tag{2.66}$$

$$j_{\nu c}\,(u_1,u_2)-j_{\nu c}\,(u_1,u_1)+j_{\nu c}\,(u_2,u_1)-j_{\nu c}\,(u_2,u_2)\leq 0,\tag{2.67}$$

aussi, on prend $u_1=v$ et $u_2=0$ dans (2.66) et (2.67) on obtient

$$j_{ad}(\varsigma,u,v)\geq 0.$$

$$j_{\nu c}(v,v)\geq 0.$$

Maintenant, on va énoncer le résultat principal concernant léexistence et l'unicité de la solution du problème $\mathcal{P}$V dont la demonstration sera détaillée dans la section suivante.

Théorème 2.2.1 *Supposons que* (2.20)-(2.34) *sont vérifiées. Alors il existe une solution unique* $\{\boldsymbol{u}, \sigma, \zeta, \tau, \xi, \varsigma, \boldsymbol{D}\}$ *au problème PV. De plus, la solution satisfait*

$$\boldsymbol{u} \in W^{1,2}(0,T;V) \cap C^1(0,T;H), \;\; \ddot{\boldsymbol{u}} \in L^2(0,T;V'), \tag{2.68}$$

$$\zeta \in C(0,T;W), \tag{2.69}$$

$$\tau \in L^2(0,T;\mathbb{L}_1) \cap H^1(0,T;\mathbb{L}_0), \tag{2.70}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0,T;\mathcal{H}), \quad (\mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma}^1, \mathrm{Div}\boldsymbol{\sigma}^2) \in L^2(0,T;V'), \tag{2.71}$$

$$\xi \in H^1(0,T;\mathbb{L}_0)) \cap L^2(0,T;\mathbb{L}_1), \tag{2.72}$$

$$\varsigma \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \tag{2.73}$$

$$\boldsymbol{D} \in C(0,T;\mathcal{W}). \tag{2.74}$$

2.3 Démonstration du Théorème 2.2.1

La preuve du théorème 2.2.1 s'effectue en plusieurs étapes :

Première étape

Soit $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in L^2(0,T;V')$ donné, on considère le problème variationnel suivant.

Problem $\mathbf{PV}_\eta^{\boldsymbol{u}}$. Trouver les champs de déplacement $\boldsymbol{u}_\eta = (\boldsymbol{u}_\eta^1, \boldsymbol{u}_\eta^2) : [0,T] \to \boldsymbol{V}$ tels que

$$\begin{aligned}(\ddot{\boldsymbol{u}}_\eta(t), \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}^\alpha(t)),\ \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + (\eta(t), v)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}& \\ = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, p.p.\ t \in (0,T),&\end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\boldsymbol{u}_\eta^\alpha(0) = \boldsymbol{u}_0^\alpha, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\eta^\alpha(0) = \boldsymbol{v}_0^\alpha \quad \text{dans } \Omega^\alpha. \tag{2.76}$$

Pour résoudre le problème $\mathbf{PV}_\eta^u$, on applique un résultat abstrait d'existence et d'unicité que nous rappelons maintenant.

Soient $\boldsymbol{V}$ et H des Espaces réels de Hilbert tels que $\boldsymbol{V}$ est dense en H et la carte d'inclusion est continue, H est identifié à son dual et à un sous-espace du dual $\boldsymbol{V}'$ de $\boldsymbol{V}$, c'est à dire, $\boldsymbol{V} \subset H \subset \boldsymbol{V}'$, et on dit que les inclusions ci-dessus définissent un triplet de Gelfand. Les notations $\|.\|_{\boldsymbol{V}}$, $\|.\|_{\boldsymbol{V}'}$ représentent les normes sur $\boldsymbol{V}$ et sur $\boldsymbol{V}'$ respectivement et $(.,.)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}$, est le produit scalaire de $\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}$. Le résultat abstrait suivant peut être trouvé dans [1, p.48].

On a le Lemme suivant.

Lemme 2.3.1 *Le problème $\boldsymbol{PV}_\eta^u$ admet une solution unique qui vérifie la régularité* (2.68).

Démonstration

Soit l'opérateur $A : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ tel que

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha),\ \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}. \tag{2.77}$$

On utilise (2.18) et (2.77) il s'ensuit que

$$\|A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}'}^2 \leq \sum_{\alpha=1}^{2} \|\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha) - \mathcal{A}^\alpha\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)\|_{\mathcal{H}^\alpha}^2 \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},$$

On applique le théorème de Krasnoselski [1, p.60], on en déduit que $A : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ est un opérateur continu.

On utilise (2.18),et (2.77), pour trouver

$$(A\boldsymbol{u} - A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \geq \min\{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\} \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{V}}^2 \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \tag{2.78}$$

c'est-à-dire que A est un opérateur monotone.

On pose $\boldsymbol{v} = 0$ dans (2.78) et $m = \min\{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\}$ on obtient donc

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} &\geq m\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}}^2 - \|Ao\|_{\boldsymbol{V}'}^2 \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}} \\ &\geq \frac{1}{2} m \|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}}^2 - \frac{1}{2m} \|Ao\|_{\boldsymbol{V}'}^2 \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}. \end{aligned} \tag{2.79}$$

De plus, par (2.18) et(2.77) on trouve

$$\|A\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{V}'} \leq C^1 \|u\|_{\boldsymbol{V}} + C^2 \quad \forall \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}. \tag{2.80}$$

où $C^1 = \max\{C^1_{\mathcal{A}^1}, C^1_{\mathcal{A}^2}\}$ et $C^2 = \max\{C^2_{\mathcal{A}^1}, C^2_{\mathcal{A}^2}\}$.

Alors il existe une fonction unique $\boldsymbol{v}_\eta$ qui satisfait

$$\boldsymbol{v}_\eta \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}) \cap C(0, T; H), \quad \dot{\boldsymbol{v}}_\eta \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}'), \tag{2.81}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_\eta(t) + A\boldsymbol{v}_\eta(t) + \eta(t) = \boldsymbol{f}(t), \quad p.p. \ t \in [0, T] \tag{2.82}$$

$$\boldsymbol{v}_\eta(0) = \boldsymbol{v}_0. \tag{2.83}$$

Soit $\boldsymbol{u}_\eta : [0, T] \to \boldsymbol{V}$ la fonction définie par

$$\boldsymbol{u}_\eta(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}_\eta(s) ds + \boldsymbol{u}_0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.84}$$

D'ou d'aprés (2.77) et (2.81)–(2.84) le problème variationnel $\mathbf{PV}^u_\eta$ a une solution unique $\boldsymbol{u}_\eta$ qui satisfait la régularité (2.68).

Deuxiéme étape

Soit $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in L^2(0, T; \boldsymbol{V}')$, on utilise le champ de déplacement $\boldsymbol{u}_\eta$ obtenu en lemme 2.3.1 et on considère le problème variationnel suivant.

Problem $\mathbf{PV}^\zeta_\eta$. Trouver le potentiel électrique $\zeta_\eta = (\zeta^1_\eta, \zeta^2_\eta) : [0, T] \to W$ tel que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{R}^\alpha \nabla \zeta^\alpha_\eta(t), \nabla \phi^\alpha)_{H^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_\eta(t)), \nabla \phi^\alpha)_{H^\alpha} \\ = (q(t), \phi)_W \ \ \forall \phi \in W, t \in (0, T). \end{aligned} \tag{2.85}$$

On obtient le résultat suivant.

Lemme 2.3.2 *Le problème PV^{ζ}_{η} sdmet une solution unique ζ_η qui satisfait la régularité* (2.69).

On note par ζ_i la solution du problème PV^{ζ}_{η} correspondant à u_i, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_W \leq C\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_V \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{2.86}$$

Démonstration

On définit une forme bilinéaire $b : W \times W \to \mathbb{R}$ tel que

$$b(\zeta, \phi) = \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{R}^\alpha \nabla \zeta^\alpha, \nabla \phi^\alpha)_{H^\alpha} \quad \forall \zeta, \phi \in W. \tag{2.87}$$

De (2.20), on montre que la forme bilinéaire b est continue, symétrique et coercitive sur W.

Aussi, la fonction $L_\eta : [0, T] \to W$ tel que

$$(L_\eta(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_\eta(t)), \nabla \phi^\alpha)_{H^\alpha} \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T).$$

On applique le théorème de Lax-Milgram pour déduire qu'il existe un élément unique $\zeta_\eta(t) \in W$ tel que

$$b(\zeta_\eta(t), \phi) = (L_\eta(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W. \tag{2.88}$$

On conclue que $\zeta_\eta(t)$ est une solution de $\mathrm{PV}^{\zeta}_{\eta}$. Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$, il découle de (B.19),(2.20), (2.21) et (2.85) que

$$\|\zeta_\eta(t_1) - \zeta_\eta(t_2)\|_W \leq C(\|\boldsymbol{u}_\eta(t_1) - \boldsymbol{u}_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W). \tag{2.89}$$

puisque $\boldsymbol{u}_\eta \in C(0, T; V)$, et $q \in C(0, T; W)$ on déduit de (2.89), que $\zeta_\eta \in C(0, T; W)$.

Troisiemme étape

Pour $h = (h_1, h_2) \in C(0, T; \mathbb{L}_0)$ on pose le problème auxilière.

Problème $\mathbf{PV}^{\tau}_{h}$. Trouver le champ de temperature $\tau_h = (\tau^1_h, \tau^2_h) : [0, T] \to \mathbb{L}_0$, tel que

$$\textstyle\sum_{\alpha=1}^{2} (\dot{\tau}^\alpha_h(t) - h^\alpha(t) - \chi^\alpha(t), \delta^\alpha)_{\mathbb{L}^\alpha_0} + a_0(\tau_h(t), \delta) = 0, \;\; \forall \delta \in \mathbb{L}_0, \tag{2.90}$$

$$\tau_h(0) = \tau_0. \tag{2.91}$$

On déduit le Lemme suivant :

Lemme 2.3.3 *Le problème auxiliaire* $\boldsymbol{PV}_h^\tau$ *admet une solution unique* τ_h *satisfaisante* (2.70).

Démonstration

Par une application de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, on trouve une constante $c_0 > 0$ telle que

$$\int_{\Omega^\alpha} |\nabla\delta|^2 dx + \frac{h_0^\alpha}{\kappa_0^\alpha}\int_{\Gamma^\alpha} |\delta|^2 da \geq c_0 \int_{\Omega^\alpha} |\delta|^2 dx, \quad \forall \delta \in \mathbb{L}_1^\alpha,\ \alpha = 1, 2.$$

Ainsi, on obtient

$$a_0(\delta,\delta) \geq c_1\|\delta\|_{\mathbb{L}_1}^2, \quad \forall \delta \in \mathbb{L}_1,$$

où $c_1 = \kappa_0 \min(1, c_0)/2$, alors a_0 est $\mathbb{L}_1-$elliptique. D'ou, l'équation variationnelle (2.90) admet une unique solution τ_h vérifiant $\tau_h(0) = \tau_0$ et la régularité (2.70).

Quatriémme étape

On considére le problème variationnel suivant.

Le problème $\mathbf{PV}_\mu^\xi$. Soit $\mu \in L^2(0,T;\mathbb{L}_0)$, Trouver le champ d'endommagement $\xi_\mu = (\xi_\mu^1, \xi_\mu^2) : [0,T] \to \mathbb{L}_0$ tel que

$$\begin{aligned} \xi_\mu(t) \in K, \quad & \sum_{\alpha=1}^{2} (\dot{\xi}_\mu^\alpha(t), \delta^\alpha - \xi_\mu^\alpha)_{\mathbb{L}_0^\alpha} + a(\xi_\mu(t), \delta - \xi_\mu(t)) \\ & \geq \sum_{\alpha=1}^{2} (\mu^\alpha(t), \delta^\alpha - \xi_\mu^\alpha(t))_{\mathbb{L}_0^\alpha} \quad \forall \delta \in K, \text{a.e.} t \in (0,T), \end{aligned} \tag{2.92}$$

$$\xi_\mu(0) = \xi_0. \tag{2.93}$$

Où $K = K^1 \times K^2$.

Lemme 2.3.4 *Pour tous* $\mu \in L^2(0,T;\mathbb{L}_0)$, *il existe une solution unique* ξ_μ *au problème auxiliaire* PV_μ^ξ *satisfait la régularité* (2.72).

Démonstration

L'application d'inclusion de $(\mathbb{L}_1, \|\cdot\|_{\mathbb{L}_1})$ dans $(\mathbb{L}_0, \|\cdot\|_{\mathbb{L}_0})$ est continue et a image dense. Désignant par $\mathbb{L}_1^{'}$ et $\mathbb{L}_0^{'}$ les espaces duals de $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_0$ respectivement, soit le triplet de Gelfand

$$\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_0 = \mathbb{L}_0^{'} \subset \mathbb{L}_1^{'},$$

D'ou le produit de dualité entre $\mathbb{L}_1'$ et $\mathbb{L}_1$ est présenté par

$$(\xi,\varphi)_{\mathbb{L}_1'\times\mathbb{L}_1}=(\xi,\varphi)_{\mathbb{L}_0}\quad \forall\xi\in\mathbb{L}_0,\ \varphi\in\mathbb{L}_1,$$

pour tout $\varphi,\omega\in\mathbb{L}_1$, on a

$$a(\varphi,\omega)=a(\omega,\varphi),$$

et

$$|a(\varphi,\omega)|\leqslant c\,\|\varphi\|_{\mathbb{L}_1}\,\|\omega\|_{\mathbb{L}_1},$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\delta\in\mathbb{L}_1$, nous avons

$$a(\varphi,\varphi)=k\,\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{H}}^2,$$

alors

$$a(\varphi,\varphi)+(k+1)\,\|\varphi\|_{\mathbb{L}_0}^2\geq k\,\left(\|\nabla\varphi\|_{\mathrm{H}}^2+\|\varphi\|_{\mathbb{L}_0}^2\right),$$

d'où

$$a(\varphi,\varphi)+c_2\,\|\varphi\|_{\mathbb{L}_0}^2\geq\beta\,\|\varphi\|_{\mathbb{L}_1}^2\quad c_2=k+1\ \text{ et }\ \beta=k.$$

Ce qui implique que (2.92) a une solution unique ξ_μ ayant la régularité (2.72).

Cinquième étape

Pour le champ d'adhésion on considére le problème $\mathrm{PV}_\eta^\varsigma$ et on utilise le champ de déplacement u_η obtenu dans le Lemme 2.3.1.

Le probléme $\mathbf{PV}_\eta^\varsigma$. Trouver $\varsigma_\eta:[0,T]\to L^2(\Gamma_3)$ tel que

$$\dot{\varsigma}_\eta=H_{ad}(\varsigma_\eta,\hat{\varsigma}_\eta,R_\nu(u_{\eta\nu}^1+u_{\eta\nu}^2),R_\tau(|\boldsymbol{u}_{\eta\tau}^1-\boldsymbol{u}_{\eta\tau}^2|))\quad \text{on } \Gamma_3\times(0,T),\tag{2.94}$$

$$\varsigma_\eta(0)=\varsigma_0\ \text{dans}\ \Omega^\alpha.\tag{2.95}$$

où u_η est le resultat obtenu dans le Lemme 2.3.1.

Lemme 2.3.5 *Le probléme PV_η^ς admet une solution unique $\varsigma_\eta\in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))\bigcap\mathcal{Z}$ qui satisfait la régularité (2.73). De plus, si $\boldsymbol{u}_i$ la solution obtenue dans le problème PV_η^u pour $\eta_i\in L^2(0,T;V')$, $i=1,2$, alors il existe $C>0$ tel que*

$$||\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)||_{L^2(\Gamma_3)}\leq C\int_0^t||\boldsymbol{u}_1(s)-\boldsymbol{u}_2(s)||_{\boldsymbol{V}}\,ds\quad\forall t\in[0,T].\tag{2.96}$$

Démonstration

Soit l'application $F_\eta : [0,T] \times L^2(\Gamma_3) \to L^2(\Gamma_3)$ definie par

$$F_\eta(t,\varsigma) = H_{ad}(\varsigma_\eta, \hat{\varsigma}_\eta, R_\nu(u^1_{\eta\nu} + u^2_{\eta\nu}), R_\tau(|\boldsymbol{u}^1_{\eta\tau} - \boldsymbol{u}^2_{\eta\tau}|)), \quad \forall t \in [0,T],\ \varsigma \in L^2(\Gamma_3). \quad (2.97)$$

Pour tout $\varsigma \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \to F_\eta(t,\varsigma)$ appartient à $L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_3))$.

ce qui implique que problème $\mathrm{PV}^\varsigma_\eta$ a une solution unique $\varsigma_\eta \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Gamma_3))$

d'autre part la remarque 1.2.1 vérifie que $0 \leq \varsigma_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0,T]$, p.p. sur Γ_3, ce qui implique que $\varsigma_\eta \in \mathcal{Z}$.

A partir du problème de Cauchy (2.94)-(2.95) on peut écrire

$$\varsigma_i(t) = \varsigma_0 - \int_0^t H_{ad}(\varsigma_i(s), \hat{\varsigma}_i(s), R_\nu(u^1_{i\nu} + u^2_{i\nu})(s), R_\tau(|\boldsymbol{u}^1_{i\tau} - \boldsymbol{u}^2_{i\tau}|)(s))ds$$

puis

$$\begin{aligned}
&||\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)||_{L^2(\Gamma_3)} \leq C\int_0^t ||\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)||_{L^2(\Gamma_3)}ds \\
&+ C\int_0^t ||R_\nu(u^1_{1\nu}(s) + u^2_{1\nu}(s)) - R_\nu(u^1_{2\nu}(s) + u^2_{2\nu}(s))||_{L^2(\Gamma_3)}ds \\
&+ C\int_0^t ||R_\tau(|\boldsymbol{u}^1_{1\tau}(s) - \boldsymbol{u}^2_{1\tau}(s)|) - R_\tau(|\boldsymbol{u}^1_{2\tau}(s) - \boldsymbol{u}^2_{2\tau}(s)|)||_{L^2(\Gamma_3)}ds.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de R_ν et R_τ et en écrivant $\varsigma_1 = \varsigma_1 - \varsigma_2 + \varsigma_2$, on a

$$||\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)||_{L^2(\Gamma_3)} \leq C\Big(\int_0^t ||\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)||_{L^2(\Gamma_3)}ds + \int_0^t ||\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)||_{L^2(\Gamma_3)^d}ds\Big).$$

Ensuite, en appliquant l'inégalité de Gronwall pour en déduire

$$||\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)||_{L^2(\Gamma_3)} \leq C\int_0^t ||\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)||_{L^2(\Gamma_3)^d}ds,$$

alors

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C\int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V ds.$$

Sixiéme étape

On utilise respectivement les propriétés des opérateurs $\mathcal{B}^\alpha$, $\mathcal{E}^\alpha$, la fonctionnelle j et les fonctions Ψ^α et Θ^α, pour $t \in [0,T]$, et on considère l'opérateur

$$\Pi(\eta,h,\mu)(t) = \Big(\Pi^1(\eta,h,\mu)(t), \Pi^2(\eta,h,\mu)(t), \Pi^3(\eta,h,\mu)(t)\Big) \in V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0 \quad (2.98)$$

défini par les équations

$$\Big(\Pi^1(\eta,h,\mu)(t),\boldsymbol{v}\Big)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}=\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_\eta(t),\tau^\alpha_h(t),\xi^\alpha_\mu(t)),\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)\Big)_{\mathcal{H}^\alpha} \tag{2.99}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\Big((\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\varphi^\alpha_\eta(t),\varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha)\Big)_{\mathcal{H}^\alpha}+j_{ad}(\varsigma_\eta(t),\boldsymbol{u}_\eta(t),\boldsymbol{v})+j_{vc}(\boldsymbol{u}_\eta,\boldsymbol{v})\quad \forall v\in\boldsymbol{V}$$

$$\Pi^2(\eta,h,\mu)(t)=\Big(\Theta^1(\varepsilon(\boldsymbol{u}^1_\eta),\tau^1_h,\xi^1_\mu),\Theta^2(\varepsilon(\boldsymbol{u}^2_\eta),\tau^2_h,\xi^2_\mu)\Big), \tag{2.100}$$

$$\Pi^3(\eta,h,\mu)(t)=\Big(\Psi^1(\varepsilon(\boldsymbol{u}^1_\eta),\tau^1_h,\xi^1_\mu),\Psi^2(\varepsilon(\boldsymbol{u}^2_\eta),\tau^2_h,\xi^2_\mu)\Big). \tag{2.101}$$

Ici, on utilise $\boldsymbol{u}_\eta,\zeta_\eta,\tau_h,\xi_\mu$ et ς_η obtenus dans les Lemmes 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 et 2.3.5.

Lemme 2.3.6 *L'opérateur Π a un point fixe*

$$(\eta^*,h^*,\mu^*)\in L^2(0,T;V'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0).$$

Soit $t\in(0,T)$ et $(\eta_1,h_1,\mu_1),(\eta_2,h_2,\mu_2),(\eta_3,h_3,\mu_3)\in L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)$. L'opérateur Π à un point fixe $\boldsymbol{u}_{\eta_i}=\boldsymbol{u}_i,\ \dot{\boldsymbol{u}}_{\eta_i}=\dot{\boldsymbol{u}}_i,\ \ddot{\boldsymbol{u}}_{\eta_i}=\ddot{\boldsymbol{u}}_i,\ \varsigma_{\eta_i}=\varsigma_i,\ \zeta_{\eta_i}=\zeta_i,\ \tau_{h_i}=\tau_i$ et $\xi_{\mu_i}=\xi_i$, pour $i=1,2$. en utilisant les hypothèses (2.19), (2.21), (2.24) et (2.25) et la définition de R_ν,R_τ et la Remarque 1.2.1 pour déduire

$$\begin{aligned}
&||\Pi^1(\eta_1(t),h_1(t),\mu_1(t))-\Pi^1(\eta_2(t),h_2(t),\mu_2(t))||_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\
&\le\sum_{\alpha=1}^{2}||\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_1(t)),\tau^\alpha_1(t),\xi^\alpha_1(t))-\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_2(t)),\tau^\alpha_2(t),\xi^\alpha_2(t))||_{\mathcal{H}^\alpha}\\
&+\sum_{\alpha=1}^{2}||(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\zeta^\alpha_1(t)-(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\zeta^\alpha_2(t)||_{\mathcal{H}^\alpha}\\
&+C_1\Big(||\zeta_1(t)-\zeta_2(t)||_W\Big)+C_2\Big(||p_\nu(u^1_{1\eta\nu}+u^2_{1\eta\nu})-p_\nu(u^1_{2\eta\nu}+u^2_{2\eta\nu})||_{L^2(\Gamma_3)}\\
&+||\varsigma^2_1(t)R_\nu(u^1_{1\eta\nu}+u^2_{1\eta\nu})-\varsigma^2_2(t)R_\nu(u^1_{2\eta\nu}+u^2_{2\eta\nu})||_{L^2(\Gamma_3)}\\
&+||p_\tau(\varsigma_1(t))R_\tau(|\boldsymbol{u}^1_{1\eta\tau}-\boldsymbol{u}^2_{1\eta\tau}|)-p_\tau(\varsigma_2(t))R_\tau(|\boldsymbol{u}^1_{2\eta\tau}-\boldsymbol{u}^2_{2\eta\tau}|)||_{L^2(\Gamma_3)}\Big).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&||\Pi^1(\eta_1(t),h_1(t),\mu_1(t))-\Pi^1(\eta_2(t),h_2(t),\mu_2(t))||_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\
&\le C\Big(||\boldsymbol{u}_1(t)-\boldsymbol{u}_2(t)||_{\boldsymbol{V}}+||\tau_1(t)-\tau_2(t)||_{\mathbb{L}_0}\\
&+||\xi_1(s)-\xi_2(s)||_{\mathbb{L}_0}+||\zeta_1(t)-\zeta_2(t)||_W\\
&+||\varsigma_1(t)-\varsigma_2(t)||_{L^2(\Gamma_3)}\Big)\quad \text{p.p. } t\in(0,T).
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Aussi, on sait que $\boldsymbol{u}_i(t) = \boldsymbol{u}_0 + \int_0^t \dot{\boldsymbol{u}}_i(s)ds$, pour p.p. $t \in (0,T)$, ce qui implique que

$$\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|_{\boldsymbol{V}} \le \int_0^t \|\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)\|_{\boldsymbol{V}} ds. \tag{2.103}$$

On utilise (2.20), (2.21) et (2.85) pour obtenir

$$||\zeta_1(t) - \zeta_2(t)||^2_W \le C||\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)||^2_{\boldsymbol{V}}. \tag{2.104}$$

En appliquant l'inégalité de Young, (2.102) devient, via (2.96) , (2.103) et (2.104)

$$\begin{aligned}
&||\Pi^1(\eta_1(t), h_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^1(\eta_2(t), h_2(t), \mu_2(t))||^2_{\boldsymbol{V}'} \\
&\le C\Big(||\xi_1(t) - \xi_2(t)||^2_{\mathbb{L}_0} + ||\tau_1(t) - \tau_2(t)||^2_{\mathbb{L}_0} + ||\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)||_{L^2(\Gamma_3)} \\
&+ \int_0^t ||\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)||^2_{\boldsymbol{V}} + ||\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)||^2_{\boldsymbol{V}}\, ds\Big) \; p.p.t \in (0,T).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

De plus, en prenant la substitution $\eta = \eta_1$, $\eta = \eta_2$ dans (2.77) et en choisissant $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{u}}_1 - \dot{\boldsymbol{u}}_2$ comme fonction de test

$$\begin{aligned}
&(\ddot{\boldsymbol{u}}_1 - \ddot{\boldsymbol{u}}_2, \dot{\boldsymbol{u}}_1 - \dot{\boldsymbol{u}}_2)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \sum_{\alpha=1}^{2}(A^\alpha\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}_1^\alpha) - A^\alpha\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}_2^\alpha), \varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}_1^\alpha - \dot{\boldsymbol{u}}_2^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} \\
&+ (\eta_1 - \eta_2, \dot{\boldsymbol{u}}_1 - \dot{\boldsymbol{u}}_2)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = 0 \quad \text{p.p. } t \in (0,T).
\end{aligned}$$

En vertu de (2.18) et (2.27), en utilisant (2.35)−(2.37) cette équation devient

$$\begin{aligned}
&\frac{(\rho^*)^2}{2}\frac{d}{dt}\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|^2_H + \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|^2_{\boldsymbol{V}} \\
&\le ||\eta_2(t) - \eta_1(t)|_{\boldsymbol{V}'}||\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)||_{\boldsymbol{V}}.
\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur la variable de temps d'intervalle $(0,t)$, l'inégalité de Young conduit à

$$\begin{aligned}
&(\rho^*)^2\|\dot{\boldsymbol{u}}_1(t) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(t)\|^2_H + \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})\int_0^t ||\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)||^2_{\boldsymbol{V}} ds \\
&\le \frac{2}{\min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})}\int_0^t ||\eta_1(s) - \eta_2(s)||^2_{\boldsymbol{V}'} ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_0^t ||\dot{\boldsymbol{u}}_1(s) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(s)||^2_{\boldsymbol{V}} ds \le C\int_0^t ||\eta_1(s) - \eta_2(s)||^2_{\boldsymbol{V}'} ds \quad \text{p.p. } t \in (0,T). \tag{2.106}$$

ce qui implique aussi, en utilisant une variante de (2.103), que

$$||\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)||^2_{\boldsymbol{V}} \le C\int_0^t ||\eta_1(s) - \;\eta_2(s)||^2_{\boldsymbol{V}'} ds \quad \text{p.p.} t \in (0,T), \tag{2.107}$$

