



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH  
جامعة عباس لغرور خنشلة  
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

## Mémire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière : **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

# Stabilité de type Ulam des équations proportionnelles fractionnaires intégro- différentielles

Réalisé par : **Adel LEMMOUCHI**

Dirigé par : **Dr. Rabiaa AOUAFI**

Membres de jury :

**Dr. A. MERGHAD**

**Président**

**Dr. A. SAHRAOUI**

**Examineur**

2022-2023

## *Dédicace*

Je dédie ce modeste travail à l'âme de mes parents, qui ont été une source inestimable d'amour et d'inspiration dans ma vie. À mon cher frère et ma petite famille qui a toujours été un pilier de soutien et de réconfort.

Ce travail est dédié à tous ceux qui ont joué un rôle important dans ma vie, qu'ils soient de ma famille ou de mon cercle d'amis.

Pour chacun des mentionné mon coeur.

A tous.



## Remerciements



Nous tenons tout d'abord à exprimer notre gratitude envers **Allah**, qui nous a accordé la volonté, la patience, le courage et la force nécessaires pour mener à bien ce travail.



Nous exprimons notre sincère gratitude et reconnaissance envers notre encadrante, le **Dr. AOUAFI. Rabiaa**, qui a assumé le rôle de encadreur de mémoire avec une écoute attentive et une disponibilité remarquable tout au long de la réalisation de ce travail. Nous la remercions chaleureusement pour son inspiration, son aide précieuse et le temps qu'elle nous a généreusement consacré, sans lesquels ce mémoire n'aurait jamais pu être réalisé.



◆ Je tiens exprimer ma reconnaissance envers **Dr. MERGHAD Amel** pour avoir accepté de présider le jury et et d'y consacrer une partie de leur précieux temps.



◆ Mes sincères remerciements vont è **Dr. SAHRAOUI Alaaddine** pour avoir accepté de jouer un rôle essentiel en tant que membre du jury et pour son implication dans le processus d'évaluation.



◆ Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers tous mes enseignants qui ont joué un rôle essentiel dans ma formation. Leurs connaissances, leur expertise et leur dévouement ont contribué à forger mon parcours éducatif. Mes remerciements leur sont adressés pour leur précieuse contribution à ma croissance et à mon développement.

---

# Résumé

---

La dérivée fractionnaire proportionnelle généralisée (**DFPG**) de Caputo est une dérivée récemment développée qui étend la dérivée fractionnaire classique de Caputo, permettant une représentation plus complète de phénomènes complexes dans divers domaines tels que la physique, la chimie et la biologie. Cette mémoire porte d'abord sur l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de l'implicite dans les équations intégro-différentielles impliquant les dérivées fractionnaires proportionnelles généralisées de Caputo. Le deuxième objectif est d'établir les quatre différentes stabilités de type Ulam, c'est-à-dire (stabilité Ulam-Hyers, stabilité Ulam-Hyers généralisée, stabilité Ulam-Hyers-Rassias et stabilité Ulam-Hyers-Rassias généralisée).

 **Mots-clés** : équation différentielle fractionnaire, dérivée fractionnaire proportionnelle généralisée de Caputo, existence et unicité, théorèmes du point fixe.

---

# Abstract

---

The generalized proportional Caputo fractional derivative (**GPF**) is a recently developed derivative that extends the classical Caputo fractional derivative, allowing for a more comprehensive representation of intricate phenomena in various fields such as physics, chemistry, and biology. This thesis first deals with the study of the existence and uniqueness of solution for the implicit in integro-differential equations involving the generalized proportional Caputo fractional derivatives. The second objective is establish the four different Ulam-type stability, i.e., (Ulam-Hyers stability, generalized Ulam-Hyers stability, Ulam-Hyers-Rassias stability and generalized Ulam-Hyers-Rassias stability).

**Keywords** : fractional differential equation, generalized proportional Caputo fractional derivative, existence and uniqueness, fixed point theorems.

---

## الملخص

---

المشتق الجزئي النسبي المعمم ل Caputo هو مشتق تم تطويره مؤخرًا يمتد إلى مشتق Caputo الكسري الكلاسيكي ، مما يسمح بتمثيل أكثر اكتمالاً للظواهر المعقدة في مختلف المجالات مثل الفيزياء والكيمياء وعلم الأحياء.

تتناول هذه الأطروحة أولاً دراسة وجود ووحدانية حل معادلة ضمنية تفاضلية تكاملية التي تتضمن المشتقات الكسرية النسبية المعممة لكابوتو.

الهدف الثاني هو إنشاء أربعة أنواع مختلفة من الاستقرار من نوع Ulam، أي ( استقرار Ulam-Hyers، استقرار Ulam-Hyers-Rassias المعمم، استقرار Ulam-Hyers-Rassias، استقرار Ulam-Hyers-Rassias المعمم).

الكلمات المفتاحية: المعادلة التفاضلية الكسرية ، المشتق الجزئي النسبي المعمم لكابوتو ، الوجود والتفرد، نظريات النقطة الثابتة.

# Table des matières

---

<b>Notations</b>	<b>vii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>vii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>2</b>
<b>1 Rappels et notions fondamentales</b>	<b>6</b>
1.1 Espaces fonctionnels . . . . .	6
1.1.1 Espaces des fonctions P-intégrables . . . . .	6
1.1.2 Espaces des fonctions absolument Continues . . . . .	7
1.2 Aspects fondamentaux de l'analyse fractionnaire . . . . .	8
1.2.1 Fonction Gamma et fonctions Gamma incomplètes . . . . .	8
1.2.2 Fonction Bêta . . . . .	10
1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires . . . . .	11
1.3.1 Intégrales fractionnaires . . . . .	11
1.3.2 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville . . . . .	13
1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo . . . . .	14
<b>2 Dérivées fractionnaires proportionnelles et stabilité de type Ulam</b>	<b>17</b>
2.1 Dérivées proportionnelles . . . . .	17
2.2 Intégrales fractionnaires proportionnelles généralisées de Riemann-Liouville (IFPG) . . . . .	18
2.3 Dérivée fractionnaire proportionnelle . . . . .	20

2.3.1	Dérivée fractionnaire proportionnelle généralisée (DFPG) de Riemann-Liouville . . . . .	20
2.3.2	Dérivées fractionnaires proportionnelles généralisées (DFPG) de Caputo . . . . .	23
2.3.3	Composition de DFPG de Caputo avec IFPG . . . . .	24
2.3.4	Relation relie les dérivées GPF de Caputo et les dérivées GPF de Riemann-Liouville . . . . .	24
2.4	Stabilité de type Ulam d'un problème fractionnaire proportionnelle . .	25
2.4.1	Stabilité au sens de Ulam-Hyers . . . . .	25
2.4.2	Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée . . . . .	25
2.4.3	Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias . . . . .	25
2.4.4	Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Stabilité de type Ulam d'un problème aux limites fractionnaire proportionnelle</b>	<b>27</b>
3.1	Présentation du problème . . . . .	27
3.2	Existence et unicité de solution . . . . .	30
3.3	Étude de la Stabilité de type-Ulam . . . . .	32
3.3.1	Stabilité de Ulam-Hyers . . . . .	32
3.3.2	Stabilité de Ulam-Hyers-Rassias . . . . .	34
<b>A</b>	<b>Théorèmes du point fixe</b>	<b>37</b>
A.1	Théorème du point fixe de Banach . . . . .	37
A.2	Théorème du point fixe de Brouwer et de Schauder . . . . .	38
A.2.1	Théorème du point fixe du type Brouwer . . . . .	39
A.2.2	Théorème du point fixe de Schauder . . . . .	39
<b>B</b>	<b>Certains mathématiciens intéressés par notre travail</b>	<b>40</b>
B.1	Thabet Abdeljawad . . . . .	40
B.2	Stanislaw Marcin Ulam . . . . .	41
B.3	Donald Holmes Hyers . . . . .	42
B.4	Themistocles M. Rassias . . . . .	43
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

# Notations

Afin de faciliter la compréhension, nous présentons dans cette section les différentes notations qui seront employées dans ce travail.

$\mathbb{N}$  : Ensemble des nombres entiers naturels

$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

$\mathbb{R}$  : Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$  : Ensemble des nombres complexes.

$L^p(\mathbb{R})$  : Espace des fonctions mesurables de puissance  $p \in [1, +\infty[$  intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

$L^\infty(\mathbb{R})$  : Espace des fonctions mesurables essentiellement bornées sur  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{C}(\mathbb{R})$  : Espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{C}^n(\Omega)$  : Espace des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables  $n$  fois et  $f^{(n)}$  continues.

$\mathcal{AC}(\mathbb{R})$  : Espace de fonctions absolument continues sur  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{AC}^n([a, b])$  : Espace de fonctions  $(n - 1)$ -fois continument dérivables sur  $[a, b]$  telles que  $x^{(n-1)} \in \mathcal{AC}([a, b])$ .

$\Gamma(\cdot)$  : Fonction Gamma.

$B(\cdot, \cdot)$  : Fonction Bêta.

$R(\cdot)$  : Partie réelle d'un nombre complexe.

$[\cdot]$  : Partie entière d'un nombre réel.

$I_{a+}^\alpha$  : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$ .

$I_{b-}^\alpha$  : Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$ .

$D_{a+}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$ .

$D_{b+}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$ .

${}^C D_{a+}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre  $\alpha$ .

${}^C D_{b-}^\alpha$  : Dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre  $\alpha$ .

$I_{a+}^{\alpha,\rho}$  : Intégrale fractionnaire proportionnelle de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$ .

$I_{b-}^{\alpha,\rho}$  : Intégrale fractionnaire proportionnelle de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$ .

$D_{a+}^{\alpha,\rho}$  : Dérivée fractionnaire proportionnelle de Riemann-Liouville à gauche d'ordre  $\alpha$ .

$D_{b+}^{\alpha,\rho}$  : Dérivée fractionnaire proportionnelle de Riemann-Liouville à droite d'ordre  $\alpha$ .

${}^C D_{a+}^{\alpha,\rho}$  : Dérivée fractionnaire proportionnelle de Caputo à gauche d'ordre  $\alpha$ .

${}^C D_{b-}^{\alpha,\rho}$  : Dérivée fractionnaire proportionnelle de Caputo à droite d'ordre  $\alpha$ .

$\gamma_U(\alpha, t)$  : Fonction Gamma incomplète supérieure.

$\gamma(\alpha, t)$  : Fonction Gamma incomplète inférieure.

$P(\alpha, t)$  : Fonction Gamma incomplète inférieure régularisé.

# Table des figures

---

1.1	Fonction Gamma. . . . .	9
-----	-------------------------	---

# Introduction générale

---

Dans la réalité, de nombreux phénomènes et processus se caractérisent par des changements rapides de leur état à certains moments, et la durée de ces changements joue un rôle significatif. Des exemples de tels processus peuvent être observés dans des domaines tels que la physique, la biologie, la dynamique des populations, l'écologie, la pharmacocinétique, et bien d'autres.



Pour modéliser de manière appropriée la dynamique de ces processus, il est nécessaire d'utiliser le calcul fractionnaire ([12], [19], [21], [18]), ce calcul est considéré comme une généralisation du calcul différentielle classique (ou d'ordre entier). Le calcul fractionnaire est un domaine des mathématiques qui a connu une croissance rapide au cours des trois derniers siècles, et il continue d'attirer l'attention de nombreux scientifiques. Ce qui rend le calcul fractionnaire intégral particulièrement intéressant, c'est la présence de différentes variantes de dérivées fractionnaires et d'intégrales. Ces variations offrent une richesse et une diversité qui suscitent un grand intérêt dans ce domaine.



