الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Sur La stabilité des systèmes différentiels positifs à retard

Réalisé par : **KENZARI Ibtissam**
ATHMANI Assia

Dirigé par : **Dr. DERDOUKH. Assma**

Membres de jury :

Dr. LAOUAR. C **Président**
Dr. DJEBARA . L **Examinateur**

2021-2022

Table des matières

Dédicace

Àla mémoire de mon défunt **père messaoud**

Àla plus belle créature que Dieu a créée sur terre „,

Àcet source de tendresse, de patience et de générosité„,

Àma **mère hadda**!

Àtous mon frères et sœurs (**chaima, ismahan, amel, lamia, souad, nessrin**) ainsi que leurs enfants

et ma petite soeur **marwa hamada** et **kati**

Àtous mes amis surtout **boucetta imen, garet bouthaina** et collègues

Àtous ma famille **kenzari** .

Àtous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer …

.Ibtissam.

Dédicace

Je dédie ce succès à ma belle **grand-mère Djamaa** et je la remercie d'etre à mes cotés, car c'est elle qui veille jusqu'à ce que mon reve se réalise, que Dieu te protège et te donne longue vie ma vie. Aussi **mon grand- père Amara** que Dieu te protège et prolongeta vie.

Et **mon gentil père Nassar**, et ma **maman Zahia** que Dieu te bénisse comme un couronne sur ma tete, ainsi que **ma belle mère Khmissa** la bonne femme merci beaucoup pour vos efforts.

Je n'oublierai pas non plus mes onceles **Bachir** et **Zohir**, qui ont beaucoup contribué à ce succès, que Dieu vous protége de tou mal.

Aussi mon marié Azzedine que Dieu te protége de tou mal et mercie pour ton soutien.

Et mes soeurs les petites reines **Iman**, **Nassima**, **Hiba** , **Douaa**, **Anwar**, **Zineb** merci, aussi mes tantes merci beaucoup pour votre soutient. Et mes chers frères **Walid**, **Sief**.

Et mon ami de travail **Ibtissam Kenzari** et mes beaux amis **Iman Boussetta**, **Nessrine Kenzari**, **Bouthaina Gerat** merci d'avoir été à mes cotés tout au long de ma carrière, vous avez été mes meilleurs amis et mon soutien.

Et toutes ma famille **Athmani.**

.Assia.

Remerciements

Je remercie **Allah** avant tout car à lui seul revient les louanges.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur, doucteur **Dardokh assma**, je lui en suis très reconnaissant, Merci.

Je pro te de cette occasion pour remercier tous nos enseignants.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury ; Président "**Chafia Laouar"** et "Examinateur **Djebara Lamia"** qui me font le grand honneur d'y participer

Résumé :

Ce mémoire est consacré l'étude des nouveaux critéres de la stabilité exponentielle des systèmes différentiels linèaires et non linèaires à retard variant dans le temps.

D'abord, on commence le prmier chapitre par un pref rappel sur les principales notions et théorèmes utilisées tout le long de ce travail.

Dans le second chapitre nous avons présenté une étude détaillée sur l'existence, l'unicité, la continuation, la differentiabilité de la solution de ces systèmes et les gatégories de retad

Dans le troisième chapitre nous avons démontrer un critère explicite pour les systèmes différentiels linéaire à temps variant avec un retard distribué, ensuite un critère simple pour la stabilité exponentielle de systèmes différentiels linéaires à temps invariant a retard, et finalement nous prolongeons ces critères pour les systèmes différentiels non linéaires à retard.

Abstract

This thesis is devoted to the study of new criteria for the exponential stability of linear and nonlinear differential systems with time varying delay.

First, we begin the first chapter with a perf reminder of the main concepts and theorems used throughout this work.

In the second chapter we presented a detailed study on the existence, the unicity, the continuation, the differentiability of the solution of these systems and the categories of delay.

In the third chapter we have demonstrated an explicit criterion for time-varying linear differential systems with a distributed delay, then a simple criterion for the exponential stability of time-invariant linear differential systems with delay, and finally we extend these criteria for systems nonlinear delay differentials.

Introduction

Les équations à retard, ont été introduites, pour modéliser des phénomènes dans lesquels, il y'a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système à cette action. Par exemple, dans le processus de naissance des populations biologiques (cellules, bactéries, etc.). Beaucoup de phénomènes, rencontrés en physiques, biologie, chimie. . . etc, ont trouvé dans la théorie des équations à retard, un bon moyen de modélisation, (un moyen plus réaliste que dans le cas des équations différentielles ordinaires).

A partir des années (40), la théorie des équations à retard a connu, un grand développement, notamment on trouve Bellman et Cooke (1963), Hale (1977). Mais récemment, de nombreux phénomènes ont été proposé pour la modélisation de certaines situations compliquées, où il y'a un mélange temporel entre l'action sur le système et la réponse du système. A cette notion, le retard peut être donné comme une intégrale et donc il dépend, des fonctions inconnues, qui sont les solutions du problème, il est appelé dans ce cas, retard distribué ou retard dépendant de l'état. Par exemple la chauve-souris, à la chasse, étant aveugle, elle émet des sons, pour utiliser les parois des grottes, afin de localiser sa proie. L'écho obtenu par le rebondissement de ces cris représente le retard qui dépend de l'état, qui est le prédateur

.Lors de l'etude d'un systeme, l'etape de modélisation est essentielle car elle conditionne les métodes qui seront ensuite utilisées pour analyser ses propriétés.

La classe de systèmes considère dans ce mémoire présente la particularité de posséder un phénomène de retard dans leur dynamique. Les modèles associes sont alors régis par des équations, la modélisation par systèmes à retards trouve sa justification dans de nombreux problèmes appliques. Biologie, chimie, économie sont autant de domaines pour lesquels certains processus font apparaitre lors de leur modélisation une partie dynamique retardee. Contrairement aux systemes ordinaires dont l'évaluation est déterminée a partie de la valeur de la valeur de l'etat x a l'instant present

$$t : x^{'}(t) = f(t, x(t))$$

Celle des systèmes a retards dépend de surcroit des valeures passées de l'etat

$$x(t-h), h > 0.$$

Dans ce cas, il est néssaire de mémoriser une partie de**"l'histoire"**du système pour connaitre son évolution. Cette caractéristique leur vaut également la dénomination de systèmes héréditaires et sont généralement représentés par des équations différentielles de forme :

$$x'(t) = f(t, x_t) \text{ (1.1).}$$

Où f est a présent une fonctionnelle, c'est -a-dire une"**fonction de fonction** ". La fonction x_t représente l'etat du système sur un certain intervalle du temps et définie par :

$$x_t : \left\{ \begin{array}{c} [-h_{\max}, 0] \to R^n, \\ \theta \to x_t(\theta) = x(t+\theta). \end{array} \right\}$$

$h_{\max}$ correspond au retard maximum, c'est -à-dire l'instant $t - h$ le plus ancien qui soit nécessaire au calcul de $x^{\cdot}(t), t \geq 0$. Nous noterons par la suite C l'ensemble des fonction continues de $[-h_{\max}, 0]$dans $\mathbb{R}$. A l'instant $t = 0$, la fonction $x_t = x_0$ nécessite la connaissance des valeurs de $x(t)$ sur l'intervalle de temps $-h_{\max} \leq t \leq 0$. En d'autres termes, une condition initiale doit être précisée. Si la condition initiale a l'instant t_0 d'une équation différentielle ordinaire est un point $x(t_0)$, celle d'une équation différentielle retardée est une fonction appartenant a C

$$x_{t_0} = x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \theta \in [-h_{\max}, 0]$$

De ce fait, les systèmes a retards appartiennent à la classe des systèmes de dimension infini.