De la relation (2.92) on déduit que

$$(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2, \xi_1 - \xi_2)_{\mathbb{L}_0} + a(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2) \leq (\mu_1 - \mu_2, \xi_1 - \xi_2)_{\mathbb{L}_0} \text{ p.p.} t \in [0, T].$$

Intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\xi_1(0) = \xi_0$ et $\xi_2(0) = \xi_0$ et l'inégalité $a(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2) \geq 0$ trouver

$$\frac{1}{2} ||\xi_1(t) - \xi_2(t)||^2_{\mathbb{L}_0} \leq \int_0^t (\mu_1(s) - \mu_2(s), \xi_1(s) - \xi_2(s))_{\mathbb{L}_0} ds,$$

ce qui implique que

$$||\xi_1(t) - \xi_2(t)||^2_{\mathbb{L}_0} \leq \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds + \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds.$$

Cette inégalité, combinée à l'inégalité de Gronwall, conduit à

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds. \tag{2.108}$$

De plus, si on prend la substitution $h = h_1$, $h = h_2$ dans (2.90) et en soustrayant les deux équations obtenues, on en déduit en choisissant $\delta = \tau_{h_1} - \tau_{h_2}$ comme fonction de test

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} + C_1 \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds\\
\leq &\int_0^t \|h_1(s) - h_2(s)\|_{\mathbb{L}_0} \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{\mathbb{L}_0} ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T).\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Hölder et de Young, on déduit que

$$\begin{aligned}&\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|^2_{L_0} \leq \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|^2_{L_0} + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds\\
\leq &C \int_0^t \|h_1(s) - h_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0} ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T).\end{aligned} \tag{2.109}$$

En utilisant (2.105)–(2.109), pour déduire que

$$\begin{aligned}&\|\Pi^1(\eta_1(t), h_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^1(\eta_2(t),_2(t), \mu_2(t))\|^2_{\boldsymbol{V}' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}\\
\leq &C\big(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|^2_{V'} + \|h_1(t) - h_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} + \|\mu_1(t) - \mu_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}\big).\end{aligned} \tag{2.110}$$

De l'hypothèses (2.22) et (2.23) il s'ensuit

$$\begin{aligned}&\|\Pi^2(\eta_1(t), h_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^2(\eta_2(t), h_2(t), \mu_2(t))\|^2_{\boldsymbol{V}' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}\\
= &\|\Theta\big(\varepsilon(\boldsymbol{u}_1(t)), \tau_1(t), \xi_1(t)\big) - \Theta\big(\varepsilon(\boldsymbol{u}_2(t)), \tau_2(t), \xi_2(t)\big)\|^2_{\boldsymbol{V}' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}\\
\leq &C\big(\|\boldsymbol{u}_1(t) - \boldsymbol{u}_2(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'} + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0} + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}\big) \quad \text{p.p. } t \in (0, T).\end{aligned}$$

Ceci me permet de déduire, de (2.106) et (2.109), que

$$\begin{aligned}&\|\Pi^2(\eta_1(t),h_1(t),\mu_1(t))-\Pi^2(\eta_2(t),h_2(t),\mu_2(t))\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\ \leq& C\big(\|\eta_1(t)-\eta_2(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'}+\|h_1(t)-h_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}+\|\mu_1(t)-\mu_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}\big).\end{aligned}\tag{2.111}$$

De même, en utilisant (2.103)–(2.106), (2.108) et (2.109), on obtient ce qui suit l'estimation pour Π^3

$$\begin{aligned}&\|\Pi^3(\eta_1(t),h_1(t),\mu_1(t))-\Pi^3(\eta_2(t),h_2(t),\mu_2(t))\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\ =&\|\Psi\big(\varepsilon(\boldsymbol{u}_1(t)),\tau_1(t),\xi_1(t)\big)-\Psi\big(\varepsilon(\boldsymbol{u}_2(t)),\tau_2(t),\xi_2(t)\big)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\ \leq& C\big(\|\eta_1(t)-\eta_2(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'}+\|h_1(t)-h_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}+\|\mu_1(t)-\mu_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}\big).\end{aligned}\tag{2.112}$$

De (2.110), (2.111) et (2.112), on conclue qu'il existe une constante positive $C>0$ vérifiant

$$\begin{aligned}&\|\Pi(\eta_1(t),h_1(t),\mu_1(t))-\Pi(\eta_2(t),h_2(t),\mu_2(t))\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\ \leq& C\|(\eta_1(t)-\eta_2(t),h_1(t)-h_2(t),\mu_1(t)-\mu_2(t))\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}.\end{aligned}\tag{2.113}$$

On généralise cette procédure par récurrence sur m. On obtient alors la formule

$$\begin{aligned}&\|\Pi^m(\eta_1,h_1,\mu_1)-\Pi^m(\eta_2,h_2,\mu_2)\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)}\\ \leq&\frac{C^mT^m}{m!}\|(\eta_1-\eta_2,h_1-h_2,\mu_1-\mu_2)\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)}.\end{aligned}\tag{2.114}$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, Π^m est une contraction sur $L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)$. Ainsi, le théorème du point fixe de Banach montre que Π admet un point fixe unique $(\eta^*,h^*,\mu^*)\in L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)$.

Maintenant, dans la dernière étape, on a tous les conditions pour prouver le théorème 2.2.1.

Existence.

Soit $(\eta^*,h^*,\mu^*)\in L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)$ le point fixe de Π défini par (2.98)-(2.101)

$$\boldsymbol{u}_*=\boldsymbol{u}_{\eta^*},\quad \xi_*=\xi_{\eta^*},\quad \zeta_*=\zeta_{\eta^*},\quad \tau_*=\tau_{h^*},\quad \varsigma_*=\varsigma_{\mu^*}.\tag{2.115}$$

Soit $\boldsymbol{\sigma}_*=(\boldsymbol{\sigma}^1_*,\boldsymbol{\sigma}^2_*):[0,T]\to\mathcal{H}$ et $\boldsymbol{D}_*=(\boldsymbol{D}^1_*,\boldsymbol{D}^2_*):[0,T]\to H$ les fonctions définies par

$$\sigma^\alpha_*=\mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}^\alpha_*(t)))+\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha_*(t)),\tau_*,\xi_*)-(\mathcal{E}^\alpha)^*E^\alpha(\zeta^\alpha_*),\quad \alpha=1,2,\tag{2.116}$$

$$\boldsymbol{D}_*^\alpha = \mathcal{E}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_*^\alpha) - \mathcal{R}^\alpha \nabla \zeta_*^\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \tag{2.117}$$

On preuve que le $\{\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \zeta_*, \xi_*, \tau_*, \varsigma_*\}$ satisfait (2.57)-(2.64) et (2.68)-(2.74).

On considére maintenant (2.75) pour $\eta = \eta^*$ et on utilise (2.115) pour trouver

$$\begin{gathered}(\ddot{\boldsymbol{u}}_*, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} + \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}_*^\alpha(t))), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + (\eta^*(t), \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \\ \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \text{p.p.} t \in (0, T).\end{gathered} \tag{2.118}$$

On utilise les égalités $\Pi^1(\eta^*, h^*, \mu^*) = \eta^*$, $\Pi^2(\eta^*, h^*, \mu^*) = h^*$ et $\Pi^3(\eta^*, h^*, \mu^*) = \mu^*$ combiné avec (2.99)–(2.101), (2.115) et (2.116) montrent que

$$\begin{aligned}(\eta^*(t), \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} &= \sum_{\alpha=1}^{2} \mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)), \tau_*(t), \xi_*(t)) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{2} ((\mathcal{E}^\alpha)^* \nabla \zeta_*^\alpha, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + j_{ad}(\varsigma_*(t), \boldsymbol{u}_*(t), \boldsymbol{v}) + j_{vc}(u_*, \boldsymbol{v}) \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},\end{aligned} \tag{2.119}$$

$$h_*^\alpha(t) = \Theta^\alpha\big(\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)), \tau_*^\alpha(t), \xi_*^\alpha(t)\big), \tag{2.120}$$

$$\mu_*^\alpha(t) = \Psi^\alpha\big(\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)), \tau_*^\alpha(t), \xi_*^\alpha(t)\big). \tag{2.121}$$

On substitue maintenant (2.119) dans (2.118) pour obtenir

$$\begin{gathered}(\ddot{\boldsymbol{u}}_*, \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} + \sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(\dot{\boldsymbol{u}}_*^\alpha(t))), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} \mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)), \tau_*(t), \xi_*(t)) \\ + \sum_{\alpha=1}^{2} ((\mathcal{E}^\alpha)^* \nabla \zeta_*^\alpha, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + j_{ad}(\varsigma_*(t), \boldsymbol{u}_*(t), \boldsymbol{v}) + j_{vc}(u_*, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}' \times \boldsymbol{V}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V},\end{gathered} \tag{2.122}$$

et on substitue (2.120) dans (2.90) pour avoir

$$\forall \delta \in \mathbb{L}_0, \quad \sum_{\alpha=1}^{2} (\dot{\tau}_*^\alpha(t), \delta^\alpha)_{\mathbb{L}_0^\alpha} + a_0(\tau_*(t), \delta) = \sum_{\alpha=1}^{2} (h_*^\alpha(t) + \chi^\alpha(t), \delta^\alpha)_{\mathbb{L}_0^\alpha}, \tag{2.123}$$

la substitation de (2.121) dans (2.92) pour trouver que

$$\begin{aligned}&\xi_*(t) \in K \quad \forall t \in [0, T], \quad \sum_{\alpha=1}^{2} (\dot{\xi}_*^\alpha(t), \delta^\alpha - \xi_*^\alpha(t))_{L_0^\alpha} + a(\xi(t), \delta - \xi(t)) \\ &\geq \sum_{\alpha=1}^{2} (\Psi^\alpha(\varepsilon(u_*^\alpha(t)), \tau_*^\alpha(t), \xi_*^\alpha(t)), \delta^\alpha - \xi_*^\alpha(t))_{L_0^\alpha} \quad \forall \delta \in K.\end{aligned} \tag{2.124}$$

On considére la relation (2.85) pour $\eta = \eta^*$ et on utilise (2.116) pour voir que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{R}^\alpha \nabla \zeta_*^\alpha(t), \nabla \phi^\alpha)_{H^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}_*^\alpha(t)), \nabla \phi^\alpha)_{H^\alpha} \\ = (q(t), \phi)_W \quad \forall \phi \in W,\ t \in (0,T).\end{aligned} \tag{2.125}$$

On considère maintenant (2.94) pour $\eta = \eta^*$ et on utilise (2.115)-(2.116) pour obtenir que

$$\dot{\varsigma}_* = H_{ad}\big(\varsigma_*(t), \hat{\varsigma}_*, R_\nu(u_{*\nu}^1 + u_{*\nu}^2), R_\tau(|\boldsymbol{u}_{*\tau}^1 - \boldsymbol{u}_{*\tau}^2|)\big) \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0,T). \tag{2.126}$$

Puisque $(\boldsymbol{u}_*, \zeta_*)$ satisfait (2.68)-(2.72) on a

$$\boldsymbol{\sigma}_* \in L^2(0,T;\mathcal{H}). \tag{2.127}$$

On pose $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2)$ avec $\boldsymbol{v}^\alpha = w^\alpha \in D(\Omega^\alpha)^d$ et $v^{3-\alpha} = 0$ dans (2.59), et en utilisant (2.37)-(2.40) pour trouver que

$$\rho^\alpha \ddot{\boldsymbol{u}}_*^\alpha(t) = \mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}_*^\alpha(t) + \boldsymbol{f}_0^\alpha(t) \quad \text{in } \boldsymbol{V}' \quad \forall t \in (0,T).$$

où $D(\Omega^\alpha)^d = \{\boldsymbol{u}^\alpha = (\boldsymbol{u}_i^\alpha)/\boldsymbol{u}_i^\alpha \in D(\Omega^\alpha)\}$ et $D(\Omega^\alpha)$ est l'espace des fonctions réelles infiniment différentiables avec un support compact en Ω^α.
De l'égalité précédente avec (2.27)-(2.28) on obtient que

$$(\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}_*^1, \mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}_*^2) \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}').$$

Soit $t_1, t_2 \in [0,T]$, en utilisant (2.20), (2.21), (2.117) on en déduit que

$$||\boldsymbol{D}_*(t_1) - \boldsymbol{D}_*(t_2)||_H \le C\big(||\zeta_*(t_1) - \zeta_*(t_2)||_W + \|\boldsymbol{u}_*(t_1) - \boldsymbol{u}_*(t_2)\|_V\big)$$

l'inégalité précédente et la régularité de $\boldsymbol{u}_*$ et φ_* données par (2.68)-(2.72) impliquent

$$\boldsymbol{D}_* \in C(0,T;H). \tag{2.128}$$

On choisit $\Psi = (\Psi^1, \Psi^2)$ avec $\Psi^\alpha \in D(\Omega^\alpha)^d$ et $\Psi^{3-\alpha} = 0$ dans (2.125) en utilisant (2.41) on trouve

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{D^\alpha}_*(t) - q_0^\alpha(t) = 0 \quad \forall t \in [0,T], \quad \alpha = 1,2.$$

par (2.29) et (2.128) on obtient

$$\boldsymbol{D}_* \in C(0,T;\mathcal{W}).$$

Enfin, nous conclue que la solution faible $\{\boldsymbol{u}_*, \boldsymbol{\sigma}_*, \zeta_*, \boldsymbol{D}_*, \tau_*, \xi_*, \varsigma_*\}$ du problème de contact piézoélectrique P a la régularité (2.68)-(2.74), qui conclut la partie existence du théorème 2.2.1.

Unicité.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Π défini par (2.98)-(2.101) et de l'unicité de la résolution des problèmes PV_η^μ, PV_η^ζ, PV_μ^ξ, PV_h^τ et $\mathrm{PV}_\eta^\varsigma$.

Chapitre 3

Contact entre deux corps thérmo-électro- Viscoélastiques avec frottement, endommagement et un variable interne

Dans ce Troisième chapitre, on s'intéresse à l'étude variationnelle d'un problème de contact entre deux corps thérmo-éléctro-viscoélastique dans un processus dynamique avec endommagement, cet contact est modélisé par les conditions de frottement de Tresca avec une variable interne..

Dans la premiére section, on décrit la formulation du probléme tandis que dans la deuxième, on donne des hypothéses et sa formulation variationnelle mais dans la troisième, on démontre l'existense d'une solution faible et sa unicité en se basant sur les méthodes du point fixe et les résultats des équations d'évolutions non linéaire .
Ce chapitre fait l'objet de la publication [5].

3.1 Position du problème

Problème $\mathcal{P}$. Pour $\alpha = 1, 2$, trouver respectivement les champs des déplacements $\boldsymbol{u}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$, des températures $\tau^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, d'endommagements $\xi^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, des potentiels électriques $\psi^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$, des déplacements électriques $\boldsymbol{D}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}$ et un champ d'un variable d'etat interne $\beta^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}^m$, tel que pour tout $t \in (0,T)$, On a :

$$\begin{aligned}\sigma^\alpha(t) &= \mathcal{A}^\alpha\varepsilon\left(\dot{u}^\alpha(t)\right) + \mathcal{B}^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t)\right) - \left(\mathcal{E}^\alpha\right)^* E\left(\psi^\alpha(t)\right)\\ &+ \mathcal{F}^\alpha\left(\beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T),\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$D^\alpha(t) = \mathcal{E}^\alpha\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right) + \mathcal{R}^\alpha E\left(\psi^\alpha(t)\right) + \mathcal{G}^\alpha\left(\beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{3.2}$$

$$\dot{\beta}^\alpha(t) = \Theta^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t), \beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{3.3}$$

$$\dot{\tau}^\alpha(t) - \mathcal{K}_0^\alpha\Delta\tau^\alpha(t) = \Psi^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t), \beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right) + \chi^\alpha(t) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{3.4}$$

$$\dot{\xi}^\alpha(t) - \mathcal{K}_1^\alpha\Delta\xi^\alpha(t) + \partial\mathbb{I}_{\mathcal{K}^\alpha}\left(\xi^\alpha(t)\right) \ni S^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t)\right) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{3.5}$$

$$\operatorname{Div}\sigma^\alpha(t) + f_0^\alpha(t) = \rho^\alpha\ddot{u}^\alpha(t) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{3.6}$$

$$\operatorname{div} D^\alpha(t) = q_0^\alpha(t) \qquad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T), \tag{3.7}$$

$$u^\alpha(t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_1^\alpha \times (0,T), \tag{3.8}$$

$$\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha = f_2^\alpha(t) \qquad \text{sur } \Gamma_2^\alpha \times (0,T), \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t) = 0, \quad \sigma_\tau^1(t) = -\sigma_\tau^2(t) \equiv \sigma_\tau(t), \quad |\sigma_\tau(t)| \leq g, \\ |\sigma_\tau(t)| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau^1(t) - \dot{u}_\tau^2(t) = 0, \\ |\sigma_\tau(t)| = g \Rightarrow \exists\lambda \geq 0 : \sigma_\tau(t) = -\lambda\left(\dot{u}_\tau^1(t) - \dot{u}_\tau^2(t)\right) \end{cases} \qquad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial\xi^\alpha(t)}{\partial\nu^\alpha} = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^\alpha \times (0,T), \tag{3.11}$$

$$\mathcal{K}_0^\alpha\frac{\partial\tau^\alpha(t)}{\partial\nu^\alpha} + \lambda_0^\alpha\tau^\alpha(t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma^\alpha \times (0,T), \tag{3.12}$$

$$\psi^\alpha(t) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_a^\alpha \times (0,T), \tag{3.13}$$

$$D^\alpha(t) \cdot \nu^\alpha = q_2^\alpha(t) \qquad \text{sur } \Gamma_b^\alpha \times (0,T), \tag{3.14}$$

$$u^\alpha(0) = u_0^\alpha, \quad \dot{u}^\alpha(0) = v_0^\alpha, \quad \xi^\alpha(0) = \xi_0^\alpha, \quad \beta^\alpha(0) = \beta_0^\alpha, \quad \tau^\alpha(0) = \tau_0^\alpha \quad \text{dans } \Omega^\alpha \times (0,T). \tag{3.15}$$

Premièrement, les équations (3.1) - (3.3) représentent la loi de constitutive thermo-électro-viscoélastique avec endommagement et une variable d'état interne du matériau. La conservation énergitique est représenée par (3.4). La relation (3.5) représente l'inclusion qui décrit l'évolution du champ d' endommagement où S^α est la source mécanique de la la croissance des dommages, supposée être fonction assez générale des déformations un endommagement proprement dit $\partial\mathbb{I}_{\mathcal{K}^\alpha}$ est la sous-di érentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles $\mathcal{K}^\alpha$. Aussi, (3.6) et (3.7) désignent respectivement les relations de contrainte et de déplacement électrique dans laquelle "Div" et "div" désignent les opérateurs de divergence pour le tenseur et le vecteur évalués, i.e.,

$$\mathrm{Div}\,\sigma^\alpha = (\sigma^\alpha_{ij,j}), \quad \mathrm{div}\,D^\alpha = (D^\alpha_{i,i}).$$

On utilise ces équations car le processus est supposé être mécaniquement dynamique et électriquement quasi-statique. (3.8) et (3.9) représentent la condition aux limites respectivement de déplacement et de traction.

La condition (3.10) représente les conditions de contact bilatéral avec la frottement de Tresca, où $[u_\nu] = u^1_\nu + u^2_\nu$ et $[u_\tau] = u^1_\tau - u^2_\tau$. (3.11) et (3.12) représentent respectivement une condition aux limites de Neumann et de Fourier, (3.13) et (3.14) sont les conditions aux limites électriques. Enfin, (3.15) désignent les conditions initiales.

3.2 Formulation Variationnelle

Nous utilisons quelques hypothéses sur les données pour obtenir une formulation variationnelle du problème $\mathcal{P}$,

a) Hypothéses sur les données

$\mathcal{A}^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} (a)\text{il existe } L_{\mathcal{A}^\alpha} > 0 \textit{ telle que,} \\ \qquad |\mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_1) - \mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_2)| \le L_{\mathcal{A}^\alpha}|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| \quad \forall \boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ (\text{b})\text{il existe } m_{\mathcal{A}^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ \qquad (\mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_1) - \mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_2)) \cdot (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2) \ge m_{\mathcal{A}^\alpha}|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|^2 \\ \qquad \forall\, \boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \textit{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ (c) \ \ \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) \textit{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\alpha, \\ \qquad \textit{pour tout } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \ \ \boldsymbol{\eta} \mapsto \mathcal{A}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}) \ \ \textit{est continue sur } \mathbb{S}^d, \ \textit{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \end{cases} \tag{3.16}$$

$\mathcal{B}^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } M_{\mathcal{B}^\alpha} > 0 \ \text{ telle que} \\ \qquad |\mathcal{B}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_1,s_1) - \mathcal{B}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_2,s_2)| \\ \qquad \le M_{\mathcal{B}^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2|) \\ \qquad \forall \boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall s_1,s_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)} \quad \boldsymbol{x} \to \mathcal{B}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta},s) \ \text{ est Lebesgue} \\ \qquad \text{mesurable sur } \Omega^\alpha, \ \text{ pour tous } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d \text{ et } s \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \ \ \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{B}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0},0) \text{ appartient à } \mathcal{H}^\alpha. \end{cases} \tag{3.17}$$

$\mathcal{F}^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ vérifie :

$$\begin{cases} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{F}^\alpha} > 0 \ \text{ telle que} \\ \qquad |\mathcal{F}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_1,s_1) - \mathcal{F}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_2,s_2)| \\ \qquad \le L_{\mathcal{F}^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2|) \\ \qquad \forall \boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall s_1,s_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)} \quad \boldsymbol{x} \to \mathcal{F}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta},s) \ \text{ est Lebesgue} \\ \qquad \text{mesurable sur } \Omega^\alpha, \ \text{ pour tous } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d \text{ et } s \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \ \ \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{F}^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0},0) \text{ appartient à } \mathcal{H}^\alpha. \end{cases} \tag{3.18}$$

$\mathcal{G}^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) Il se trouve } L_{\mathcal{G}^\alpha} > 0 \ \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{G}^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_1, s_1) - \mathcal{G}^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_2, s_2)| \\ \quad \leq L_{\mathcal{G}^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2|) \\ \quad \forall \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } \boldsymbol{y} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)} \quad \boldsymbol{x} \to \mathcal{G}^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}, s) \ \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega^\alpha, \ \text{pour tous } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d \text{ et } s \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} \ \ \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{G}^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}^\alpha. \end{array}\right. \tag{3.19}$$

$\mathcal{R}^\alpha = \left(r_{ij}^\alpha\right) : \Omega^\alpha \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(a) } r_{ij}^\alpha = r_{ji}^\alpha \in L^\infty\big(\Omega^\alpha\big), \ 1 \leq i, j \leq d. \\ \text{(b) Il existe } \ M_{\mathcal{R}^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \mathcal{R}^\alpha \pi . \pi \geq M_{\mathcal{R}^\alpha} |\pi|^2 \quad \forall \pi = (\pi_i) \in \mathbb{R}^d \text{ p.p. } \ x \in \Omega^\alpha. \end{array}\right. \tag{3.20}$$

La fonction $\Theta^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{Il existe } L_{\Theta^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ & |\Theta^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_1, s_1, h_1, r_1) - \Theta^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_2, s_2, h_2, r_2)| \\ & \leq L_{\Theta^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2| + |h_1 - k_2| + |r_1 - r_2|) \\ & \ \text{pour tous } \ \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{pour tous } h_1, k_2 \in \mathbb{R}^m, \\ & \text{pour tous } s_1, s_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \ \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)} & \quad \boldsymbol{x} \mapsto \Theta^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}, s, h, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\alpha \\ & \text{pour tous } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d, \ \text{pour tous } s, r \in \mathbb{R}, \ \text{pour tous }, h \in \mathbb{R}^m. \\ \text{(c)} & \quad \boldsymbol{x} \mapsto \Theta^\alpha(\boldsymbol{x}, 0, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega^\alpha). \end{array}\right. \tag{3.21}$$

La fonction $\Psi^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{Il existe } L_{\Psi^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ & |\Psi^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_1, s_1, h_1, r_1) - \Psi^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}_2, s_2, h_2, r_2)| \\ & \leq L_{\Psi^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2| + |h_1 - h_2| + |r_1 - r_2|) \\ & \ \text{pour tous } \ \boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{pour tous } h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m, \\ & \text{pour tous } s_1, s_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \ \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)} & \quad \boldsymbol{x} \mapsto \Psi^\alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\epsilon}, s, h, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\alpha \\ & \text{pour tous } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d, \ \text{pour tous } s, r \in \mathbb{R}, \ \text{pour tous }, h \in \mathbb{R}^m. \\ \text{(c)} & \quad \boldsymbol{x} \mapsto \Psi^\alpha(\boldsymbol{x}, 0, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega^\alpha). \end{array}\right. \tag{3.22}$$

La fonction $S^\alpha : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vèrifie :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(a)} & \text{Il existe } L_{S^\alpha} > 0 \text{ telle que} \\ & |S^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_1,s_1) - S^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta}_2,s_2)| \\ & \leq L_{S^\alpha}(|\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2| + |s_1 - s_2|) \\ & \quad \text{pour tous } \ \boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{pour tous } s_1,s_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \ \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \\ \text{(b)} & \quad \boldsymbol{x} \mapsto S^\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\eta},s) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\alpha \\ & \text{pour tous } \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{S}^d, \ \text{pour tous } s \in \mathbb{R}. \\ \text{(c)} & \quad \boldsymbol{x} \mapsto S^\alpha(\boldsymbol{x},0,0) \in L^2(\Omega^\alpha). \end{array}\right. \tag{3.23}$$

Le tenseur piézoélectrique $\boldsymbol{\mathcal{E}}^\alpha = (e^\alpha_{ijk}) : \Omega^\alpha \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}^d$ satisfait

$$e^\alpha_{ijk} = e^\alpha_{ikj} \in L^\infty(\Omega^\alpha), \ 1 \leq i,j,k \leq d. \tag{3.24}$$

La masse volumique ρ^α vérifie

$$\rho^\alpha \in L^\infty(\Omega^\alpha), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \quad \rho^\alpha \geq \rho^* \text{ p.p. } \boldsymbol{x} \in \Omega^\alpha. \tag{3.25}$$

On suppose aussi que les forces $\boldsymbol{f}^\alpha_0$, les traction $\boldsymbol{f}^\alpha_2$, les charges électriques volumiques q^α_0, les charges électriques surfaciques q^α_2 et la source de chaleur χ^α ont les régularitées :

$$\boldsymbol{f}^\alpha_0 \in L^2(0,T;L^2(\Gamma^\alpha_2)^d), \quad \boldsymbol{f}^\alpha_2 \in L^2(0,T;L^2(\Gamma^\alpha_2)^d), \tag{3.26}$$

$$q^\alpha_0 \in C(0,T;L^2(\Omega^\alpha)), \quad q^\alpha_2 \in C(0,T;L^2(\Gamma^\alpha_b)), \tag{3.27}$$

$$\chi^\alpha \in L^2(0,T;L^2(\Omega^\alpha)). \tag{3.28}$$

Les coefficients k^α_0 et k^α_1 satisfaient :

$$k^\alpha_0 > 0, \quad k^\alpha_1 > 0, \quad g \in L^\infty(\Gamma_3), \quad g(x) \geq 0 \qquad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \tag{3.29}$$

On fin les données initiales satisfont :

$$\boldsymbol{u}^\alpha_0 \in \boldsymbol{V}^\alpha, \quad \boldsymbol{v}^\alpha_0 \in H^\alpha, \quad \tau^\alpha_0 \in \mathbb{L}^\alpha_1, \quad \xi^\alpha_0 \in K^\alpha, \quad \beta^\alpha_0 \in Y^\alpha, \ \text{ p.p.} x \in \Omega^\alpha, \tag{3.30}$$