Les chercheurs peuvent ainsi choisir l'opérateur fractionnaire le plus approprié pour obtenir de meilleurs résultats lors de la modélisation de problèmes réels. Cependant, les opérateurs fractionnaires traditionnels présentent souvent des singularités dans leurs noyaux, ce qui peut créer des obstacles dans certaines applications. Afin de surmonter ces limitations, les chercheurs ont découvert de nouveaux types d'opérateurs fractionnaires utilisant des noyaux non singuliers, tout en préservant la propriété essentielle de non-localité qui caractérise les opérateurs fractionnaires, tels que les dérivées fractionnaires de **Caputo-Fabrizio** et d'**Atangana-Baleanu**, ainsi que leurs intégrales correspondantes, ces avancées permettent de surmonter ces défis et ouvrent de nouvelles perspectives dans l'utilisation des opérateurs fractionnaires dans divers domaines de recherche, sont importants dans le domaine du calcul fractionnaire. Ces opérateurs ont été étudiés et référencés dans des travaux antérieurs, notamment ([3], [6]).



En 2015 [14], les auteurs ont introduit un concept connu sous le nom de dérivée

conforme, qui permet de différencier des ordres non entiers. Ensuite, dans leur article ultérieur [11], **Jarad** et al. ont présenté un nouveau type de dérivées fractionnaires appelées dérivées fractionnaires proportionnelles généralisées (**GPF**). Ces dérivées sont générées par une dérivée proportionnelle locale, ouvrant ainsi de nouvelles possibilités pour son application et son analyse.



Ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires implicites ont fait l'objet d'un intérêt considérable parmi les chercheurs, en particulier dans les domaines de la stabilité d'**Ulam-Hyers** et d'**Ulam-Hyers Rassias**. Ces équations, caractérisées par leur forme implicite, ont été largement étudiées pour comprendre leurs propriétés et leur comportement. Pour des informations plus détaillées sur ce sujet, vous pouvez vous référer aux références suivantes : ([2], [9], [22]).

Motivé par ([13],[17]), notre objectif principal dans cette mémoire est de généraliser le travail effectué par **El-Sayed** [10] dans lequel l'auteur établit des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité pour le problème aux limites du problème différentiel implicite d'ordres fractionnaires (IFDP) :

$$\begin{cases} {}^C D_a^\alpha y(t) = f\left(t, y(t), {}^C D^\beta y(t), \int_0^t k(t, s) {}^C D^\alpha y(s) ds\right), & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T, \end{cases}$$

où  ${}^C D_a^\alpha, {}^C D_a^\beta$  sont des dérivées fractionnaires au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta < 1$  et  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions contenues.

Et nous prouvons l'existence, l'unicité et la stabilité de quatre types différents de Ulam pour le problème aux limites de l'équation différentielle fractionnaire proportionnelle implicite de la forme :

$$\begin{cases} {}^C D_a^{\alpha, \rho} y(t) = f\left(t, y(t), {}^C D^{\beta, \rho} y(t), \int_0^t k(t, s) {}^C D^{\alpha, \rho} y(s) ds\right), & t \in [0, T] \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T, \end{cases} \quad (P)$$

où  ${}^C D_a^{\alpha, \rho}, {}^C D_a^{\beta, \rho}$  sont des dérivées fractionnaires proportionnelle généralisées au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta < 1$  tel que  $\alpha + \beta \leq 2$ ,  $y_0, y_T \in \mathbb{R}$  et  $f : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions contenues.

Ce mémoire se compose de trois chapitres principaux, ainsi que des annexes A et B.



Le premier chapitre est consacré aux définitions nécessaires, aux propriétés et aux bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire qui sont pertinents pour notre étude.

§ Le deuxième chapitre présente les bases théoriques des opérations d'ordre fractionnaire proportionnel, ainsi que quatre types de stabilité d'Ulam qui sont pertinents pour notre étude.

§ Le chapitre trois est consacré à la discussion des conditions suffisantes pour l'existence de solutions du problème (P), ainsi qu'à l'examen de certains types de stabilité d'Ulam associés à notre problème.

§ Dans l'annexe A on donne quelques théorèmes de point fixe, et Dans l'annexe B, nous présentons l'historique de certains mathématiciens ayant contribué au calcul fractionnaire proportionnel.





# Chapitre 1



---

## Rappels et notions fondamentales

---

Dans ce chapitre préliminaire, nous posons les bases de notre travail en définissant les concepts et en énonçant les propriétés nécessaires. Nous aborderons notamment les espaces fonctionnels, les fonctions spéciales et le calcul fractionnaire qui seront des outils indispensables tout au long de notre étude.

### 1.1 Espaces fonctionnels

La présente section est dédiée à l'exposition des définitions des espaces de fonctions absolument continues et  $p$ -intégrables, qui seront exploitées ultérieurement dans notre travail.

#### 1.1.1 Espaces des fonctions $P$ -intégrables

**Définition 1.1.** [20] Soit  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) un intervalle fini ou infini de  $\mathbb{R}$  et  $1 \leq p < \infty$ . L'espace  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  est l'espace des fonctions réelles sur  $\Omega$  telle que :  $f$  est mesurable et

$$\int_{\Omega} |f|^p dx < \infty.$$

## 1.1 Espaces fonctionnels

**Définition 1.2.** ([7],[20]) L'espace  $L^p(\Omega)$  est l'espace de classe des fonctions mesurables de puissance  $p^{i\text{me}}$  intégrable de Lebesgue sur  $\Omega$  telle que :

$$L^p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^p(\Omega)}{\mathcal{R}},$$

où  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence définie par :

$$f \mathcal{R} g \iff f = g \text{ presque par tout sur } \Omega, \quad (1.1)$$

avec  $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ .

L'espace  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Définition 1.3.** ([7],[20]) L'espace  $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions essentiellement bornées telle que :  $f$  est mesurable et

$$\exists C > 0, \text{ telle que } |f| < C \text{ presque par tout sur } \Omega.$$

**Définition 1.4.** [20]

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace du classe des fonctions essentiellement bornées de Lebesgue telle que :

$$L^\infty(\Omega) = \frac{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}{\mathcal{R}},$$

où  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence (1.1), avec  $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ .

L'espace  $L^\infty(\Omega)$  muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \left\{ C > 0, |f| < C \text{ presque par tout sur } \Omega \right\}.$$

**Théorème 1.1.** [7] L'espace  $L^p(\Omega)$  est un espace de Banach, pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ .

### 1.1.2 Espaces des fonctions absolument Continues

On désigne par  $\mathcal{C}^m(\Omega)$ ,  $m \in \mathbb{N}$  l'espace des fonctions  $f$  qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égal  $m$  continues sur  $\Omega$ , muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m} = \sum_{i=0}^m \max_{x \in \Omega} |f^{(i)}(x)|, \quad m \in \mathbb{N}.$$

En particulier si  $n = 0$ ,  $\mathcal{C}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega)$  l'espace des fonctions continues sur  $\Omega$  muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

**Définition 1.5.** [15] L'espace  $\mathcal{AC}(\Omega)$ , est l'espace des fonctions absolument continues sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  tel que :

$$f \in \mathcal{AC}(\Omega) \iff \exists \varphi \in L^1(\Omega) \quad \text{tel que} \quad f = c + \int_a^x \varphi(s) ds,$$

où  $c$  est une constante arbitraire.

**Définition 1.6.** [15] Pour  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathcal{AC}^n(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f$  appartenant à  $\mathcal{C}^m(\Omega)$  ( $m = 0, 1, \dots, n-1$ ), telles que  $f^{(n-1)} \in \mathcal{AC}(\Omega)$ , i.e.;

$$\mathcal{AC}^n(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, f \in \mathcal{C}^m(\Omega), m = 0, 1, \dots, n-1, \text{ et } f^{(n-1)} \in \mathcal{AC}(\Omega)\}.$$

**Remarque 1.1.** En particulier,  $\mathcal{AC}^1(\Omega) = \mathcal{AC}(\Omega)$ .

**Lemme 1.1.** [15]  $f$  est une fonction de  $\mathcal{AC}^n(\Omega)$  si et seulement si elle est représentée sous la forme :

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} \varphi(s) ds + \sum_{m=0}^{n-1} c_m (x-a)^m,$$

où  $\varphi \in L^1(\Omega)$ ,  $c_m$  sont des constantes arbitraires.

## 1.2 Aspects fondamentaux de l'analyse fractionnaire

Cette section a pour objectif de poser les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire, indispensables pour la suite de notre étude. Nous y passons en revue les définitions et les principales propriétés de ces opérateurs.

Nous débutons en présentant la fonction Gamma d'Euler, la fonction Gamma incomplète et la fonction Bêta, des concepts essentiels qui occupent une place centrale dans la théorie du calcul fractionnaire.

### 1.2.1 Fonction Gamma et fonctions Gamma incomplètes

À ses débuts, la fonction Gamma, introduite par Euler en 1729, avait la remarquable propriété d'interpoler la factorielle pour les arguments entiers. ce qui la rendit largement utilisée dans le domaine du calcul fractionnaire pour diverses applications. Dans une correspondance datée du 8 janvier 1730, Euler a présenté définition suivante de la fonction Gamma, telle que citée dans les références ([15],[16],[20],[8]).

**Définition 1.7.** La fonction Gamma est définie sur le demi-plan  $\{\alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que } R(\alpha) > 0\}$  par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (1.2)$$

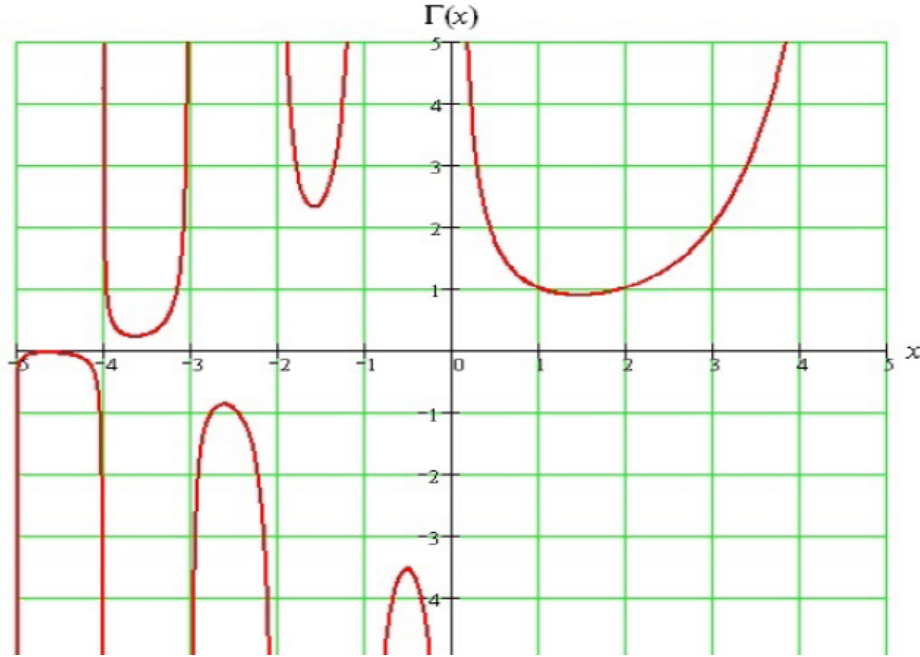


FIGURE 1.1: Fonction Gamma.