Notation

Notation relatives aux ensembles :

$\mathbb{R}$:ensemble des nombres réels

$\mathbb{R}_+$:ensemble des nombres réels positifs ou nuls

$\mathbb{C}$:ensemble des nombres complexes

$\mathbb{C}_+$: demi-plan droit du plan complexe

C : ensemble des fonctions continues de $[-h, 0]$ dans $\mathbb{R}_n$

$\mathbb{R}^{n\times m}$:ensemble des matrices à n lignes et m colonnes

$\{1, ..., N\}$: ensemble des$\mathbb{N}$ premiers nombres entiers positifs.

$[a, b]$: intervalle fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b

$(a, b[$: intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b

$[a, b)$: intervalle semi-fermé de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b

$C = C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$:ensemble des fonctions continues de $[-\tau, 0]$dans $\mathbb{R}^n$.

$|.|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.

$\|x\|$: une norme sur $\mathbb{R}^n$

$t \in R$: variable temporelle.

Notation relatives aux vecteurs :

x^T :transposé du vecteur x

$\| x \|$:norme euclidienne de x.

$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: vecteur d'état instantané

$x'(t) = \frac{dx}{dt}$: dérivée temporelle de l'état x.

Notation relatives aux matrices :

M : matrice de Metzler.

$\mu(M)$: l'abscisse spectrale M.

(a_{ij}) : matrice dont le coefficient de la $i^{éme}$ ligne et $j^{éme}$ colonne est a_{ij}

A^T :transposée de la matrice A

$A \geq 0\,(\leq 0)$: les entrées de la matrice A sont non négatifs (Non positifs).

$A > 0\,(< 0)$: toutes les entrées de la matrice A sont de la matrice A sont positives (négatives).

$A < B$ $(resp. A > B)$: signifie que $A - B$ est une matrice définie négative (resp. definie positive).

$|.|$: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.

$\| A \|$:norme euclidienne de la matrice A

I_n : matrice identité de $\mathbb{R}^{n\times n}$

Chapitre 01

❖ *Préliminaires*

- ***Matrices ; Définitions et propriétés***
- ***Opérations sur les matrices ;***
  - ✓ ***Addition matricielle***
  - ✓ ***Multiplication par un scalaire***
  - ✓ ***Produit des matrices***
- ***Les inégalités entre matrices.***
- ***Normes des matrices.***
- ***Matrice Metzler.***
- ***Propriétés des matrices Metzler.***

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Matrices ; Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 *: soit m et n deux entiers positifs et soit $\mathbb{k}$ un corps commutatif, une matrices à m lignes et n colones est l'ensemble de $m \times n$ scalaires dits éléments de la matrices indexés par les élements du produit cartésien $I \times J$ avec $I = \{1, \ldots m\}$et $J = \{1, \ldots n\}$ tel que*

$$a_{ij} \in \mathbb{k}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \text{ notée } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Les indices i et j sont dits, respectivement, ligne et colone de $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$, en effet on peut interpréter le couple d'indices (i, j) comme les coordonnés de l'élement a_{ij} dans

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$$

.K^m denote l'ensemble des vecteure d'ordre m.

.$K^{m \times n}$ l'ensemble de toutes les matrices d'ordre $m \times n$ avec des éléments dans K

Définition 1.1.2 *.Une matrice A est dite carée si $n = m$*

.*Une matrice A est dite diagonale si A est carée et* $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = 0$ *si* $i \neq j$ *noté par*

$$diag(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$$

.*Matrice triangulaire inférieur si A est carée et* $\forall\ 1 \leq i, j < n : a_{ij} = 0$ *pour* $i < j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

.*Matrices triangulaire supérieure si A est carée et* $\forall 1 \leq i, j \leq n : a_{ij} = 0$ *pour* $i > j$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & .. & .. & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Définition 1.1.3 *:une matrice A carée est dite :*

.*Symétrique si* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *et* $A^t = A$ *c'est a dire si :*$\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = a_{ji}$;

.*Antisymetrique si* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *et* $A^t = -A$ *c'est a dire :* $\forall 1 \leq i, j \leq n, a_{ij} = a_{ji}$;

.*Hermitienne si* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *et* $A^* = A$ *c'est a dire :*$\overline{a_{ij}} = a_{ij}$;

.*Orthogonale si* $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ *et* $AA^t = A^tA = I$;

.*Unitaire si* $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ *et* $AA^* = A^*A = I$;

.*Normale si* $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ *et* $AA^* = A^*A$.

1.2 Opérations sur les matrices

1.2.1 Addition matricielle

Définition 1.2.1 *: soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$deux matrices de même ordre $m \times n$. La somme de A et B est la matrice d'ordre $m \times n$ notée par $A + B$ telle que :*

$$A + B = C$$

avec $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & & \cdots & & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{2n} + b_{2n} & \ddots & & & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & \cdots & & a_{m1} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Propriétés

.L'addition est commutative :$\forall\ A,\ B \in K^{m \times n}$; $A + B = B + A$;

.L'addition est associative :$\forall\ A,\ B,\ C \in K^{m \times n}$; $A + (B + C) = (A + B) + C$

.La matrice nulle est l'élément neutre de l'addition :$\forall A \in K^{m \times n}$, si O est la matrice nulle de même ordre que A, alors

$$A + O = O + A = A$$

.Tout matrice a une matrice opposée :$\forall A \in K^{m \times n}$, son opposée $-A$ est telle que $A + (-A) = (-A) + A = O$.

.L'addition est une loi interne dans chacun des ensembles :Si A et B sont des matrices d'ordre $m \times n$, leur somme $A + B$ est une matrice d'ordre $m \times n$.

1.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition 1.2.2 *: soient $A = (a_{ij})$ une matrice d'ordre $m \times n$ et $\lambda \in \mathbb{k}$ la multiplication de la matrice A par le scalaire λ est la matrice d'ordre $m \times n$ notée λA tellque $\lambda A = (P_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$ avec :* $\forall (i,j) \in \{1,\dots m\} \times \{1,\dots n\}, P_{ij} = \lambda a_{ij}$

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & & \cdots & & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \ddots & & & & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ & & & & \ddots & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & & \cdots & & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sustraction des matrices

Si A et B sont deux matrices de même ordre, alors on définit $A - B = A + (-B)$.

Considérons les deux matrices A et B d'ordre $n \times m$. Alors la différence est donnée par :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & & \cdots & & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{2n}-b_{2n} & \ddots & & & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_{m1}-b_{m1} & \cdots & \cdots & & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

Nous pouvons soustraire les matrices en soustrayant chaque élément d'une matrice de l'élément correspondant de la deuxième matrice. **i.e**. $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

1.2.3 Produit des matrices

Définition 1.2.3 *:soient $A = (a_{ij})$et $B = (b_{ij})$ deux matrices d'ordre $m \times n$ et $n \times p$ respectivement le produit de A et B par cette ordre est la matrice d'ordre $m \times p$ notée $A \times B$ telle que :*

$A \times B = C = (c_{ij})$ *avec* $\forall (i,j) \in \{1,\dots m\} \times \{1,\dots p\}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Proprietés :

.Associativité du produit matriciel : on a toujours $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$, et on écrira $A \times B \times C$ au lieu de $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

.Soient A et B deux matrices carées inversibles de taille n. Alors le produit $A \times B$ est inversible et on a :$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

.Soit A une matrice d'ordre $n \times p$, B d'ordre $p \times m$, $k \in \mathbb{R}$.Alors $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

.Soient A et B deux matrices d'ordre $n \times p$, C et D d'ordre $p \times m$. On a alors $A(C+D) = AC+AD$ et $(A+B)C = AC+BC$

1.3 Les inégalités entre matrices

Les inégalités entre matrices ou vecteurs réels seront compriszs par composante .