On utilise le produit $((.,.))_H$ sur l'espace de Hilbert,definée par :

$$((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))_H = \sum_{\alpha=1}^{2}(\rho^\alpha \boldsymbol{u}^\alpha,\boldsymbol{v}^\alpha)_{H^\alpha} \quad \forall \ \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in H. \tag{3.31}$$

et la norme $|||.|||_H$ definée par :

$$|||\boldsymbol{v}|||_H = ((\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}))_H^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{v} \in H. \tag{3.32}$$

On utilise l'équivalence des normes $|||.|||_H$ et $||.||_H$ et la continuitée puis la densitée de l'application d'inclusion de $(\boldsymbol{V}, ||.||_{\boldsymbol{V}})$ dans $(H, ||.||_H)$ pour déduire le triple de Gelfand

$$\boldsymbol{V} \subset H = H' \subset \boldsymbol{V}'.$$

On utilise la notation $(.,.)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}$ représentant la dualité entre $\boldsymbol{V}'$ et $\boldsymbol{V}$, on rappelle que

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = ((\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))_H \quad \forall \boldsymbol{u} \in H, \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}. \tag{3.33}$$

On definit cinq fonctions $F : [0,T] \to \boldsymbol{V}'$, $Q : [0,T] \to \boldsymbol{W}$, $a_0 : \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \to \mathbb{R}$, $a_1 : \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \to \mathbb{R}$ et $J : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$, respectivement, par

$$(F(t),v)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha} f_0^\alpha(t)\cdot v^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha} f_2^\alpha(t)\cdot v^\alpha da \quad \forall v \in \boldsymbol{V}, \tag{3.34}$$

$$(Q(t),\zeta)_{\boldsymbol{W}} = \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha(t)\zeta^\alpha dx - \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha(t)\zeta^\alpha da \quad \forall \zeta \in \boldsymbol{W}, \tag{3.35}$$

$$a_0(\xi,\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{2}\mathcal{K}_0^\alpha\int_{\Omega^\alpha} \nabla\xi^\alpha.\nabla\zeta^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2}\lambda_0^\alpha\int_{\Gamma^\alpha}\xi^\alpha\zeta^\alpha da, \tag{3.36}$$

$$a_1(\xi,\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{2}\mathcal{K}_1^\alpha\int_{\Omega^\alpha} \nabla\xi^\alpha.\nabla\zeta^\alpha dx, \tag{3.37}$$

$$J(u) = \int_{\Gamma_3} g\left|u_\tau^1 - u_\tau^2\right| da. \tag{3.38}$$

On note que les conditions (3.26) et (3.27) impliquent

$$F \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}'), \quad Q \in \mathcal{C}(0,T;\boldsymbol{W}). \tag{3.39}$$

b) formulation variationnelle du probléme

Par application des formules de Green, on remarque que si $\boldsymbol{u},\boldsymbol{\sigma}$ et sont des fonctions suffesamment régulières qui vérifient(3.6), (3.8)et (3.9) avec (3.16)-(3.19), pour tout $w = (w^1, w^2) \in \boldsymbol{V}$, et $t \in [0,T]$ on déduit que :

$$(\sigma^\alpha, \varepsilon(w^\alpha) - \varepsilon(\dot{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha} + (Div\sigma^\alpha, w^\alpha - \dot{u}^\alpha(t))_{\boldsymbol{H}^\alpha} = \int_{\Gamma^\alpha}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot(w^\alpha - \dot{u}^\alpha(t))da.$$

On a

$$\int_{\Omega^\alpha}\sigma^\alpha(\varepsilon(w^\alpha)-\varepsilon(\dot u^\alpha(t)))dx+\int_{\Omega^\alpha}Div\sigma^\alpha\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))dx=\int_{\Gamma_1^\alpha}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da$$

$$+\int_{\Gamma_2^\alpha}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da+\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da.$$

D'après (3.6), (3.8) et (3.9) on a

$$\int_{\Omega^\alpha}\sigma^\alpha(\varepsilon(w^\alpha)-\varepsilon(\dot u^\alpha(t)))dx+\int_{\Omega^\alpha}\rho^\alpha\ddot u^\alpha(t)\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))dx-\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha(t)\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))dx$$

$$=\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha(t)\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da+\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da.$$

On applique la formule de Green pour α=1

$$\int_{\Omega^1}\sigma^1(\varepsilon(w^1)-\varepsilon(\dot u^1(t)))dx+\int_{\Omega^1}\rho^1\ddot u^1(t)\cdot(w^1-\dot u^1(t))dx-\int_{\Omega^1}f_0^1(t)\cdot(w^1-\dot u^1(t))dx$$
$$=\int_{\Gamma_2^1}f_2^1(t)\cdot(w^1-\dot u^1(t))da+\int_{\Gamma_3}\sigma^1(t)\nu^1\cdot(w^1-\dot u^1(t))da. \tag{3.40}$$

Aussi pour α=2

$$\int_{\Omega^1}\sigma^2(\varepsilon(w^2)-\varepsilon(\dot u^2(t)))dx+\int_{\Omega^2}\rho^2\ddot u^2(t)\cdot(w^2-\dot u^2(t))dx-\int_{\Omega^2}f_0^2(t)\cdot(w^2-\dot u^2(t))dx$$
$$=\int_{\Gamma_2^2}f_2^2(t)\cdot(w^2-\dot u^2(t))da+\int_{\Gamma_3}\sigma^2(t)\nu^2\cdot(w^2-\dot u^2(t))da. \tag{3.41}$$

En additionnant (3.40) et (3.41)

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}\sigma^\alpha(\varepsilon(w^\alpha)-\varepsilon(\dot u^\alpha(t)))dx+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}\rho^\alpha\ddot u^\alpha(t)\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))dx$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha(t)\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))dx=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha(t)\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da.$$

Alors

$$\sum_{\alpha=1}^{2}(\sigma^\alpha,\varepsilon(w^\alpha)-\varepsilon(\dot u^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\rho^\alpha\ddot u^\alpha(t),w^\alpha-\dot u^\alpha(t))_{\boldsymbol{H^\alpha}}=\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha}f_0^\alpha(t)\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))dx$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_2^\alpha}f_2^\alpha(t)\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot(w^\alpha-\dot u^\alpha(t))da.$$

D'après (3.16), (3.18) et (3.19)on obtient

$$\begin{aligned}(\ddot{u}(t), w-\dot{u}(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\sigma^\alpha,\varepsilon\left(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)\right))_{\mathcal{H}^\alpha} &= (F(t), w-\dot{u}(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}\\ &+\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot\left(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)\right)da.\end{aligned}\tag{3.42}$$

On calcule $\displaystyle\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot\left(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)\right)da$:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot\left(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)\right) &= \sigma^1(t)\nu^1\cdot\big(w^1-\dot{u}^1(t)\big)+\sigma^2(t)\nu^2\cdot\big(w^2-\dot{u}^2(t)\big)\\ &= \sigma^1_\nu(t)\cdot\big(w^1_\nu-\dot{u}^1_\nu(t)\big)+\sigma^2_\nu(t)\cdot\big(w^2_\nu-\dot{u}^2_\nu(t)\big)\\ &+\sigma^1_\tau(t)\cdot\big(w^1_\tau-\dot{u}^1_\tau(t)\big)+\sigma^2_\tau(t)\cdot\big(w^2_\tau-\dot{u}^2_\tau(t)\big)\\ &= \sigma_\nu(t)\cdot\big(w^1_\nu+w^2_\nu\big)-\sigma_\nu(t)\cdot\big(\dot{u}^1_\nu(t)+\dot{u}^2_\nu(t)\big)\\ &+\sigma_\tau(t)\cdot\big(w^1_\tau-w^2_\tau\big)-\sigma_\tau(t)\cdot\big(\dot{u}^1_\tau(t)-\dot{u}^2_\tau(t)\big)\\ &= \sigma_\tau(t).\left(\big(w^1_\tau-w^2_\tau\big)-\big(\dot{u}^1_\tau(t)-\dot{u}^2_\tau(t)\big)\right).\end{aligned}$$

Et, moyennant (3.10), on a

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha(t)\nu^\alpha\cdot\left(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)\right)da=\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau(t)\cdot\ \left([w_\tau]-[\dot{u}_\tau(t)]\right)da.\tag{3.43}$$

On suppose que $\Gamma_3=\Gamma_3^+\cup\Gamma_3^-$, où

$$\Gamma_3^+=\{x\in\Gamma_3\ |\sigma_\tau(t)|<g)\},\qquad \Gamma_3^-=\{x\in\Gamma_3\ |\sigma_\tau(t)|=g)\}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3}\sigma_\tau(t).\left([w_\tau]-[\dot{u}_\tau(t)]\right)da &= \int_{\Gamma_3^+}\sigma_\tau(t).\left([w_\tau]-[\dot{u}_\tau(t)]\right)da\\ &+\int_{\Gamma_3^-}\sigma_\tau(t).\left([w_\tau]-[\dot{u}_\tau(t)]\right)da.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Pour $[\dot{u}_\tau(t)]$:

A l'aide de définition de Γ_3^+, on obtient

$$\int_{\Gamma_3^+}\sigma_\tau(t)\cdot[\dot{u}_\tau(t)]da=0.\tag{3.45}$$

Maintenant, en utilisant (3.10)

$$\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t)\cdot[\dot{u}_\tau(t)]da = -\lambda\int_{\Gamma_3^-}[\dot{u}_\tau(t)][\dot{u}_\tau(t)]da.$$

De 3.10, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t)\cdot[\dot{u}_\tau(t)]da &= -\lambda\int_{\Gamma_3^-}\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|^2 da\\ &= -\int_{\Gamma_3^-}\big|\sigma_\tau(t)\big|\cdot\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|da\\ &= -\int_{\Gamma_3^-} g\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|da,\end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t)\cdot[\dot{u}_\tau(t)]da = -\int_{\Gamma_3^-} g\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|da. \tag{3.46}$$

Pour $[w_\tau]$:

$$\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t)\cdot[w_\tau]da = -\lambda\int_{\Gamma_3^-}[\dot{u}_\tau(t)][w_\tau]da.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz implique que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t)\cdot[w_\tau]da &\geq -\lambda\int_{\Gamma_3^-}\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|\big|[w_\tau]\big|da\\ &\geq -\int_{\Gamma_3^-} g\big|[w_\tau]\big|da.\end{aligned} \tag{3.47}$$

En combinant (3.46) et (3.47), on a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t)\cdot\left([w_\tau]-[\dot{u}_\tau(t)]\right)da &\geq -\int_{\Gamma_3^-} g\left(\big|[w_\tau]\big|-\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|\right)da\\ &\geq -\int_{\Gamma_3^-} g\big|[w_\tau]\big|da+\int_{\Gamma_3^-} g\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|da.\end{aligned} \tag{3.48}$$

D'apré (3.44), on a

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t)\cdot([w_\tau]-[\dot{u}_\tau(t)])da &= \int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau(t)\cdot[w_\tau]da+\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t)\cdot[w_\tau]da\\ &-\int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau(t)\cdot[\dot{u}_\tau]da-\int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau(t)\cdot[\dot{u}_\tau]da,\end{aligned}$$

et de (3.45) et (3.48), il vient

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t)\cdot\left([w_\tau]-[\dot{u}_\tau(t)]\right)da \geq -\int_{\Gamma_3^+} g\big|[w_\tau]\big|da-\int_{\Gamma_3^-} g\big|[w_\tau]\big|da+\int_{\Gamma_3^-} g\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|da,$$

alors

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau(t)\cdot([w_\tau]-[\dot{u}_\tau(t)])\,da &\geq -\int_{\Gamma_3} g\big|[w_\tau]\big|da+\int_{\Gamma_3} g\big|[\dot{u}_\tau(t)]\big|da\\ &\geq -\int_{\Gamma_3} g\big|w_\tau^1-w_\tau^2\big|da+\int_{\Gamma_3} g\big|\dot{u}_\tau^1(t)-\dot{u}_\tau^2(t)\big|da. \quad (3.49)\end{aligned}$$

D'aprés (3.23) et (3.45), on obtient

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma_3}\sigma^\alpha\upsilon^\alpha\cdot(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t))da \geq -J(w)+J(\dot{u}(t)). \quad (3.50)$$

En conbinant les inegalités (3.44) et (3.48), d'où

$$(\ddot{u}(t),w-\dot{u}(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\sigma^\alpha,\varepsilon\,(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}\geq(F(t),w-\dot{u}(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}-J(w)+J(\dot{u}(t)).$$

Et de (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}&(\ddot{u}(t),w-\dot{u}(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}+\textstyle\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon\,(\dot{u}^\alpha(t))+\mathcal{B}^\alpha\,(\varepsilon\,(u^\alpha(t))\,,\xi^\alpha(t))\,,\varepsilon\,(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}\\ &+\textstyle\sum_{\alpha=1}^{2}((\mathcal{E}^\alpha)^*\,\nabla\psi^\alpha(t),\varepsilon\,(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{F}^\alpha\,(\beta^\alpha(t),\tau^\alpha(t))\,,\varepsilon\,(w^\alpha-\dot{u}^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}\\ &+J(w)-J(\dot{u}(t))\geq(F(t),w-\dot{u}(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}},\quad\forall w\in\boldsymbol{V}.\end{aligned} \quad (3.51)$$

Pour les inconnues électrique du problème, on utilise la formule de Green ainsi que les conditions (3.2), (3.7), (3.14) et la définition (3.20), pour tout $\phi=(\phi^1,\phi^2)\in\boldsymbol{W}$, et $t\in[0,T]$, on a

$$(D^\alpha,\nabla\phi^\alpha)_{\boldsymbol{H}^\alpha}+(\mathrm{div}\,D^\alpha,\phi^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}=\int_{\Gamma^\alpha}D^\alpha\nu^\alpha.\phi^\alpha da,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\alpha}D^\alpha\cdot\nabla\phi^\alpha dx+\int_{\Omega^\alpha}\mathrm{div}\,D^\alpha\cdot\phi^\alpha dx=\int_{\Gamma_a^\alpha}D^\alpha\nu^\alpha.\phi^\alpha da+\int_{\Gamma_b^\alpha}D^\alpha\nu^\alpha.\phi^\alpha da. \quad (3.52)$$

Pour $\alpha=1,2$, on a d'après définition de $\boldsymbol{W}$, on a

$$\int_{\Gamma_a^\alpha}D^\alpha\nu^\alpha.\phi^\alpha da=0,$$

alors

$$\int_{\Omega^\alpha}D^\alpha\cdot\nabla\phi^\alpha dx+\int_{\Omega^\alpha}\mathrm{div}\,D^\alpha\cdot\phi^\alpha dx=\int_{\Gamma_b^\alpha}D^\alpha\nu^\alpha.\phi^\alpha da. \quad (3.53)$$

On a d'après (3.7) et (3.14)

$$\int_{\Omega^\alpha}D^\alpha\cdot\nabla\phi^\alpha dx+\int_{\Omega^\alpha}q_0^\alpha(t)\cdot\phi^\alpha dx=\int_{\Gamma_b^\alpha}q_2^\alpha(t).\phi^\alpha da. \quad (3.54)$$

La formule de Green pour $\alpha = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1 \cdot \nabla\phi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1(t) \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1(t).\phi^1 da. \tag{3.55}$$

La formule de Green pour $\alpha = 2$

$$\int_{\Omega^1} D^2 \cdot \nabla\phi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2(t) \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2(t).\phi^2 da. \tag{3.56}$$

On additionnant (3.55) et (3.56) on a

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} D^\alpha \cdot \nabla\phi^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Omega^\alpha} q_0^\alpha(t) \cdot \phi^\alpha dx - \sum_{\alpha=1}^{2} \int_{\Gamma_b^\alpha} q_2^\alpha(t).\phi^\alpha da = 0.$$

On a d'après (3.20) on obtient

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (D^\alpha, \nabla\phi^\alpha)_{\boldsymbol{H}^\alpha} + (Q(t), \phi)_{\boldsymbol{W}} = 0.$$

De (3.2), on obtient

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (\mathcal{R}^\alpha \nabla\psi^\alpha(t) - \mathcal{E}^\alpha \varepsilon\left(u^\alpha(t)\right) - \mathcal{G}^\alpha\left(\beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right), \nabla\phi^\alpha)_{\boldsymbol{H}^\alpha} = (Q(t), \phi)_{\boldsymbol{W}}, \quad \forall\phi \in \boldsymbol{W}. \tag{3.57}$$

Maintement, pour les endommagements $\xi = (\xi^1, \xi^2) \in \mathcal{K}$, et pour tout $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) \in \mathcal{K}$, $t \in [0, T]$, on a

$$(S^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t)\right) - \dot{\xi}^\alpha(t) + \mathcal{K}_1^\alpha \Delta\xi^\alpha(t), \gamma^\alpha - \xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)} \leq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}(\dot{\xi}^\alpha(t), \gamma^\alpha - \xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)} &- (\mathcal{K}_1^\alpha \Delta\xi^\alpha(t), \gamma^\alpha - \xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)} \\ &\geq (S^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t)\right), \gamma^\alpha - \xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.58}$$

L'inégalité (3.58), pour α=1,

$$\begin{aligned}(\dot{\xi}^1(t), \gamma^1 - \xi^1(t))_{L^2(\Omega^1)} &- (\mathcal{K}_1^1 \Delta\xi^1(t), \gamma^1 - \xi^1(t))_{L^2(\Omega^1)} \\ &\geq (S^1\left(\varepsilon\left(u^1(t)\right), \xi^1(t)\right), \gamma^1 - \xi^1(t))_{L^2(\Omega^1)}.\end{aligned} \tag{3.59}$$

Aussi, l'inégalité (3.58), pour α=2,

$$\begin{aligned}(\dot{\xi}^2(t), \gamma^2 - \xi^2(t))_{L^2(\Omega^2)} &- (\mathcal{K}_1^2 \Delta\xi^2(t), \gamma^2 - \xi^2(t))_{L^2(\Omega^2)} \\ &\geq (S^2\left(\varepsilon\left(u^2(t)\right), \xi^2(t)\right), \gamma^2 - \xi^2(t))_{L^2(\Omega^2)}.\end{aligned} \tag{3.60}$$

On additionnant (3.59) et (3.60), il vient

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\xi}^{\alpha}(t),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}-\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{K}_1^{\alpha}\Delta\xi^{\alpha}(t),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}\\&\geq\sum_{\alpha=1}^{2}(S^{\alpha}\left(\varepsilon\left(u^{\alpha}(t)\right),\xi^{\alpha}(t)\right),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}.\end{aligned}\tag{3.61}$$

D'aprés la formule de Green, on obtient

$$(\Delta\xi^{\alpha}(t),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}+(\nabla\xi^{\alpha}(t),\nabla(\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t)))_{L^2(\Omega^\alpha)}=\int_{\Gamma^\alpha}\frac{\partial\xi^{\alpha}(t)}{\partial\nu}\cdot(\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))da,$$

et la condition aux limites (3.11) du problème $\mathcal{P}$, on a

$$(\Delta\xi^{\alpha}(t),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}=-\int_{\Omega^\alpha}\nabla\xi^{\alpha}(t)\cdot\nabla(\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))dx,$$

et de (3.61), on trouve

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\xi}^{\alpha}(t),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}+\sum_{\alpha=1}^{2}\mathcal{K}_1^{\alpha}\int_{\Omega^\alpha}\nabla\xi^{\alpha}(t)\cdot\nabla(\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))dx\\&\qquad\geq\sum_{\alpha=1}^{2}(S^{\alpha}\left(\varepsilon\left(u^{\alpha}(t)\right),\xi^{\alpha}(t)\right),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}.\end{aligned}$$

La définition de la forme bilinéaire a permet de donner

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\xi}^{\alpha}(t),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}+a_1(\xi(t),\gamma-\xi(t))\\&\geq\sum_{\alpha=1}^{2}(S^{\alpha}\left(\varepsilon\left(u^{\alpha}(t)\right),\xi^{\alpha}(t)\right),\gamma^{\alpha}-\xi^{\alpha}(t))_{L^2(\Omega^\alpha)},\quad\forall\gamma\in\mathcal{K}.\end{aligned}\tag{3.62}$$

D'autre part, les températures du problème $\mathcal{P}$, pour tout $\delta=(\delta^1,\delta^2)\in\mathbb{L}_1$, $t\in[0,T]$ et l'équation (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}(\dot{\tau}^{\alpha}(t),\delta^{\alpha})_{L^2(\Omega^\alpha)}-(\mathcal{K}_0^{\alpha}\Delta\tau^{\alpha}(t),\delta^{\alpha})_{L^2(\Omega^\alpha)}&=(\Psi^{\alpha}\left(\varepsilon\left(u^{\alpha}(t)\right),\xi^{\alpha}(t),\beta^{\alpha}(t),\tau^{\alpha}(t)\right)\\&\quad+\chi^{\alpha}(t),\delta^{\alpha})_{L^2(\Omega^\alpha)}.\end{aligned}\tag{3.63}$$

Donc

$$\begin{aligned}&(\Psi^{\alpha}\left(\varepsilon\left(u^{\alpha}(t)\right),\xi^{\alpha}(t),\beta^{\alpha}(t),\tau^{\alpha}(t)\right)+\chi^{\alpha}(t),\delta^{\alpha})_{L^2(\Omega^\alpha)}\\&\quad=(\dot{\tau}^{\alpha}(t),\delta^{\alpha})_{L^2(\Omega^\alpha)}-\int_{\Omega^\alpha}\mathcal{K}_0^{\alpha}\Delta\tau^{\alpha}(t)\delta^{\alpha}dx.\end{aligned}\tag{3.64}$$

L'égalité (3.64) pour α=1

$$\begin{aligned}&(\Psi^{1}\left(\varepsilon\left(u^{1}(t)\right),\xi^{1}(t),\beta^{1}(t),\tau^{1}(t)\right)+\chi^{1}(t),\delta^{1})_{L^2(\Omega^1)}\\&\quad=(\dot{\tau}^{1}(t),\delta^{1})_{L^2(\Omega^1)}-\int_{\Omega^1}\mathcal{K}_0^{1}\Delta\tau^{1}(t)\delta^{1}dx,\end{aligned}\tag{3.65}$$

et, l'égalité (3.64) pour α=2

$$\begin{aligned}(\Psi^2 \left(\varepsilon\left(u^2(t)\right), \xi^2(t), \beta^2(t), \tau^2(t)\right) + \chi^2(t), \delta^2)_{L^2(\Omega^2)} \\ = (\dot{\tau}^2(t), \delta^2)_{L^2(\Omega^2)} - \int_{\Omega^2} \mathcal{K}_0^2 \Delta\tau^2(t)\delta^2 dx,\end{aligned} \tag{3.66}$$

on additionnant (3.65) et (3.66), d'où

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}(\Psi^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t), \beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right) + \chi^\alpha(t), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} \\ = \sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\tau}^\alpha(t), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} - \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha} \mathcal{K}_0^\alpha \Delta\tau^\alpha(t)\delta^\alpha dx.\end{aligned} \tag{3.67}$$

La formule de Green (B.9), pour α= 1, 2 donne

$$-\mathcal{K}_0^\alpha(\Delta\tau^\alpha(t), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} = \mathcal{K}_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\tau^\alpha(t)\cdot\nabla\delta^\alpha dx - \mathcal{K}_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \frac{\partial^\alpha\tau^\alpha(t)}{\partial\nu^\alpha}\ \delta^\alpha dx,$$

on a d'après (3.12)

$$-\mathcal{K}_0^\alpha(\Delta\tau^\alpha(t), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} = \mathcal{K}_0^\alpha \int_{\Omega^\alpha} \nabla\tau^\alpha(t)\cdot\nabla\delta^\alpha dx + \lambda_0^\alpha \int_{\Gamma^\alpha} \tau^\alpha(t)\ \delta^\alpha dx. \tag{3.68}$$

En combinant les inégalités (3.67) et (3.68), on a

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}(\Psi^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t), \beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right) + \chi^\alpha(t), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} \\ = \sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\tau}^\alpha(t), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Omega^\alpha} \mathcal{K}_0^\alpha \nabla\tau^\alpha(t)\nabla\delta^\alpha dx + \sum_{\alpha=1}^{2}\int_{\Gamma^\alpha} \lambda_0^\alpha\tau^\alpha(t)\delta^\alpha da.\end{aligned}$$

D'après (3.36), on obtient

$$\begin{aligned}a_0(\tau(t), \delta) = \sum_{\alpha=1}^{2}(\Psi^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t), \beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} \\ - \sum_{\alpha=1}^{2}(\dot{\tau}^\alpha(t) - \chi^\alpha(t), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \forall\delta \in \mathbb{L}_1.\end{aligned} \tag{3.69}$$

Finalement, de (3.3), (3.15), (3.51), (3.57), (3.62) et (3.69), on obtient la formulation variationnelle suivante du problème de contact électrique $\mathcal{P}$.

Problème $\mathcal{PV}$. Trouver respectivement le champ des déplacements $u = (u^1, u^2)$: $[0,T] \to \boldsymbol{V}$, de potentiel électrique $\psi = (\psi^1, \psi^2)$: $[0,T] \to \boldsymbol{W}$, de température

$\tau = (\tau^1, \tau^2) : [0,T] \to L_1$, d'endommagement $\xi = (\xi^1, \xi^2) : [0,T] \to \mathbb{L}_1$, et un champ de variable d'état interne $\beta = (\beta^1, \beta^2) : [0,T] \to \mathbb{Y}$ tels que, pour tout $t \in [0,T]$

$$\dot{\beta}^\alpha(t) = \Theta^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t), \beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right) \quad \text{dans} \quad \Omega^\alpha, \quad (3.70)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\ddot{u}(t), w - \dot{u}(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \sum_{\alpha=1}^2 (\mathcal{A}^\alpha \varepsilon\left(\dot{u}^\alpha(t)\right) + \mathcal{B}^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t)\right), \varepsilon\left(w^\alpha - \dot{u}^\alpha(t)\right))_{\mathcal{H}^\alpha} \\ + \sum_{\alpha=1}^2 ((\mathcal{E}^\alpha)^* \nabla\psi^\alpha(t), \varepsilon\left(w^\alpha - \dot{u}^\alpha(t)\right))_{\mathcal{H}^\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 (\mathcal{F}^\alpha\left(\beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right), \varepsilon\left(w^\alpha - \dot{u}^\alpha(t)\right))_{\mathcal{H}^\alpha} \\ + J(w) - J(\dot{u}(t)) \geq (F(t), w - \dot{u}(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \quad \forall w \in \boldsymbol{V}, \end{array}\right\} \quad (3.71)$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 (\mathcal{R}^\alpha \nabla\psi^\alpha(t) - \mathcal{E}^\alpha \varepsilon\left(u^\alpha(t)\right) - \mathcal{G}^\alpha\left(\beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right), \nabla\phi^\alpha)_{\boldsymbol{H}^\alpha} = (Q(t), \phi)_{\boldsymbol{W}}, \quad \forall \phi \in \boldsymbol{W}, \quad (3.72)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\alpha=1}^2 (\dot{\xi}^\alpha(t), \xi^\alpha - \xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)} + a_1(\xi(t), \gamma - \xi(t)) \\ \displaystyle\geq \sum_{\alpha=1}^2 (S^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t)\right), \gamma^\alpha - \xi^\alpha(t))_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall \gamma \in \mathcal{K}, \end{array}\right\} \quad (3.73)$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle a_0(\tau(t), \delta) = \sum_{\alpha=1}^2 (\Psi^\alpha\left(\varepsilon\left(u^\alpha(t)\right), \xi^\alpha(t), \beta^\alpha(t), \tau^\alpha(t)\right), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)} \\ \quad - \sum_{\alpha=1}^2 (\dot{\tau}^\alpha(t) - \chi^\alpha(t), \delta^\alpha)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall \delta \in \mathbb{L}_1, \end{array}\right\} \quad (3.74)$$

$$u(0) = (u_0^1, u_0^2), u'(0) = (v_0^1, v_0^2), \xi(0) = (\xi_0^1, \xi_0^2), \beta(0) = (\beta_0^1, \beta_0^2), \tau(0) = (\tau_0^1, \tau_0^2). \quad (3.75)$$

Maintenant, on va énoncer le résultat principal concernant léexistence et l'unicité de la solution du problème $\mathcal{P}$V dont la demonstration sera détaillée dans la section suivante. la section suivante.