**Définition 1.8.** [15] Soit  $\alpha \in \mathbb{C} (R(\alpha) > 0)$ . La fonction Gamma incomplète inférieure  $\gamma(\alpha, t)$  et Gamma incomplète supérieure  $\gamma_U(\alpha, t)$  sont définies par :

$$\gamma(\alpha, t) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau, \quad (1.3)$$

$$\gamma_U(\alpha, \tau) = \int_\tau^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt. \quad (1.4)$$

**Définition 1.9.** [15] La fonction Gamma incomplète inférieure régularisé est définie par :

$$P(\alpha, t) = \frac{\gamma(\alpha, t)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (1.5)$$

**Remarque 1.2.** [15]

$$\Gamma(\alpha) = \gamma(\alpha, t) + \gamma_U(\alpha, t), \quad (1.6)$$

pour tout  $t$ , ce qui équivaut à

$$\frac{\gamma(\alpha, t)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\gamma_U(\alpha, t)}{\Gamma(\alpha)} = 1. \quad (1.7)$$

**Propriétés de la fonction Gamma et la fonction Gamma incomplète inférieure régularisé**

La fonction Gamma possède une propriété essentielle suivante :

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \tag{1.8}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt \\ &= [-t^\alpha e^{-t}]_{t=0}^{t=\infty} + \alpha \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha). \end{aligned}$$

Il convient de noter que la propriété (1.8) nous permet d'établir que :

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En effet, on a  $\Gamma(1) = 1$ , et donc :

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1 = 1!, \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!, \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!, \\ &\dots \dots \dots \dots, \\ \Gamma(n + 1) &= n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!. \end{aligned}$$

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite :

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^\alpha}{(\alpha + 1) \dots (\alpha + n)}.$$

**Lemme 1.2.** [4] Soient  $\alpha, \eta \in \mathbb{R}^+$  il est clair que  $P(\alpha, \eta)$  est une fonction croissante pour  $t \in [0, T]$  de plus :

$$0 \leq P(\alpha, \eta t) \leq 1 \quad \text{pour } t \geq 0, \tag{1.9}$$

$$\max_{t \in [0, T]} P(\alpha, \eta t) = P(\alpha, \eta t) |_{t=T} = P(\alpha, \eta T), \tag{1.10}$$

$$\min_{t \in [0, T]} P(\alpha, \eta t) = P(\alpha, \eta t) |_{t=0} = 0. \tag{1.11}$$

**1.2.2 Fonction Bêta**

La fonction Bêta est une fonction fondamentale du calcul fractionnaire, tout comme la fonction Gamma. Lorsqu'elles sont combinées, ces deux fonctions jouent un rôle crucial

## 1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

dans ce domaine.

**Définition 1.10.** ([15],[16]) La fonction Bêta ou intégrale eulérienne de première espèce est définie pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  par :

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau, \quad (R(\alpha) > 0, \quad R(\beta) > 0). \quad (1.12)$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par l'équation suivante :

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}. \quad (1.13)$$

### Propriétés de la fonction Bêta

1. La fonction Bêta est symétrique i.e. :

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha), \quad R(\alpha) > 0, \quad R(\beta) > 0.$$

2.  $\alpha B(\alpha, \beta + 1) = \beta B(\alpha + 1, \beta).$

3.  $B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta).$

4.  $B(1, \beta) = \frac{1}{\beta}.$

5.  $\frac{\partial}{\partial \alpha} B(\alpha, \beta) = B(\alpha, \beta) \left( \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right).$

## 1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

Nous définissons maintenant les concepts de base des dérivées fractionnaires et des intégrales, en introduisant dans ce cas les deux approximations les plus importantes, à savoir celles de Riemann-Liouville et de Caputo, ainsi que certaines de leurs propriétés.

### 1.3.1 Intégrales fractionnaires

Soit  $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $b$  pouvant être fini ou infini. Une primitive de  $f$  est donnée par :

$$If(t) = \int_a^t f(s) ds.$$

### 1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

Pour une primitive seconde on aura :

$$I^2 f(t) = \int_a^t ds \int_a^s f(\tau) d\tau.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$I^2 f(t) = \int_a^t (t-s) f(s) ds.$$

Plus généralement, l'intégration successive de la fonction  $f$  s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I^n f(t) &= \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds. \end{aligned}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy. En généralisant cette relation, l'intégrale d'ordre non entier de la fonction  $f$  peut être définie en utilisant la fonction Gamma  $\Gamma(n) = (n-1)!$  donc, on peut définir l'intégration fractionnaire comme suit :

**Définition 1.11.** [15] Soit  $\Omega = [a, b]$  ( $-\infty < a < b < +\infty$ ). Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville  $I_{a+}^\alpha f$  et  $I_{b-}^\alpha f$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $R(\alpha) > 0$ ) sont définies par :

$$(I_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (t > a; R(\alpha) > 0) \quad (1.14)$$

et

$$(I_{b-}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (t < b; R(\alpha) > 0). \quad (1.15)$$

Ces intégrales sont appelées intégrales fractionnaires à gauche et à droite respectivement,  $\Gamma(\alpha)$  est la fonction Gamma qui définie dans (1.2).

**Lemme 1.3.** [15] Si  $R(\alpha) > 0$  et  $R(\beta) > 0$  et  $f \in L^p([a, b])$ . L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville (1.14) et (1.15) possède la propriété suivante :

$$\left( I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f \right)(t) = \left( I_{a+}^{\alpha+\beta} f \right)(t), \quad \text{et} \quad \left( I_{b-}^\alpha I_{b-}^\beta f \right)(t) = \left( I_{b-}^{\alpha+\beta} f \right)(t). \quad (1.16)$$

**Proposition 1.1.** [15] Si  $R(\alpha) > 0$  et  $\beta \in \mathbb{C}$ ,  $R(\beta) > 0$ , alors : les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville (1.14) et (1.15) des fonctions de puissance  $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$  et  $g(t) = (b-t)^{\beta-1}$  donnent des fonctions de puissance de même forme suivantes :

$$(I_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \quad (1.17)$$

et

$$(I_{b-}^{\alpha} g)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (b - t)^{\alpha + \beta - 1}. \quad (1.18)$$

### 1.3.2 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Pour établir les dérivées, Riemann et Liouville utilisent une approche simple. Par exemple, la dérivée demi-ordre R-L de la fonction  $f$  s'exprime comme suit :

$$D^{\frac{1}{2}} f(t) = \frac{d}{dt} (I^{\frac{1}{2}} f)(t).$$

Cela signifie la dérivée (normale) d'une intégrale fractionnaire d'ordre un demi.

**Définition 1.12.** [15] Les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche  $(D_{a+}^{\alpha} f)$  et à droite  $(D_{b-}^{\alpha} f)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $R(\alpha) > 0$ ) d'une fonction intégrable  $f$  sont définies par :

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha} f)(t) &= \left( \frac{d}{dt} \right)^n [(I_{a+}^{n-\alpha} f)(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \end{aligned} \quad (1.19)$$

et

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha} f)(t) &= \left( -\frac{d}{dt} \right)^n [(I_{b-}^{n-\alpha} f)(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left( -\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \end{aligned} \quad (1.20)$$

où  $n = [R(\alpha)] + 1$ ,  $[R(\alpha)]$  désigne la partie entière du nombre réel  $R(\alpha)$ .

En particulier, quand  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$(D_{a+}^0 f)(t) = (D_{b-}^0 f)(t) = f(t), \quad (D_{a+}^n f)(t) = f^{(n)}(t) \quad \text{et} \quad (D_{b-}^n f)(t) = (-1)^n f^{(n)}(t), \quad (1.21)$$

où  $f^{(n)}$  est la dérivée habituelle de  $f$  d'ordre  $n$ .

**Remarque 1.3.** Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville de la fonction  $f$  en un point  $t$  est à caractère non local, elle dépend de toutes les valeurs  $f(t)$  dans l'intervalle  $(a, t)$ .

Une condition suffisante pour que l'intégrale fractionnaire d'une fonction  $f$  existe est que :

$$f \in \mathcal{A}C^n([a, b]).$$

### 1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

**Proposition 1.2.** [15] Si  $R(\alpha) \geq 0$  et  $R(\beta) > 0$ , alors  $(D_{a+}^{\alpha} f, \text{ et } (D_{b-}^{\alpha} g))$ , où  $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$ ,  $g(t) = (b-t)^{\beta-1}$  sont données par :

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (1.22)$$

et

$$(D_{b-}^{\alpha} g)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}. \quad (1.23)$$

**Lemme 1.4.** [5] Pour  $R(\alpha) > 0$ , soit  $f \in \mathcal{AC}^n(a, b)$ . Alors :

$$I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f(t) = f(t) + c_1(t-a)^{\alpha-1} + c_2(t-a)^{\alpha-2} + \dots + c_n(t-a)^{\alpha-n}, \quad (1.24)$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ( $n = [R(\alpha)] + 1$ ).

**Proposition 1.3.** [15] Soit  $R(\alpha) > 0$ ,  $R(\beta) > 0$  tel que :  $n-1 < R(\alpha) < n$ ,  $m-1 < R(\beta) < m$  ( $n, m \in \mathbb{N}$ ) et  $R(\alpha) + R(\beta) < n$ , et soit  $f \in L^1(a, b)$  et  $I_{a+}^{m-\alpha} f \in \mathcal{AC}^m([a, b])$ . Alors nous avons :

$$(D_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\beta} f)(t) = (D_{a+}^{\alpha+\beta} f)(t) - \sum_{j=1}^m \left[ (D_{a+}^{\beta-j} f)(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \quad (1.25)$$

En permutant  $\alpha$  et  $\beta$  (et donc  $m$  et  $n$ ), nous pouvons écrire :

$$(D_{a+}^{\beta} D_{a+}^{\alpha} f)(t) = (D_{a+}^{\alpha+\beta} f)(t) - \sum_{j=1}^n \left[ (D_{a+}^{\alpha-j} f)(t) \right]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(1-\beta-j)}. \quad (1.26)$$

#### 1.3.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Malgré l'importance de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs, dont Caputo (1967-1969), ont souligné la nécessité de revoir cette définition. En effet, dans des domaines tels que la viscoélasticité, la mécanique des solides et la rhéologie, des problèmes appliqués requièrent des conditions initiales physiquement interprétables à l'aide de dérivées classiques. Ce n'est pas le cas dans la modélisation basée sur l'approche de Riemann-Liouville, qui nécessite la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Dans l'approche de Caputo, la dérivée fractionnaire est définie en appliquant d'abord l'opérateur de différenciation puis l'opérateur d'intégration (contrairement à Riemann-Liouville, qui suit l'ordre inverse de l'intégration suivie de la différenciation). Cela signifie que la dérivée demi-ordre, selon la définition de Caputo, peut être exprimée comme suit :

$${}^C D^{\frac{1}{2}} f(t) = I^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d}{dt} f(t) \right).$$

### 1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

**Définition 1.13.** ([15], [20]) Les dérivées fractionnaires  $({}^C D_{a+}^\alpha f)$  et  $({}^C D_{b-}^\alpha f)$  d'ordre  $\alpha \in \mathbb{C}$  ( $R(\alpha) \geq 0$ ) sur  $[a, b]$  sont définies par :

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds = I_{a+}^{n-\alpha} D^n f(t) \quad (1.27)$$

et

$$({}^C D_{b-}^\alpha f)(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \frac{f^{(n)}(s)}{(s-t)^{\alpha-n+1}} ds = (-1)^n I_{b-}^{n-\alpha} D^n f(t), \quad (1.28)$$

Ces dérivées sont appelées dérivées fractionnaires de Caputo à gauche et à droite d'ordre  $\alpha$ .

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle  $[a, b]$  est décrite par le théorème suivant.