Définition 1.3.1 *Pour deux matrices réelles* $A = (a_{ij})$ *et* $B = (b_{ij})$ *dans* $\mathbb{R}^{m \times n}$*, on écrit*

$$A \geq B \text{ si et seulement si } a_{ij} \geq b_{ij} \text{ pour } i = 1,\dots,m, \text{ et } j = 1,\dots,n$$

.*En particulier,*

si $a_{ij} > b_{ij}$ *pour* $i = 1,\dots,m,$ *et* $j = 1,\dots,n$*. Alors on écrit* $A \gg B$

.*Une matrice* $A = (a_{ij})$ *dans* $\mathbb{R}^{m \times n}$ *est appellée matrice positive si ses entrées* a_{ij} *sont non negatives c'est à dire :*

$a_{ij} \geq 0, i = 1,\dots,m,$ *et* $j = 1,\dots,n$*, et elle designée par* $A \geq 0$*. On note par* $\mathbb{R}_{+}^{m \times n}$ *l'ensembles de toutes les matrices positives* $A \geq 0$*.*

.*Une matrice positive est appellée non négative.*

.*Une matrice* A *est appellée une matrice strictement positive et on écrit* $A > 0$ *si tous ses entrées* a_{ij} *sont strictement positive.*

Exemple 1.3.1 *Considérons les deux matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times4}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times3}$ telles que :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 & 3 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

A est une matrice strictement positive.

B est une matrice positive (non négative).

Des notatio, similaires sont adoptées pour les vecteurs.

1.4 Normes des matrices

Définition 1.4.1 *: pour tout $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a*

.La norme 1 $\|x\|_1$, défini telle que $\|x\|_1 =\mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + \ldots + \mid x_n \mid$.

.La norme euclidienne $\|x\|_2$, défini telle que $\|x\|_2 = (\mid x_1 \mid^2 + \mid x_2 \mid^2 + \ldots + \mid x_n \mid^2)^{\frac{1}{2}}$.

.La sup-norme $\|x\|_\infty$, défini telle que $\|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \{\mid x_1 \mid + \mid x_2 \mid + \ldots + \mid x_n \mid\}$.

Plus généralement, nous avons défini la p-norme pour $p \geq 0$ par

$$\|x\|_p = (\mid x_1 \mid^p + \mid x_2 \mid^p + \ldots + \mid x_n \mid^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.4.2 *une norme matricielle sur $K^{m\times n}$ est une application $\|.\|$ de $K^{m\times n}$ dans $\mathbb{R}^+$, telle que :*

i)$\forall A \in \mathbb{k}^{m\times n}, \|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$

ii)$\forall A \in \mathbb{k}^{m\times n}, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \|\lambda A\| =\mid \lambda \mid\| A \|$

iii)$\forall A, B \in \mathbb{k}^{m\times n}, \| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$

iv)$\forall A \in \mathbb{k}^{m\times n}, \forall B \in \mathbb{k}^{n\times p}, \|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

Propriétès :

pour toute matrice carée $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$, on a :

1 . $\|A\|_1 = \sup_{x\in K^n \|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n \mid a_{ij} \mid$

2 . $\|A\|_\infty = \sup_{\substack{x\in K^n \\ \|x\|_\infty=1}} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n \mid a_{ij} \mid$

3 . $\|A\|_2 = \sup_{\substack{x\in K^n\\ \|x\|_2=1}} \|Ax\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)}$

Exemples :

1.Pour $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, on a $\| A \|_1 = \max\{2,3,2\} = 3$.

2.Pour $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Les valeur propres de A sont : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \sqrt{2}+1, \lambda_3 = 1-\sqrt{2}$ donc :

$$\| A \|_2 = \rho(A) = \sqrt{2}+1.$$

3.Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, on a $\| A \|_\infty = \max\{2,5,3\} = 5$

et

$$\| A^t \|_\infty = \| A \|_1 = \max\{3,3,4\} = 4.$$

Normes matricielle subordonnée

Définition 1.4.3 *: $A \in \mathbb{k}^{m\times n}$ soient deux normes vectorielles définies sur $\mathbb{k}^m$ et sur $\mathbb{k}^n$ et toutes les deux notée $\|.\|$, on appelle norme matricielle subordonée :*

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1, x\in\mathbb{R}^n} \|Ax\|$$

Lemme 1.4.1 *:Pour toute norme matricielle subordonée*

$$\|A\| = \|A\|\|x\|, \forall x \in \mathbb{k}^n$$

Remarque 1.4.1 *:Pour toute norme matricielle subordonée,ona $\|I\| = 1$ car :*

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1$$

Définition 1.4.4 *:On appelle norme de shur de $A \in \mathbb{k}^{n\times m}$ le nombre :*

$$\|A\|_s = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid^2)^{1/2}$$

1.5 Matrice Metzler

Définition 1.5.1 *:On appelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ une matrice de Metzler si tout ses éléments non diagonaux sont non négatifs, c'est -à dire : $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$est une matrice de Metzler, si :*

$$a_{ij} \geq 0, \forall i \neq j \qquad i,j = \overline{1.n}$$

On dit que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice Metzler stricte si :

$$\begin{aligned} a_{ij} &\geq 0, \qquad \forall\ i,j = \overline{1.n} \ \ et\ i \neq j \\ et\ a_{ij} &< 0\ si\ i = j. \end{aligned}$$

Exemple 1.5.1 *Considérons les deux matrices : $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ telles que :*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

A est une matrice de Metzler.

B est une matrice de Metzler stricte.

1.6 Propriétés des matrices Metzler

Définition 1.6.1 *:Pour tout matrice $M \in \mathbb{k}^{n\times n}$ l'abscisse spectrale de M noté $\mu(M)$ est définie par*

$$\mu(M) = \max\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(M)\}$$

où

$$\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I_n - M) = 0\}$$

est le spectre de M.