Théorème 3.2.1 *Sous les hypothèses* (3.16)–(3.30). *Alors il existe une solution unique* $\{u, \psi, \tau, \alpha, \beta\}$ *au problème PV. De plus, la solution satisfait*

$$u \in W^{1,2}(0,T;\boldsymbol{V}) \cap \mathcal{C}^1(0,T;\mathcal{H}) \cap W^{2,2}(0,T;\boldsymbol{V}'), \quad (3.76)$$

$$\psi \in \mathcal{C}(0,T;\boldsymbol{W}), \quad (3.77)$$

$$\tau \in W^{1,2}(0,T;\mathbb{L}_0) \cap L^2(0,T;\mathbb{L}_1), \quad (3.78)$$

$$\xi \in W^{1,2}(0,T;\mathbb{L}_0) \cap L^2(0,T;\mathbb{L}_1), \quad (3.79)$$

$$\beta \in W^{1,2}(0,T;\mathbb{Y}). \quad (3.80)$$

3.3 Démonstration du Théorème 3.2.1

L'ensemble des fonctions $\{\sigma, D, u, \psi, \tau, \xi, \beta\}$ qui satisfait (3.1)-(3.15) est appelé solution faible du problème de contact thermo-piézoélectrique P. On conclut par le théorème 3.2.1 que, sous les hypothèses (3.16)-(3.30), le problème admet une unique solution faible qui satisfait (3.76)–(3.80).

Soient $t_1, t_2 \in [0,T]$ pour simplifier nous écrivons $u(t_i) = u_i$, $\dot{u}(t_i) = \dot{u}_i$, $\psi(t_i) = \psi_i$, $\tau(t_i) = \tau_i$, $\xi(t_i) = \xi_i$ et $\beta(t_i) = \beta_i$ pour $i = 1, 2$, en utilisant (3.1) et (3.16)-(3.22), on obtient

$$\begin{aligned}\|\sigma(t_1) - \sigma(t_2)\|_{\mathcal{H}} \leq C\Big(&\|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_{\boldsymbol{V}} + \|u_1 - u_2\|_{\boldsymbol{V}} + \|\xi_1 - \xi_2\|_{\mathbb{L}_0} \\ &+\|\beta_1 - \beta_2\|_{\mathbb{Y}} + \|\tau_1 - \tau_2\|_{L_0} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{\boldsymbol{W}}\Big),\end{aligned}$$

et les régularités (3.1)-(3.5) et de Théorème 3.2.1, on déduit que

$$\sigma \in C(0,T;\mathcal{H}).$$

D'autre côté, utilisant des arguments similaires, on trouve que

$$D \in C(0,T;\boldsymbol{H}).$$

De plus, pour $\alpha = 1, 2$, on choisit $w = v + \dot{u}$ où $v = (v^1, v^2)$ avec $v^\alpha \in \mathcal{D}(\Omega^\alpha)^d$ et $v^{3-\alpha} = 0$ dans (3.71). Puis, on choisit $\phi^\alpha \in \mathcal{D}(\Omega^\alpha)^d$ avec $\phi^{3-\alpha} = 0$ dans (3.72), pour obtenir que

$$\begin{aligned}\operatorname{Div} \sigma^\alpha(t) + f_0^\alpha(t) &= \rho^\alpha \ddot{u}^\alpha(t), \\ \operatorname{div} D^\alpha(t) &= q_0^\alpha(t),\end{aligned} \tag{3.81}$$

où $\mathcal{D}(\Omega^\kappa)$ l'espace des fonctions réelles infiniment différentiables à support compact dans Ω^α. Ensuite, on utilise les hypothèses pour déduire que $\operatorname{Div} \sigma^\alpha \in C(0,T;\boldsymbol{H}^\alpha)$, $\operatorname{div} D^\alpha \in \mathcal{C}(0,T;\mathbb{L}_0^\alpha), \alpha = 1, 2$, on a alors

$$\sigma \in C(0,T;\mathcal{H}_1), \quad D \in C(0,T;\mathcal{W}). \tag{3.82}$$

On conclut que la solution faible $\{\sigma, D, u, \psi, \tau, \xi, \beta\}$ du Problème de contact thermo-piézoélectrique $\mathcal{P}$ a la régularité (3.76)-(3.80), et (3.82).

Démonstration du Théorème 3.2.1

La démonstration du Théorème 3.2.1 s'effectue en plusieurs étapes, on suppose que (3.16) à (3.30) sont vérifiées :

Première étape

Soit $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0,T; \boldsymbol{V}')$ donné, et on considére le problème intermédiare suivant :

Problème $\mathcal{P}_{u_\eta}$. Trouver les champs des déplacements $u_\eta = (u_\eta^1, u_\eta^2) : [0,T] \to \boldsymbol{V}$ tels que :

$$\left.\begin{array}{l}(\ddot{u}_\eta(t), w - \dot{u}_\eta(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \sum\limits_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon\left(\dot{u}_\eta^\alpha(t)\right), \varepsilon\left(w^\alpha - \dot{u}_\eta^\alpha(t)\right))_{\mathcal{H}^\alpha} \\ +J(w) - J(\dot{u}_\eta(t)) \geq (F(t) - \eta(t), w - \dot{u}_\eta(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \quad \forall w \in \boldsymbol{V},\ p.p.\ t \in (0,T), \\ u_\eta(0) = (u_0^1, u_0^2), \qquad \dot{u}_\eta(0) = (v_0^1, v_0^2).\end{array}\right\} \tag{3.83}$$

En utilisant le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, on définit l'opérateur $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ comme suivant :

$$(\mathcal{A}u, v)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(u^\alpha), \varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} \quad \forall u, v \in \boldsymbol{V}. \tag{3.84}$$

On pose le variable de vitesse $v_\eta^\alpha = \dot{u}_\eta^\alpha$, $\alpha = 1, 2$, le Problème $\mathcal{P}_{u_\eta}$ peut être formulé de la façon suivant :

Problème $\mathcal{P}_{v_\eta}$. Trouver les champs des vitesses $v_\eta = (v_\eta^1, v_\eta^2) : [0,T] \to \boldsymbol{V}$ tels que :

$$\left.\begin{array}{l}(\dot{v}_\eta(t), w - v_\eta(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + (\mathcal{A}v_\eta(t), w - v_\eta(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + J(w) - J(v_\eta(t)) \\ \geq (F_\eta(t), w - v_\eta(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \quad \forall w \in \boldsymbol{V},\ p.p.\ t \in (0,T), \\ v_\eta(0) = (v_0^1, v_0^2),\end{array}\right\} \tag{3.85}$$

où $F_\eta = F - \eta$. Pour résoudre le Problème $\mathcal{P}_{v_\eta}$, on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.1 *Suppose que (3.16), l'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (3.84) satisfait :*

(a)- $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}'$ est hemi-continu et fortement monotone,

(b)- $\exists\ C_\mathcal{A}^1 \geq 0, \quad \exists\ C_\mathcal{A}^2 \geq 0$ telle que $\|\mathcal{A}u\|_{\mathcal{V}'} \leq C_\mathcal{A}^1\|u\|_\mathcal{V} + C_\mathcal{A}^2, \quad \forall u \in \boldsymbol{V}$,

(c)- pour toute suite (u_n) et u dans $L^2(0,T;\boldsymbol{V})$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(0,T;\boldsymbol{V})$, alors $\mathcal{A}u_n \rightharpoonup \mathcal{A}u$ faiblement dans $L^2\left(0,T;\boldsymbol{V}'\right)$, et $\lim_{n\to+\infty}\inf\int_0^T(\mathcal{A}u_n(s), u_n(s))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}ds \geq \int_0^T\langle\mathcal{A}u(s), u(s)\rangle_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}ds$.

Démonstration.

(a) D'après la définition de $\mathcal{A}$ dans (3.84),et pour tout $u, v, w \in \boldsymbol{V}$, on obtient

$$\begin{cases} (\mathcal{A}(u+\lambda_n v) - \mathcal{A}(u+\lambda v), w)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \\ = \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(u^\alpha)+\lambda_n\varepsilon(v^\alpha)) - \mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(u^\alpha)+\lambda\varepsilon(v^\alpha)), \varepsilon(w^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}, \end{cases}$$

en utilisant l'hypothèse (3.16)(a), il vient :

$$\begin{cases} \left|(\mathcal{A}(u+\lambda_n v) - \mathcal{A}(u+\lambda v), w)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}\right| \\ \leq \sum_{\alpha=1}^{2} \|\mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(u^\alpha)+\lambda_n\varepsilon(v^\alpha)) - \mathcal{A}^\alpha(\varepsilon(u^\alpha)+\lambda\varepsilon(v^\alpha))\|_{\mathcal{H}^\alpha}\|\varepsilon(w^\alpha)\|_{\mathcal{H}^\alpha} \\ \leq \sum_{\alpha=1}^{2} L_{\mathcal{A}}^\alpha\|(\varepsilon(u^\alpha)+\lambda_n\varepsilon(v^\alpha)) - (\varepsilon(u^\alpha)+\lambda\varepsilon(v^\alpha))\|_{\mathcal{H}^\alpha}\|\varepsilon(w^\alpha)\|_{\mathcal{H}^\alpha} \\ \leq \sum_{\alpha=1}^{2} L_{\mathcal{A}}^\alpha|\lambda_n-\lambda|\|\varepsilon(v^\alpha)\|_{\mathcal{H}^\alpha}\|\varepsilon(w^\alpha)\|_{\mathcal{H}^\alpha}, \end{cases}$$

on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\boldsymbol{A}(u+\lambda_n v), w)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = (\mathcal{A}(u+\lambda v), w)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}, \quad \forall u, v, w \in \boldsymbol{V}.$$

Alors $\mathcal{A}$ hemi-continu.

D'autre côté, utilisant la définition (3.84) et l'hypothèse (3.16)(b), pour tout $u_1, u_2 \in \boldsymbol{V}$, on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1-u_2)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} &= \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(u_1^\alpha) - \mathcal{A}^\alpha\varepsilon(u_2^\alpha), \varepsilon(u_1^\alpha)-\varepsilon(u_2^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} \\ &\geq \sum_{\alpha=1}^{2} m_{\mathcal{A}^\alpha}\|\varepsilon(u_1^\alpha)-\varepsilon(u_2^\alpha)\|_{\mathcal{H}^\alpha}^2 \\ &\geq \sum_{\alpha=1}^{2} m_{\mathcal{A}^\alpha}\|u_1^\alpha - u_2^\alpha\|_{\mathcal{V}^\alpha}^2, \end{aligned}$$

soit $m_{\mathcal{A}} = \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})$, alors

$$(\mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1-u_2)_V \geq m_{\mathcal{A}}\|u_1-u_2\|_{\boldsymbol{V}^2},$$

donc $\mathcal{A}$ est un opérateur fortement monotone.

(b) Maintenant, d'après (3.84), et choisie $v = 0$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}u - \mathcal{A}0\|_{\boldsymbol{V}'}^2 &= \sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(u^\alpha) - \mathcal{A}^\alpha\varepsilon(0), \mathcal{A}^\alpha\varepsilon(u^\alpha) - \mathcal{A}^\alpha\varepsilon(0))_{\mathcal{H}^\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2}\|\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(u^\alpha) - \mathcal{A}^\alpha\varepsilon(0)\|_{\mathcal{H}^\alpha}^2 \end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse (3.16) (a), on obtient :

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}u-\mathcal{A}0\|^2_{\boldsymbol{V'}} &\leq \sum_{\alpha=1}^{2} L^2_{\mathcal{A}^\alpha}\left\|\varepsilon\left(u^\alpha\right)-\varepsilon\left(0\right)\right\|^2_{\mathcal{H}^\alpha}\\ &\leq \sum_{\alpha=1}^{2} L^2_{\mathcal{A}^\alpha}\left\|u^\alpha-0\right\|^2_{\boldsymbol{V}^\alpha},\end{aligned}$$

et pour $L_{\mathcal{A}}=\max(L_{\mathcal{A}^1},L_{\mathcal{A}^2})$, il vient

$$\|\mathcal{A}u-\mathcal{A}0\|_{\boldsymbol{V'}} \leq L_{\mathcal{A}}\|u\|_{\boldsymbol{V}},$$

alors

$$\|\mathcal{A}u\|_{\boldsymbol{V'}}-\|\mathcal{A}0\|_{\boldsymbol{V'}} \leq L_{\mathcal{A}}\|u\|_{\boldsymbol{V}},$$

on a

$$\|\mathcal{A}u\|_{\boldsymbol{V'}} \leq L_{\mathcal{A}}\|u\|_{\boldsymbol{V}}+\|\mathcal{A}0\|_{\boldsymbol{V'}},$$

donc

$$\|\mathcal{A}u\|_{\boldsymbol{V'}} \leq C^1_{\mathcal{A}}\|u\|_{\boldsymbol{V}}+C^2_{\mathcal{A}},$$

où $C^1_{\mathcal{A}}=L_{\mathcal{A}}$ et $C^2_{\mathcal{A}}=\|\mathcal{A}0\|_{\boldsymbol{V'}}$. Alors $\mathcal{A}$ satisfait la condition (b).

(c) D'autre par, pour tout $\Phi\in L^2(0,T;\boldsymbol{V'})$, on a

$$(\mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u,\Phi)_{L^2(0,T;\boldsymbol{V'})}=\int_0^T(\mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u,\Phi)_{\boldsymbol{V'}}dt,$$

et, en appliquant Théorème de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^T(\mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u,\Phi)_{\boldsymbol{V'}}dt=\int_0^T\lim_{n\longrightarrow+\infty}(\mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u,\Phi)_{\boldsymbol{V'}}dt,$$

grâce de Lipschitizien l'opérateur $\mathcal{A}$ (alors continue), il vient

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^T(\mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u,\Phi)_{\boldsymbol{V'}}dt=\int_0^T(\mathcal{A}u-\mathcal{A}u,\Phi)_{\boldsymbol{V'}}dt=0,$$

donc $\mathcal{A}u_n\rightharpoonup\mathcal{A}u$ faiblement dans $L^2\left(0,T;\boldsymbol{V'}\right)$.

Par la monotonie de l'opérateur $\mathcal{A}$, il s'ensuit que

$$(\mathcal{A}u_n,u_n-u)_{\boldsymbol{V'}\times\boldsymbol{V}}\geq(\mathcal{A}u,u_n-u)_{\boldsymbol{V'}\times\boldsymbol{V}}\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

alors

$$(\mathcal{A}u_n,u_n)_{\boldsymbol{V'}\times\boldsymbol{V}}\geq(\mathcal{A}u,u_n-u)_{\boldsymbol{V'}\times\boldsymbol{V}}+(\mathcal{A}u_n,u)_{\boldsymbol{V'}\times\boldsymbol{V}}\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

en utilisant les limites

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{A}u, u_n - u)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(\mathcal{A}u_n, u)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = (\mathcal{A}u, u)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}},$$

et, d'après l'inégalité

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T(\mathcal{A}u_n, u_n)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}ds \geq \int_0^T \liminf_{n\to\infty}(\mathcal{A}u_n, u_n)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}ds,$$

et les étapes précédentes, on trouve

$$\liminf_{n\to\infty}\int_0^T(\mathcal{A}u_n, u_n)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}ds \geq \int_0^T(\mathcal{A}u, u)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}ds.$$

On conclue que l'opérateur $\mathcal{A}$ satisfait la condition (c).

Lemme 3.3.2 *Soit la fonctionnelle J définie par (3.38) satisfait :*

(a)- $J : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et semi-continu inférieurement (s.c.i),

(b)- il existe une suite de $\mathcal{C}^1$, des fonctions convexes $(J_k) : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$, tels que :

(i)- $\exists C_g \geq 0$ telle que $\|J_k'(u)\|_{\boldsymbol{V}'} \leq C_g, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall u \in \boldsymbol{V}$,

(ii)- $\lim_{k\to+\infty}\int_0^T J_k(u(s))ds = \int_0^T J(u(s))ds, \quad \forall u \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$,

(iii)- il existe une suite (u_k) et u dans $L^2(0,T;\boldsymbol{V})$ telle que $u_k \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(0,T;\boldsymbol{V})$, puis $\lim_{k\to+\infty}\inf\int_0^T J_k(u_k(s))\,ds \geq \int_0^T J(u(s))ds$,

où $J_k'(u)$ désigne la dérivée au sens de Fréchet de J_k en u.

Démonstration.

(a) Pour tout $u, v \in \boldsymbol{V}$, $\lambda \in [0,1]$, et d'après la définition (3.38), on obtient

$$\begin{aligned} J(\lambda u + (1-\lambda)v) &= \int_{\Gamma_3} g\big|(\lambda u_\tau^1 + (1-\lambda)v_\tau^1) - (\lambda u_\tau^2 + (1-\lambda)v_\tau^2)\big|da \\ &\leq \lambda\int_{\Gamma_3} g\big|u_\tau^1 - u_\tau^2\big|da + (1-\lambda)\int_{\Gamma_3} g\big|v_\tau^1 - v_\tau^2\big|da \\ &\leq \lambda J(u) + (1-\lambda)J(v), \end{aligned}$$

alors J convexe.

Maintenant, pour toute suite $(u_n)_n$ convergeant vers u dans $\boldsymbol{V}$, on a

$$\inf_{p\geq n}\int_{\Gamma_3} g\big|u_{p\tau}^1 - u_{p\tau}^2\big|da \geq \int_{\Gamma_3}\inf_{p\geq n} g\big|u_{p\tau}^1 - u_{p\tau}^2\big|da,$$

et, en appliquant Théorème de Lebesgue, il vient

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} J(u_n) \geq J(u).$$

Donc J semi-continu inférieurement.

(b) Pour approcher la fonction J, on utilise la suite des fonctionnelles $J_k : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$J_k(u) = \int_{\Gamma_3} g\sqrt{|u_\tau^1 - u_\tau^2|^2 + k^{-1}}da, \quad \forall u = \left(u^1, u^2\right) \in \boldsymbol{V}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

On vérifie que la dérivée au sens de Fréchet de J_k at $u = (u^1, u^2)$ est donnée par

$$(J_k'(u), h)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} = \int_{\Gamma_3} g\frac{(u_\tau^1 - u_\tau^2, h_\tau^1 - h_\tau^2)_{\mathbb{R}^d}}{\sqrt{|u_\tau^1 - u_\tau^2|^2 + k^{-1}}}da, \quad \forall h = \left(h^1, h^2\right) \in \boldsymbol{V}. \tag{3.86}$$

On constate que J_k est continûment différentiable. Pour tous $a \geq 0, b \geq 0$ telle que $a + b = 1$, et pour tous x, $y \in \mathbb{R}, k \geq 1$, devient

$$2xy \leq x^2 + y^2,$$

on a

$$2xyk^{-1} \leq x^2k^{-1} + y^2k^{-1},$$

donc

$$x^2y^2 + (k^{-1})^2 + 2xyk^{-1} \leq x^2y^2 + (k^{-1})^2 + x^2k^{-1} + y^2k^{-1},$$

on obtient

$$\left(xy + k^{-1}\right)^2 \leq \left(x^2 + k^{-1}\right)\left(y^2 + k^{-1}\right),$$

alors

$$xy + k^{-1} \leq \sqrt{x^2 + k^{-1}}\sqrt{y^2 + k^{-1}}. \tag{3.87}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
&\left(a\sqrt{x^2 + k^{-1}} + b\sqrt{y^2 + k^{-1}}\right)^2 \\
&= a^2\left(x^2 + k^{-1}\right) + b^2\left(y^2 + k^{-1}\right) + 2ab\sqrt{x^2 + k^{-1}}\sqrt{y^2 + k^{-1}} \\
&= a^2x^2 + (a^2 + b^2)k^{-1} + b^2y^2 + 2ab\sqrt{x^2 + k^{-1}}\sqrt{y^2 + k^{-1}},
\end{aligned}$$

et de (3.87), il vient

$$\left(a\sqrt{x^2+k^{-1}}+b\sqrt{y^2+k^{-1}}\right)^2 \geq a^2x^2+(a^2+b^2)k^{-1}+b^2y^2+2abxy+2abk^{-1}$$
$$\geq (ax+by)^2+k^{-1},$$

donc

$$\sqrt{(ax+by)^2+k^{-1}} \leq a\sqrt{x^2+k^{-1}}+b\sqrt{y^2+k^{-1}}.$$

Alors J_k est convexe pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

On prend (3.86), et pour $h\in\mathcal{V}$ telle que $\|h\|_{\boldsymbol{V}\leq 1}$, on a

$$|(J'_k(u),h)|_{\boldsymbol{V'}\times\boldsymbol{V}} \leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_{\Gamma_3}\frac{|u_\tau^1-u_\tau^2||h_\tau^1-h_\tau^2|}{\sqrt{|u_\tau^1-u_\tau^2|^2+k^{-1}}}da$$
$$\leq \|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)}\int_{\Gamma_3}|h_\tau^1-h_\tau^2|da.$$

Moyennant de Théorème du trâce avec $\|h\|_{\boldsymbol{V}\leq 1}$, il s'ensuit qu'il exicte $c>0$ telle que

$$\forall u\in\boldsymbol{V},\quad \|J'_k(u)\|_{\boldsymbol{V'}}\leq c\|g\|_{L^\infty(\Gamma_3)},$$

donc (i) est satisfaite.

D'après la définition de J_k, on a

$$\lim_{k\to+\infty}J_k(u)=J(u),$$

et comme J_k est continue sur $\boldsymbol{V}$, en appliquant le théorème de Lebesgue, on obtient

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T J_k(u(s))ds=\int_0^T\lim_{k\to+\infty}J_k(u(s))ds=\int_0^T J(u(s))ds,$$

Alors la propriété (ii) satisfaite.

Par défination J_k et J, on a

$$J_k(u_k)\geq J(u_k),$$

on utilise la continuité de J, il vient

$$\lim_{k\to+\infty}J(u_k)=J(u),$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} inf J_k(u_k) \geq J(u).$$

On note que

$$inf \int_0^T J_k(u_k(s))ds \geq \int_0^T inf J_k(u_k(s))ds.$$

D'ailleurs, avec Théorème de Lebesgue, on a

$$\lim_{k\to+\infty} inf \int_0^T J_k(u_k(s))ds \geq \int_0^T \lim_{k\to+\infty} inf J_k(u_k(s))ds \geq \int_0^T J(u(s))ds.$$

Enfin, (iii) est satisfaite.

Lemme 3.3.3 *Probléme P_{v_η} a une solution unique v_η que satisfait :*

$$v_\eta \in \mathcal{C}(0,T;\boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{V}) \cap W^{1,2}(0,T;\boldsymbol{V}').$$

Démonstration. L'operateur A est hemicontinu et fortement monotone d'après lemme 3.3.1(a), et d'après 3.86, J'_k monotone et hemicontinu puisque, alors l'opérateur $\mathcal{A} + J'_k$ hemicontinu et fortement monotone, ensuite il est monotone et la condition (B.33) est vérifiée. Aussi d'après lemme 3.3.1(a) et lemme 3.3.2 (i), la condition (B.34) est vérifiée. En utilisant le théorème B.5.9, où $F_\eta \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}')$ et $v_0 \in \boldsymbol{H}$, il résulte

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists! v_\eta^k \in L^2(0,T;\boldsymbol{V}) \cap C(0,T;\boldsymbol{H}) \cap W^{1,2}(0,T;\boldsymbol{V}'),$$

tels que

$$\begin{cases} \dot{v}_\eta^k(t) + \mathcal{A}v_\eta^k(t) + J'_k\left(v_\eta^k(t)\right) = F_\eta(t) \text{ dans } \boldsymbol{V}', & \text{p.p. } t \in (0,T), \\ v_\eta^k(0) = v_0. \end{cases} \tag{3.88}$$

On utilise l'inégalité (3.86), il vient

$$\begin{aligned}\left(J'_k\left(v_\eta^k(t)\right), w - v_\eta^k(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} &= \int_{\Gamma_3} g\frac{\left(v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t), w_\tau^1 - w_\tau^2\right)_{\mathbb{R}^d}}{\sqrt{\left|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right|^2 + k^{-1}}}da \\ &- \int_{\Gamma_3} g\frac{\left(v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t), v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right)_{\mathbb{R}^d}}{\sqrt{\left|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right|^2 + k^{-1}}}da,\end{aligned}$$

et grâce l'inégalité du Cauchy Shwartez, on obtient

$$\begin{aligned}\left(J'_k\left(v_\eta^k(t)\right), w - v_\eta^k(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} &= \int_{\Gamma_3} g\frac{|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)||w_\tau^1 - w_\tau^2| + k^{-1}}{\sqrt{\left|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right|^2 + k^{-1}}}da \\ &- \int_{\Gamma_3} g\frac{\left|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right|^2 + k^{-1}}{\sqrt{\left|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right|^2 + k^{-1}}}da,\end{aligned}$$

et moyennnt (3.87), il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left(J_k'\left(v_\eta^k(t)\right), w - v_\eta^k(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \leq \int_{\Gamma_3} g \frac{\sqrt{\left|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right|^2 + k^{-1}}\sqrt{\left|w_\tau^1 - w_\tau^2\right|^2 + k^{-1}}}{\sqrt{\left|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right|^2 + k^{-1}}} da \\ - \int_{\Gamma_3} g\sqrt{\left|v_{\eta\tau}^{k1}(t) - v_{\eta\tau}^{k2}(t)\right|^2 + k^{-1}} da,\end{aligned}$$

et on trouve

$$\left(J_k'\left(v_\eta^k(t)\right), w - v_\eta^k(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \leq J_k(w) - J_k\left(v_\eta^k(t)\right) \quad \forall w \in \boldsymbol{V},$$

ce qui implique, d'après (3.88) que

$$\begin{aligned}&\left(\dot{v}_\eta^n(t), w - v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \left(\boldsymbol{A}v_\eta^n(t), w - v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + J(w) - J\left(v_\eta^n(t)\right) \\ &\geq \left(F_\eta(t), w - v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}, \forall w \in \boldsymbol{V}, \text{ p.p. } t \in (0,T).\end{aligned} \tag{3.89}$$

Alors v_η^n est une solution de $\mathcal{P}_{v_\eta}$.