**Théorème 1.2.** [15] Soit  $R(\alpha) \geq 0$  et soit  $n = [\alpha] + 1$ . Les dérivées fractionnaires de Caputo (1.27) et (1.28) sont définies via les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville (1.19) et (1.20) par :

a) Si  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ,  $({}^C D_{a+}^\alpha f)$  et  $({}^C D_{b-}^\alpha f)$  sont représentés par :

$$({}^C D_{a+}^\alpha f)(t) := \left( D_{a+}^\alpha \left[ f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (s-a)^k \right] \right)(t) \quad (1.29)$$

et

$$({}^C D_{b-}^\alpha f)(t) := \left( D_{b-}^\alpha \left[ f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-s)^k \right] \right)(t), \quad (1.30)$$

b) Si  $\alpha = n \in \mathbb{N}$ , alors :

$$({}^C D_{a+}^0 f)(t) = ({}^C D_{b-}^0 f)(t) = f(t). \quad ({}^C D_{a+}^n f)(t) = f^{(n)}(t), \quad ({}^C D_{b-}^n f)(t) = (-1)^n f^{(n)}(t).$$

**Proposition 1.4.** [15]

Soit  $R(\alpha) > 0$ ,  $R(\beta) > 0$  et soit  $n = [R(\alpha)] + 1$ . Alors on peut vérifier directement que :

$${}^C D_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (R(\beta) > n), \quad (1.31)$$

$${}^C D_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1} \quad (R(\beta) > n) \quad (1.32)$$

et

$${}^C D_{a+}^\alpha (t-a)^k = 0 \text{ et } {}^C D_{b-}^\alpha (b-t)^k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (1.33)$$

pour  $\beta = 1$  on trouve :

$${}^C D_{a+}^\alpha 1 = 0 \text{ et } {}^C D_{b-}^\alpha 1 = 0. \quad (1.34)$$

**Lemme 1.5.** [15] Soit  $R(\alpha) > 0$  et soit  $f \in L^\infty(a, b)$  ou  $f \in \mathcal{C}(a, b)$ . Alors :

$$({}^C D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f)(t) = f(t) \text{ et } ({}^C D_{b-}^\alpha I_{b-}^\alpha f)(t) = f(t). \quad (1.35)$$

**Lemme 1.6.** ([5], [23]) Pour  $R(\alpha) > 0$ , soit  $f \in \mathcal{AC}^n(a, b)$ . Alors :

$$I_{a^+}^{\alpha} {}^C D_{a^+}^{\alpha} f(t) = f(t) + c_0 + c_1(t-a) + c_2(t-a)^2 + \dots + c_{n-1}(t-a)^{n-1}, \quad (1.36)$$

où  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$  ( $n = [R(\alpha)] + 1$ ).



## Chapitre 2



---

### Dérivées fractionnaires proportionnelles et stabilité de type Ulam

---

*Le but de ce chapitre est d'introduire les fondements théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire proportionnelle, qui sont essentiels pour les chapitres suivants. En plus de rappeler les définitions et les principales propriétés de ces opérateurs, ce chapitre vise également à établir certains types de stabilité d'Ulam, qui peut être consultés dans les références ([1],[17]).*

### 2.1 Dérivées proportionnelles

*Dans cette section, nous mettons en avant la dérivée proportionnelle, qui est un concept fondamental et revêt une importance cruciale pour notre étude.*

**Définition 2.1.** [1] Soit  $\rho \in [0, 1]$ , supposons que les fonctions  $\kappa_0, \kappa_1 : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  soient continues tel que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \kappa_1(\rho, t) = 1,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \kappa_0(\rho, t) = 0,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \kappa_1(\rho, t) = 0,$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 1^-} \kappa_0(\rho, t) = 1$$

et  $\kappa_1(\rho, t) \neq 0$ ,  $\rho \in [0, 1)$ ,  $\kappa_0(\rho, t) \neq 0$ ,  $\rho \in (0, 1]$ . Alors, la dérivée proportionnelle d'ordre  $\rho$  est définie par :

$$D^\rho f(t) = \kappa_1(\rho, t) f(t) + \kappa_0(\rho, t) f'(t). \quad (2.1)$$

On se limitera au cas où  $\kappa_0(\rho, t) = \rho$  et  $\kappa_1(\rho, t) = 1 - \rho$ . Par conséquent (2.1) devient :

$$D^\rho f(t) = (1 - \rho) f(t) + \rho f'(t). \quad (2.2)$$

On écrira aussi :

$$\left( D^{n, \rho} f \right) (t) = \left( \underbrace{D^\rho D^\rho \dots D^\rho}_{n \text{ fois}} f \right) (t). \quad (2.3)$$

**Remarque 2.1.** Il est facile de comprendre que  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} D^\rho f(t) = f(t)$  et  $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} D^\rho f(t) = f'(t)$ . Ainsi, la dérivée (2.2) est en quelque sorte considérée comme plus générale que la dérivée proportionnelle qui ne tend évidemment pas vers les fonctions d'origine lorsque  $\rho$  tend vers 0.

## 2.2 Intégrales fractionnaires proportionnelles généralisées de Riemann-Liouville (IFPG)

Dans cette section, nous donnons les définitions des intégrales fractionnaires proportionnelles généralisées de Riemann-Liouville et présentent certaines propriétés.

**Définition 2.2.** [1] Pour  $0 < \rho \leq 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , et  $R(\alpha) > 0$ . Les intégrales fractionnaires proportionnelles généralisées de Riemann-Liouville  $I_{a^+}^{\alpha, \rho} f$  et  $I_{b^-}^{\alpha, \rho} f$  de  $f$  d'ordre  $\alpha$  sont définies par :

$$\begin{aligned} (I_{a^+}^{\alpha, \rho} f) (t) &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \rho^{-\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} \left( I_{a^+}^\alpha \left( e^{\frac{1-\rho}{\rho}t} f(t) \right) \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} (I_{b^-}^{\alpha, \rho} f) (t) &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_t^b e^{\frac{\rho-1}{\rho}(s-t)} (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds \\ &= \rho^{-\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} \left( I_{b^-}^\alpha \left( e^{\frac{1-\rho}{\rho}t} f(t) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

En particulier pour  $\alpha = 0$

$$\left(I_{a^+}^{0,\rho} f\right)(t) = \left(I_{b^-}^{0,\rho} f\right)(t) = f(t). \quad (2.6)$$

**Proposition 2.1.** [17] Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tel que  $R(\alpha) > 0, R(\beta) > 0$ , et soit  $f(t) = e^{\frac{\rho-1}{\rho}t}(t-a)^{\beta-1}$ ,  $g(t) = e^{\frac{\rho-1}{\rho}t}(b-t)^{\beta-1}$ . Pour tout  $\rho > 0$ , nous avons :

$$\left(I_{a^+}^{\alpha,\rho} f\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)\rho^\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t}(t-a)^{\alpha+\beta-1}, \quad R(\alpha) > 0 \quad (2.7)$$

et

$$\left(I_{b^-}^{\alpha,\rho} g\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)\rho^\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-t)}(b-t)^{\alpha+\beta-1}, \quad R(\alpha) > 0. \quad (2.8)$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} \left(I_{a^+}^{\alpha,\rho} f\right)(t) &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)}(t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}s}(s-a)^{\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^{\beta-1} ds, \end{aligned}$$

on utilise le changement de variable  $s = a + (t-a)\xi \Rightarrow ds = (t-a)d\xi$   
pour  $s = a \Rightarrow \xi = 0; s = t \Rightarrow \xi = 1$  donc on obtient :

$$\begin{aligned} \left(I_{a^+}^{\alpha,\rho} f\right)(t) &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} \int_0^1 [t-a-(t-a)\xi]^{\alpha-1} [a+(t-a)-a]^{\beta-1} (t-a) d\xi \\ &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (1-\xi)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} \xi^{\beta-1} (t-a) d\xi \\ &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} \xi^{\beta-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) \\ &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha+\beta)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

De la même façon on prouve l'égalité (2.8). ■

**Théorème 2.1. (Propriété de semi-groupe pour IPFG)**

Si  $\rho > 0, R(\alpha) > 0, R(\beta) > 0$ , alors pour  $f$  continue et définie pour  $t \geq a$ , nous avons :

## 2.3 Dérivée fractionnaire proportionnelle

$$\left( I_{a^+}^{\alpha, \rho} I_{a^+}^{\beta, \rho} f \right) (t) = \left( I_{a^+}^{\beta, \rho} I_{a^+}^{\alpha, \rho} f \right) (t) = \left( I_{a^+}^{\alpha + \beta, \rho} f \right) (t).$$

*Démonstration.* En utilisant la définition 2.2, en interchangeant l'ordre et en faisant le changement de variable  $y = \frac{u - \tau}{t - \tau}$ , on trouve :

$$\begin{aligned} I_{a^+}^{\alpha, \rho} \left( I_{a^+}^{\beta, \rho} f \right) (t) &= \frac{1}{\rho^{\alpha + \beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^u e^{\frac{\rho - 1}{\rho}(t - u)} e^{\frac{\rho - 1}{\rho}(u - \tau)} (t - u)^{\alpha - 1} (u - \tau)^{\beta - 1} f(\tau) d\tau du \\ &= \frac{1}{\rho^{\alpha + \beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^t e^{\frac{\rho - 1}{\rho}(t - \tau)} f(\tau) \int_{\tau}^t (t - u)^{\alpha - 1} (u - \tau)^{\beta - 1} du d\tau \\ &= \frac{1}{\rho^{\alpha + \beta} \Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^t e^{\frac{\rho - 1}{\rho}(t - \tau)} (t - \tau)^{\alpha + \beta - 1} f(\tau) d\tau \int_0^1 (1 - y)^{\alpha - 1} y^{\beta - 1} dy \\ &= \frac{1}{\rho^{\alpha + \beta} \Gamma(\alpha + \beta)} \int_a^t e^{\frac{\rho - 1}{\rho}(t - \tau)} (t - \tau)^{\alpha + \beta - 1} f(\tau) d\tau \\ &= \left( I_{a^+}^{\alpha + \beta, \rho} f \right) (t). \end{aligned}$$

■

**Lemme 2.1.** [17] Soit  $\rho \in (0, 1]$ ,  $R(\alpha) > 0$  pour  $t \in [a, b]$

$$\left( I_{a^+}^{\alpha, \rho} 1 \right) (t) = \begin{cases} \frac{P\left(\alpha, -\frac{\rho - 1}{\rho}(t - a)\right)}{(1 - \rho)^\alpha}, & \text{si } \rho \in (0, 1) \\ \left( I^\alpha 1 \right) (t) = \frac{(t - a)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}, & \text{si } \rho = 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

## 2.3 Dérivée fractionnaire proportionnelle

Dans cette section, nous donnons les définitions des dérivées fractionnaires proportionnelles de Riemann-Liouville et présentent certaines propriétés.

### 2.3.1 Dérivée fractionnaire proportionnelle généralisée (DFPG) de Riemann-Liouville

La dérivée fractionnaire proportionnelle généralisée (DFPG) de R-L est une avancée récente dans le domaine de la dérivation fractionnaire. Cette méthode étend la dérivée fractionnaire classique de Riemann-Liouville et permet une représentation plus complète et approfondie des phénomènes complexes dans tous les domaines, qu'il s'agisse de la physique, de la chimie, de la biologie ou d'autres disciplines.

**Définition 2.3.** [17] Pour  $0 < \rho \leq 1$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $R(\alpha) \geq 0$  et  $n = [R(\alpha)] + 1$ . Les dérivées fractionnaires proportionnelles généralisées de Riemann-Liouville  $D_{a^+}^{\alpha, \rho} f$  et  $D_{b^-}^{\alpha, \rho} f$  d'ordre  $\alpha$  d'une

fonction intégrable  $f$  sont définies par :

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) &= (D^{n,\rho} (I_{a^+}^{n-\alpha,\rho} f))(t) \\ &= \frac{D^{n,\rho}}{\rho^{n-\alpha}\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

et

$$\begin{aligned} (D_{b^-}^{\alpha,\rho} f)(t) &= (D^{n,\rho} (I_{b^-}^{n-\alpha,\rho} f))(t) \\ &= \frac{D^{n,\rho}}{\rho^{n-\alpha}\Gamma(n-\alpha)} \int_b^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(s-t)} (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds. \end{aligned} \quad (2.11)$$

### Remarque 2.2.

- Clairement, si on pose  $\rho = 1$  dans les équations (2.10), (2.11), alors on obtient les dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville (1.19), (1.20).
- $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (D_a^{\alpha,\rho} f)(t) = f(t)$  et  $\lim_{\alpha \rightarrow 1} (D_a^{\alpha,\rho} f)(t) = (D^\rho f)(t)$ .