Définition 1.6.2 *Une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est dit Hurwitz stable si $\mu(M) < 0$. Autrement dit si toutes les valeurs propres de M ont une partie réelle stricetement négative c'est à dire $Re\lambda_i < 0$ pour tout valeur propre λ_i.*

Théorème 1.1 *:([1],[17]) supposons que $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$est une matrice de Metzler Alors :*
i)*(Perron-Probenius) $\mu(M)$ est une valeur propre ou Met il existe une vecteur propre non négatif*

$$\mu \neq 0 \quad \textit{tel que} \quad Mx = \mu(M)x$$

ii)*Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un vecteur non nul $x \geq 0$ tel que $Mx \geq \alpha x$ si et seulement si $\mu(M) \geq \alpha$*
iii)$(tI_n - M)^{-1}$ *existe et il est non négatif, si et seulement si $t > \mu(M)$*
iv)*Étant donné $B \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, Alors ;*

$$| C | \leq B \Longrightarrow \mu(M + C) \leq \mu(M + B)$$

Théorème 1.2 ***:** Soit $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ un matrice de Metzler alors les assertion suivantes sont équivalentes*
i) $\mu(M) < 0$;
ii) $M_p \ll 0$ *pour certains* $p \in \mathbb{R}_+^n, p \gg 0$;
iii) *M inversible et* $M^{-1} \leq 0$;
iv) *Étant-donné $b \in \mathbb{R}^n, b \gg 0$, il existe $x \in \mathbb{R}_+^n$ tel que* $Mx + b = 0$;
v) *Pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, le vecteur ligne $x^T M$ a au moins une entrée négative.*

Les principales théorèmes, définitions et lemme utilisées :

Lemme 1.6.1 *:(**de Granwall**) :*

Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b]\,,\ y(t) \leq \varphi\,(t) + a^t \psi\,(s) + y\,(s)\,ds$$

Alors

$$\forall t \in [a, b]\,,\ y\,(t) \leq \varphi\,(t) + a^t \varphi\,(s)\,\psi\,(s) \exp\left(s^t \psi\,(u)\,du\right) ds.$$

Théorème 1.3 *(**convergence dominée de Lebesgue**) :*

Soit (f_n) une suite de fonctions de L^1. On suppose que

a) $f_n\,(x) \to f\,(x)$ p.p. sur Ω,

b) Il existe une fonction $g \in L^1$ telle que pour chaque n, $\mid f_n\,(x) \mid \leq g(x)$ p.p. sur $\Omega\,(^1)$ .Alors $f \in L^1\,(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Définition 1.6.3 *:La dérivée supérieure Dini, également appelée dérivée supérieure droite, d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, est notée $f_+^{'}$ et définie par*

$$f_+^{'}\,(t) = \lim \sup_{h \to 0^+} \frac{f\,(t+h) - f\,(t)}{h}$$

Où limsup est la limite suprême et la limite est une limite unilatérale. La dérivée inférieure dini, $f_-^{'}$, est définie par

$$f_-^{'}\,(t) = \lim \inf_{h \to 0^+} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}, \text{ Où } liminf \text{ est la limite inférieure .}$$

Définition 1.6.4 *:(**fonction lipschtizienne**) une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est lipschtizienne si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$;*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|,$$

où C est une constante indépendante de x et y.

On dit parfois que f est C-lipschitzienne. On voit immédiatement que toute fonction lipschit-

zienne est continue. En revanche la r ´eciproque est fausse. Un exemple de fonction 1-lipschitzienne est l'application $x \longrightarrow \|x\|$ *(cela se déduit aisément de l'inégalité triangulaire).*
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est une application linéaire, alors en introduisant la base cannonique* $(e_1, \dots, e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *et en notant* $M = \max \|f(e_i)\|$*, on voit que pour tout* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
on a

$$\|f(x)\| = \|x_i f(e_i)\| \leq M \sum_{i=1}^{n} \mid x_i \mid \leq B\|x\|,$$

avec $B = M\sqrt{n}$*. En remplacant* x *par* $x - y$ *on voit ainsi que toute application linéaire est lipschitzienne et donc continue. On appelle norme de l'application linéaire* f *la quantité*

$$|||f||| = sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}.$$

On vérifie que $|||f|||$ *est la plus petite constante* C *telle que* $\|f(x)\| \leq C\|x\|$ *pour tout* x*.*

Définition 1.6.5 *on dit que* $f : (E, d) \longrightarrow (F, \acute{d})$ *est de Lipschitzienne de rapport* $k > 0$ *(ou k-Lipschitzienne) si on a*

$$\forall x', x'' \in E, \acute{d}(f(x'), f(x'')) \leq d(x', x'').k$$

si $0 < k < 1$ *on dit que* f *est une fonction contractante.*
on résulte tout fonction k-Lipschiteienne est uniformément cuntinue sur E*.*

Théorème 1.4 *(**d'Arzela-Ascoli**) :Soient* (X, d_X) *et* (Y, d_Y) *deux espaces métriques et supposons* X *compact. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) $A \subset C(X, Y)$ *est relativement compact (i.e d'adérence compacte) pour la topologie de la convergence uniforme .*
2) A *est équicontinue en tout point de* X *;*
$A(x) := \{f(x)\,,\ f \in A\}$ *est relativement compacte pour tout* $x \in X$*.*

Chapitre 02

❖ Les systèmes à retard

- ***Exemples.***
- ***Un problème général de valeur initiale.***
- ***Existance.***
- ***Unicité.***
- ***Continuité des solutions.***
- ***Dépendance aux valeurs et paramètres initiaux.***
- ***Différentiabilité des solutions.***
- ***Catégories de retards.***

Chapitre 2

Les systémes à retard

Dans les applications, le comportement future de nombreux phénoménes est supposé à décrire par les solution d'une équation différentielle ordinaire, cette hypothése implique implicitement, que le comportement futur est uniquement déterminé par le présent et indépendant du passé. Au contraire des équations diffirentielles à retards qui sont omportants dans les problémes pour les quels le comportement est affecté par la dépendance des variables d'états au temps passé. Les équations (les systémes) à retard sont appelé : Les équation différentielles de différence ou équations différentielles fonctinnelles, dans ces équations, le passé exerce une influence plus significative dans l'avenir.

2.1 Exemples

Considérons une population composée d'individus adultes et juvéniles. Soit $N(t)$ dénote la densité des adultes au temps t. Supposons que la longueur du la période juvénile est exactement h unités de temps pour chaque individu.

Présumer que les adultes produisent une progéniture à un taux par habitant α et que leur probabilité par unité de temps de mort est μ.

Supposons qu'un nouveau-né survit à la période juvénile avec probabilité ρ et mis $t = \alpha\rho$.

Ensuite, la dynamique de N peut être décrit par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\mu N(t) + rN(t-h) \tag{2.1}$$

qui implique un terme non local, $rN(t-h)$ signifiant que les nouveau-nés deviennent adultes avec un certain retard.

Ainsi, la variation temporelle de la densité de population N implique les valeurs actuelles et les valeurs passées de N.

De telles équations sont appelés équations différentielles fonctionnelles retardées **(RFDE)** ou alternativement, Équations à retard.

L'équation (2.1) décrit les changements de N. Pour déterminer une solution a un temps passé $t = 0$, nous devons prescrire la valeur de N à l'instant $-h$ et nous pouvons voir qu'il ne suffit pas de donner la valeur au point $-h$, car l'exemple suivant convient que cette condition n'est pas suffisante pour déterminer complètement la solution.

En fait, sur tout l'intervalle $[0, h]$ nous avons le même problème : pour intégrer l'équation après un certain temps $t \in [0, h]$, nous devons prescrire la valeur N(t - h). Nous devons donc prescrire une fonction sur un intervalle de longueur h.

Le plus pratique pour ce faire est de prescrire N sur l'intervalle $[-h, 0]$ puis utiliser (2.1) pour $t \geq 0$. On complète donc (2.1) par

$$N(\theta) = \varphi(\theta) \text{ pour } -h \leq \phi \leq 0$$

où φ est une fonction donnée.