On applique aussi (3.88), il résulte

$$\begin{aligned}&\left(\dot{v}_\eta^n(t), v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \left(\boldsymbol{A}v_\eta^n(t), v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \left(J_n'\left(v_\eta^n(t)\right), v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \\ &= \left(F_\eta(t), v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}, \quad \text{ p.p. } t \in (0,T).\end{aligned} \tag{3.90}$$

En utilisant (3.16), la monotonie de J_n' et le Théorème B.5.3 , pour déduire que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|v_\eta^k(t)\right\|_{\boldsymbol{H}}^2 + m_A\left\|v_\eta^k(t)\right\|_{\boldsymbol{V}}^2 + \left\|v_\eta^k(t)\right\|_{\boldsymbol{V}}^2 \leq \left(F_\eta(t), v_\eta^k(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}, \tag{3.91}$$

où $m_A = \min\left(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\right)$. On applique l'inégalité $ab \leq a^2 + b^2, a \geq 0, b \geq 0$, pour obtenir

$$\left|\left(F_\eta(t), v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}\right| \leq \frac{\left\|F_\eta(t)\right\|_{\boldsymbol{V}'}^2}{m_A + 2} + (m_A + 2)\left\|v_\eta^k(t)\right\|_{\boldsymbol{V}}^2. \tag{3.92}$$

On intègre l'égalité (3.90) sur $[0,t], t \in [0,T]$ en utilisant le Théorème B.5.3 et $F_\eta \in L^2\left(0,T;\boldsymbol{V}'\right)$, il résulte, après simplification d'écriture, l'inégalité

$$\left\|v_\eta^n(t)\right\|_{\boldsymbol{H}}^2 \leq a + b\int_0^t \left\|v_\eta^n(t)\right\|_{\boldsymbol{V}}^2 dt$$

où $a \geq 0, b \geq 0$. Alors d'après le Lemme de Gronwall on obtien

$$\exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0,T], \quad \left\|v_\eta^n(t)\right\|_{\boldsymbol{H}} \leq C, \quad \int_0^T \left\|v_\eta^n(t)\right\|_{\boldsymbol{V}'}^2 dt \leq C.$$

D'après (3.88) et Lemme 3.3.2(b.i)

$$\exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^T \left\|\dot{v}_\eta^n(t)\right\|_{\mathcal{V}'}^2 dt \leq C.$$

Donc, on peut extraire une sous-suite notée $\left(v_\eta^n\right)$ pour trouver que

$$\left\{\begin{array}{l} v_\eta^n \rightharpoonup v_\eta \text{ faiblement dans } L^2(0,T;\boldsymbol{V}) \text{ et faiblement étoile dans } L^\infty(0,T;\boldsymbol{H}), \\ \dot{v}_\eta^n \rightharpoonup \dot{v}_\eta \text{ faiblement étoile dans } L^2\left(0,T;\boldsymbol{V}'\right). \end{array}\right. \tag{3.93}$$

Il s'ensuit que

$$v_\eta \in C([0,T];\boldsymbol{H}) \text{ et } v_\eta^m(t) \rightharpoonup v_\eta(t) \text{ faiblement étoile dans } \boldsymbol{H}, \forall t \in [0,T]. \tag{3.94}$$

On intègre (3.86), on a $\forall u \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\dot{v}_\eta^n(t), w\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt + \int_0^T \left(\mathcal{A}v_\eta^n(t), w\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt + \int_0^T J_n(w)dt \\ &\geq \int_0^T \left(\dot{v}_\eta^n(t), v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt + \int_0^T \left(\mathcal{A}v_\eta^n(t), v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt \\ &+ \int_0^T J_n\left(v_\eta^n(t)\right) dt + \int_0^T \left(F_\eta(t), w - v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt, \end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\dot{v}_\eta^n(t), w\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt + \int_0^T \left(\mathcal{A}v_\eta^n(t), w\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt + \int_0^T J_n(w)dt \\ &\geq \frac{1}{2}\left\|v_\eta^n(T)\right\|_{\boldsymbol{H}}^2 - \frac{1}{2}\left\|v_\eta^n(0)\right\|_{\boldsymbol{H}}^2 + \int_0^T \left(\mathcal{A}v_\eta^n(t), v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt \\ &+ \int_0^T J_n\left(v_\eta^n(t)\right) dt + \int_0^T \left(F_\eta(t), w - v_\eta^n(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt. \end{aligned}$$

On utilise Lemme 3.3.2(ii)-(iii), (3.93), (3.94) et la semi-continuité inférieurement faiblement, on obtient que $\forall u \in L^2(0,T;\boldsymbol{V})$,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left(\dot{v}_\eta, w - v_\eta\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt + \int_0^T \left(\mathcal{A}v_\eta, w - v_\eta\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt + \int_0^T \left(J(w) - J\left(v_\eta\right)\right) dt \\ &\geq \int_0^T \left(F_\eta, w - v_\eta\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} dt. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente implique que

$$\begin{aligned} &\left(\dot{v}_\eta(t), w - v_\eta(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \left(\mathcal{A}v_\eta(t), w - v_\eta(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + J(w) - J\left(v_\eta(t)\right) \\ &\geq \left(F_\eta(t), w - v_\eta(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \quad \forall w \in \boldsymbol{V}, \quad \text{p.p. } t \in (0,T). \end{aligned} \tag{3.95}$$

On conclue que $\mathcal{P}_{v_\eta}$ a au moins une solution $v_\eta \in C(0,T;\boldsymbol{H}) \cap L^2(0,T;\boldsymbol{V}) \cap W^{1,2}\left(0,T;\boldsymbol{V}'\right)$

Pour l'unicité, soient $v_{1\eta}, v_{2\eta}$ deux solutions de $\mathcal{P}_{v_\eta}$. On utilise (3.95) à obtenir pour p.p. $t \in (0,T)$

$$\left(\dot{v}_{2\eta}(t) - \dot{v}_{1\eta}(t), v_{2\eta}(t) - v_{1\eta}(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} + \left(\mathcal{A}v_{2\eta}(t) - \mathcal{A}v_{1\eta}(t), v_{2\eta}(t) - v_{1\eta}(t)\right)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}} \leq 0$$

On intégre l'inégalité précédente, en utilisant Lemme 3.3.1(a), on trouve

$$\frac{1}{2}\|v_{2\eta}(t)-v_{1\eta}(t)\|_{\boldsymbol{H}}^2+m_A\int_0^t\|v_{2\eta}(s)-v_{1\eta}(s)\|_{\boldsymbol{V}}^2\,ds\le 0,\forall t\in[0,T],$$

ce qui implique $v_{1\eta}=v_{2\eta}$.

On considère maintenant $u_\eta:[0,T]\to\boldsymbol{V}$ la fonction définie par

$$u_\eta^\kappa=\int_0^t v_\eta^\kappa(s)ds+u_0^\kappa,\quad \forall t\in[0,T],\quad \kappa=1,2. \tag{3.96}$$

Dans l'étude du problème $\mathcal{P}_{u_\eta}$, on a le résultat suivant.

Lemme 3.3.4 *Le probléme P_{u_η} possède une solution unique qui satisfaisant la régularité exprimée dans* (3.76).

Démonstration. La preuve du lemme (3.3.4) est une conséquence du lemme (3.3.3) et la relation (3.96).

Deuxième étape

Soit $\pi=(\pi^1,\pi^2)\in L^2(0,T;\mathbb{L}_0)$ et considérez le problème auxilière

Problem P_{τ_π}. Trouver $\tau_\pi=(\tau_\pi^1,\tau_\pi^2):[0,T]\to\mathbb{L}_0$, tel que pour p.p. $t\in(0;T)$,

$$\textstyle\sum_{\alpha=1}^2(\dot\tau_\pi^\alpha(t)-\pi^\alpha(t)-\chi^\alpha(t),\delta^\alpha)_{L_0^\alpha}+a_0(\tau_\pi(t),\delta)=0,\ \forall\delta\in L_0, \tag{3.97}$$

$$\tau_\pi(0)=(\tau_0^1,\tau_0^2). \tag{3.98}$$

Lemme 3.3.5 *Il existe une solution uniqueτ_π au problème auxiliaire P_{τ_π} satisfaisant* (3.78).

Démonstration.

Par une application de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs, il existe une constante $c_0>0$ telle que

$$\int_{\Omega^\alpha}|\nabla\delta|^2dx+\frac{\lambda_0^\alpha}{\kappa_0^\alpha}\int_{\Gamma^\alpha}|\delta|^2da\ge c_0\int_{\Omega^\alpha}|\delta|^2dx,\quad\forall\delta\in\mathbb{L}_1^\alpha,\ \alpha=1,2.$$

Ainsi, on obtient

$$a_0(\delta,\delta)\ge c_1\|\delta\|_{\mathbb{L}_1}^2,\quad\forall\delta\in\mathbb{L}_1,$$

où $c_1 = \kappa_0 \min(1, c_0)/2$, ce qui implique que a_0 est $\mathbb{L}_1-$elliptique. Par conséquent, sur la base du classique argument de l'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques, l'équation variationnelle (3.97) admet une solution unique τ_π vérifiant $\tau_\pi(0) = \tau_0$ et la régularité (3.78).

Troisième étape

Soit $\mu = (\mu^1, \mu^2) \in L^2(0, T, \mathbb{Y})$ et on définit $\beta_\mu = (\beta_\mu^1, \beta_\mu^2) \in W^{1,2}(0, T, \mathbb{Y})$ par

$$\beta_\mu^\alpha(t) = \beta_0^\alpha + \int_0^t \mu^\alpha(s)ds, \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.99}$$

On utilise $u_\eta = (u_\eta^1, u_\eta^2)$ obtenu dans le Lemme 3.3.4 et $\tau_\pi = (\tau_\pi^1, \tau_\pi^2)$ obtenu dans le Lemme 3.3.5 pour construire le problème variationnel suivant.

Problème $P_{\psi_{\eta\pi\mu}}$. Trouver $\psi_{\eta\pi\mu} = (\psi_{\eta\pi\mu}^1, \psi_{\eta\pi\mu}^2) : [0, T] \to \boldsymbol{W}$ tel que pour $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\mathcal{R}^\alpha \nabla \psi_{\eta\pi\mu}^\alpha(t), \nabla \phi^\alpha\right)_{\mathbb{H}^\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(u_\eta^\alpha(t)) + \mathcal{G}^\alpha(\beta_\mu^\alpha(t), \tau_\pi^\alpha(t)), \nabla \phi^\alpha\right)_{\boldsymbol{H}^\alpha} \\ = (Q(t), \phi)_{\boldsymbol{W}} \quad \forall \phi \in \boldsymbol{W}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

On a les résultats suivants.

Lemme 3.3.6 *Le problème* $P_{\psi_{\eta\pi\mu}}$ *a une solution unique* $\psi_{\eta\pi\mu} = (\psi_{\eta\pi\mu}^1, \psi_{\eta\pi\mu}^2)$ *qui satisfait la régularité* (3.77).

Démonstration.

On définit une forme bilinéaire : $b(.,.) : \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{W} \to \mathbb{R}$ par

$$b(\psi, \phi) = \sum_{\alpha=1}^{2} (\boldsymbol{R}^\alpha \nabla \psi^\alpha, \nabla \phi^\alpha)_{\mathbb{H}^\alpha}, \quad \forall \psi, \phi \in \boldsymbol{W}. \tag{3.101}$$

On utilise (3.20) et (3.101) pour montrer que la forme bilinéaire $b(.,.)$ est continue, symétrique et coercitive sur $\mathbb{W}$, de plus en utilisant (3.35) et le Théorème de Représentation de Riesz, on peut définir un élément $Q_{\eta\pi\mu} : [0, T] \to \boldsymbol{W}$ tel que

$$\begin{aligned} (Q_{\eta\pi\mu}(t), \phi)_{\boldsymbol{W}} = (Q(t), \phi)_{\boldsymbol{W}} + \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\mathcal{E}^\alpha \varepsilon(u_\eta^\alpha(t)) + \mathcal{G}^\alpha(\beta_\mu^\alpha(t), \tau_\pi^\alpha(t)), \nabla \phi^\alpha\right)_{\boldsymbol{H}^\alpha} \\ \forall \phi \in \boldsymbol{W},\ t \in (0, T). \end{aligned}$$

On applique le Théorème de Lax-Milgram pour en déduire qu'il existe un élément unique $\psi_{\eta\pi\mu}(t) = (\psi^1_{\eta\pi\mu}(t), \psi^2_{\eta\pi\mu}(t)) \in \boldsymbol{W}$ tel que

$$b(\psi_{\eta\pi\mu}(t), \phi) = (Q_{\eta\pi\mu}(t), \phi)_{\boldsymbol{W}} \quad \forall \phi \in \boldsymbol{W}. \tag{3.102}$$

On conclue que $\psi_{\eta\pi\mu}$ est une solution du problème $P_{\psi_{\eta\pi\mu}}$. Soit $t_1, t_2 \in [0,T]$, il résulte de (3.100) que

$$\begin{aligned}\|\psi_{\eta\pi\mu}(t_1) - \psi_{\eta\pi\mu}(t_2)\|_{\boldsymbol{W}} \leq C\big(&\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_{\boldsymbol{V}} + \|\beta_\mu(t_1) - \beta_\mu(t_2)\|_{\mathbb{Y}} \\ &+\|\tau_\pi(t_1) - \tau_\pi(t_2)\|_{\mathbb{L}_0} + \|Q(t_1) - Q(t_2)\|_{\boldsymbol{W}}\big).\end{aligned} \tag{3.103}$$

Depuis (3.27), (3.77), (3.78) et $\beta_\mu \in W^{1,2}(0,T;\mathbb{Y})$, inégalité (3.103) implique que

$$\psi_{\eta\pi\mu} \in \mathcal{C}(0,T;\boldsymbol{W}).$$

Quatrième étape

Soit $\theta = (\theta^1, \theta^1) \in L^2(0.T;\mathbb{L}_0)$ et on considére le problème auxiliair suivant.

Problem P_{ξ_θ}. *Trouver* $\xi_\theta = (\xi^1_\theta, \xi^2_\theta) : [0,T] \to \mathbb{L}_1$ telle que pour p.p. $t \in (0,T)$,

$$\xi_\theta(t) \in \mathcal{K}, \quad \sum_{\alpha=1}^{2} (\dot{\xi}^\alpha_\theta(t) - \theta^\alpha(t), \mu^\alpha - \xi^\alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega^\alpha)} + a_1(\xi_\theta(t), \mu - \xi_\theta(t)) \geq 0, \quad \forall \mu \in \mathcal{K}. \tag{3.104}$$

Dans l'étude du problème P_{ξ_θ} on a le résultat suivant.

Lemme 3.3.7 *Le problème P_{ξ_θ} admet une seule solution $\xi_\theta = (\xi^1_\theta, \xi^2_\theta)$ qui vérifie la régularité* (3.80) *.*

Démonstration.

La démonstration du Lemme 3.3.7 est similaire à celle du Lemme 2.3.4. Pour plus de details, voir la preuve dans les pages 50,51.

Enfin, on passe maintenant à la dernière étape de la preuve du théorème 3.2.1 dans laquelle on utilise un argument de point fixe.

Cinquième étape

Pour cela, on considère l'application :

$$\Sigma : L^2(0,T;\boldsymbol{V}' \times \mathbb{Y} \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0) \to L^2(0,T;\boldsymbol{V}' \times \mathbb{Y} \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)$$

définie par

$$\Sigma(\eta,\mu,\pi,\theta)=\big(\Sigma_1(\eta,\mu,\pi,\theta),\Sigma_2(\eta,\mu,\pi,\theta),\Sigma_3(\eta,\mu,\pi,\theta),\Sigma_4(\eta,\mu,\pi,\theta)\big), \tag{3.105}$$

avec

$$\begin{aligned}(\Sigma_1(\eta,\mu,\pi,\theta)(t),v)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}=&\sum_{\alpha=1}^{2}\big(\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(u_\eta^\alpha(t)),\xi_\theta^\alpha(t))+\big(\mathcal{E}^\alpha\big)^*\nabla\psi_{\eta\pi\mu}^\alpha(t),\ \varepsilon(v^\alpha)\big)_{\mathcal{H}^\alpha}\\ &+\sum_{\alpha=1}^{2}\big(\mathcal{F}^\alpha(\beta_\mu^\alpha(t),\tau_\pi^\alpha(t)),\ \varepsilon(v^\alpha)\big)_{\mathcal{H}^\alpha},\quad\forall v\in\boldsymbol{V},\end{aligned} \tag{3.106}$$

$$\Sigma_2(\eta,\mu,\pi,\theta)(t)=\Big(\Theta^1\big(\varepsilon(u_\eta^1(t)),\xi_\theta^1(t),\beta_\mu^1(t),\tau_\pi^1(t)\big)\ ,\ \Theta^2\big(\varepsilon(u_\eta^2(t)),\xi_\theta^2(t),\beta_\mu^2(t),\tau_\pi^2(t)\big)\Big), \tag{3.107}$$

$$\Sigma_3(\eta,\mu,\pi,\theta)(t)=\Big(\Psi^1\big(\varepsilon(u_\eta^1(t)),\xi_\theta^1(t),\beta_\mu^1(t),\tau_\pi^1(t)\big)\ ,\ \Psi^2\big(\varepsilon(u_\eta^2(t)),\xi_\theta^2(t),\beta_\mu^2(t),\tau_\pi^2(t)\big)\Big), \tag{3.108}$$

$$\Sigma_4(\eta,\mu,\pi,\theta)(t)=\Big(S^1(\varepsilon(u_\eta^1(t)),\xi_\theta^1(t))\ ,\ S^2(\varepsilon(u_\eta^2(t)),\xi_\theta^2(t))\Big). \tag{3.109}$$

On a les résultats suivants.

Lemme 3.3.8 *L'opérateur Σ admet un point fixe unique$(\eta_*,\mu_*,\pi_*,\theta_*)\in L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)$.*

Démonstration.

On montre que pour un nombre entier positif n, la puissance n ième de l'opérateur Σ, notée Σ^n, est une contraction dans $L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)$.

Soient $(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1)$, $(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2)$ in $L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)$ et soit $t\in[0,T]$. Pour simplifier, on utilise la notation $u_i=u_{\eta_i}$, $v_i=\dot u_{\eta_i}$, $\psi_i=\psi_{\eta_i\pi_i\mu_i}$, $\beta_i=\beta_{\mu_i}$, $\tau_i=\tau_{\pi_i}$ et $\xi_i=\xi_{\theta_i}$ pour $i=1,2$. De la définition (3.105)–(3.109) combinée aux hypothèses (3.17), (3.18) et (3.21)–(3.24), on conclut qu'il existe $C>0$ tel que

$$\begin{aligned}&\|\Sigma_1(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1)(t)-\Sigma_1(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2)(t)\|_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\ &\le\sum_{\alpha=1}^{2}\|\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(u_1^\alpha(t)),\xi_1^\alpha(t))-\mathcal{B}^\alpha(\varepsilon(u_2^\alpha(t)),\xi_2^\alpha(t))\|_{\mathcal{H}^\alpha}^2\\ &+\sum_{\alpha=1}^{2}\|(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\psi_1^\alpha(t)-(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\psi_2^\alpha(t)\|_{\mathcal{H}^\alpha}^2\\ &+\sum_{\alpha=1}^{2}\|\mathcal{F}^\alpha(\beta_1^\alpha(t)),\tau_1^\alpha(t))-\mathcal{F}^\alpha(\beta_2^\alpha(t)),\tau_2^\alpha(t))\|_{\mathcal{H}^\alpha}^2,\end{aligned}$$

en utilisant (3.17)*(a)*, (3.18)*(a)* *et* (3.24)*(a)*

$$\begin{aligned}
&\|\Sigma_1(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1)(t)-\Sigma_1(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2)(t)\|_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\
&\le\sum_{\alpha=1}^{2}2L_{\mathcal{B}^\alpha}^2\left(\|u_1^\alpha(t)-u_2^\alpha(t)\|_{\mathcal{V}^\alpha}^2+\|\xi_1^\alpha(t)-\xi_2^\alpha(t)\|_{L^2(\Omega^\alpha)}^2\right)\\
&+\sum_{\alpha=1}^{2}\|(\mathcal{E}^\alpha)^*\|_{L^\infty(\Omega^\alpha)}^2\|\nabla\psi_1^\alpha(t)-\nabla\psi^\alpha(t)\|_{\mathbb{H}^\alpha}^2\\
&+\sum_{\alpha=1}^{2}2L_{\mathcal{F}^\alpha}^2\left(\|\beta_1^\alpha(t)-\beta_2^\alpha(t)\|_{\mathbb{Y}^\alpha}^2+\|\tau_1^\alpha(t)-\tau_2^\alpha(t)\|_{L^2(\Omega^\alpha)}^2\right),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\big\|\Sigma_1\big(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\big)(t)-\Sigma_1\big(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\big)(t)\big\|_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}^2\le C\big(\big\|u_1(t)-u_2(t)\big\|_{\boldsymbol{V}}^2\\
&+\big\|\psi_1(t)-\psi_2(t)\big\|_{\boldsymbol{W}}^2+\big\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\big\|_{\mathbb{Y}}^2+\big\|\tau_1(t)-\tau_2(t)\big\|_{\mathbb{L}_0}^2+\big\|\xi_1(t)-\xi_2(t)\big\|_{\mathbb{L}_0}^2\big).
\end{aligned}\tag{3.110}$$

où $C=\max\limits_{\alpha=1,2}(2L_{\mathcal{B}^\alpha}^2,\|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega^\alpha)}^2,2L_{\mathcal{F}^\alpha}^2)$.

De plus, à partir de (3.96), on a

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{\mathcal{V}}\le\int_0^t\|v_1(s)-v_2(s)\|_{\mathcal{V}}ds,\quad\forall t\in[0,T].\tag{3.111}$$

Remplacer $\eta=\eta_1$, $w=v_2$ *et* $\eta=\eta_2$, $w=v_1$ *dans (3.89), on trouve*

$$\begin{aligned}
(\dot v_1-\dot v_2,v_1-v_2)_{\mathcal{V}'\times\mathcal{V}}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(v_1^\alpha)-\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(v_2^\alpha),\varepsilon(v_1^\alpha-v_2^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}&\\
+(\eta_1-\eta_2,v_1-v_2)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}\le 0.&
\end{aligned}$$

On intégre cette inégalité par rapport au temps, on utilise la condition initiale $v_1(0)=v_2(0)=(v_0^1,v_0^2)$, *l'hypothèse (3.16)(c) et l'inégalité* $(\dot v_1-\dot v_2,v_1-v_2)_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}\ge 0$ *pour trouver :*

$$\min(m_{\mathcal{A}^1},m_{\mathcal{A}^2})\int_0^t\|v_1(s)-v_2(s)\|_{\boldsymbol{V}}^2ds\le-\int_0^t(\eta_1(s)-\eta_2(s),v_1(s)-v_2(s))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}ds.$$

Alors, en utilisant l'inégalité $2ab\le\frac{a^2}{\epsilon}+\epsilon b^2$, *on obtient*

$$\int_0^t\|v_1(s)-v_2(s)\|_{\boldsymbol{V}}^2ds\le C\int_0^t\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|_{\boldsymbol{V}'}^2ds.\tag{3.112}$$

avec une constante positive C *qui peut varier d'une ligne à l'autre.*

De (3.111) et (3.112), on déduit

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{\boldsymbol{V}}^2\le C\int_0^t\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|_{\boldsymbol{V}'}^2ds.\tag{3.113}$$

La définition (3.99) donne

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathbb{Y}}^2 \leq \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{Y}}^2 ds. \tag{3.114}$$

Par contre, à partir de (3.97), on peut écrire

$$\begin{aligned}&\big(\dot{\tau}_1(t) - \dot{\tau}_2(t), \tau_1(t) - \tau_2(t)\big)_{\mathbb{L}_0} + a_0(\tau_1(t) - \tau_2(t), \tau_1(t) - \tau_2(t))\\ &= \big(\pi_1(t) - \pi_2(t), \tau_1(t) - \tau_2(t)\big)_{\mathbb{L}_0}\end{aligned}$$

p.p. $t \in (0, T)$.

On intégre cette égalité par rapport au temps, et on utilise les conditions initiales $\tau_1(0) = \tau_2(0) = (\tau_0^1, \tau_0^2)$ *et inégalité* $a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) \geq 0$, *pour trouver*

$$\frac{1}{2}\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \leq \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}.\|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{\mathbb{L}_0} ds.$$

Alors, en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, *on obtient*

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \leq \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds$$

et, en utilisant l'inégalité de Gronwall, on trouve

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \leq C \int_0^t \|\pi_1(s) - \pi_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds \quad p.p.\ t \in (0, T). \tag{3.115}$$

De plus, (3.100) et des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (3.103) donnent

$$\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_{\boldsymbol{W}} \leq C\big(\|u_1(t) - u_2(t)\|_{\boldsymbol{V}} + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{\mathbb{Y}} + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}\big) \quad p.p.\ t \in (0, T). \tag{3.116}$$

De plus, en remplaçant $\theta = \theta_1$, $\mu = \xi_1$ *et* $\theta = \theta_2$, $\mu = \xi_2$ *dans (3.104) et en soustrayant les deux inégalités obtenues, on trouve*

$$\begin{aligned}&(\dot{\xi}_1(t) - \dot{\xi}_2(t), \xi_1(t) - \xi_2(t))_{\mathbb{L}_0} + a_1(\xi_1(t) - \xi_2(t), \xi_1(t) - \xi_2(t))\\ &\leq (\theta_1(t) - \theta_2(t), \xi_1(t) - \xi_2(t))_{\mathbb{L}_0}, \quad p.p.\ t \in (0, T).\end{aligned}$$

On intègre l'inégalité précédente et en appliquant l'inégalité de Hölder et Young avec le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds \quad p.p.\ t \in (0, T). \tag{3.117}$$

On substitue (3.112)-(3.117) *dans* (3.110) *on obtient*

$$\begin{aligned}&\left\|\Sigma_1\big(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\big)(t)-\Sigma_1\big(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\big)(t)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\leq\\&C\int_0^t\left\|\big(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\big)(s)-\big(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\big)(s)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}ds\quad p.p.\ t\in(0,T).\end{aligned}\tag{3.118}$$

D'autre part, l'hypothèse (3.21) *avec définition* (3.106)*, il résulte*

$$\begin{aligned}&\|\Sigma_2\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma_2\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\&=\sum_{\alpha=1}^{2}\|\Theta^\alpha\left(\varepsilon(u_1(t)),\xi_1(t),\beta_1(t),\tau_1(t)\right)-\Theta^\alpha\left(\varepsilon(u_2(t)),\xi_2(t),\beta_2(t),\tau_2(t)\right)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0^\alpha\times\mathbb{L}_0^\alpha}\\&\leq C\left(\|u_1(t)-u_2(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'}+\|\xi_1(t)-\xi_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}+\|\beta_1(t)-\beta_2(t)\|^2_{\mathbb{Y}}+\|\tau_1(t)-\tau_2(t)\|^2_{\mathbb{L}_0}\right)\\&\qquad\qquad p.p.\ t\in(0,T),\end{aligned}$$

On utilise (3.113)-(3.117) *et on obtient*

$$\begin{aligned}&\|\Sigma_2\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma_2\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\&\leq C\int_0^t\left(\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|^2_{\boldsymbol{V}'}+\|\theta_1(s)-\theta_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0}+\|\mu_1(s)-\mu_2(s)\|^2_{\mathbb{Y}}+\|\pi_1(s)-\pi_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0}\right)ds\\&\leq C\int_0^t\|(\eta_1,\mu_1,\beta_1,\theta_1)(s)-(\eta_2,\mu_2,\beta_2,\theta_2)(s)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}ds,\end{aligned}\tag{3.119}$$

Aussi on utilise (3.108) et moyennant des arguments similaires on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned}&\|\Sigma_3\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma_3\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\&\leq C\int_0^t\|(\eta_1,\mu_1,\beta_1,\theta_1)(s)-(\eta_2,\mu_2,\beta_2,\theta_2)(s)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}ds.\end{aligned}\tag{3.120}$$

Aussi, d'une manière similaire, de (3.112)*,* (3.116) *et de* (3.21)*(a), il s'ensuit que*

$$\begin{aligned}&\|\Sigma_4\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma_4\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\&\leq C\int_0^t\left(\|\eta_1(s)-\eta_2(s)\|^2_{\boldsymbol{V}'}+\|\theta_1(s)-\theta_2(s)\|^2_{\mathbb{L}_0}\right)ds\\&\leq C\int_0^t\|(\eta_1,\mu_1,\beta_1,\theta_1)(s)-(\eta_2,\mu_2,\beta_2,\theta_2)(s)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}ds.\end{aligned}\tag{3.121}$$

On substitue (3.118)-(3.121)*, avec* (3.105) *on conclue qu'il existe une constante positive* $C>0$ *vérifiant*

$$\begin{aligned}&\|\Sigma\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\&\qquad\qquad\leq C\int_0^t\|\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(s)-\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(s)\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}ds,\end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned}
&\left\|\Sigma^2\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma^2\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\
&\qquad\leq C\int_0^t\left\|\Sigma\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(s)-\Sigma\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(s)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}ds\\
&\qquad\leq C\int_0^t C\int_0^{s_1}\left\|\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(r)-\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(r)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}drds_1\\
&\qquad\leq C^2\int_0^t\int_0^{s_1}\left\|\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(r)-\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(r)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}drds_1,\\
&\left\|\Sigma^3\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma^3\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\
&\qquad\leq C^3\int_0^t\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\left\|\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(l)-\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(l)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}dlds_2ds_1,\\
&\quad\vdots\\
&\left\|\Sigma^n\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma^n\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\
&\leq C^n\underbrace{\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-1}}}_{n\ fois}\left\|\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(l)-\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(l)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}dlds_{n-1}\cdots ds_1\\
&\leq C^n\left\|\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)-\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)\right\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)}\underbrace{\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-2}}}_{(n-1)\ fois}ds_{n-1}\cdots ds_1.
\end{aligned}$$

On sait que $\displaystyle\int_0^{s_{n-2}}ds_{n-1}=s_{n-2}$

et que $\displaystyle\int_0^{s_{n-3}}\int_0^{s_{n-2}}ds_{n-1}ds_{n-2}=\int_0^{s_{n-3}}s_{n-2}ds_{n-2}=\frac{s_{n-3}^2}{2}$,

et $\displaystyle\int_0^{s_{n-4}}\int_0^{s_{n-3}}\int_0^{s_{n-2}}ds_{n-1}ds_{n-2}ds_{n-3}=\frac{s_{n-4}^3}{3!}$.