**Proposition 2.2.** [1] Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tel que  $R(\alpha) \geq 0$  et  $R(\beta) > 0$ , et soit  $f = e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\beta-1}$ ,  $g(t) = e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (b-t)^{\beta-1}$ . Pour tout  $\rho > 0$ , nous avons :

$$(D_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) = \frac{\rho^\alpha \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, R(\alpha) \geq 0 \quad (2.12)$$

$$(D_{b^-}^{\alpha,\rho} g)(t) = \frac{\rho^\alpha \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-t)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, R(\alpha) \geq 0. \quad (2.13)$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} (D_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) &= (D^{n,\rho} (I_{a^+}^{n-\alpha,\rho} f))(t) \\ &= D^{n,\rho} \left( \frac{\Gamma(\beta)}{\rho^{n-\alpha}\Gamma(n-\alpha+\beta)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} \right) \\ &= \frac{\Gamma(\beta)(n-\alpha+\beta-1)\dots(n-\alpha+\beta-n+1)\rho^n (t-a)^{\beta-\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t}}{\rho^{n-\alpha}\Gamma(n-\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\rho^\alpha \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

On démontre également l'égalité (2.13) de manière similaire. ■

### Composition de DFIG de Riemann-Liouville avec IPFG

Dans cette partie, nous donnons la composition à gauche et à droite de l'opérateur de différenciation fractionnaire proportionnelle généralisé de Riemann-Liouville et l'opéra-

## 2.3 Dérivée fractionnaire proportionnelle

teur d'intégration fractionnaire proportionnelle généralisé de Riemann-Liouville.

**Théorème 2.2.** [1], Soit  $0 \leq m < [R(\alpha)] + 1$  et  $f$  soit intégrable dans chaque intervalle  $[a, t]$ ,  $t > a$  alors :

$$(D^{m,\rho} I_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) = (I_{a^+}^{\alpha-m,\rho} f)(t). \quad (2.14)$$

**Corollaire 2.1.** [1] Soit  $0 < R(\beta) < R(\alpha)$  et  $m - 1 < R(\beta) \leq m$  alors nous avons :

$$(D_{a^+}^{\beta,\rho} I_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) = (I_{a^+}^{\alpha-\beta,\rho} f)(t). \quad (2.15)$$

**Lemme 2.2.** [17] Soit  $f$  intégrable sur  $t \geq a$  et  $R(\alpha) > 0$ ,  $\rho > 0$ ,  $n = [R(\alpha)] + 1$ . Ensuite nous avons :

$$(D_{a^+}^{\alpha,\rho} I_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) = f(t). \quad (2.16)$$

**Théorème 2.3.** [17] Soit  $R(\alpha) > 0$ ,  $n = [R(\alpha)]$ ,  $f \in L^1(a, b)$ , et  $I_{a^+}^{\alpha,\rho} f \in \mathcal{AC}^n[a, b]$  alors :

$$(I_{a^+}^{\alpha,\rho} D_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) = f(t) - e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-a)} \sum_{j=1}^n (I_{a^+}^{j-\alpha,\rho} f)(a) \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\rho^{\alpha-j} \Gamma(\alpha+1-j)}. \quad (2.17)$$

### Composition de DFPG de Riemann-Liouville avec DPG

On donne dans cette partie la composition de l'opérateur de différenciation fractionnaire proportionnelle généralisé de Riemann-Liouville et l'opérateur de différenciation proportionnelle généralisé.

**Lemme 2.3.** [1] Pour  $\rho \in (0, 1]$ ,  $R(\alpha) \geq 0$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

1) Si les dérivées  $D_{a^+}^{\alpha,\rho} f$ ,  $D_{a^+}^{\alpha+m,\rho} f$  existent, alors :

$$(D^{m,\rho} D_{a^+}^{\alpha,\rho} f)(t) = D_{a^+}^{\alpha+m,\rho} f(t), \quad (2.18)$$

et

$$(D_{a^+}^{\alpha,\rho} D^{m,\rho} f)(t) = D_{a^+}^{\alpha+m,\rho} f(t) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\rho^{\alpha+m-j} (D^{j,\rho} f)(a)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)} (t-a)^{j-\alpha-m} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-a)}. \quad (2.19)$$

2) Si les dérivées  $D_{b^-}^{\alpha,\rho} f$ ,  $D_{b^-}^{\alpha+m,\rho} f$  existent, alors :

$$(D^{m,\rho} D_{b^-}^{\alpha,\rho} f)(t) = D_{b^-}^{\alpha+m,\rho} f(t), \quad (2.20)$$

## 2.3 Dérivée fractionnaire proportionnelle

et

$$(D_{b^-}^{\alpha, \rho} D^{m, \rho} f)(t) = D_{b^-}^{\alpha+m, \rho} f(t) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\rho^{\alpha+m-j} (D^{j, \rho} f)(b)}{\Gamma(j-\alpha-m+1)} (b-t)^{j-\alpha-m} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-t)}. \quad (2.21)$$

### 2.3.2 Dérivées fractionnaires proportionnelles généralisées (DFPG) de Caputo

La dérivée fractionnaire proportionnelle généralisée (DFPG) de Caputo est une forme de dérivation récemment créée qui élargit la dérivée fractionnaire classique de Caputo. Cela permet une représentation plus approfondie des phénomènes complexes dans divers domaines.

**Définition 2.4.** [17] Pour  $0 < \rho \leq 1$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  avec  $R(\alpha) \geq 0$ , on définit la dérivée fractionnaire proportionnelle généralisée (DFPG) de type Caputo par :

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} f)(t) = I_{a^+}^{n-\alpha, \rho} (D^{n, \rho} f)(t) \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{\rho^{n-\alpha} \Gamma(n-\alpha)} \int_a^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} (t-s)^{n-\alpha-1} (D^{n, \rho} f)(s) ds, \quad (2.23)$$

où  $n = [R(\alpha)] + 1$

**Proposition 2.3.** Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tel que  $R(\alpha) > 0$  et  $R(\beta) > 0$ , et soit  $f(t) = e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\beta-1}$ ,  $g(t) = e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (b-t)^{\beta-1}$ . Pour tout  $\rho \in (0, 1]$  et  $n = [R(\alpha)] + 1$ , nous avons :

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} f)(t) = \frac{\rho^\alpha \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^{\beta-1-\alpha}, \quad R(\alpha) \geq n. \quad (2.24)$$

$$({}^C D_{b^-}^{\alpha, \rho} g)(t) = \frac{\rho^\alpha \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-t)} (b-t)^{\beta-1-\alpha}, \quad R(\alpha) \geq n, \quad (2.25)$$

pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , nous avons :

$$\left( {}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (t-a)^k \right)(x) = 0 \text{ et } \left( {}^C D_{b^-}^{\alpha, \rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} (b-t)^k \right)(x) = 0.$$

$$\text{En particulier } {}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-a)} = 0 \text{ et } {}^C D_{b^-}^{\alpha, \rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-t)} = 0$$

## 2.3 Dérivée fractionnaire proportionnelle

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
 \left( {}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} (t-a)^{\beta-1} \right) (x) &= \left( I_{a^+}^{n-\alpha, \rho} \left( D_{a^+}^{n, \rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} (t-a)^{\beta-1} \right) \right) (x) \\
 &= \left( I_{a^+}^{n-\alpha, \rho} \left( (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1} \rho^n e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} \right) \right) (x) \\
 &= \frac{\rho^n \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)} \left( I_{a^+}^{n-\alpha, \rho} e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} (t-a)^{\beta-n-1} \right) (x) \\
 &= \frac{\rho^n \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)} \frac{\Gamma(\beta-n)}{\rho^{n-\alpha} \Gamma(n-\alpha+\beta-n)} e^{\frac{\rho-1}{\rho} x} (x-a)^{n-\alpha+\beta-n-1} \\
 &= \frac{\rho^\alpha \Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho} x} (x-a)^{\beta-\alpha-1}.
 \end{aligned}$$

On peut également prouver l'égalité (2.25) de façon analogue. ■

### 2.3.3 Composition de DFPG de Caputo avec IFPG

**Lemme 2.4.** Pour  $\rho \in (0, 1]$  et  $n = [R(\alpha)] + 1$  nous avons

$$\left( I_{a^+}^{\alpha, \rho} {}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} f \right) (t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(D^{k, \rho} f)(a)}{\rho^k \Gamma(k+1)} (t-a)^k e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-a)}. \quad (2.26)$$

### 2.3.4 Relation relie les dérivées GPF de Caputo et les dérivées GPF de Riemann-Liouville

Nous énonçons la relation suivante qui relie les dérivées GPF de Caputo et de Riemann-Liouville.

**Proposition 2.4.** [1] Pour toute  $\alpha \in \mathbb{C}$  avec  $R(\alpha) > 0$  et  $\rho \in (0, 1]$  et  $n = [R(\alpha)] + 1$  nous avons :

$$({}^C D_{a^+}^{\alpha, \rho} f)(t) = (D_{a^+}^{\alpha, \rho} f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{\alpha-k}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-a)} (D^{k, \rho} f)(a), \quad (2.27)$$

et

$$({}^C D_{b^-}^{\alpha, \rho} f)(t) = (D_{b^-}^{\alpha, \rho} f)(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^{\alpha-k}}{\Gamma(k+1-\alpha)} (b-t)^{k-\alpha} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(b-t)} (D^{k, \rho} f)(b). \quad (2.28)$$

## 2.4 Stabilité de type Ulam d'un problème fractionnaire proportionnelle

Dans cette section, nous présentons les quatre types de stabilité d'Ulam c'est à dire, stabilité de Ulam-Hyers, stabilité de Ulam-Hyers généralisé, stabilité de Ulam-Hyers-Rassias et stabilité de Ulam-Hyers-Rassias généralisé de problème fractionnaire proportionnelle (P).

### 2.4.1 Stabilité au sens de Ulam-Hyers

**Définition 2.5.** Le problème (P) est stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel  $c_f > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour chaque solution  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  de l'inégalité :

$$\left| {}^C D^{\alpha, \rho} x(t) - f \left( t, x(t), {}^C D^{\beta, \rho} x(t), \int_0^t k(t, s) {}^C D^{\alpha, \rho} x(s) ds \right) \right| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, T], \quad (2.29)$$

il existe une solution  $y \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  de l'équation (P) avec :

$$|x(t) - y(t)| \leq c_f \varepsilon, \quad t \in [0, T]. \quad (2.30)$$

### 2.4.2 Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée

**Définition 2.6.** Le problème (P) est stable au sens de Ulam-Hyers généralisée s'il existe une fonction  $\theta_f \in \mathcal{AC}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ ,  $\theta_f(0) = 0$ , tel que pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour chaque solution  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  de l'inégalité (2.29) il existe une solution  $y \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  du problème (P) avec :

$$|x(t) - y(t)| \leq \theta_f(\varepsilon), \quad t \in [0, T]. \quad (2.31)$$

### 2.4.3 Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias

**Définition 2.7.** Le problème (P) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias par rapport à  $\varphi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}_+)$  s'il existe un nombre réel  $c_{f, \varphi} > 0$  tel que  $\varepsilon > 0$  et pour chaque solution  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  de l'inégalité :

$$\left| {}^C D^{\alpha, \rho} x(t) - f \left( t, x(t), {}^C D^{\beta, \rho} x(t), \int_0^t k(t, s) {}^C D^{\alpha, \rho} x(s) ds \right) \right| \leq \varepsilon \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.32)$$

il existe une solution  $y \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  de le problème (P), tel que :

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f, \varphi} \varepsilon \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.33)$$

### 2.4.4 Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée

**Définition 2.8.** Le problème (P) est stable au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée par rapport à  $\varphi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}_+)$  s'il existe un nombre réel  $c_{f,\varphi} > 0$  tel que pour chaque solution  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  de l'inégalité :

$$\left| {}^C D^{\alpha,\rho} x(t) - f \left( t, x(t), {}^C D^{\beta,\rho} x(t), \int_0^t k(t,s) {}^C D^{\alpha,\rho} x(s) ds \right) \right| \leq \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad (2.34)$$

il existe une solution  $y \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  du problème (P), tel que :

$$|x(t) - y(t)| \leq c_{f,\varphi} \varphi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.35)$$

**Remarque 2.3.** Il est clair que :

- (i) Stabilité au sens de Ulam-Hyers  $\Rightarrow$  Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisée;
- (ii) Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias  $\Rightarrow$  Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias généralisée
- (iii) Stabilité au sens de Ulam-Hyers-Rassias  $\Rightarrow$  Stabilité au sens de Ulam-Hyers.