Explicitement, on a alors pour $t \in [0, h]$

$$N(t) = \varphi(0)\exp(-\mu t) + r\int_0^t \exp(-\mu(t-\tau))\varphi(\tau - h)d\tau.$$

.Une forme plus générale d'une équation différentielle à retard est la suivante :

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t),\ x(t-r)).$$

2.2 Un problème général de valeur initiale

Étant donné $r > 0$, notons $C([a,b],\mathbb{R}^n)$, l'espace de Banach des fonctions continues mappant l'intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Si $[a,b] = [-r,0]$, nous laissons $C = C([-r,0],\mathbb{R}^n)$ et désignons la norme d'un élément φ dans C, par

$$\mid \varphi \mid = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} \mid \varphi(\theta) \mid .$$

Soit $\sigma \in \mathbb{R}, A > 0$ et x$\in C\left[\sigma - r, \sigma + A\right], \mathbb{R}^n)$, alors pour tout $t \in [\sigma, \sigma + A]$, on pose $x_t \in C$, défini par

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), \text{ pour } -r \leq \theta \leq 0.$$

Soit $f : \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. Une équation différentielle fonctionnelle est donné par la relation suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = f(t,x_t) \text{ pour } t \geq \sigma \\ x_\sigma = \varphi \end{cases}. \tag{2.2}$$

Définition 2.2.1 *x est dite solution de (2.2) s'il existent $\sigma \in \mathbb{R}$, $A > 0$ tel que $x \in C([\sigma - r, \sigma + A],\mathbb{R}^n)$ et x satisfait (2.2) pour $t \in [\sigma, \sigma + A]$.*
Dans un tel cas, nous disons que x est une solution de (2.2) sur $[\sigma - r, \sigma + A]$ pour un $\sigma \in \mathbb{R}$ donné et un $\varphi \in C$ donné on dit que $x = x(\sigma, \varphi)$ est une solution de (2.2) de valeur initiale à σ ou simplement une solution de (2.2) à travers (σ, φ) s'il existe un $A > 0$ tel que $x(\sigma,\varphi)$ est une solution de (2.2) sur $[\sigma - r, \sigma + A]$ et $x_\sigma(\sigma,\varphi) = \varphi$.
L'équation (2.2) est un type d'équation très général et comprend des équations aux différences du type :

$$\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x(t), x(t, r(t))) \textit{ pour } 0 \leq r(t) \leq r$$

aussi bien que

$$\frac{dx}{dt}(t) = \int_{-r}^{0} g(t,\theta,x(t+\theta))d\theta.$$

Si

$$f(t,\varphi) = L(t,\varphi) + h(t),$$

où L est linéaire en φ et $(t,\varphi) \longrightarrow L(t,\varphi)$, on dit que l'équation est une équation différentielle a retard linéaire, elle est dite homogène si $h = 0$.
Si $f(t,\varphi) = g(\varphi)$, l'équation (2.2) est autonome.

Lemme 2.2.1 *Soit $\sigma \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in C$ donnés et f continue sur le produit $\mathbb{R} \times C$. Alors, trouver une solution de l'équation (2.2) à travers (σ,φ) équivaut à résoudre :*

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{\sigma}^{t} f(s, x_s)ds,\ t \geq \sigma \text{ et } x_{\sigma} = \varphi.$$

2.3 Existance

Lemme 2.3.1 *Si $x \in C([\sigma - r, \sigma + \alpha], \mathbb{R}^n)$,alors, x_t est une fonction continue est pour tout $t \in [\sigma, \sigma + \alpha]$.*

Preuve

Puis que x est continue sur $[\sigma, \sigma + \alpha,]$,elle est uniformément continue et donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tel que$\mid x(t) - x(s) \mid < \varepsilon$ si $\mid t - s \mid < \delta$, par conséquent pour t, s dans $[\sigma, \sigma + \alpha,]$, $\mid t - s \mid < \delta$
on a

$$\mid x(t+\theta) - x(s+\theta) \mid \prec \varepsilon, \forall \theta \in [-r, 0] \,.$$

■

Théorème 2.1 *:Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, soit continue pour tout (σ,φ) il existe une solution de l'équation(2.2)*
a travers (σ,φ). Si f est au plus affine c'est-à-dire $|f(t,\varphi)| \leq a|\varphi| + b$ avec $a, b > 0$, alors il existe une solution globale i.e. $\forall \varphi$, la solution $x(\sigma,\varphi)$ est définie sur $[\alpha, \infty[$.

Preuve :

Soit$\varphi \in C$, et supposons que la solution n'est définie que sur $[\alpha, \beta[$. En intégrant l'équation(2.2) on obtien :

$$x(t) = \varphi(0) + \int_{0}^{t} f(s, x_s)ds$$

ce qui donne :

$$|x(t,\varphi)| = |\varphi| + \int_{\sigma}^{t} (a, |x_s| + b) ds$$

et

$$|x_t(.,\varphi)| = |\varphi| + a\int_{\sigma}^{t} |x_s| ds + b\beta.$$

Par le lemme de Gronwall :

$$|x_t(.,\varphi)| = (|\varphi| + b\beta) expa\beta < \infty.$$

D'autre par :

$$\sup_{t\in[0,\beta]} |\frac{dx}{dt}(t)| < \infty;$$

et on a la solution est uniformément continue sur $[0,\beta[$ et ce qui implique que $lim_{t\to\beta}|x_t(.,\varphi)|$existe et finie, notez-la x_β. Considérons l'équation différentielle à retard suivante :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y_t) \quad \text{pour } t \geq \beta \\ y_\beta = x_\beta \in C \end{cases}$$

cette dernière équation a au moins une solution sur $[\beta, \beta + \varepsilon]$ pour certains $\varepsilon > 0$, et l'équation (2.2) a au moins une solution définie sur $[0, \beta + \varepsilon]$, ce qui contredit la maximalité de la solution.

■

2.4 Unicité

Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et supposons que $f : D \to \mathbb{R}^n$est continue et $f(t,\varphi)$ est lipchitzienne par rapport à φ dans chaque sous-ensemble compact de D. Si $(\sigma,\varphi) \in D$, alors l'équation(2.2) a une solution unique passant à travers (σ,φ).

Preuve :

Considérons I_α, B_β comme défini dans la preuve du théorème, et supposons que x et y soient deux solutions de(2.2)sur $[\sigma - r, \sigma + \alpha]$ avec $\mathrm{x}_\sigma = \varphi = y\sigma$.

Alors :

$$\begin{cases} x(t) - y(t) = \int_\sigma^t f(s, x_s) - f(s, y_s))ds, t \geq \sigma \\ x_\sigma - y_\sigma = 0 \end{cases}$$

Soit k la constante de Lipschitz de $f(t, \varphi)$ dans un sous-ensemble compact contenant les trajectoires (t, x_t) et $(t, y_t), t \in I_\alpha$, Choisissez $\overline{\alpha}$ tel que $k\overline{\alpha} < 1$. Alors, pour $t \in I_{\overline{\alpha}}$

on a :

$$|x(t) - y(t)| \leq \int_\sigma^t k|x_s - y_s|ds \leq k \; sup_{\sigma \leq s \leq t}|x_s - y_s|.$$

Et cela implique que $x(t) = y(t)$ pour $t \in I_{\overline{\alpha}}$. L'unicité peut ne pas tenir si la fonction n'est pas localement lipchitzienne.Pour cela,considérons les contre-exemples suivants :

1) Il peut y avoir deux solutions distinctes de(2.2)définies sur $(-\infty, \infty)$et ils coïncident sur $(0, \infty)$. L'exemple suivant a été donné par A Hausrath.