Enfin on a

$$\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_{n-2}}ds_{n-1}\cdots ds_1=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\left\|\Sigma^n\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)(t)-\Sigma^n\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)(t)\right\|^2_{\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0}\\
&\qquad\qquad\leq C^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\left\|\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)-\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)\right\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left\|\Sigma^n\left(\eta_1,\mu_1,\pi_1,\theta_1\right)-\Sigma^n\left(\eta_2,\mu_2,\pi_2,\theta_2\right)\right\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)}\leq\\
&\frac{C^nT^n}{n!}\left\|\left(\eta_1,\mu_1,\theta_1,\pi_1\right)-\left(\eta_2,\mu_2,\theta_2,\pi_2\right)\right\|^2_{L^2(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)}.
\end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{C^nT^n}{n!}=0$, *alors pour* n *suffisamment grand, l'opérateur* Σ^n *est une contraction sur l'espace de Banach* $L^2\left(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0\right)$, *il existe donc un unique* $(\eta_*,\mu_*,\pi_*,\theta_*)\in L^2\left(0,T;\boldsymbol{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0\right)$ *tel que*

$$\Sigma^n\left(\eta_*,\mu_*,\pi_*,\theta_*\right)=\left(\eta_*,\mu_*,\pi_*,\theta_*\right),$$

et grâce du Théorème de point fixe de Banach on déduit que de Σ *admet point fixe unique, ce qui termine la démonstration du Lemme 3.3.8.*

Maintenant, on a tous les ingrédients pour prouver le théorème 3.2.1.

Démonstration.

Soit $\left(\eta_*,\mu_*,\pi_*,\theta_*\right)\in L^2(0,T;\mathcal{V}'\times\mathbb{Y}\times\mathbb{L}_0\times\mathbb{L}_0)$ *soit le point fixe* Σ *défini par* (3.105)–(3.109) *pour simplifier l'écriture, on suppose que*

$$u_*=u_{\eta_*},\quad \tau_*=\tau_{\pi_*},\quad \psi_*=\psi_{\eta_*\pi_*\mu_*},\quad \xi_*=\xi_{\theta_*},\quad \beta_*=\beta_{\mu_*}. \tag{3.122}$$

On preuve que $\{u_*,\psi_*,\tau_*,\xi*,\beta_*\}$ *satisfait* (3.61)–(3.66) *et les régularités* (3.76)–(3.80). *D'aprés* (3.71) *pour* $\eta=\eta_*$ *et on utilise* (3.122) *pour trouver*

$$\begin{aligned}&(\ddot{u}_*(t),w-\dot{u}_*(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}+\sum_{\alpha=1}^{2}(\mathcal{A}^\alpha\varepsilon(\dot{u}_*^\alpha(t)),\varepsilon(w^\alpha-\dot{u}_*^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}+J(w)-J(\dot{u}_*(t))\\&+(\eta_*(t),w-\dot{u}_*(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}\geq(F(t),w-\dot{u}_*(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}},\quad\forall w\in\boldsymbol{V},\ p.p.\ t\in(0,T).\end{aligned} \tag{3.123}$$

On combine les équations $\Sigma_1\left(\eta_*,\mu_*,\pi_*,\theta_*\right)=\eta_*$ *et* $\Sigma_2\left(\eta_*,\mu_*,\pi_*,\theta_*\right)=\mu_*$ *avec* (3.106) *et* (3.107) *il vient*

$$\begin{aligned}&(\eta_*(t),w-\dot{u}_*(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}=\textstyle\sum_{\kappa=1}^{2}\left(\mathcal{B}^\alpha\left(\varepsilon(u_*^\alpha(t)),\xi_*^\alpha(t)\right)\right),\varepsilon(w-\dot{u}_*(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}\\&+\textstyle\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\mathcal{F}^\alpha\left(\beta_*^\alpha(t)\right),\tau_*^\alpha(t)\right))+(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\psi_*^\alpha(t),\varepsilon(w-\dot{u}_*(t)))_{\mathcal{H}^\alpha},\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$\mu_*^\alpha(t)=\Theta^\alpha\left(\varepsilon(u_*^\alpha(t)),\xi_*^\alpha(t),\beta_*^\alpha(t)),\tau_*^\alpha(t)\right))\quad p.p.t\in(0,T),\alpha=1,2. \tag{3.125}$$

De (3.123) et (3.124), on a

$$\begin{aligned}&(\ddot{u}_*(t),w-\dot{u}_*(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}}+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\mathcal{A}^\alpha\left(\varepsilon(\dot{u}_*^\alpha(t))\right)+\mathcal{B}^\alpha\left(\varepsilon(u_*^\alpha(t)),\xi_*^\alpha(t)\right)\right),\varepsilon(w^\alpha-\dot{u}_*^\alpha(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}\\&+J(w)-J(\dot{u}_*^\alpha(t))+\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\mathcal{F}^\alpha\left(\beta_*^\alpha(t)\right),\tau_*^\alpha(t)\right))+(\mathcal{E}^\alpha)^*\nabla\psi_*^\alpha(t),\varepsilon(w-\dot{u}_*(t)))_{\mathcal{H}^\alpha}\\&\geq(F(t),w-\dot{u}_*(t))_{\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{V}},\quad\forall w\in\boldsymbol{V}.\end{aligned} \tag{3.126}$$

Ainsi, de (3.124) et (3.125), on a

$$\dot{\beta}_*^\alpha(t) = \Theta^\xi\left(\varepsilon(u_*^\alpha(t)), \xi_*^\alpha(t), \beta_*^\alpha(t)), \tau_*^\alpha(t))\right), \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.127}$$

On écrit maintenant (3.1) pour $(\eta, \pi, \mu) = (\eta_*, \pi_* \mu_*)$ *et on utilise (3.122), il vient*

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\mathcal{R}^\alpha\nabla\psi_*^\xi(t) - \mathcal{E}^\alpha\varepsilon\left(u_*^\alpha(t)\right) - \mathcal{G}^\alpha\left(\beta_*^\alpha(t), \tau_*^\alpha(t)\right), \nabla\phi^\alpha\right)_{\mathcal{H}^\alpha} = (Q(t), \phi)_{\mathcal{W}}, \quad \forall\phi\in\mathcal{W}. \tag{3.128}$$

On combine les égalités $\Sigma_3(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) = \pi_*$ *et* $\Sigma_4(\eta_*, \mu_*, \pi_*, \theta_*) = \theta_*$ *combiné avce* (3.108) *et* (3.109), *pour obtenir*

$$\pi_*^\alpha(t) = \Psi^\alpha\left(\varepsilon(u_*^\alpha(t)), \xi_*^\alpha(t), \beta_*^\alpha(t), \tau_*^\alpha(t)\right), \quad \alpha = 1, 2, \tag{3.129}$$

$$\theta_*^\alpha(t) = S^\alpha\left(\varepsilon(u_*^\alpha(t)), \xi_*^\alpha(t)\right), \quad \alpha = 1, 2, \tag{3.130}$$

on substitue (3.129) *dans* (3.20), *on déduit*

$$\left.\begin{aligned} a_0(\tau_*(t), \delta) = &\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\Psi^\alpha\left(\varepsilon(u_*^\alpha(t)), \xi_*^\alpha(t), \beta_*^\alpha(t), \tau_*^\alpha(t)\right), \delta^\alpha\right)_{\mathbb{L}_0^\alpha} \\ &-\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\dot{\tau}_*^\alpha(t) - \chi^\alpha(t), \delta^\alpha\right)_{\mathbb{L}_0^\alpha}, \quad \forall\delta\in\mathbb{L}_0, \end{aligned}\right\} \tag{3.131}$$

Pour $t \in [0; T]$ *; et on substitue* (3.130) *dans* (3.104), $\xi_*(t)\in\mathcal{K}$ *on obtient*

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\dot{\xi}_*^\alpha(t), \lambda^\alpha - \xi_*^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)} + a_1(\xi_*(t), \lambda - \xi_*(t)) \\ &\geq \sum_{\alpha=1}^{2}\left(S^\alpha\left(\varepsilon(u_*^\alpha(t)), \xi_*^\alpha(t)\right), \lambda^\alpha - \xi_*^\alpha(t)\right)_{L^2(\Omega^\alpha)}, \quad \forall\lambda\in\mathcal{K}, \end{aligned}\right\} \tag{3.132}$$

Finalement, les relations (3.126)-(3.127) , (3.131) *et* (3.132) *me permettent de conclure que* $\{u_*, \psi_*, \tau_*, \alpha_*, \beta_*\}$ *solution du Probléme* $\mathcal{PV}$. *Et la régularité* (3.1)-(3.5) *suivre les Lemmes* 3.3.2 − 3.3.4 *et la relation* (3.99).

Unicité.

L'unicité de la solution est une conséquence de l' unicité du point fixe de l'opérateur $\Sigma(.,.,.,.)$, *défine par* (3.105)- (3.109).

Conclusion générale

Dans cette thèse, on a étudié théoriquement trois problèmes de contact entre deux corps piézoéléctriques.

Le premier problème, concerne le contact entre deux corps thérmo-électro-élastique avec endommagement, où il est modélisé par les conditions de compliance normale et frottement de Coulomb avec adhésion. Le deuxième problème touche le contact entre deux corps thérmo-électro-vivcoélastique avec endommagement, où il est élaboré par les conditions de compliance normale avec adhésion. Le dérnier problème s'interesse au contact entre deux corps thérmo-électro-vivcoélastique avec endommagement, où il est conçu par les conditions de frottement de Tresca avec un variable interne.

Pour chaque problème, on a présenté sa formulation, puis on a utilisé les formules de Green pour trouver la formulation variationnelle du problème. On a preuver l'existence et l'unicité de la solution des problèmes précédents par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution différentielle, inégalité variationnelle parabolique, théorème du Lax-Milgram, le lemme de Gronwall et point fixe de Banach.

Annexe

Dans cette annexe, on donne des rappels sur les notations générales de la mécanique nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités, puis on donne des rappels sur les espaces fonctionnels et des quelques rèsultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les inéquations variationnelles, les équations d'évolution, les lemmes de Gronwall...ect
cette annexe est divisée en deux sections : La premiere représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où on introduit les cadres physiques utilisés dans cette thése, les lois de comportement (élastiques, électro-élastiques, électro-viscoélastiques) et les conditions aux limites de contact. la deuxième section est consacrée à des rappels sur les espases de Hilbert, quelques éléments d'analyse non linéaire, des résultats d'existence et d'unicité, les espaces fonctionnels.

Contenu :

Annexe A

Modélisation

A.1 Cadre physique

Les phénomènes de contact considérés dans cette thèse sont décrits par deux cadres physiques suivants ;

Cadre physique n$^0 1$ *(Problème mécanique.) On considére deux corps matériels qui occupent des domaines bornés* $\Omega^1 \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega^2 \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. *Pour chaque* $\alpha = 1.2$, *on suppose que la frontière régulière* $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$, *est partitionnée en trois parties mesurables* $\Gamma_1^\alpha, \Gamma_2^\alpha, \Gamma_3^\alpha$, *tel que* $mes\Gamma_1^\alpha > 0$. *Nous notons que* ν^α *la normale unitaire sortante à* Γ^α, *les corps sont encastrés sur* Γ_1^α. *Sur* Γ_2^α *agissent des tractions surfaciques de densité* f_2^α *et dans* Ω^α *agissent des forces volumiques de densités* f_0^α.
On suppose que f_2^α *et* f_0^α, *varient très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasi-statiques. Soit* $T > 0$ *et soit* $[0, T]$ *l'intervalle de temps en question voir figure 1. Les corps sont en contact avec adhésion et avec ou sans frottement sur la partie* Γ_3^α. *Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Mon objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps.*

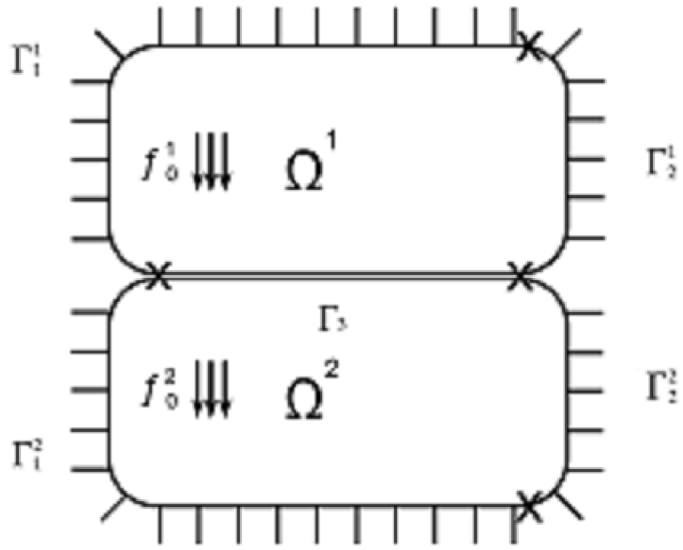


Figure 1 : Cadre Physique 1

***Cadre physique n*^{0}2** *(Problème électro-mécanique.) On considére deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^1 \subset \mathbb{R}^d$, $\Omega^2 \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$. Pour chaque $\alpha = 1.2$, on suppose que la frontière $\Gamma^\alpha = \partial\Omega^\alpha$ est régulière et partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\alpha, \Gamma_2^\alpha$ et Γ_3^α d'une part et en deux parties mesurables Γ_a^α et Γ_b^α d'autre part telles que mes$\Gamma_1^\alpha > 0$ et mes$\Gamma_a^\alpha > 0$. On note que ν^α la normale unitaire sortante à Γ^α et les corps sont encastrées sur Γ_1^α . Sur Γ_2^α agissent des tractions surfaciques de densité f_2^α et dans Ω^α agissent des forces volumiques de densités f_0^α, voir figure 2. On suppose que f_2^α et f_0^α, varient très lentement par rapport au temps et soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps. En plus de l'action des forces des tractions, le corps Ω^α est soumis à l'action des chaleurs électriques de densité volumiques q_0^α et de chaleurs électriques surface. Les deux corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a^α de la frontiére ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^α, agissent sur Γ_b^α. La différence entre cadre physiques mécanique et cadre physiques électro-mécanique résulte du fait que en deuxième, on prend en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques dans les deux corps.*

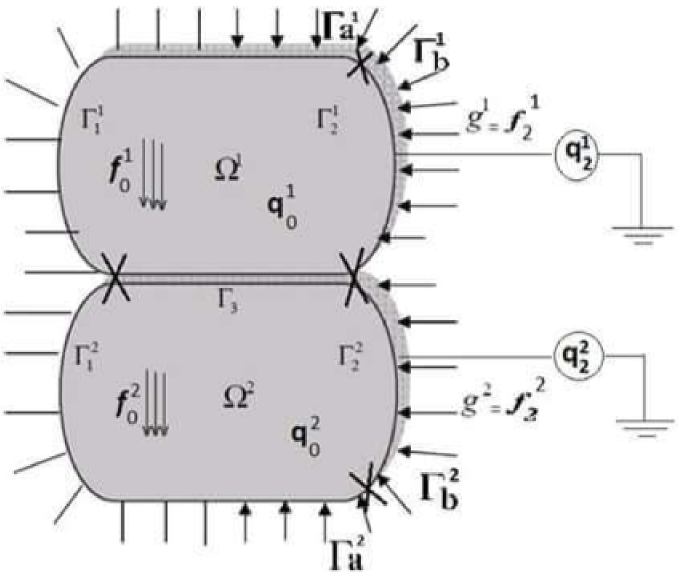


Figure 2 : Cadre Physique 2

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent aux cadres physiques présentés, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette thèses.

On désigne par $\mathbb{S}^d$ *l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur* $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, " $\cdot$ " *et* " $\| \cdot \|$ " *représentant respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^d$ *et* $\mathbb{S}^d$. *Ainsi, on a*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^\alpha &= u_i^\alpha \cdot v_i^\alpha, \qquad \| \boldsymbol{v}^\alpha \| = (\boldsymbol{v}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^\alpha)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall \boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha &= \sigma_i^\alpha \cdot \tau_i^\alpha, \qquad \| \boldsymbol{\tau}^\alpha \| = (\boldsymbol{\tau}^\alpha \cdot \boldsymbol{\tau}^\alpha)^{\frac{1}{2}}, \qquad \forall \boldsymbol{\sigma}^\alpha, \boldsymbol{\tau}^\alpha \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\boldsymbol{v}^\alpha \in H_1^\alpha$, *on note par* v_ν^α *et* $\boldsymbol{v}_\tau^\alpha$ *les composantes normales et tangentielles à la frontière, définies par :*

$$v_\nu^\alpha = \boldsymbol{v}^\alpha \cdot \boldsymbol{\nu}^\alpha, \qquad \boldsymbol{v}_\tau^\alpha = \boldsymbol{v}^\alpha - v_\nu^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha. \tag{A.1}$$

On désigne par $\boldsymbol{\sigma}^\alpha = \boldsymbol{\sigma}^\alpha(x,t)$ *le champ des contraintes,* $\boldsymbol{u}^\alpha = \boldsymbol{u}^\alpha(x,t)$, *le champ des déplacements et* $\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha)$ *le champ des déformations infinitésimales.*
Pour simplifier les notations, on n'indique pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \overline{\Omega^\alpha}$ *et* $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ on dénote par σ^α_ν et $\boldsymbol{\sigma}^\alpha_\tau$ les composantes normale et tangentielle à la frontière, données par

$$\sigma^\alpha_\nu = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha) \cdot \boldsymbol{\nu}^\alpha, \qquad \boldsymbol{\sigma}^\alpha_\tau = \boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha - \sigma^\alpha_\nu \cdot \boldsymbol{\nu}^\alpha. \tag{A.2}$$

En utilisant (A.1) et (A.2), on obtient la relation

$$(\boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha) \cdot \boldsymbol{v}^\alpha = \sigma^\alpha_\nu v^\alpha_\nu + \boldsymbol{\sigma}^\alpha_\tau \cdot \boldsymbol{v}^\alpha_\tau, \tag{A.3}$$

qui va intervenir tout au long de cette thèse, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

A.2 Phénomènes mécaniques et thermiques

1) Endommagement

L'endommagement est un phénomène trés important en mécanique parcequ'il affecte directement la structure des machines, c'est une variable interne, on la note par ξ^α qui varie entre o et 1. Si $\xi^\alpha = 1$, les matériaux sont complètement endommagés, si $\xi^\alpha = 0$, il n'y a pas d'endommagement dans les matériaux, si $0 < \xi^\alpha < 1$ l'endommagement est partiel.

L'évolution du champ d'endommagemnt élastique est décrite par :

$$\dot{\xi}^\alpha - \kappa^\alpha \bigtriangleup \xi^\alpha + \partial\psi_{K^\alpha}(\xi^\alpha) \ni \Psi^\alpha(\sigma^\alpha - \mathcal{A}^\alpha \varepsilon(\dot{u}^\alpha), \varepsilon(u^\alpha), \xi^\alpha), \tag{A.4}$$

où κ^α est une constante positive, Ψ^α est la fonction source de l'endommagement, $\partial\psi_{K^\alpha}$ représente le sous-différentiel de la fonction d'indicateur $\Psi^\alpha_{K^\alpha}$ du l'ensemble K^α qui désigne l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles définies par :

$$K^\alpha = \{\xi^\alpha \in H^1(\Omega^\alpha) : 0 \leq \xi^\alpha \leq 1, \ \textit{p.p. dans } \Omega^\alpha\}. \tag{A.5}$$

2) Conduction thermique

La conduction thermique est un mode de transfert de température entre deux milieux en contact.
La tempèrature est définie par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'energie comme suit

$$\dot{\tau}^\alpha - \kappa^\alpha_0 \Delta \tau^\alpha = \Theta^\alpha \left(\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \tau^\alpha, \varsigma^\alpha\right) + \chi^\alpha, \tag{A.6}$$

où Θ^α est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Où κ_0^α est une constante strictement positive et χ^α représente la source de chaleur du volume.

3) Adhésion

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de nature différente. Pour modéliser les phénoménes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

On introduit une variable interne d'état ς définie sur $\Gamma_3 \times [0,T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \varsigma \leq 1$. Quand $\varsigma = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\varsigma = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \varsigma < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle.

En général l'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\varsigma} = H_{ad}(\varsigma, \hat{\varsigma}, R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2), R_\tau(|\boldsymbol{u}_\tau^1 - \boldsymbol{u}_\tau^2|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0,T), \tag{A.7}$$

où H_{ad} est une fonction générale qui s'annulle quand le premier de ses variables s'annulle, et $\hat{\varsigma}$ est définie par

$$\hat{\varsigma}(x,t) = \int_0^t \varsigma(x,s)ds,$$

mais, en cas particulier l'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\varsigma} = -(\varsigma(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \qquad sur\ \Gamma_3 \times (0,T), \tag{A.8}$$

$$\varsigma(0) = \varsigma_0 \qquad sur\ \Gamma_3, \tag{A.9}$$

où γ_ν, γ_τ et ϵ_a sont des coefficients d'adhésion positifs, $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$, représente les déplacements dans la direction normale, $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, représente les déplacements dans la direction tangentielle et ς_0 l'adhésion initiale, telle que :

$$0 \leq \varsigma_0 \leq 1, \quad p.p.\, sur\, \Gamma_3. \tag{A.10}$$

A.3 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charges-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécaniques, par la loi de comportement, on donne dans la suite une relation entre le tenseur des contrainte σ^α, *le tenseur des déformations infinitésimales* ε^α *et leurs dérivées temporelles* $\dot{\sigma}^\alpha$ *et* $\dot{\varepsilon}^\alpha$, *cette définition se modifie légèrement dans la descriptions des phénomènes électro-mécanique.*
Aussi, on prend en considération le champ de déplacement électrique D^α, *le champ électrique* $E^\alpha(\zeta^\alpha)$, *l'opérateur d'élasticité* $\mathcal{B}^\alpha$, *la fonction de viscosité* $\mathcal{A}^\alpha$ *et la fonction de relaxation* $\mathcal{Q}^\alpha$ *ext.... Il lui faut ajouter d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de solide. (Corps piézoélectriques, matériaux électro-élastiques, matériaux électro-viscoélastiques et matériaux piézoélectrique-viscoélastiques).*
1) Loi de comportement des matériaux électro-élastiques. *On considére ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes* $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ *et le vecteur des déplacements électriques* $\boldsymbol{D}^\alpha$ *sont reliés par la loi de comportement :*

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha) - (\mathcal{E}^\alpha)^* \boldsymbol{E}(\zeta^\alpha), \\ \boldsymbol{D}^\alpha = B^\alpha \boldsymbol{E}(\zeta^\alpha) + \mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \\ \boldsymbol{E}(\zeta^\alpha) = -\nabla \zeta^\alpha, \end{cases} \tag{A.11}$$

où $\mathcal{B}^\alpha$ *est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul,* $\mathcal{E}^\alpha = (e^\ell_{ijk})$ *est le tenseur* piézoélectrique *qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul;* $B^\alpha = (b^\alpha_{ij})$ *est le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif et* $E^\alpha(\zeta^\alpha) = -\nabla\zeta^\alpha$, *où* $\nabla\zeta^\alpha = (\zeta^\alpha_{(,i)})$ *représente le champ électrique. Par ailleur*

$(\mathcal{E}^\alpha)^* = (e^{\alpha,*}_{ijk})$ *dénote le transposé du tenseur* $\mathcal{E}^\alpha$, *tel que*

$$\mathcal{E}^\alpha \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma}.(\mathcal{E}^\alpha)^* \boldsymbol{v} \qquad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \quad \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d. \tag{A.12}$$

2) Loi de comportement électro-élastiques avec mémoire longue.

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathcal{B}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha) + \int_0^t \mathcal{Q}^\alpha(t-s, \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha(s)))ds - (\mathcal{E}^\alpha)^* \boldsymbol{E}(\zeta^\alpha), \\ \boldsymbol{D}^\alpha = \mathcal{E}^\alpha \varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha) + B^\alpha(E^\alpha(\zeta^\alpha)), \end{cases} \tag{A.13}$$

où $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$ *est un tenseur de relaxation. Si* $\mathcal{Q} = 0$, *on retrouve la loi électro-élastiques donnée par (A.11).*

3) Loi de comportement thermo-électro-viscoélastiques avec endommagement.