**Remarque 2.4.** Une fonction  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  est dite solution de l'inégalité (2.29) si est seulement s'il existe une fonction  $g \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  (qui dépend de la solution  $y$ ) tel que :

i)  $|g(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, T].$

ii)  ${}^C D^{\alpha,\rho} x(t) = f \left( t, x(t), {}^C D^{\beta,\rho} x(t), \int_0^t k(t,s) {}^C D^{\alpha,\rho} x(s) ds \right) + g(t), \quad t \in [0, T].$

**Remarque 2.5.** Une fonction  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  est dite solution de l'inégalité (2.32) si est seulement s'il existe une fonction  $g \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  (qui dépend de la solution  $y$ ) tel que :

i)  $|g(t)| \leq \varepsilon \varphi(t), \quad t \in [0, T].$

ii)  ${}^C D^{\alpha,\rho} x(t) = f \left( t, x(t), {}^C D^{\beta,\rho} x(t), \int_0^t k(t,s) {}^C D^{\alpha,\rho} x(s) ds \right) + g(t), \quad t \in [0, T].$



## Chapitre 3



---

### Stabilité de type Ulam d'un problème aux limites fractionnaire proportionnelle

---

*Le présent chapitre se consacre à l'étude de l'existence et la stabilité de type-Ulam de solutions d'un problème aux limites d'ordre fractionnaire proportionnelle au sens de Caputo.*

#### 3.1 Présentation du problème

*On considère le problème aux limites d'ordre fractionnaire proportionnelle suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D_a^{\alpha, \rho} y(t) = f\left(t, y(t), {}^C D_a^{\beta, \rho} y(t), \int_0^t k(t, s) {}^C D_a^{\alpha, \rho} y(s) ds\right), & t \in [a, b], \\ y(0) = y_0, \quad y(T) = y_T, \end{cases} \quad (P)$$

où  ${}^C D_a^{\alpha, \rho}$ ,  ${}^C D_a^{\beta, \rho}$  sont des dérivées fractionnaires proportionnelle généralisées au sens de Caputo d'ordre  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement,  $1 < \alpha \leq 2$ ,  $0 < \beta < 1$  tel que  $\alpha + \beta \leq 2$ ,  $y_0, y_T \in \mathbb{R}$  et  $f, k$  deux fonctions vérifiées les hypothèses suivantes :

### 3.1 Présentation du problème

$H_1)$   $f : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et il existe  $L > 0$ , tel que :

$$\left| f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3) \right| \leq L(|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|),$$

pour tout  $t \in [0, T]$ , et  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$   $i = 1, 2, 3$ .

$H_2)$   $k(t, s)$  est continue pour tout  $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$ , et il existe une constante positive  $l_k$  tel que :

$$\max_{t, s \in [0, T]} |k(t, s)| = l_k.$$

**Remarque 3.1.** De l'hypothèse ( $H_1$ ), nous avons :

$$\begin{aligned} \left| f(t, x_1, x_2, x_3) \right| &\leq \left| f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, 0, 0, 0) \right| + \left| f(t, 0, 0, 0) \right| \\ &\leq L(|x_1| + |x_2| + |x_3|) + M, \quad \text{avec } M = \sup_{t \in [0, T]} f(t, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

**Lemme 3.1.** La fonction  $y \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  est une solution du problème (P) si et seulement si  $y$  est la solution de l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t, s) u(s) ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} + \frac{ty_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)}, \quad (3.1)$$

où :

$$G(t, s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} - \frac{t}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} (T-s)^{\alpha-1}, & 0 < s < t < T, \\ -\frac{t}{T} (T-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)}, & 0 < t < s < T, \end{cases} \quad (3.2)$$

avec :

$$G_0 = \max \left\{ |G(t, s)|, (t, s) \in [0, T] \times [0, T] \right\}.$$

*Démonstration.* Soit  $y$  solution du problème (P); alors :

$${}^C D^{\alpha, \rho} y(t) = f \left( t, y(t), \left( I_{0+}^{\alpha-\beta, \rho} ({}^C D^{\alpha, \rho} y) \right) (t), \int_0^t k(t, s) {}^C D^{\alpha, \rho} y(s) ds \right), \quad t \in [0, T], \quad (3.3)$$

on pose :

$$u(t) = {}^C D^{\alpha, \rho} y(t), \quad (3.4)$$

$$\text{c'est à dire : } u(t) = f \left( t, y(t), I_{0+}^{\alpha-\beta, \rho} u(t), \int_0^t k(t, s) u(s) ds \right).$$

### 3.1 Présentation du problème

On applique  $I_{0^+}^{\alpha, \rho}$  a (3.4), on trouve :

$$(I_{0^+}^{\alpha, \rho} ({}^C D_{0^+}^{\alpha, \rho} y))(t) = I_{0^+}^{\alpha, \rho} u(t), \quad (3.5)$$

par le Lemme 2.4 on trouve :

$$y(t) = I^{\alpha, \rho} u(t) + (c_0 + c_1 t) e^{\frac{\rho-1}{\rho} t}, \quad (3.6)$$

à partir de la condition  $y(0) = y_0$  on obtient  $c_0 = y_0$  et la deuxième condition  $y(T) = y_T$  donne :

$$c_1 = \frac{y_T - I^{\alpha, \rho} u(T) - y_0 e^{\frac{\rho-1}{\rho} T}}{T e^{\frac{\rho-1}{\rho} T}}. \quad (3.7)$$

Donc :

$$y(t) = I^{\alpha, \rho} u(t) + y_0 e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} + \frac{y_T - I^{\alpha, \rho} u(T) - y_0 e^{\frac{\rho-1}{\rho} T}}{T e^{\frac{\rho-1}{\rho} T}} t e^{\frac{\rho-1}{\rho} t}. \quad (3.8)$$

Alors, l'équation (3.8) devient :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} u(s) ds + y_0 e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} \\ &\quad + \frac{t e^{\frac{\rho-1}{\rho} t}}{T e^{\frac{\rho-1}{\rho} T}} \left( y_T - \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} u(s) ds - y_0 e^{\frac{\rho-1}{\rho} T} \right) \\ &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[ (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} - \frac{t}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} (T-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} \right] u(s) ds \\ &\quad - \frac{t}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \int_t^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} u(s) ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} + \frac{t y_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \\ &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[ (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} - \frac{t}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} (T-s)^{\alpha-1} \right] u(s) ds \\ &\quad - \frac{t}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \int_t^T \frac{(T-s)^{\alpha-1}}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} u(s) ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} + \frac{t y_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \\ &= \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t, s) u(s) ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho} t} + \frac{t y_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \end{aligned}$$

En conséquence, nous avons les équations (3.1). ■

### 3.2 Existence et unicité de solution

On note d'abord  $X = \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  l'espace des fonctions absolument continues sur  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la norme

$$\|y\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, T]} |y(t)| \quad (3.9)$$

et on définit l'opérateur  $\mathcal{U} : X \rightarrow X$  par :

$$(\mathcal{U}y)(t) = \int_0^T G(t, s)u(s)ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} + \frac{ty_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)}. \quad (3.10)$$

### 3.2 Existence et unicité de solution

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles l'opérateur  $\mathcal{U}$  admet un point fixe.

**Théorème 3.1.** Supposons que  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont vérifiées. Si  $\Delta < 1$  tel que :

$$\Delta = \frac{TG_0L(1-\rho)^{\alpha-\beta}}{(1-\rho)^{\alpha-\beta}(1-Tl_k) - P\left(\alpha-\beta, \frac{1-\rho}{\rho}T\right)}, \quad (3.11)$$

alors le problème (P) admet une unique solution sur  $[0, T]$ .

*Démonstration.* La preuve sera présentée en deux étapes

**Étape 1 :**  $\mathcal{U}(B_r) \subset B_r$

$B_r = \{y \in X : \|y\|_X \leq r\}, \chi_1 r \geq \chi$

où :  $\chi_1 = (1-\rho)^{\alpha-\beta} - \left( LP\left(\alpha-\beta, \frac{1-\rho}{\rho}T\right) + (1-\rho)^{\alpha-1}T(l_k + G_0L) \right)$ ,

$\chi = TG_0M(1-\rho)^{\alpha-\beta} + (1-\rho)^{\alpha-\beta} - \left( LP\left(\alpha-\beta, \frac{1-\rho}{\rho}T\right) + (1-\rho)^{\alpha-1}Tl_k \right) \left( y_0 e^{\frac{\rho-1}{\rho}T} + y_T e^{\frac{\rho-1}{\rho}T} \right)$ .

Soit  $y \in B_r$  il suffit de montrer que  $\mathcal{U}(y) \in B_r$ .

Pour  $t \in [0, T]$ , nous avons :

$$|\mathcal{U}y(t)| = \left| \int_0^T G(t, s)u(s)ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} + \frac{ty_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \right|, \quad (3.12)$$

### 3.2 Existence et unicité de solution

où  $G(t, s)$  est défini dans (3.2) alors :

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| f\left(t, y(t), I_{0+}^{\alpha-\beta, \rho} u(t), \int_0^t k(t, s)u(s)ds\right) \right| \\ &\leq \left| f\left(t, y(t), I_{0+}^{\alpha-\beta, \rho} u(t), \int_0^t k(t, s)u(s)ds\right) - f(t, 0, 0, 0) \right| + \left| f(t, 0, 0, 0) \right| \\ &\leq L\left(|y(t)| + \left| I^{\alpha-\beta, \rho} u(t) \right| + \left| \int_0^t k(t, s)u(s)ds \right|\right) + M, \end{aligned}$$

tel que  $M = \sup_{t \in [0, T]} f(t, 0, 0, 0)$ . Donc :