Soit $r = 1$,et

$$\begin{cases} f(s) = 0, pour 0 \leq s \leq 1 \\ f(s) = -3(\sqrt[3]{s} - 1)^2, pour s > 1 \end{cases}$$

et considérons l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = f(|x_t|)$$

La fonction $x = 0$ est une solution de cette équation sur$(-\infty, \infty)$. Également la fonction

$$\begin{cases} x(t) = -t^3 \quad pour t < 0 \\ x(t) = 0, \quad pour t \geq 0 \end{cases}$$

et

$$\frac{dx}{dt}(t) = -3t^2$$

En réalité, puisque $x \leq 1$ pour $t \geq -1, x$ satisfait l'équation pour $t \geq 0$, et puisque x est décroissante pour $t \leq 0$, $|x_t| = x(t-1) = -(t-1)^3$, et $\frac{ds}{dt}(t) = -3t^2$ on trouve que

$$f(t-1) = -3t^2 \quad pour t < 0.$$

2) On considère l'equation :

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t - \sigma(x(t))) \tag{2.3}$$

où $\sigma : \mathbb{R} \to [0, 1], \sigma'(0) \neq 0$ et $\sigma(0) = 1$.

Notez que le côté droit de(2.3) peut s'écrire $G(\varphi) = \varphi(-\sigma(\varphi(0)))$ pour $\varphi \in C([-1, 0], \mathbb{R})$, et G n'est pas localement lipschitz dans un voisinage de zéro. Supposons en fait qu'il existe des constantes positives k et ρ tels que

$$|G(\varphi_1) - G(\varphi_2)| \leq k|\varphi_1 - \varphi_2| pour |\varphi_1|, |\varphi_2| < \rho$$

Soit $\varphi(\theta) = \varepsilon(-1 + \sqrt{1 + \theta})$, pour $\theta \in [-1, 0]$, où ε est une constante positive tel que $|\varphi| < \rho$.Soit $x \in [-1, 0]$ telque $|\varphi| + |x| < \rho$,

Alors :

$$|G(\varphi + x) - G(\varphi)| \leq k|x|$$

ce qui implique :

$$|\varepsilon\sqrt{1 - \sigma(x)} + x| \leq k|x| et \mid \frac{\varepsilon(\sigma(x) - 1)}{x\sqrt{1 - \sigma(x)}} \mid \leq (1 + k)$$

En laissant x se rapprocher de zéro, on obtient une contradiction. Par conséquent, le côté droit de l'équation(2.3) n'est pas localement le lipschitz proche de zéro. L'unicité a été prouvée pour les données initiales lipschitziennes φ, l'argument standard pour l'unicité ne peut pas être appliqué dans ce exemple.

L'équation :

$$\frac{dx}{dt}(t) = x(t - x(t))$$

apparaît dans les modèles de croissance cristalline, et en fait l'équation :

$$\frac{dx}{dt}(t) = -ax(t - \sigma(x(t)))$$

où λ est un paramètre positif a été proposé comme modèle pour une variété de processus physiologiques et conditions telles que la production de cellules sanguines, la respiration et arythmies.

3) Le contre-exemple suivant explique plus en détail la situation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = x \\ x(\theta) = \sqrt{\mid \theta \mid} + 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors l'équation(2.4) admet deux solutions :

$$x_1(t) = t + \frac{t^2}{4} \text{ et } x_2(t) = t, \ pour \ t \in [0,1]$$

En fait on a $t - x_1(t) = -\frac{t^2}{4}$ et $t - x_2(t) = 0$ il s'ensuit que $x_1^{'}(t) = 1 + \frac{t}{2} = \varphi(t - x_1(t))$ et $x_2^{'}(t) = 1 = \varphi(t - x_2(t))$ pour $t \in [0,1]$. ■

2.5 Continuité des solutions

Définition 2.5.1 *:Supposons que f dans l'équation (2.2) soit continue. Si x est une solution de l'équation (2.2) sur un intervalle$[\sigma, a]$, $a > \sigma$, on dit que $\hat{x}$ est une continuation de x s'il existe un $b > a$, tel que $\hat{x}$ soit défini sur $[\sigma - r, b]$, coïncide avec x sur $[\sigma - r, a]$, et satisfait l'équation (2.2) sur $[\sigma, b]$.*
La solution x est non continuable si une telle continuation n'existe pas ; C'est a dire, l'interval $[\sigma, a]$ est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.

Théorème 2.2 *:Plus que les hypothèses du théorème précédent,*
Si f est une fonction bornée, alors l'équation (2.2) a une solution maximale défini sur
$[-r, \beta[$ avec

$$Si \ \beta < \infty \Longrightarrow \overline{Lim}_{t \to \beta} \mid x_t(., \varphi) \mid = \infty.$$

Preuve :

Par étapes, on peut intégrer l'équation (2.2), soit $[-r, \beta[$ est l'intervalle maximal sur lequel $x(., \varphi)$ est définie.
Supposons que $\overline{Lim}_{t \to \beta} \mid x_t(., \varphi) \mid < \infty$ alors il existe N tel que $\mid x_t(., \varphi) \mid \leq N$, $\forall t \in [0, \beta[$, avec $\frac{dx}{dt}(t) = f(t, x_t)$ et de la condition f est une fonction bornnée, on a $Sup_{t \in [0,\beta[} \mid \frac{dx}{dt}(t) \mid < \infty$, alors f est uniformément continu sur $[0, \beta[$. Alors, $\overline{Lim}_{t \to \beta} \mid x_t(., \varphi) \mid$existe, qui on la note x_β.

Soit $\psi \in C([-r, \beta[\,, \mathbb{R}^n)$ défini par $\psi = x\beta$, d'aprés le Théorème d'existence, il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) = f(t, y_t) \text{ pour } t \geq \beta \\ y_\beta = x_\beta \in \mathbb{C} \end{cases}$$

a au moins une solution sur $[\beta, \beta + \varepsilon]$, le rappel de x et y donne une solution définie sur $[\alpha, \beta + \varepsilon]$, qui contredit la maximalité de x.

■

2.6 Dépendance aux valeurs et paramètres initiaux

Corollaire 2.1 *:Supposons que Ω soit un ensemble ouvert dans $\mathbb{R} \times C, f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ soit globalement lipschitzienne et complètement continue : c'est-à-dire que f est continue et prend des ensembles bornés fermés de Ω en ensembles bornés de $\mathbb{R}^n$, et x est une solution non continuable de l'équation (2.2) sur $[\sigma - r, , b]$.*
[2]*Alors, pour tout fermé et borné U dans $\mathbb{R} \times C$, U dans Ω, il existe un tU tel que $(t, x_t) \notin U$ pour $tU \leq t < b$.*

Nous considérons maintenant l'existence de solutions de (2.2) pour tout $t \geq -r$.