La loi de comportement d'un matériau thermo-électro-viscoélastique avec endommagement est donnée par

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\alpha = \mathcal{A}^\alpha \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}^\alpha) + \mathcal{B}^\alpha\big(\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}^\alpha), \tau^\alpha(t), \xi^\alpha\big) - (\mathcal{E}^\alpha)^* E^\alpha(\zeta^\alpha), \\ \boldsymbol{D}^\alpha = \mathcal{E}^\alpha \varepsilon(u^\alpha) + B^\alpha(E^\alpha(\zeta^\alpha)), \end{cases} \tag{A.14}$$

où $\mathcal{A}^\alpha$ *est un opérateur non linéaire donné,* $\mathcal{B}^\alpha$ *représente l'opérateur d'élasticité,* $E^\alpha(\zeta^\alpha) = -\nabla\zeta^\alpha$ *est le champ électrique,* $\mathcal{E}^\alpha$ *représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre,* $(\mathcal{E}^\alpha)^*$ *est sa transposition et* B^α *est le tenseur de la permitivité.*

Modèle mathématique

On note que le point au-dessus d'une fonction représente la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\alpha = \frac{du^\alpha}{dt}, \ddot{u}^\alpha = \frac{d^2u^\alpha}{dt^2},$$

où $\dot{u}^\alpha$ *désigne le champ des vitesses et* $\ddot{u}^\alpha$ *désigne le champ des accélérations.*

Les fonction, inconnues du probléme sont les champs des deplacement $\boldsymbol{u}^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ *et les champs des contraintes* $\sigma^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{S}^d$ *. Notons la densité de masse par* $\rho^\alpha : \Omega^\alpha \to \mathbb{R}_+$ *et la densité des forces volumiques par* $\boldsymbol{f}_0^\alpha : \Omega^\alpha \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$

.L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy

$$Div\boldsymbol{\sigma}^{\alpha} + f_0^{\alpha} = \rho^{\alpha}\ddot{\mathbf{u}}^{\boldsymbol{\alpha}} \qquad dans\,\Omega^{\alpha} \times [0,T]. \tag{A.15}$$

Les processus d'évolution modelés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier :
par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}}^{\boldsymbol{\alpha}} = 0$*, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse* $\dot{\mathbf{u}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ *varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme* $\rho^{\alpha}\ddot{\mathbf{u}}^{\boldsymbol{\alpha}}$ *peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas, l'équation du mouvement devient :*

$$Div\boldsymbol{\sigma}^{\alpha} + f_0^{\alpha} = 0 \qquad dans\,\Omega^{\alpha} \times [0,T]. \tag{A.16}$$

L'équation équivaut à de relation scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit pas à modéliser le probléme d'équilibre du corps car, par exemple les composantes du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\zeta^{\alpha} : \Omega^{\alpha} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ *et les champs des déplacements électriques* $\boldsymbol{D}^{\alpha} : \Omega^{\alpha} \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$*. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques :*

$$div\boldsymbol{D}^{\alpha} = q_0^{\alpha} \qquad dans\,\Omega^{\alpha} \times [0,T], \tag{A.17}$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $div\boldsymbol{D}^{\alpha} = \boldsymbol{D}^{\alpha}_{i,i}$*, et* q_0^{α} *représente la densité des charges électriques volumiques sur* Ω^{α}*.*

A.4 Conditions aux limites

On définit maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^{α}*. (voir Fig.1)*

1) La condition aux limites de déplacement

Les corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^{\alpha} \times [0,T]$*, le champ des déplacements* $\boldsymbol{u}^{\alpha}$ *est par conséquent nul :*

$$\boldsymbol{u}^{\alpha} = 0 \qquad sur\,\Gamma_1^{\alpha} \times [0,T]. \tag{A.18}$$

2) La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^α agit sur $\Gamma_2^\alpha \times [0,T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha = f_2^\alpha \qquad sur \Gamma_2^\alpha \times [0,T]. \tag{A.19}$$

3) Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations :

$$\zeta^\alpha = 0 \qquad sur \Gamma_a^\alpha \times [0,T], \tag{A.20}$$

$$\boldsymbol{D}^\alpha \boldsymbol{\nu}^\alpha = q_2^\alpha \qquad sur \Gamma_b^\alpha \times [0,T]. \tag{A.21}$$

4) Conditions aux limites de contact.

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées conditions de frottement. En direction de la normale, nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsqu'il ne peut y'avoir d'interpénétration entre les deux corps), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre les deux corps), de compliance normale (lorsque la surface de contact est déformable) où bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifiée). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement se produit que lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié.

On définit le déplacement normal par relatif d' un corps par rapport à l' autre sur la zone de contact Γ_3 par :

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2, \tag{A.22}$$

et le déplacement tangent par relatif d' un corps par rapport à l' autre sur la zone de contact Γ_3 par :

$$[\boldsymbol{u}_\tau] = \boldsymbol{u}_\tau^1 - \boldsymbol{u}_\tau^2. \tag{A.23}$$

. La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \ \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau \qquad sur \, \Gamma_3. \tag{A.24}$$

a) Contact de Signorini

La condition de contact non-pénétration *entre les deux corps est exprimée par la relation suivante :*

$$[u_\nu] \leq 0 \ \text{ sur } \ \ \Gamma_3. \tag{A.25}$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] < 0$, il y' a séparation entre les deux corps. Les contraintes normales sont alors nulles. Par conséquent, on a :

$$[u_\nu] < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \ \text{ sur } \ \ \Gamma_3. \tag{A.26}$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] = 0$, le contact est maintenu et chaque corps exerce une réaction normale orientée vers l'autre corps et donc nous pouvons écrire

$$[u_\nu] = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \ \text{ sur } \ \ \Gamma_3. \tag{A.27}$$

On dit que le contact entre les deux corps sans frottement si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui est traduit par :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \ \text{ sur } \ \ \Gamma_3. \tag{A.28}$$

Pour résumer, les conditions de contact (A.22)-(A.24) *s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :*

$$\begin{cases} (a): \ \ \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \overset{noté}{\equiv} \sigma_\nu \\ (b): \ \ [u_\nu] \leq 0, \ \sigma_\nu \leq 0, \ [u_\nu]\sigma_\nu = 0 \qquad \text{sur} \ \ \Gamma_3. \\ (c): \ \ \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \end{cases} \tag{A.29}$$

*Les conditions aux limites de la forme (A.29) sont aussi appelées "*conditions de contact unilatéral*" ou bien "*conditions de contact de Signorini*".*

b)Contact sans frottement

Dans un contact sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre

deux solides ne peut être en tout point que normale au contact .
Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle.
Dans le cas ou la contrainte tangentielle est nulle on dit que le mouvement tangentiel se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

c) Contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν^α satisfait la condition dite de compliance normale

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{cases} \tag{A.30}$$

où g représente l'interstice entre les deux corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.
Cette condition indique qu'un corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$. On précise que dans les chapitres 1 et 2 du cette thèse, on considére le cas où un corps repose sur l'autre corps, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \tag{A.31}$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$.
Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & si \quad r \le \lambda, \\ c_\nu \lambda & si \quad r > \lambda, \end{cases} \tag{A.32}$$

où λ est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (A.30) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse λ, la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

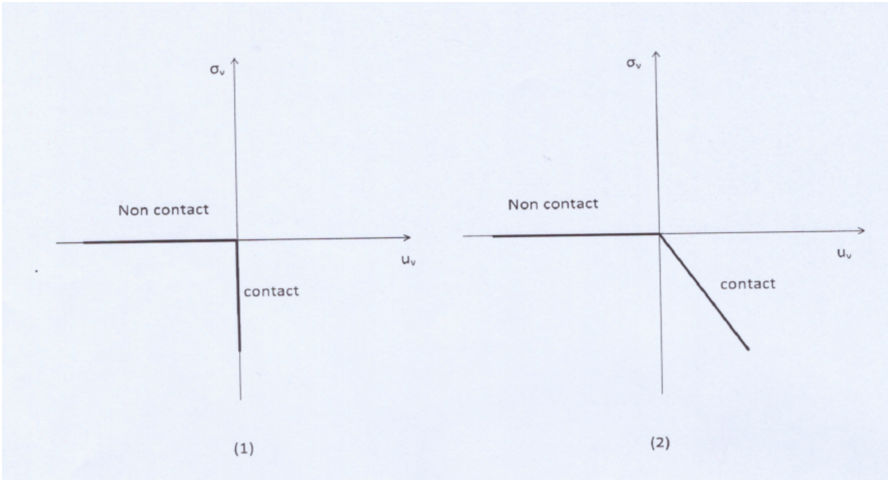


Figure 3 : Loi de Coulomb (1) et sa régularisation(2).

d)Contacte de frottement de Coulomb

C'est l'une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique voir figure (A.4). Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \| \boldsymbol{\sigma}_\tau \| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \| \boldsymbol{\sigma}_\tau \| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow [\boldsymbol{u}_\tau] = 0, \\ \| \boldsymbol{\sigma}_\tau \| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \textit{il existe } \lambda \geq 0 \textit{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\boldsymbol{u}_\tau], \end{cases} \tag{A.33}$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant du problème étudié dans le chapitre 1 de cette thèse.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (A.33), par la condition de compliance normale (A.30), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \| \boldsymbol{\sigma}_\tau \| \leq \mu p_\nu([u_\nu] - g), \\ \| \boldsymbol{\sigma}_\tau \| < \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow [\boldsymbol{u}_\tau] = 0, \\ \| \boldsymbol{\sigma}_\tau \| = \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow \textit{il existe } \ell \geq 0 \textit{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\ell[\boldsymbol{u}_\tau]. \end{cases} \tag{A.34}$$

Dans le chapitre 3 nous utilisons la loi (A.34) avec le cas particulier $g = 0$, i.e. lorsque l'interstice est nul, ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasi statique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \| \boldsymbol{\sigma}_\tau \| \leq p_\tau([u_\nu] - g), \\ [\boldsymbol{u}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g)\frac{[\boldsymbol{u}_\tau]}{\|[\boldsymbol{u}_\tau]\|}, \end{cases} \tag{A.35}$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (A.35), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau([u_\nu] - g)$.
De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement.

e) Contact avec compliance normale et adhésion

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \varsigma \leq 1$. Quand $\varsigma = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\varsigma = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \varsigma < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus de détails sur cette section, on renvois par exemple [2]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu([u_\nu]) \qquad \textit{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \tag{A.36}$$

où u_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} \mathrm{L} & \textit{si} \quad s \leq -\mathrm{L}, \\ -s & \textit{si} \quad -\mathrm{L} \leq s \leq 0, \\ 0 & \textit{si} \quad s > 0. \end{cases} \tag{A.37}$$

Ici $\mathrm{L} > 0$ est la longueur caractéristique des liens.
La condition (A.36) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. On note que la condition de compliance normale

avec adhésion (A.36) a été déjà utilisée dans [7, 16].

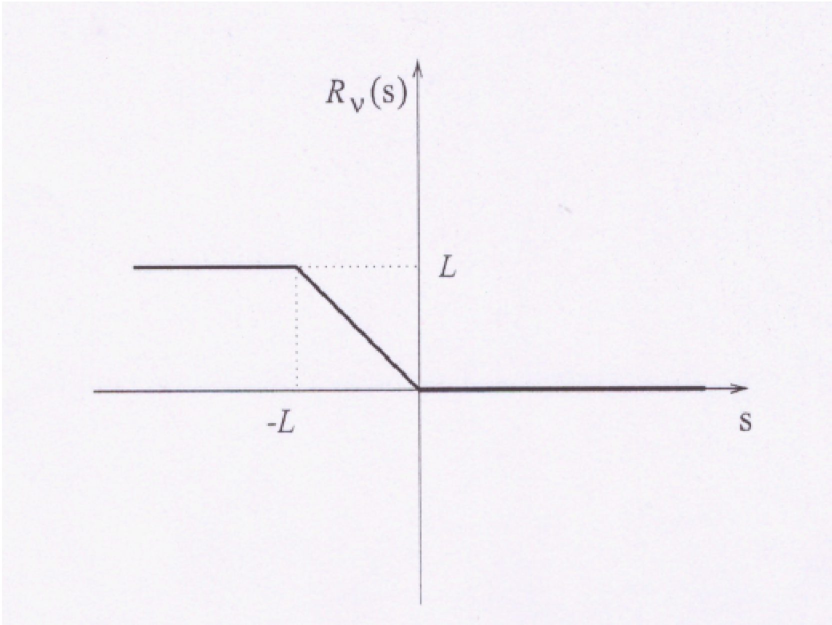


Figure 4 : représentation graphique de l'opérateur de tractionR_ν.

Quand le champ d'adhésion ς est nul, (A.36) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \qquad sur\ \Gamma_3 \times [0,T], \tag{A.38}$$

qui représente la condition de compliance normale sans adhésion.

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle satisfait la condition suivante :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = -\boldsymbol{\sigma}_\tau^2 \equiv \boldsymbol{\sigma}_\tau, \\ \| \ \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) \ \| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \| \ \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) \ \| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\boldsymbol{u}_\tau] = 0 \\ \| \ \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) \ \| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists\lambda \geqslant 0 \\ telle\ que\, \boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau\varsigma^2\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) = -\lambda[\boldsymbol{u}_\tau] \end{cases} \qquad sur\ \Gamma_3 \times (0,T), \tag{A.39}$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif.

$\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d_+$ *est l'opérateur de troncature défini par :*

$$\mathbf{R}_\tau(\boldsymbol{v}) = \begin{cases} \boldsymbol{v} & si \quad \| \boldsymbol{v} \| \leq \mathrm{L}, \\ \mathrm{L}\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} & si \quad \| \boldsymbol{v} \| > \mathrm{L}. \end{cases} \tag{A.40}$$

On note que les conditions de frottement similaires à celles dans(A.39) ont été considérées dans [17] dans le cas particulier $\mathbf{R}_\tau([\boldsymbol{u}_\tau]) = [\boldsymbol{u}_\tau]$ *et* $R_\nu([u_\nu]) = -[u_\nu]$, *pour* L *très grand.*

Annexe B

Outils Mathématiques

Ce chapitre est consacré à la discription des espaces utilisés dans cette thèse. On suppose que Ω^α est un domaine borné et de lipschitz de $\mathbb{R}^d, (d = 2, 3)$, c'est à dire que sa frontière Γ^α est présentable comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$ avec une partition de trois parties mesurables disjointes $\Gamma_1^\alpha, \Gamma_2^\alpha$ et Γ_3^α, d'un coté et une partition de $\Gamma_1^\alpha \cup \Gamma_2^\alpha$, en deux parties ouvertes Γ_a^α et Γ_b^α d'un autre coté, telles que mes$\Gamma_1^\alpha > 0$ et mes$\Gamma_a^\alpha > 0$.

B.1 Contraction

Le principe de contraction de Banach est le résultat le plus élémentaire dans la théorie du point fixe. Dans l'analyse, ces théorèmes se relèvent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de résolution des equations différentielles. Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tend vers un point fixe. En définit quelque définitions qui permettent d'affirmer qu'une fonction f admet des critères de théorème du point fixe de contraction.

Définition B.1.1 *Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \longrightarrow X$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si ;*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \qquad \text{pour tout } x, y \in X$$

k est dite constante de Lipschitz.

Définition B.1.2 *L'application lipschitzienne f est appelée, contraction si $0 \leqslant k < 1$.*

Théorème B.1.1 *(X, d) un espace métrique complet et*

$$f : X \longrightarrow X$$

une contraction avec k sa constante de Lipschitz.
Alors f admet une unique point fixe $u \in X$.
En outre, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f^n(x) = u$$

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

Maintenant, il est nécessaire de présenter quelques espaces, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et Lipschitziennes et les inéquations variationnelles et d'évolutions.

B.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(.,.)_H$: $H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\| \cdot \|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\| u \|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \tag{B.1}$$

et on rappelle que $\| \cdot \|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \| u \|_H \| v \|_H, \ \ \forall u, v \in H. \tag{B.2}$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (B.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{< \eta, v >_{H' \times H}}{\| v \|_H},$$

où $(.,.)_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H.

Théorème B.2.1 *(**Représentation de Riesz-Fréchet**) : Soit H un espace de Hilbert et soit $H^{'}$ son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H^{'}$ il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\| \phi \|_{H'} = \| f \|_H \, .$$

L'importance de ce théorème est que tout forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et $H^{'}$.

B.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition B.3.1 *(Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle l' espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble ,*
$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable sur Ω et $|v|^p$ lebesgue integrable sur $\Omega\}$.

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \left(\int_\Omega | \, v(x) \, |^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \to \mathbb{R}$, mesurable.
Alors on définit $\|.\|_{L^\infty(\Omega)}$ par :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = supss(v) = inf\{c; |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Définition B.3.2 *Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $u \circ I_K \in L^p$ pour tout $\forall K \subset \Omega$ où I_K représente l'application identité de K.*

Théorème B.3.1 *. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes ;*

1) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.

2) Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, toute $v \in L^p(\Omega)$ l'inégalité de Hölder est vérifiée ;i.e

$$\int_\Omega \mid u(x)v(x) \mid dx \leq \parallel u \parallel_{L^p(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^q(\Omega)}, \text{ avec } \quad (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

3)les espaces $L^2(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $[1, +\infty[$.

4) L'espace $L^2(\Omega)$ munit de produit scalaire

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \forall u, v \in \ L^2(\Omega).$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée :i.e.

$$\int_\Omega \mid u(x)v(x) \mid dx \leq \parallel u \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} .$$

B.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \quad | \quad \partial_i u \in \mathrm{L}^2(\Omega) \, i = 1, \cdots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\parallel u \parallel_{H^1(\Omega)} = (u, u)^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}, \text{ et on écrit } \parallel u \parallel^2_{H^1(\Omega)} = \parallel u \parallel^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \parallel \nabla u \parallel^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^d} .$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème B.4.1 (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega) \textit{ avec injection compacte.}$$

Théorème B.4.2 (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Gamma)$ *telle que* $\delta u = u|_\Gamma$ *pour tout* $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque B.4.1 *L'espaces* $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ *ci-dessus représenté l'espaces de fonctions réelles sur* Γ *qui sont* L^2 *pour la mesure superficielle* dT*. L'application* δ *s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application* $u \to u|_\Gamma$ *définir pour* $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque B.4.2 *On note que l'application de trace* $\delta : H^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Gamma)$ *est un opérateur compacte.*

Définition B.4.1 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $p \in [1, +\infty]$, *nous définissons l'espace de Sobolev* $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ *par*

$$\mathrm{W}^{k,p}(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^p(\Omega)\, \forall\lambda,\ |\lambda| \leq k; \exists v_\lambda \in \mathrm{L}^p(\Omega), \textit{tel que}\, v_\lambda = D^\lambda u\}.$$

Remarque B.4.3 *Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier* $D^\lambda u$ *et* v_λ.

La norme sur l'espace $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$ *est donnée par*

$$\| u \|_{\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\lambda|\leq k} \| D^\lambda u \|_{\mathrm{L}^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\lambda|\leq k} \| D^\lambda u \|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} & si \quad p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, *on note par* $H^k(\Omega)$ *l'espace* $\mathrm{W}^{k,2}(\Omega)$ *et la norme précédente provient d'un produit scalaire.*

Théorème B.4.3 *Les espaces de Sobolev* $\mathrm{W}^{k,p}(\Omega)$, *pour* $k \in \mathbb{N}$ *et* $p \in [1, +\infty]$, *munis de la norme* $\| \cdot \|$, *sont des espaces de Banach. De plus, les espaces* $H^k(\Omega)$, *pour tout* k *entier, sont des espaces de Hilbert.*

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev on, renvois aux [1].

B.5 Espaces fonctionnels

On introduit les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques $\boldsymbol{u}^\alpha$ *et* $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ *:*

$$\begin{cases} H^\alpha = \{\boldsymbol{u}^\alpha = (u_i^\alpha) \quad | \quad u_i^\alpha \in \mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)\} = (\mathrm{L}^2(\Omega^\alpha))^d, \\ \mathcal{H}^\alpha = \{\boldsymbol{\sigma}^\alpha = (\sigma_{ij}^\alpha) \quad | \quad \sigma_{ij}^\alpha = \sigma_{ji}^\alpha \in \mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)\} = (\mathrm{L}_s^2(\Omega^\alpha))^{d\times d}, \\ H_1^\alpha = \{\boldsymbol{u}^\alpha = (u_i^\alpha) \quad | \quad u_i^\alpha \in H^1(\Omega^\alpha)\} = (H^1(\Omega^\alpha))^d, \\ \mathcal{H}_1^\alpha = \{\boldsymbol{\sigma}^\alpha \in \mathcal{H}^\alpha \quad | \quad \sigma_{ij,j}^\alpha \in H^\alpha\}. \\ Y^\alpha = \{\beta^\alpha = (\beta_i^\alpha) \quad | \quad \beta_i^\alpha \in \mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)\} = (\mathrm{L}^2(\Omega^\alpha))^m\}, \\ \nu^\alpha = \{\boldsymbol{u}^\alpha \in \mathrm{W}^{1,2}(\Omega^\alpha))^d ; \boldsymbol{u} = 0 sur \Gamma_1^\alpha\}. \end{cases} \tag{B.3}$$

Les espaces $H^\alpha, \mathcal{H}^\alpha, H_1^\alpha$, $\mathcal{H}_1^\alpha$, Y^α *et* ν^α *sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires respectivement, donnés par :*

$$\begin{cases} (\boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha)_{H^\alpha} = \int_{\Omega^\alpha} u_i^\alpha v_i^\alpha dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \boldsymbol{\tau}^\alpha)_{\mathcal{H}^\alpha} = \int_{\Omega^\alpha} \sigma_{ij}^\alpha \tau_{ij}^\alpha dx, \\ (\boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha)_{H_1^\alpha} = (\boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha)_{H^\alpha} + (\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \boldsymbol{\tau}^\alpha)_{\mathcal{H}_1^\alpha} = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \boldsymbol{\tau}^\alpha)_{\mathcal{H}^\alpha} + (Div\boldsymbol{\sigma}^\alpha, Div\boldsymbol{\tau}^\alpha)_{H^\alpha}, \\ (\beta^\alpha, \boldsymbol{k}^\alpha)_{Y^\alpha} = \int_{\Omega^\alpha} \beta_i^\alpha k_i^\alpha dx, \\ (\boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha)_{\nu^\alpha} = (\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha}. \end{cases} \tag{B.4}$$

Où $\varepsilon : H_1^\alpha \to \mathcal{H}^\alpha$ *et* $Div : \mathcal{H}_1^\alpha \to H^\alpha$ *sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par*

$$\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha) = (\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\alpha)),\ \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\alpha) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\alpha + u_{j,i}^\alpha),\ Div\boldsymbol{\sigma}^\alpha = (\sigma_{ij,j}^\alpha).$$

Les normes sur les espaces $H^\alpha, \mathcal{H}^\alpha, H_1^\alpha$, $\mathcal{H}_1^\alpha, Y^\alpha$ *et* ν^α *sont notées par* $\|\cdot\|_{H^\alpha}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\alpha}$ $, \|\cdot\|_{H_1^\alpha}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\alpha}, \|\cdot\|_{Y^\alpha}$ *et* $\|\cdot\|_{\nu^\alpha}$, *respectivement.*

Puisque la frontière Γ^α *est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur* $\boldsymbol{\nu}^\alpha$ *à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs* $\boldsymbol{v}^\alpha \in H_1^\alpha$ *on utilise la notation* $\boldsymbol{v}^\alpha$ *pour désigner la trace* $\gamma\boldsymbol{v}^\alpha$ *de* $\boldsymbol{v}^\alpha$ *sur* Γ^α.

On rappelle que l'application de trace $\gamma : H_1^\alpha \to \mathrm{L}^2(\Gamma^\alpha)^d$ *est linéaire et continue, mais* *n'est pas surjective.*

On désigne par H'_{Γ^α} *le dual de* H_{Γ^α} *et* $(\cdot,\cdot)$ *le produit de dualité entre* H'_{Γ^α} *et* H_{Γ^α}. *Pour tout* $\boldsymbol{\sigma}^\alpha \in \mathcal{H}_1^\alpha$, *il existe un élément* $\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha \in H'_{\Gamma^\alpha}$ *tel que :*

$$(\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha, \gamma\boldsymbol{v}^\alpha) = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + (Div\boldsymbol{\sigma}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha)_{H^\alpha} \;\; \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in H_1^\alpha. \tag{B.5}$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ *est assez régulier (par exemple* C^1*), on a la formule*

$$(\boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha, \gamma\boldsymbol{v}^\alpha) = \int_{\Gamma^\alpha} \boldsymbol{\sigma}^\alpha\boldsymbol{\nu}^\alpha \cdot \boldsymbol{v}^\alpha da \;\; \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in H_1^\alpha. \tag{B.6}$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$ *assez régulier on a* ***la formule de Green*** *suivante :*

$$(\sigma^\alpha, \varepsilon(v^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} + (Div\sigma^\alpha, v^\alpha)_{H^\alpha} = \int_{\Gamma^\alpha} \sigma^\alpha\nu^\alpha \cdot v^\alpha da \;\; \forall v^\alpha \in H_1^\alpha, \tag{B.7}$$

Aussi, pour $\boldsymbol{D}^\alpha$ *assez régulier on a* ***la formule de Green*** *suivante :*

$$(D^\alpha, \nabla\Psi^\alpha)_{H^\alpha} + (divD^\alpha, \Psi^\alpha)_{H^\alpha} = \int_{\Gamma^\alpha} D^\alpha\nu^\alpha.\Psi^\alpha da, \;\; \forall \Psi^\alpha \in H_1^\alpha, \tag{B.8}$$

Aussi, pour $\boldsymbol{\tau}^\alpha$ *assez régulier on a* ***la formule de Green*** *suivante :*

$$(\Delta\tau^\alpha, \delta^\alpha)_{\mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)} + \int_{\Omega^\alpha} \nabla\tau^\alpha.\nabla\delta^\alpha da = \int_{\Gamma^\alpha} \frac{\partial^\alpha\tau^\alpha}{\partial\nu^\alpha}.\delta^\alpha da, \;\; \forall \delta^\alpha \in \mathbb{L}_1^\alpha, \tag{B.9}$$

où da est un élément de mesure de surface.

***Théorème B.5.1** (**Inégalité de Korn**)*
Soit V^α *un sous-espace fermé de* H_1^α *definie par*

$$\mathrm{V}^\alpha = \{\boldsymbol{v}^\alpha \in H_1^\alpha \quad | \quad \boldsymbol{v}^\alpha = 0 \quad sur\Gamma_1^\alpha\}, \tag{B.10}$$

puisque mes(Γ_1^α), *il existe une constante* $c_k > 0$ *dépendant uniquement de* Ω^α *et* Γ_1^α *telle que*

$$\| \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) \|_{\mathcal{H}^\alpha} \geq c_k \| \boldsymbol{v}^\alpha \|_{H_1^\alpha} \quad \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in \mathrm{V}^\alpha. \tag{B.11}$$

Une démonstration de l'inégalité de Korn trouvé dans [13].