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq L\left(|y(t)| + \left| \frac{1}{\rho^{\alpha-\beta}\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} u(s)ds \right| + \left| \int_0^t k(t, s)u(s)ds \right|\right) + M \\ &\leq L\left(|y(t)| + \frac{1}{\rho^{\alpha-\beta}\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-\beta-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} |u(s)|ds + Tl_k|u(t)|\right) + M, \end{aligned}$$

alors

$$\|u\| \leq L\left(\|y\| + \|u\| \left( I^{\alpha-\beta, \rho} 1 \right)(T) + Tl_k \|u\| \right) + M$$

et de le Lemme 2.1 on a :

$$\left( I^{\alpha-\beta, \rho} 1 \right)(t) = \frac{P\left(\alpha-\beta, \frac{1-\rho}{\rho} t\right)}{(1-\rho)^{\alpha-\beta}},$$

alors :

$$\|u\| \leq L\left(r + \frac{\|u\| P\left(\alpha-\beta, \frac{1-\rho}{\rho} T\right)}{(1-\rho)^{\alpha-\beta}} + Tl_k \|u\| \right) + M,$$

donc :

$$\|u\| \leq \frac{Lr + M}{1 - \frac{LP\left(\alpha-\beta, \frac{1-\rho}{\rho} T\right) + (1-\rho)^{\alpha-\beta} Tl_k}{(1-\rho)^{\alpha-\beta}}},$$

finalemt on obtient :

$$\|\mathcal{U}y\| \leq r,$$

implique que :  $\mathcal{U}(B_r) \subset B_r$

### Étape 2 : $\mathcal{U}$ est un opérateur contractant

Soient  $x, y \in X$ . Alors :

$$\begin{aligned} |\mathcal{U}y(t) - \mathcal{U}x(t)| &= \left| \int_0^t G(t,s)u(s)ds - \int_0^t G(t,s)v(s)ds \right| \\ &\leq \|u - v\| G_0 T, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $v(t) = {}^C D_{0+}^{\alpha, \rho} x(t) = f\left(t, x(t), I^{\alpha-\beta, \rho} v(t), \int_0^t K(t,s)v(s)ds\right)$ , donc :

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &= \left| f\left(t, y(t), I^{\alpha-\beta, \rho} u(t), \int_0^t K(t,s)u(s)ds\right) - f\left(t, x(t), I^{\alpha-\beta, \rho} v(t), \int_0^t K(t,s)v(s)ds\right) \right| \\ &\leq L \left( |y(t) - x(t)| + \|u - v\| \left( I^{\alpha-\beta, \rho} 1 \right)(T) + \|u - v\| l_k T \right) \\ &\leq L \left( \|y - x\| + \frac{\|u - v\| P\left(\alpha - \beta, \frac{1-\rho}{\rho} T\right)}{(1-\rho)^{\alpha-\beta}} + \|u - v\| l_k T \right), \end{aligned}$$

donc :

$$\|u - v\| \leq \frac{L}{1 - \frac{(1-\rho)^{\alpha-\beta} T l_k + P\left(\alpha - \beta, \frac{1-\rho}{\rho} T\right)}{(1-\rho)^{\alpha-\beta}}} \|y - x\|. \quad (3.14)$$

L'inégalité (3.13) devient :

$$\|\mathcal{U}y - \mathcal{U}x\| \leq \frac{T G_0 L (1-\rho)^{\alpha-\beta}}{(1-\rho)^{\alpha-\beta} (1 - T l_k) - P\left(\alpha - \beta, \frac{1-\rho}{\rho} T\right)} \|y - x\| = \Delta \|y - x\|.$$

Comme  $\Delta < 1$ , l'opérateur  $\mathcal{U}$  est une contraction. Ainsi, par le principe de contraction de Banach,  $\mathcal{U}$  a un unique point fixe qui est une solution de (P) sur  $[0, T]$ . ■

## 3.3 Étude de la Stabilité de type-Ulam

Dans cette section, nous établissons d'abord notre résultat de stabilité Hyres-Ulam et ensuite de stabilité Hyres-Ulam-Rassias de notre problème (P).

### 3.3.1 Stabilité de Ulam-Hyers

Nous avons besoin du lemme indiqué ci-dessous.

### 3.3 Étude de la Stabilité de type-Ulam

**Lemme 3.2.** Si  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  est une solution de l'inégalité (2.29) pour chaque  $\epsilon > 0$ , alors  $x$  est une solution de l'inégalité :

$$\left| x(t) - \mathcal{U}x(t) \right| \leq \frac{\epsilon T G_0}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}, \quad (3.15)$$

où  $G_0$  est défini dans (3.2).

*Démonstration.* Soit  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  solution de l'inégalité (2.29), alors de Remarque 2.4, on trouve :

$$\begin{aligned} \left| x(t) - \mathcal{U}x(t) \right| &= \left| \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t, s) (v(s) + g(s)) ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} + \frac{ty_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T G(t, s) v(s) ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} + \frac{ty_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T |G(t, s)| |g(s)| ds \\ &\leq \frac{\epsilon T G_0}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)}. \end{aligned}$$

■

Le théorème suivant présente le premier résultat de la stabilité, à savoir la stabilité d'Ulam-Hyres.

**Théorème 3.2.** Supposons que les conditions du Théorème 3.1 sont vérifiées, alors le problème (P) est stable au sens de Ulam-Hyres.

*Démonstration.* Théorème 3.1 sont vérifiées donc le problème (P) admet une unique solution  $y \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$ . Soit  $x$  une solution de l'inégalité (2.29), alors :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= |y(t) - x(t) + \mathcal{U}x(t) - \mathcal{U}x(t)| \\ &\leq |x(t) - \mathcal{U}x(t)| + |y(t) - \mathcal{U}x(t)| \end{aligned} \quad (3.16)$$

En substituant (3.14) et (3.15) dans (3.16), on trouve :

$$|y(t) - x(t)| \leq \frac{\epsilon T G_0}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} + \Delta |y(t) - x(t)|,$$

où  $\Delta$  est défini dans (3.11). Puis

$$(1 - \Delta) |y(t) - x(t)| \leq \frac{\epsilon T G_0}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)},$$

donc :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq \frac{T G_0 \varepsilon}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha) (1 - \Delta)} \\ &\leq C_f \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi le problème est stable au sens de Ulam-Hyres. ■

**Remarque 3.2.** En posant la fonction  $\theta_f(\varepsilon) = c_f \varepsilon$ , donc  $\theta_f(0) = 0$ , il en découle que le problème (P) est stable au sens d'Ulam-Hyres généralisé.

### 3.3.2 Stabilité de Ulam-Hyers-Rassias

Dans cette partie, nous commençons par démontrer notre résultat de stabilité au sens Ulam-Hyers-Rassias, notre problème (P), pour cela nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.3.** Si  $x \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$  est une solution de l'inégalité (2.32) pour chaque  $\varepsilon > 0$ , alors  $x$  est une solution de l'inégalité intégrale suivante :

$$\left| x(t) - \mathcal{U}x(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} \varphi(s) ds + \frac{\varepsilon}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} \varphi(s) ds. \quad (3.17)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in AC([0, T], \mathbb{R})$  solution de l'inégalité (2.32), donc de la Remarque 2.5, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| x(t) - \mathcal{U}x(t) \right| &= \left| \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} (v(s) + g(s)) ds \right. \\ &\quad - \frac{t}{T \rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} (v(s) + g(s)) ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} \\ &\quad \left. + \frac{t y_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} - \left( \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} v(s) ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{t}{T \rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} v(s) ds + \frac{(T-t)y_0}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}t} + \frac{t y_T}{T} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-T)} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} g(s) ds - \frac{t}{T \rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} g(s) ds \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} \varphi(s) ds + \frac{\varepsilon}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(T-s)} \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

■

Le théorème suivant présente le premier résultat de la stabilité, à savoir la stabilité d'Ulam-Hyres.

### 3.3 Étude de la Stabilité de type-Ulam

**Théorème 3.3.** *Supposons que les conditions du Théorème 3.1 sont vérifiées. Si*

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-s)} \varphi(s) ds \leq \lambda_\varphi \varphi(t).$$

*Alors le problème (P) est stable au sens d'Ulam-Hyres-Rassias par rapport à  $\omega_\varphi$  tel que :*

$$\omega_\varphi = \varphi(t) + \varphi(T). \quad (3.18)$$

*Démonstration.* Le Théorème 3.1 sont vérifiées donc le problème (P) admet une unique solution  $y \in \mathcal{AC}([0, T], \mathbb{R})$ . Soit  $x$  une solution de l'inégalité (2.32), alors :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &= |y(t) - x(t) + \mathcal{U}x(t) - \mathcal{U}x(t)| \\ &\leq |x - \mathcal{U}x(t)| + |y - \mathcal{U}x(t)| \end{aligned} \quad (3.19)$$

En substituant (3.14) et (3.17) dans (3.19), on trouve :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq \frac{\varepsilon \lambda_\varphi}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \varphi(t) + \frac{\varepsilon \lambda_\varphi}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \varphi(T) + \Delta |y(t) - x(t)| \\ &\leq \frac{\varepsilon \lambda_\varphi}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \omega_\varphi(t) + \Delta |y(t) - x(t)|, \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq \frac{\varepsilon \lambda_\varphi}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha) (1 - \Delta)} \omega_\varphi(t) \\ &\leq C_{f;\varphi} \varepsilon \omega_\varphi(t). \end{aligned}$$

Donc, le problème (P) est stable au sens d'Ulam-Hyres-Rassias par rapport à  $\omega_\varphi$ . ■

**Remarque 3.3.** *En prenant  $\varepsilon = 1$ , le problème (P) est Ulam-Hyers-Rassias généralisé stable par rapport à  $\omega_\varphi$ .*

*Pour illustrer l'importance de nos résultats, nous donnons l'exemple suivant :*

**Exemple 3.1.** *Considérons le problème suivant :*

$$\begin{cases} {}^C D_{0^+}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} y(t) = f\left(t, y(t), {}^C D_{0^+}^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} y(t), \int_0^t k(t, s) {}^C D_{0^+}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} y(s) ds\right), & t \in [0, 1], \\ y(0) = y_0, y(1) = y_1, \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.3 Étude de la Stabilité de type-Ulam

où  $\alpha = \frac{3}{2}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$ ,  $\rho = \frac{1}{2}$ ,  $u(t) = {}^C D_{0^+}^{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}} y(t)$ ,  $k(t, s) = \ln\left(\frac{t-s}{2}\right)$ , et

$$f\left(t, y(t), I_{0^+}^{1, \frac{1}{2}} u(t), \int_0^t k(t, s) u(s) ds\right) = \frac{2 + y(t) + I_{0^+}^{1, \frac{1}{2}} u(t) + \int_0^t \ln\left(\frac{t-s}{2}\right) u(s) ds}{\ln(t+1) \left(1 + y(t) + I_{0^+}^{1, \frac{1}{2}} u(t) + \int_0^t \ln\left(\frac{t-s}{2}\right) u(s) ds\right)}.$$

Pour tous  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et  $t \in [0, 1]$  :

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, x_2, x_3) - f(t, y_1, y_2, y_3)| &\leq \frac{1}{\ln(t+1)} (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|) \\ &\leq \frac{1}{\ln(2)} (|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|). \end{aligned}$$

Donc  $L = \frac{1}{\ln 2}$ ,  $l_k = \max_{t,s} k(t, s) = \ln \frac{1}{2}$ ,  $T = 1$ , et  $G_0 = \max_{t,s} G(t, s) = \frac{1}{e}$ .

Substitution  $L$ ,  $l_k$  et  $G_0$  dans  $\Delta$  on obtient :

$$\Delta = \frac{e^{-1} \left(\frac{1}{\ln 2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right) (1 - \ln\left(\frac{1}{2}\right)) - 0.37894} = 0.45862 < 1.$$

Par le Théorème 3.1, le problème (3.20) admet une unique solution donnée par :

$$y(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \int_0^1 G(t, s) u(s) ds + (1-t) y_0 e^{-1} + t y_1 e^{-(t-1)},$$

où

$$G(t, s) = \begin{cases} (t-s)^{\frac{1}{2}} e^{-(t-s)} - t e^{-(1-s)} (1-s)^{\frac{1}{2}}, & 0 < s < t < 1, \\ -t(1-s)^{\frac{1}{2}} e^{-(t-s)}, & 0 < t < s < 1, \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq \frac{e^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (1 - \Delta)} \epsilon \\ &\leq \frac{e^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (1 - 0.45862)} \epsilon \\ &\leq 2.1687 \epsilon. \end{aligned}$$

Il existe un nombre réel  $c_f = 2.1687 > 0$ , alors le problème (3.20) est Ulam-Hyers stable.