Proposition 2.1 *: Soit D un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R} \times C$ et supposons que $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ soit continue et $f(t, \varphi)$ soit lipchitzienne par rapport à φ dans tout sous-ensemble compact de D. Si $(\sigma, \varphi) \in D$, alors l'application $\varphi \longrightarrow x_t(., \varphi)$ est Lipschitzienne continue.*

Preuve :
Du corollaire **(2.1)** et le fait que f est lipchitzienne par rapport à la deuxième variable et $\mid f(t, \varphi) \mid \leq k \mid \varphi \mid + \mid f(t, 0) \mid$
Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in C$, et $x(., \varphi_1), x(., \varphi_2)$ les solutions associées, on a

$$x(., \varphi_1) - x(., \varphi_2) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) + \int_0^t (f(s, x(s, \varphi_1)) - f(s, x(s, \varphi_2)))ds$$

$$\mid x(t, \varphi_1) - x(t, \varphi_2) \mid \leq \mid \varphi_1 - \varphi_2 \mid + k \int_0^t \mid x(s, \varphi_1) - x(s, \varphi_2) \mid ds$$

d'aprés le lemme de Gronwall, on obtient

$$| x(t,\varphi_1) - x(t,\varphi_2) | \leq | \varphi_1 - \varphi_2 | \exp(kt).$$

Le lemme suivant est nécessaire avant de procéder dans cette direction, qui sera utilisé par la suite. ■

Lemme 2.6.1 *: Soit $f \in C(J \times C_\sigma, \mathbb{R}^n)$ Pour $t \in J$ et $\varphi \in J$ et $\phi \in C_\sigma$, on pose*

$$G = (t,r) = \max_{\|\phi\| \leq r} \|f(t,\phi)\|$$

Supposons que $r^*(t, t_{0,}0)$ est la solution maximale de

$$\frac{du}{dt} = G(t, u(t))$$

a travers $(t_0, 0)$. Alors, si $x(t, t_0, \varphi_0)$ est une solution de

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t)$$

avec φ_0 comme valeur initiale à $t = t_0$. Alors nous avons :

$$\| x_t(t_0, \varphi_0) - \varphi_0 \| \leq r^*(t, t_0, 0)$$

sur l'intervalle commun d'existence de $x(t, t_0, \varphi_0)$ et $r^*(t, t_0, 0)$
Soit $f \in C(J \times \mathbb{C}_\sigma, \mathbb{R}^n)$ et pour $t \in J, \varphi, \phi \in C_1$

$$\| f(t,\varphi) - f(t,\varphi) \| \leq g(t, \| \varphi - \phi \|).$$

où $g \in C(J \times [0, 2\rho], \mathbb{R}^+)$. Supposons que $u(t) = 0$ est la seule solution de l'équation scalaire

$$\frac{du}{dt} = g(t, u(t))$$

a travers $(t_0, 0)$. *Supposons enfin que les solutions* $u(t, t_0, u_0)$ *a travers tous les points* (t_0, u_0) *existent pour* $t \geq t_0$ *et sont continues par rapport à les valeurs initiales* (t_0, u_0). *Alors, les solutions* $x(t_0, \varphi_0)$ *de l'équation (2.2) sont uniques et continues par rapport aux valeurs initiales* (t_0, φ_0).

En utilisant les arguments des théorèmes précédents, nous pouvons prouver le Théorème suivant sur la dépendance aux paramètres. Nous déclarons simplement.

Théorème 2.3 *: Soit* $f \in C(J \times C_\sigma \times \mathbb{R}^{m,}\mathbb{R}^n)$ *et pour* $\mu = \mu_0$ *soit* $x_0(t) = x_0(t_0, \varphi_0, \mu_0)(t)$ *soit une solutionde l'equation*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t, \mu_0)$$

avec une fonction initiale φ_0 *à* t_0 *existante pour* $t \geq t_0$.

Supposons que $Lim_{\mu \to \mu_0} f(t, \phi, \mu) = f(t, \phi, \mu)$ *uniformément dans* (t, φ) *et pour* $t \in J, \varphi, \phi \in C, \mu \in \mathbb{R}^m$

$$\| f(t, \varphi, \mu) - f(t, \varphi, \mu) \| \leq k \| \varphi - \phi \|$$

Alors, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *tel que pour tout* μ *satisfaisant* $| \mu - \mu_0 | < \delta(\varepsilon)$ *l'équation différentielle*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t, \mu)$$

admet une solution unique $x(t) = x(t_0, \varphi_0, \mu)(t)$ *définie sur un intervalle* $[t_0, t_0 + a]$ *tel que* $\| x(t) - x_0(t) \| < \varepsilon$ *pour* $t \in [t_0, t_0 + a]$.

2.7 Différentiabilité des solutions

Dans la section précédente, des conditions suffisantes étaient données pour garantir que la solution $x(\sigma, \varphi, f)$ sur a (2.2) dépend continuellement de (σ, φ, f).

Dans Cette section sont donnée quelques résultats sur la différentiabilité par rapport à (σ, φ, f).

Si Ω est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R} \times C$, soit $C^p(\Omega, \mathbb{R}^n), p \geq 0$ désigne l'espace de fonctions prenant Ω dans $\mathbb{R}^n$ qui ont des dérivées continues bornées jusqu'à l'ordre p par rapport à φ dans Ω.

Si $f \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^n), p \geq 1$, alors la solution $x(\sigma, \varphi, f)$ de l'equation (2.2) a travers (σ, φ) est unique et continument différentiable par rapport à (φ, f) pour t dans tout ensemble compact dans le domaine de définition de $x(\sigma, \varphi, f)$. De plus, pour chaque $t \geq \sigma$, la dérivée de x par rapport à φ, $D_\varphi x(\sigma, \varphi, f)(t)$ est un opérateur linéaire de C vers $D_\varphi x(\sigma, \varphi, f)(\sigma) = I$ l'identité, et $D_\varphi x(\sigma, \varphi, f)\psi(t)$ pour chaque ψ dans C satisfait l'équation linéaire variationnelle

$$y'(t) = D_\varphi f(t, x_t(\sigma, \varphi, f))y_t \tag{2.5}$$

Aussi, pour chaque $t \geq \sigma$, $D_f x(\sigma, \varphi, f)$ est un opérateur linéaire de $C_p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ en $\mathbb{R}^n$, $D_f x(\sigma, \varphi, f)(\sigma) = 0$, et $D_f x(\sigma, \varphi, f)g(t)$ pour chaque g de $C^p(\Omega, \mathbb{R}^n)$ satisfait l'équation variation non homogène

$$z'(t) = D_\varphi(f(x_t(\sigma, \varphi, f))z_t + g(t, x_t(\sigma, \varphi, f))) \tag{2.6}$$

2.8 Catégories de retards

Lors de la phase de modélisation, au même titre que les matrices définissant un modèle, il est essentiel de déterminer le type de retard qui affecte le système. Plus précisément, un retard, constant ou variant dans le temps, est souvent restreint à un certain domaine de définition. Le cas échéant, les propriétés intrinsèques au système physique peuvent apporter des informations sur les valeurs admissibles du retard.

Nous avons dégagé trois catégories principales de retard :

▶Retards inconnus :

Dans ce premier cas, aucune hypothèse sur le retard n'est considérée. Qu'il soit constant ou variant dans le temps,il peut prendre toutes les valeurs dans R_+.

▶Retards majorés :

Cette seconde classe suppose la connaissance d'une valeur maximale sur le retard

$$0 \leq h(t) \leq h_{max.}$$

Si $h(t) = h$ est constant, il reste en pratique incertain et la contrainte ci-dessus assure un intervalle borné. Ce cas de figure a été très largement considéré dans la littérature

▶Retards bornés :

Moins abordée que le cas précédent, cette dernière catégorie suppose que le retard vérifie la contrainte

$$h_{min} \leq h(t) \leq h_{max}$$

Le phénomène de retard souvent induit par le transport d'information, impose dans ce cas un délai (dû au temps de propagation) minimum incompressible. La littérature concernant ce type de modèle est moins vaste. Dans le cas des retards variant dans le temps, une contrainte supplémentaire relative à sa dérivée peut être ajoutée

$$|\dot{h}(t)| \leq d, d \in R_{+},$$

indiquant alors une limitation sur la vitesse de variation du retard $h(t)$.En pratique la contrainte $d \leq 1$ est souvent utilisé afin d'assurer que le retard ne varie pas plus rapidement que le temps et que les informations retardées arrivent dans l'ordre chronologique. Par ailleurs, indépendamment du procédé physique et du type de retard associé, se sont intéressés à la robustesse de la stabilité d'un système vis-à-vis du retard. Il s'agit dans ce cas d'estimer les intervalles (ou encore clusters en anglais) sur le retard tel que le système reste stable. Un cas particulier considère un système à retards stable lorsque celui-ci est nul et le but est de trouver la valeur maximale du retard telle que la stabilité du système soit préservée.