On considére sur l'espace V^α, *le produit scalaire donné par*

$$(\boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha)_{\mathrm{V}^\alpha} = (\varepsilon(\boldsymbol{u}^\alpha), \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha))_{\mathcal{H}^\alpha} \qquad \forall \boldsymbol{u}^\alpha, \boldsymbol{v}^\alpha \in \mathrm{V}^\alpha, \tag{B.12}$$

et soit $\| \cdot \|_{\mathrm{V}^\alpha}$ *la norme associée, i.e.*

$$\| \boldsymbol{v}^\alpha \|_{\mathrm{V}^\alpha} = \| \varepsilon(\boldsymbol{v}^\alpha) \|_{\mathcal{H}^\alpha} \qquad \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in \mathrm{V}^\alpha. \tag{B.13}$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\| \cdot \|_{H_1^\alpha}$ *et* $\| \cdot \|_{\mathrm{V}^\alpha}$ *sont des normes équivalentes sur* V^α *et ainsi* $(\mathrm{V}^\alpha, \| \cdot \|_{\mathrm{V}^\alpha})$ *est un espace de Hilbert.*
De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (B.13) et (B.14), il existe une constante $c_0 > 0$ *dépendant uniquement de* Ω^α, Γ_1^α *et* Γ_3 *telle que :*

$$\| \boldsymbol{v}^\alpha \|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \| \boldsymbol{v}^\alpha \|_{\mathrm{V}^\alpha} \qquad \forall \boldsymbol{v}^\alpha \in \mathrm{V}^\alpha. \tag{B.14}$$

Pour une fonction scalaire ς, *qui représente le champ d'adhésion sur la surface* Γ_3 *du contact, nous définissons l'ensemble*

$$\mathcal{Q} = \{\varsigma : \Gamma_3 \times [0,T] \to \mathbb{R} \mid 0 \leq \varsigma(t) \leq 1 \ \ sur\ \Gamma_3\}. \tag{B.15}$$

On introduit également les espaces suivants :

$$\mathbb{L}_0^\alpha = L^2(\Omega^\alpha), \quad \mathbb{L}_1^\alpha = H^1(\Omega^\alpha),$$

$$\mathrm{W}^\alpha = \{\xi^\alpha \in H^1(\Omega^\alpha) \mid \xi^\alpha = 0 \ sur \Gamma_a^\alpha\},$$

$$\mathcal{W}^\alpha = \{\boldsymbol{D}^\alpha = (D_i^\alpha) \mid D_i^\alpha \in \mathrm{L}^2(\Omega^\alpha), D_{i,i}^\alpha \in \mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)\},$$

où $divD^\alpha = (D_{i,i}^\alpha)$. *Ces espaces* W^α *et* $\mathcal{W}^\alpha$ *sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par*

$$(\varphi^\alpha, \xi^\alpha)_{\mathrm{W}^\alpha} = (\nabla\varphi^\alpha, \nabla\xi^\alpha)_{\mathrm{H}^\alpha}, \quad (\boldsymbol{D}^\alpha, \boldsymbol{E}^\alpha)_{\mathcal{W}^\alpha} = (\boldsymbol{D}^\alpha, \boldsymbol{E}^\alpha)_{\mathrm{H}^\alpha} + (div\boldsymbol{D}^\alpha, div\boldsymbol{E}^\alpha)_{\mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)}, \tag{B.16}$$

soient $\| \cdot \|_{\mathrm{W}^\alpha}$ *et* $\| \cdot \|_{\mathcal{W}^\alpha}$ *les normes associées ; c'est-à-dire*

$$\| \xi^\alpha \|_{\mathrm{W}^\alpha} = \| \nabla\xi^\alpha \|_{\mathrm{H}^\alpha}, \quad \| \boldsymbol{D}^\alpha \|_{\mathcal{W}^\alpha}^2 = \| \boldsymbol{D}^\alpha \|_{\mathrm{H}^\alpha}^2 + \| div\boldsymbol{D}^\alpha \|_{\mathrm{L}^2(\Omega^\alpha)}^2 . \tag{B.17}$$

Puisque $mes(\Gamma_a^\alpha) > 0$, *l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante* $c > 0$ *dépendant uniquement de* Ω^α *et* Γ_a^α *telle que*

$$\| \nabla\xi^\alpha \|_{\mathrm{H}^\alpha} \geq c \| \xi^\alpha \|_{H^1(\Omega^\alpha)}, \quad \forall \xi^\alpha \in \mathrm{W}^\alpha. \tag{B.18}$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré trouvé dans [13].

Il s'ensuit de (B.18) que $\| \cdot \|_{H^1(\Omega^\alpha)}$ *et* $\| \cdot \|_{\mathrm{W}^\alpha}$ *sont des normes équivalentes sur* W^α

et donc $(\mathrm{W}^\alpha, \| \cdot \|_{\mathrm{W}^\alpha})$ *est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante* $\tilde{c_0}^\alpha$ *dépendant uniquement de* Ω^α*,* Γ_a^α *et*Γ_3*, telle que*

$$\| \xi^\alpha \|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c_0}^\alpha \| \xi^\alpha \|_{\mathrm{W}^\alpha}, \quad \forall \xi^\alpha \in \mathrm{W}^\alpha. \tag{B.19}$$

Pour simplifier les notations, on définit les espaces produits :

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}^1 \times \mathrm{V}^2 \,,\, H = H^1 \times H^2 \,,\, H_1 = H_1^1 \times H_1^2,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2 \,,\, \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2 \,,\, \mathrm{W} = \mathrm{W}^1 \times \mathrm{W}^2 \,,\, \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

$$\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}_0^1 \times \mathbb{L}_0^2, \ \ \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_1^1 \times \mathbb{L}_1^2,$$

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Y}^1 \times \mathrm{Y}^2,$$

$$\nu = \{u = (u^1, u^2) \in \nu^1 \times \nu^2; u_\nu^1 + u_\nu^2 = 0 sur \Gamma_3\}$$

les espaces $V, \mathbb{L}_1, W$ *et* $\mathcal{W}$ *sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée* $(.,.)_V, (.,.)_{\mathbb{L}_1}, (.,.)_W, (.,.)_{\mathcal{W}}$*, les normes associés seront désignés par* $\|.\|_V, \| \cdot \|_{\mathbb{L}_1}$*,* $\| \cdot \|_W$ *et* $\| \cdot \|_{\mathcal{W}}$*, respectivement.*

On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

On note par $C([0,T], \mathrm{X})$ *et* $C^1([0,T], \mathrm{X})$ *les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur* $[0,T]$ *avec valeur sur* X*, respectivement, avec les normes :*

$$\| f \|_{C([0,T],\mathrm{X})} = \max_{t \in [0,T]} \| f(t) \|_{\mathrm{X}},$$

$$\| f \|_{C^1([0,T],\mathrm{X})} = \max_{t \in [0,T]} \| f(t) \|_{\mathrm{X}} + \max_{t \in [0,T]} \| \dot{f}(t) \|_{\mathrm{X}} \,.$$

On note par $C_c([0,T], \mathrm{X})$ *l'ensemble des fonctions continues à support compact dans* $[0,T]$ *à valeurs dans* X *.*

Définition B.5.1 *Une fonction* $f : [0,T] \to \mathrm{X}$ *est dite mesurable s'il existe un sous ensemble* $\mathrm{E} \subset [0,T]$ *de mesure nulle et une suite* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de fonctions appartenant à* $C_c([0,T], \mathrm{X})$ *telle que* $\| f_n(t) - f(t) \|_{\mathrm{X}} \longrightarrow 0$ *quand* $n \longrightarrow \infty$*, pour tout* $t \in [0,T] \setminus \mathrm{E}$.

1) Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

I-Opérateur fortement monotone

On donne quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaires et les formes bilinéaires dans un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{X}}$ *et de la norme associée* $\|\cdot\|_{\mathrm{X}}$.

Définition B.5.2 *Soit* $\mathrm{A}:\mathrm{X}\longrightarrow\mathrm{X}$ *un opérateur non-linéaire. L'opérateur* A *est dit*

(1) monotone si

$$(\mathrm{A}u-\mathrm{A}v,u-v)_{\mathrm{X}}\geq 0\quad\forall u,v\in\mathrm{X};\tag{B.20}$$

(2) fortement monotone si il existe $m>0$ *tel que*

$$(\mathrm{A}u-\mathrm{A}v,u-v)_{\mathrm{X}}\geq m\parallel u-v\parallel_{\mathrm{X}}\quad\forall u,v\in\mathrm{X};\tag{B.21}$$

(3) Lipschitz si il existe $M>0$ *tel que*

$$\parallel \mathrm{A}u-\mathrm{A}v\parallel_{\mathrm{X}}\leq M\parallel u-v\parallel_{\mathrm{X}}\quad\forall u,v\in\mathrm{X}.\tag{B.22}$$

II- Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans la fonctionnelles non différentiable dépend de la solution elle. Ces dernières sont appelées " inégalités quasi-variationnelles". Pour cela, on considére un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{X}}$ *et de la norme associée* $\|\cdot\|_{\mathrm{X}}$, *soit* $\mathrm{A}:\mathrm{X}\longrightarrow\mathrm{X}$ *un opérateur non-linéaire et la fonctionnelle* $j:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathbb{R}$. *Compte tenu de ces données, on considére l'inégalité quasi-variationnnelle suivante :*

$$(\mathrm{A}u,u-v)_{\mathrm{X}}+j(u,v)+j(u,u)\geq(f,u-v)_{\mathrm{X}}\qquad\forall v\in\mathrm{X}.\tag{B.23}$$

Pour résoudre cette inéquation, on suppose que A *fortement monotone et Lipschitz, c'est à dire* A, *satisfait à (B.21), (B.22) et la fonctionnelle* $j:\mathrm{X}\times\mathrm{X}\to\mathbb{R}$ *satisfait :*

$$\begin{cases}(a)\ \textit{Pour tout}\,\eta\in\mathrm{X}, j(\eta,\cdot)\ \textit{est convexe et s.c.i. sur}\,\mathrm{X},\\[2ex] (b)\ \textit{Il existe}\ \lambda>0\ \ \textit{tel que}\\[2ex] j(u_1,v_1)-j(u_1,v_1)+j(u_2,v_1)-j(u_2,v_2)\leq\lambda\parallel u_1-u_2\parallel_{\mathrm{X}}\parallel v_1-v_2\parallel_{\mathrm{X}}.\end{cases}\tag{B.24}$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (B.23) est donnée par le résultat suivant.

Théorème B.5.2 *On suppose que les hypothèses (B.21), (B.22), et (B.24) sont satisfaites. Alors si $\lambda < m$:*

1) pour tout $f \in \mathrm{X}$, il existe une solution unique $u \in \mathrm{X}$ au problème (B.23).

2) Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (B.23) correspondant aux données $f_1, f_2 \in C([0,T];\mathrm{X})$, alors il existe c>0 tel que ;

$$\| u_1(t) - u_2(t) \|_{\mathrm{X}} \leq c \| f_1(t) - f_2(t) \|_{\mathrm{X}} \qquad \forall t \in [0,T].$$

La démonstration du Théorème se trouve dans [8].

On utilise un résultat abstrait sur les inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant,

Trouver, $u : [0,T] \longrightarrow \mathrm{X}$ tel que

$$(A\dot{u}(t), v - \dot{u}(t))_X + (\mathrm{B}u(t), v - \dot{u}(t))_X + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X, \tag{B.25}$$

$\forall v \in \mathrm{X}, t \in [0,T].$,

$$u(0) = u_0. \tag{B.26}$$

La différence entre le problème (B.23) et le celui de (B.25)-(B.26) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps. Pour étudier le problème (B.25)-(B.26), en plus des hypothèses (B.20), (B.21) , la fonctionnelle j satisfait (B.24), nous avons besoin de, que l'opérateur non linéaire B *soit Lipschitz, et aussi supposons que ;*

$$f \in C([0,T], \mathrm{X}), \tag{B.27}$$

$$u_0 \in \mathrm{X}. \tag{B.28}$$

Dans l'étude du problème (B.25)–(B.26), on a le résultat suivant :

Théorème B.5.3 *Soient (B.21), (B.22) , (B.24) et (B.27)-(B.28) avec l'opérateur non linéaire* B *soit Lipschitz, satisfaites. Alors :*

1) Il existe une unique solution $u \in C^1([0,T];\mathrm{X})$ au problème (B.25)-(B.26).

2) Si u_1 *et* u_2 *sont deux solutions du problème (B.25)-(B.26) correspondant aux données* $f_1, f_2 \in C([0,T];\mathrm{X})$*, alors il existe c>0 tel que ;*

$$\| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_{\mathrm{X}} \leq c(\| f_1(t) - f_2(t) \|_{\mathrm{X}} + \| u_1(t) - u_2(t) \|_{\mathrm{X}}) \qquad \forall t \in [0,T].$$

3) Si en plus $f \in W^{1,p}(0,T,\mathrm{X})$ *pour* $p \in [1,\infty)$*, alors la solution* $u \in W^{2,p}(0,T,\mathrm{X})$*.*

Théorème B.5.4 *(**Théorème de point fixe de Banach**) Soit* K *un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|_{\mathrm{X}})$*. On suppose que* $\mathbf{\Lambda} : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ *est une contraction, c'est à dire il existe* $c \in]0,1[$ *telle que*

$$\| \mathbf{\Lambda}(u) - \mathbf{\Lambda}(v) \|_{\mathrm{X}} \leq c \| u - v \|_{\mathrm{X}} \quad \forall u, v \in \mathrm{K}.$$

Alors, il existe un élément unique $u \in \mathrm{K}$ *tel que* $\mathbf{\Lambda}(u) = u$ *; i.e, possède un point fixe unique dans* K*.*

Pour l'opérateur $\mathbf{\Lambda}^m : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ *défini par la relation*

$$\mathbf{\Lambda}^m = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda}^{m-1}) \qquad m \geq 2,$$

on a la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème B.5.5 *Soit* K *un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach* $(\mathrm{X}, \|\cdot\|_{\mathrm{X}})$*. On suppose que* $\mathbf{\Lambda}^m : \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ *est une contraction pour* m *un entier positif. Alors* $\mathbf{\Lambda}$ *admet un point fixe unique dans* K*.*

Définition B.5.3 *Une forme bilinéaire* $b : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue s'il existe un réel* $M > 0$ *tel que :*

$$\| b(u,v) \|_{\mathrm{X}} \leq M \| u \|_{\mathrm{X}} \| v \|_{\mathrm{X}}, \quad \forall u, v \in \mathrm{X}.$$

Définition B.5.4 *Une forme bilinéaire* $b : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite coercive s'il existe une constante* $m > 0$ *telle que :*

$$b(u,u) \geq m \| u \|_{\mathrm{X}}^2, \quad \forall u \in \mathrm{X}.$$

Théorème B.5.6 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H *un espace de Hilbert,* $b : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire continue et coercive.*

Soit $l : \mathrm{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique* $u \in \mathrm{H}$ *qui satisfait :*

$$b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in \mathrm{H}. \tag{B.29}$$

De plus, si $b(\cdot, \cdot)$ *est symétrique, alors* u *est caractérisé par la propriété :*

$$\frac{1}{2}b(u, u) - (u, u)_{\mathrm{X}} \leq \frac{1}{2}b(v, v) - (v, v)_{\mathrm{X}}, \quad \forall v \in \mathrm{X}. \tag{B.30}$$

III- Sous différentiabilité

On considére dans tout ce paragraphe que X *est un espace de Hilbert et* K *un sous ensemble de l'espace* X.

Définition B.5.5 *On appelle fonction indicatrice de* K*, la fonction* Ψ_{K} *définie par*

$$\Psi_{\mathrm{K}} = \begin{cases} 0 & si \quad u \in \mathrm{K}, \\ +\infty & si \quad u \notin \mathrm{K}. \end{cases}$$

Définition B.5.6 *Soit une fonction* $j : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* u *un élément de l'espace* X *tel que* $j(u) \neq \pm\infty$*. Le sous-différentiel de la fonction* j *en* u*, noté* $\partial j(u)$ *est l'ensemble défini par*

$$\partial j(u) = \{u' \in \mathrm{X}' \mid \ j(v) \geq j(u) + (u', v - u), \ \forall v \in \mathrm{K}\}. \tag{B.31}$$

Le crochet $(\cdot, \cdot)$ *désignant la dualité entre* X' *et* X.

Tout élément u' *de l'ensemble* $\partial j(u)$ *est appelé sous-gradient de la fonction* j *en* u*. La fonction* j *est dite sous-différentiable en* u *si* $\partial j(u) \neq \emptyset$*. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point* u *de l'espace* X.

On peut caractériser le sous-différentiel $\partial\Psi_K$ *d'une fonction indicatrice* Ψ_K *d'un ensemble convexe non vide.*

$$\partial\Psi_K = \{u' \in \mathrm{X}' \mid \ (u', v - u) \leq 0, \ \forall v \in \mathrm{K}\}. \tag{B.32}$$

IV- Équation différentielle ordinaire

Théorème B.5.7 (Cauchy-Lipschitz) *: Soit* $(\mathrm{X}, \| \cdot \|_{\mathrm{X}})$ *un espace de Banach réel et soit* $\mathrm{F}(t, \cdot) : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *un opérateur défini p.p. sur* $[0, T]$*, qui satisfait les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} (a) \textit{il existe}\, \mathrm{L_F} > 0 \,\textit{tel que} \\ \| \mathrm{F}(t,x) - \mathrm{F}(t,y) \|_{\mathrm{X}} \leq \mathrm{L_F} \| x - y \|_{\mathrm{X}} \quad \forall x, y \in \mathrm{X}, p.p.\, t \in [0,T]; \\ (b) \textit{il existe}\, 1 \leq p \leq \infty \,\textit{tel que} \\ \mathrm{F}(\cdot, x) \in \mathrm{L}^p([0,T];\mathrm{X}) \quad \forall x \in \mathrm{X}. \end{cases}$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathrm{X}$*, il existe une fonction unique* $x \in \mathrm{W}^{1,p}([0,T];\mathrm{X})$ *tel que*

$$\dot{x}(t) = \mathrm{F}(t, x(t)),\ p.p.\, t \in [0,T],$$

$$x(0) = x_0.$$

V- Inégalités variationnelle paraboliques

Soit V *et* H *deux espaces de Hilbert tel que* V *est dense dans* H *et son injection est continue,L'espace* H *est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual* V' *de V. On écrit* $V \subset H \subset V'$ *et on dit que les inclusions ci-dessus définissent un triple de Gelfand. On désigne par* $\| \cdot \|_{\mathrm{V}}, \| \cdot \|_{\mathrm{H}}$ *et* $\| \cdot \|_{\mathrm{V'}}$ *les normes sur les espaces* V *,* H *et* V' *respectivement, et on utilise* $V \times V'$ *pour l'appariement de dualité entre* V *et* V'*. Notez que si* $f \in H$ *alors* $< f, v >_{V \times V'} = (f, v)_H, \quad \forall v \in \mathrm{H}$*. se qui suit est un résultat standard pour les inégalités variationnelles paraboliques.*

Théorème B.5.8 *Soit* $V \subset H \subset V'$ *un triple de Gelvand ,soit* K *un non-vide ensemble fermé et convexe de* V*.Supposons que* $a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *est forme bilinéaire continue symétrique telle que pour certaines constantes* $\lambda > 0$ *et* c_0*,*

$$a(v,v) + c_0 \| v \|_{\mathrm{H}}^2 \geqslant \lambda \| v \|_{\mathrm{V}}^2 \quad \forall v \in \mathrm{V}.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ *et* $f \in L^2(0, T, H)$*, il existe une fonction unique* $u \in \mathrm{H}^1(0, T, \mathrm{H}) \cap L^2(0, T.\mathrm{V})$ *tel que* $u(0) = u_0$ *et* $u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T]$ *et pour presque tout* $t \in (0, T)$*.*

$$< \dot{u}(t), v - u(t) >_{V \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geqslant (f(t), v - u(t))_H \quad \forall V v \in K.$$

$u(0) = u_0.$

VI- Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème B.5.9 *Soit* $\mathrm{V} \subset \mathrm{H} \subset \mathrm{V}'$ *un triplet de Gelfand. Soit* $A : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ *un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait :*

$$(Av, v)_{\mathrm{V}' \times \mathrm{V}} \geq w\|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in \mathrm{V}, \tag{B.33}$$

$$\|Av\|_{\mathrm{V}'} \leq C_1(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in \mathrm{V}. \tag{B.34}$$

Pour des constantes $w > 0$, $C_1 > 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Etant donnée* $u_0 \in \mathrm{H}$ *et* $f \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{V}')$, *alors il existe une fonction unique u satisfait*

$$u \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{V}) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{H}), \quad \dot{u} \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{V}'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \ p.p.t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

VII- Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème B.5.10 *Soit* $\mathrm{V} \subset \mathrm{H} \subset \mathrm{V}'$ *un triplet de Gelfand,* K *est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de* V*, et soit* $A : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ *est un opérateur linéaire, symétrique et continue qui satisfait*

$$\textit{il existe}\, C_2 > 0 \,\textit{et}\, C_3 \quad (Av, v)_{\mathrm{V} \times \mathrm{V}'} + C_2 \|v\|_{\mathrm{H}}^2 \geq C_3 \|v\|_{\mathrm{V}}^2 \quad \forall v \in \mathrm{V}. \tag{B.35}$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ *et* $f \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{V}')$, *il existe une unique fonction u qui satisfait*

$$u \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{V}) \cap \mathrm{C}^2(0, T; H) \cap \mathrm{W}^{1,2}(0, T; \mathrm{V}'), \tag{B.36}$$

$$u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T], \tag{B.37}$$

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{\mathrm{V}' \times \mathrm{V}} + (Au(t), v - u(t))_{\mathrm{V}' \times \mathrm{V}} \geq (f(t), v - u(t))_{\mathrm{V}' \times \mathrm{V}} \quad v \in K, \ p.p.t \in [0, T]. \tag{B.38}$$

$$u(0) = u_0. \tag{B.39}$$

Si $u_0 \in K$ *et* $f \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H})$, *alors il existe une unique fonction u satisfaite (B.37)–(B.39) et vérifie*

$$u \in \mathrm{W}^{1,2}(0, T; \mathrm{H}) \cap \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{V}). \tag{B.40}$$

Les démonstrations des deux théorèmes B.5.9–B.5.10 précédentes peuvent être trouvées par exemple dans [1].

2) Lemme de Gronwall

On rappelle ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme B.5.1 *Soient $m, n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0,T];\mathbb{R})$*

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) exp(\int_0^t n(s)ds) \quad \forall t \in [0,T],$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a\int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{at}\int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire B.5.1 *Soient $m \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Si $\psi \in C([0,T];\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Le Corollaire est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution.

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient,

Corollaire B.5.2 *Soient $n \in C([0,T];\mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Si $a \geq 0$ et $\psi \in C([0,T];\mathbb{R})$ est une fonction telle que ;*

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors.

$$\psi(t) \leq (a)exp(\int_0^t n(s)ds) \quad \forall t \in [0,T].$$

Le corollaire précédent est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution de façon suivante. En supposant qu'il existe deux solution, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solution, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_{0^t} n(s)\psi(s)ds. \quad \forall t \in [0,T]$$

avec une certaine fonction $n \geqslant 0$.[7] L'application du corollaire donne immédiatement la nullité de ψ.

3) Les inégalités de Hölder et de Young

Lemme B.5.2 (Inégalité de Young)

Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

Lemme B.5.3 (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors $f \cdot g \in L^1$ et on a

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Bibliographie

*[1] H. Brézis, Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité, Annale de l'Institut Fourier, Tome **18**, 1968.*

[2] G. Duvaut and J. L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, Dunod, 1976.

[3] G. Duvaut and J.L. Lions, Les inéquations en Mécanique et en Physique, Springer-Verlag*, Berlin (1976).*

[4] M. Frémond, Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série II **295** (1982), 913–916.*

[5] M.L. Gossa,T.Hadj Ammar, K.Saoudi, A Dynamic Contact Problem between Viscoelastic Piezoelectric Bodies with Friction and Damage*, Nonlinear Dynamics and Theory, **22**(2022), pp.522–537.*

[6] M.L. Gossa,T.Hadj Ammar, Analysis of a frictionnal bilateral contact problem for electro-viscoelastic materials*, Wulfenia Journal, **28**(2021), pp.39–57.*

*[7] T. Hadj Ammar, S. Drabla and B. Benederrahmane, Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion, Georgian Math. J., **44** (2014), pp. 1–15.*

[8] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, SIAM Journal of Numerical Analysis, **38** *(2000), pp. 556–579.*

[9] W. Han, M. Sofonea and K. Kazmi, Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials, Compu. Methods. Appl. Mech. Engrg., **196** *(2007), pp. 3915–3926.*

[10] A. Klarbring, A. Mikelic, M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance*, Int. J. Engng. Sci, **26** (1988), 811-832.*

[11] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with normal compliance and friction, J. Elasticity **51** *(1998), pp. 105–126.*

[12] W. Nowacki, Foundations of linear piezoelectricity, in H. Parkus (Ed.), Electromagnetic Interactions in Elastic Solids, Springer, Wien, 1979.

[13] J. Nečas, Les méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).*

[14] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocou, A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*,* ***177*** *(1999), 383-399.*

[15] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact, Comput. Meth. Appl. Engrg., ***177*** *(1999), pp. 383–399.*

*[16] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor,*Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics* ***276****, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.*

[17] M. Sofonea, A. Matei, Variational inequalities with applications*, A Study of antiplane frictional contact problems, Springer, New York (à paraître), p.51.*

*[18] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega,*Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys.* ***655****, 2004, Springer, Berlin Heidelberg.*

[19] M. Selmani, A dynamic problem with adhesion and damage in electro-viscoelastic body with long-term memory, J. Ineq. Pure Appl. Math., ***10*** *(2009), pp. 06–19.*

[20] J. N. Shrma and V. Walia, Straight and circular crested waves in generalized piezothermoelastic materials, J. Thermal Stresses, ***29*** *(2006), pp. 529–551.*

[21] J. S. Yang, R. C. Batra, Free vibrations of a linear thermo-piezoelectric body, J. Thermal Stresses, **18** *(1995), pp. 247–262.*

[22] Z. Zellagui, Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problémes de Contact en Mécanique des Solides Déformables, Thèse de Doctorat*, Université de Sétif 1, Sétif, 2012.*

Résumé: L'objet de cette thèse est l'étude de trois problèmes en mécanique de contact pour des lois constitutives électro-élastiques et électro-viscoélastiques. On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle puis on a présenté l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les trois problèmes. La thése est structurée en trois chapitres distincts. La mise en évidence de l'étude du problème en mécanique de contact entre deux corps thérmo-électro-élastique avec frottement de Coulomb, adhésion et endommagement fait l'objet du premier chapitre. Le deuxiéme chapitre a en valeur l'étude d'un problème de contact entre deux corps thermo-électro-viscoelastique avec adhésion et endommagement. Le dernier chapitre met en exergue l'étude d'un problème de contact entre deux corps thermo-électro-viscoelastique avec frottement de tresca, endommagement et un variable interne.La thése est jointe à une annexe dédiée au rappel des différents modéles mécaniques de contact étudiés et au rappel de quelques outils mathématiques nécessaires à la thése.
Mots clés : Elécto-elastique, électro-viscoélastique, adhésion, frottement, équation variationnelle, inéquation quasi-variationnelle, point fixe.

Abstract: The aim of this thesis is to study the three problems of the contact mechanics for electro-elastic and electro-viscoelastic constitutive laws. We used Green's formula to obtain the variational formulation then we presented the existence and uniqueness of the weak solution for the three problems. The thesis is structured of three chapters, in the first chapter we tackled the problem in mechanics of contact between two thermo-electro-elastic bodies with coulomb friction, adhesion and damage. The second chapter is devoted to the study of a problem of contact between two thermo-electro-viscoelastic bodies with adhesion and damage. The third chapter is alloted to the study of the problem of contact between two thermo-electro-viscoelastic bodies with adhesion, damage and an internal variable.The thesis is accompanied by a appendix which is devoted to recalling the different mechanical contact models which have been studied as well as to recalling some necessary mathematical tools needed in the thesis.

key words : Electro-elastic, electro-viscoelastic, adhesion, friction, variational equation, quasi-variational inequality, fixed point.

الخلاصة: الهدف من هذه الاطروحة هو دراسة ثلاثة مسائل في ميكانيك التلامس للقوانين التأسيسية للكهرباء المرنة ، و القوانين التأسيسية للكهرباء اللزجة. و قد استخدمت صيغة قرين للحصول على الصيغة المتنوعة، ثم برهنت على وجود حل ضعيف للمسائل الثلاث، و تتكون الأطروحة من ثلاثة فصول ففي الفصل الأول درست مسالة في ميكانيك التلامس بين جسمين مرنين كهربائيين مع احتكاك كولوم و الالتصاق و التلف، و الفصل الثاني فخصصته لدراسة مسألة التلامس بين جسمين حراريين كهربائيين مرنين مع الالتصاق و التلف، بينما خصصت الفصل الثالث لدراسة مسألة التلامس بين حراريين كهربائيين مرنين لزجين مع احتكاك تريسكا و التلف و متغير داخلي. وقد أرفقت الأطروحة بملحق خصص للتذكير بالنماذج الميكانيكية المختلفة للتلامس التي تمت دراستها، ثم ذكرت ببعض القوانين الرياضية الازمة في الأطروحة

الكلمات المفتاحية: المرونة الكهربائية، اللزوجة الكهربائية، الالتصاق، الاحتكاك، التلف، المعادلة المتغيرة، عدم المساواة شبه المتغيرة، النقطة الثابتة.