# Annexe A



---

## Théorèmes du point fixe

---

Nous présentons quelques résultats de la théorie du point fixe. A savoir le théorème du point fixe de Banach, celui de Brouwer et Schauder [4].

### A.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

**Définition A.1.** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et l'application  $F : X \rightarrow X$ . On dit que  $F$  est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive  $k \geq 0$  telle que l'on ait, pour tout  $x, y \in X$  alors

$$\|Fx - Fy\| \leq k\|x - y\|.$$

Si  $k \leq 1$ ,  $F$  est appelé non expansive.

Si  $k < 1$ ,  $F$  est appelé contraction.

**Théorème A.1.** Soit  $(X, \|\cdot\|)$  un espace de Banach et soit  $F : X \rightarrow X$  une application contractante avec la constante de contraction  $k$  alors  $F$  admet un unique point fixe  $x \in X$ .

**Démonstration. L'existence**

Considérons la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1}), & n \geq 1 \\ x_0 \in X. \end{cases}$$

On doit prouver que est une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de Cauchy dans  $X$ .

Pour  $m < n$  on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_{m+1} - x_m\| + \|x_{m+2} - x_{m+1}\| + \dots + \|x_n - x_{n-1}\|.$$

Puisque  $F$  est une contraction, alors

$$\|x_{p+1} - x_p\| = \|F(x_p) - F(x_{p-1})\| \leq k\|x_p - x_{p-1}\|, \quad \text{pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\| &\leq (k^m + k^{m+1} + k^{m+2} + \dots + k^{n-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq k^m (1 + k + \dots + k^{n-m-1}) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{k^m}{1 - k} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

On déduit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans  $X$  qui est complet, donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$  dans  $X$ .

Par ailleurs puisque  $F$  est continue alors :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n-1}) = F(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = F(x).$$

Donc  $x$  est un point fixe de  $F$ .

**L'unicité**

Supposons que  $Fx = x$  et  $Fy = y$  : Alors

$$\|x - y\| = \|Fx - Fy\| \leq k\|x - y\|. \quad (\text{A.1})$$

puisque  $k < 1$ , on déduit que  $\|x - y\| = 0$  c'est-à-dire  $x = y$ , d'où l'unicité du point fixe de  $F$ . ■

## A.2 Théorème du point fixe de Brouwer et de Schauder

*Les théorèmes de ce paragraphe expriment que toute application continue d'un ensemble convexe, compact dans lui-même possède un point fixe.*

### A.2.1 Théorème du point fixe du type Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Il existe plusieurs formes du théorème selon le contexte d'utilisation.

**Définition A.2.** On dit qu'un espace topologique  $X$  a la propriété du point fixe si toute application continue  $F : X \rightarrow X$  possède un point fixe.

**Théorème A.2.** (Théorème du point fixe du Brouwer)

Soit  $B_n$  la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^N$  : La boule  $B_n$  a la propriété du point fixe pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### A.2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

**Théorème A.3.** (Théorème du point fixe de Schauder généralisé)

Soit  $B$  un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach  $X$  et soit  $F : B \rightarrow B$  une application continue telle que  $F(B)$  est un sous-ensemble relativement compact de  $B$  : Alors  $F$  admet un point fixe dans  $B$ .

**Théorème A.4.** Soit  $A \subset C([a, b])$ ,  $A$  est relativement compact si et seulement si :

1.  $A$  est uniformément borné.
2.  $A$  est équicontinue.

• On rappelle qu'une fonction  $f$  est uniformément bornée dans  $A$  s'il existe une constante  $M > 0$  telle que :

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| \leq M, \forall f \in A.$$



Annexe

## Annexe B



---

Certains mathématiciens intéressés par notre travail

---

### B.1 Thabet Abdeljawad



*athématiciens palestiniens a reçu le doctorat. diplôme en mathématiques de l'Université technique du Moyen-Orient, en 2000. Il est actuellement professeur titulaire à l'Université Prince Sultan. Il a publié plus de 450 articles de recherche dans différentes revues renommées. Il a été répertorié comme chercheur très cité pendant les trois années consécutives 2019, 2020 et 2021. Il a publié plus de 450 articles de recherche dans différentes revues bien connues. Ses principaux intérêts de recherche incluent le calcul fractionnaire, les opérateurs fractionnaires discrets, les espaces métriques et la théorie du point fixe.*



## B.2 Stanislaw Marcin Ulam



*U*lam était un mathématicien polonais et américain d'origine polonaise. Il est né le 13 avril 1909 et est décédé le 13 mai 1984. Ulam était connu pour ses travaux dans divers domaines des mathématiques, notamment l'analyse mathématique, la théorie des nombres et la physique théorique.

*Ulam a collaboré avec de nombreux scientifiques éminents, dont Juliusz Orłowski, pour poser les bases de la théorie de l'explosion nucléaire et des armes nucléaires. Il a également contribué au développement de méthodes de calcul numérique et a jeté les bases de la théorie de la simulation par des nombres aléatoires.*

*Outre ses contributions en mathématiques et en physique, Ulam s'est intéressé aux questions générales et politiques. Il a proposé le concept du projet "Alfabeto Ultimatum" pour organiser les affaires internationales et éviter les conflits militaires.*

*Stanislaw Ulam est considéré comme l'un des scientifiques éminents du XXe siècle et a apporté des contributions importantes dans de nombreux domaines mathématiques et scientifiques.*



## B.3 Donald Holmes Hyers



*est un mathématicien américain né en 1932. Il est surtout connu pour son travail dans le domaine de l'analyse fonctionnelle, en particulier pour avoir formulé le théorème de Hyers-Ulam.*

*Le théorème de Hyers-Ulam, également connu sous le nom de principe d'Ulam-Hyers, énonce qu'une fonction presque linéaire peut être approximée par une fonction linéaire dans certaines conditions. Ce résultat a des applications importantes en analyse, notamment dans l'étude des équations fonctionnelles.*

*Hyers a également contribué à d'autres domaines des mathématiques, notamment la théorie des espaces normés et des espaces métriques. Il a publié plusieurs articles de recherche dans des revues scientifiques et a joué un rôle actif dans la communauté mathématique en tant que conférencier invité et éditeur.*

*En plus de sa carrière académique, Hyers a enseigné les mathématiques dans diverses universités et a contribué à la formation de nombreuses générations de mathématiciens. Son travail a été reconnu et apprécié par ses pairs, faisant de lui une figure respectée dans le domaine de l'analyse fonctionnelle.*

## B.4 Themistocles M. Rassias



*Est un mathématicien grec contemporain. Né le 4 juillet 1951, il est reconnu pour ses contributions dans différents domaines des mathématiques, notamment l'analyse fonctionnelle, l'analyse numérique, la théorie des inégalités et la théorie des équations fonctionnelles.*

*Rassias a publié de nombreux articles de recherche dans des revues scientifiques réputées et a travaillé en collaboration avec d'autres mathématiciens renommés. Ses travaux ont permis de résoudre divers problèmes mathématiques et ont eu un impact significatif dans le domaine de l'analyse et de ses applications. En plus de ses activités de recherche, Rassias a également joué un rôle actif dans l'enseignement des mathématiques, tant au niveau universitaire qu'à travers des conférences et des séminaires. Il a également été éditeur de plusieurs revues mathématiques et a participé à des comités de programme pour des conférences internationales.*

*Themistocles M. Rassias est considéré comme l'un des mathématiciens grecs contemporains les plus éminents et continue de contribuer au développement des mathématiques à travers ses recherches et son enseignement.*



# Bibliographie

---

- [1] T. Abdeljawad, F. Jarad, S. F. Mallak and J. Alzabut. : Lyapunov type inequalities via fractional proportional derivatives and application on the free zero disc of Kilbas-Saigo generalized Mittag-Leffler functions. *The European Physical Journal Plus*, 134 : 247(2019).
- [2] A. Alsaedi, A. Bashir. : Existence of solutions for nonlinear fractional integro-differential equations with three-point nonlocal fractional boundary conditions. *Hindawi Publishing Corporation Advances in Difference Equations*, 1 - 10 (2010).
- [3] A. Atangana, D. Baleanu. : *Therm. Sci.*, 20, 757 (2016).
- [4] R. Aouafi. : *Existence et unicité des solutions de certains problèmes aux limites non linéaires*, Oum Bouaghi, (2019).
- [5] Bashir Ahmad, Sotiris K, Ntouyas and Ahmed Alsaedi. : *New existence results for nonlinear fractional differential equations with three-point integral Boundary Conditions*, Hindawi Publishing Corporation *Advances in Difference Equations*. 1-11, (2011).
- [6] M. Caputo, M. Fabrizio. : *Progr. Fract. Differ. Appl.* 1, 73(2015).
- [7] Caroline Daz'e, *Théorème de point fixe et principe Variationnelle Dékeland, mémoire de master*, *Differ. Uravn.*, Université de Montréal, (2010).
- [8] S. Das, *Functional Fractional Calculus for System Identification and Control*, Springer-Verlag, Berlin, (2008).
- [9] Dumitru Baleanu, Sayyedah Zahra Nazemi, Shahram Rezapour. : *Existence and uniqueness of solutions for multi-term nonlinear fractional integro-differential equations*. *Advances in Difference Equations*, No. 368 1- 17(2013).
- [10] A.M.A. El-Sayed, Sh. MAI Issa et M. Elmairi. : *Ulam-type stability for Boundary value problem of implicit fractional- orders differential equation*. *Advances in Dynamical systems and Applications*, v16, N1, 75-89(2021).

- [11] K.M. Furati, M.D. Kassim, N. Tatar. : *Existence and uniqueness for a problem involving Hilfer fractional derivative*, *Comp. Math. Appl.* V64. 1616-1626(2012) .
- [12] R. Hilfer. : *Threefold introduction to fractional derivatives*, In : R. Klages et al. (eds.), *Anomalous Transport, Foundations and Applications*, Wiley-VCH, (2008).
- [13] F. Jarad, T. Abdeljawad, S. Rashid, Z. Hammouch. : *More properties of the proportional fractional integrals and derivatives of a function with respect to another function*, *Adv. Differ. Equ.*, 303, (2020).
- [14] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh. : *A new Definition Of Fractional Derivative*, *J. Comput. Appl. Math.* 264; 65-70(2014).
- [15] A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. : *Theory and Application of Fractional Differential Equations*. North Holland Mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam (2006).
- [16] A. A. Kilbas, M. Saigo and R. K. Saxena, *Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators*. *Inegral Transforms and Special Functions*, 2004, 15, 31-49.
- [17] Z. Laadjal, T. Abdeljawad, F. Jarad. : *On existence-uniqueness results for proportional fractional differential equations and incomplete gamma functions*, *Adv. Differ. Equ.*, 641, 1-16(2020).
- [18] F. Mainardi. : *Fractional Calculus Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics*. In : Carpinteri A, F. Mainardi, *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, New York, Springer-Verlag, 291-348 (1997).
- [19] K. S. Miller, B. Ross. : *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, (1993).
- [20] I. Podlubny. : *Fractional Differential Equations*. *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, San Diego (1999).
- [21] J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. T. Machado. : *Advances in Fractional Calculus. Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*. Springer. Dordrecht. (2007).
- [22] E. Zeidler. : *Nonlinear functional analysis and its applications. Fixed point theorems*. Springer-Verlag. New York Berlin Heidelberg. Tokyo (1985).
- [23] S. Zhang. : *Positive solutions for boundary-value problems of nonlinear fractional differential equations*, *Electron. J. Differ. Equ.* 200, 36(2006).