Chapitre 03

❖ *Critères de stabilité*

- ***Critère explicite pour les systèmes linéaires positifs différentiels.***
- ***Critère explicite pour la stabilité exponentielle des systèmes différentiels linéaires Positifs à retard.***
- ***Stabilité des systèmes différentiels linéaires à retard variant dans le temps.***
- ***Stabilité des systèmes différentiels non linéaires à retard.***

Chapitre 3

Critéres de stabilité

Notation 3.1 *: Soit N l'ensemble de tous les number naturels, pour $m \in N$, laissez-nous désigner $\underline{m} := \{1, 2, ..., m\}$ et $\underline{m_0} := \{0, 1, 2, ..., m\}$, laisser $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$ et désignent les ensembles de tous les numéros compexes et tous les deux véritables, s'asseublement.*

•Soit $\mathbb{k}^n$ doté de la norme $\|.\|$, et soit $\mathbb{C}([\alpha, \beta], \mathbb{k}^n]$ l'espace de banach de toutes les fonction continues sur $[\alpha, \beta]$ avec des valeurs dans $\mathbb{k}^n$ muni de la norme

$$\|\varphi\| = \max_{\theta \in [\alpha,\beta]} \| \varphi(\theta) \| .$$

Définition 3.0.1 *: soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour une fonction à valeur matricielle :*

$$\varphi(.) : J \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

on dit que φ est non négative et écrit : $\varphi \geq 0$ si $\varphi(\theta) \geq 0$ pour chaque $\theta \in J$.

3.1 Critère explicite pour les systémes linéaires positifs différentielle :

Considérons un systeme differentiel linéaire variant dans le temps à retard de la forme :

$$x'(t) = A_0(t)x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i(t)x(t-h_i) + \int_{-h}^{0} B(t,s)x(t+s)ds, t \geq \sigma \tag{3.1}$$

où $A_i(.) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}(i \in \underline{m_0})$ et $B(.,.) : \mathbb{R}_+ \times [-h,0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ espace des fonctions continues de matrice continues a valeur matricielle données et $0 < h_1 < h_2 < ... < h_m \leq h$ des nombres réels donnée. Pour $\sigma \geq 0$ fixé, et $\phi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ donnée, le systeme (3.1) admet une solution unique satisfaisant à la condition à valeur initiale

$$x(s+\sigma) = \phi(s), s \in [-h,0] \tag{3.2}$$

voire [9], cette solution est notée par : $x(.,\sigma,\phi)$, nous écrivons $x(.,\phi)$ à la place de $x(.;0,\phi)$

Définition 3.1.1 *: Le systéme (3.1) est dite positive si :*

$$\bullet \forall\sigma \geq 0, \forall\phi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n), \phi \geq 0 \Longrightarrow \forall t \geq \sigma : x(t;\sigma,\phi) \geq 0$$

Théorème 3.1 *: Le systeme (3.1) est positive si seulement si :*
(i) $A_0(t)$ est une matrice de Metzelr pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$
(ii) $A_i(t)$ est non négatif pour chaque $i \in m$ et chacun $t \in \mathbb{R}_+$
(iii) $B(t,s)$ est non négatif pour chaque $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times [-h,0]$.

Preuve :

pour(i)

supposons que le système (3.1) est positife et montrons que $\mathrm{A}_0(t)$ est une matrices de Metzler pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$

Soient $e_1, e_2, e_3, ..., e_n$ a base canonique de $\mathbb{R}^n$. Fixons $k \in \mathbb{N}$ et $j \in n$ on défini :

$$\phi'_k(s) = \begin{cases} e_j, \text{ si } s = 0 \\ (ks+1)e_j, \text{ si } s \in (-1/k, 0) \\ 0, \text{ si } s \in [-h, -1/k] \end{cases}$$

Ona $\phi_k(.) \in \mathbb{C}([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ et $\phi_k \geq 0$. Pour tout $\sigma \geq 0, x_k(.) := x(., \sigma, \phi_k) \geq 0$ à cause de la positivité de (3.1). En autre, $x_k(.)$ satisfait

$$x'_k(\sigma) = A_0(\sigma)x_k(\sigma) + \sum_{i=1}^{m} A_i(\sigma)x_k(\sigma - h_i) + \int_{-h}^{0} B(\sigma, s)x_k(\sigma + s)ds$$

d'aprés la condition initiale (3.2) en trouve :

$$x'_k(\sigma) = A_0(\sigma)\phi_k(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i(\sigma)\phi_k(-h_i) + \int_{-h}^{0} B(\sigma, s)\phi_k(s)ds$$

et de la définition de $\phi_k(s)$ pour $s = 0$ ona $\phi_k(s) = \phi_k(0) = e_j$ et $\phi_k(-h_i) = 0$ donc :

$$x'_k(\sigma) = A_0(\sigma)e_j + \int_{-h}^{0} B(\sigma, s)\phi_k(s)ds$$

pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand

$$\lim_{k\to\infty} x'_k(\sigma) = \lim_{k\to\infty} [A(\sigma)e_j + \int_{-h}^{0} B(\sigma, s)\phi_k(s)ds]$$

et d'aprés thèoréme de La convergence dominée de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x'_k(t) &= \lim_{k\to\infty} A(\sigma)e_j + \lim_{k\to\infty} \int_{-h}^{0} B(\sigma, s)\phi_k(s)ds \\ &= \lim_{k\to\infty} A(\sigma)e_j + \int_{-h}^{0} \lim_{k\to\infty} B(\sigma, s)\phi_k(s)ds \\ \text{et comme } \int_{-h}^{0} \lim_{k\to\infty} B(\sigma, s)\phi_k(s)ds &= 0 \text{ donc} \\ \lim_{k\to\infty} x'(t) &= \lim_{k\to\infty} A_0(\sigma)e_j \\ &= A_0(\sigma)e_j \end{aligned}$$

et d'autre part ona pour tout $r \in \underline{n}$, $r \neq j$

$$\begin{aligned} e_r^T x_k'(\sigma) &= e_r^T \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{x_k(\sigma+\varepsilon)+x_k(\sigma)}{\varepsilon} \\ &= e_r^T \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{x_k(\sigma+\varepsilon)-e_j}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{e_r^T x_k(\sigma+\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0 \end{aligned}$$

d'où $\lim_{k\to\infty} e_r^T x'(\sigma) = e_r^T A_0(\sigma) = e_r^T A_0(\sigma) e_j \geq 0$

Donc : pour tout $r, j \in \underline{n}, r \neq j$ par consequent $A_0(\sigma)$ est une matrice de Metzler pour tout $\sigma \geq 0$.

pour (ii)

Fixons $i \in \underline{m}$, montrons que $\mathrm{A}_i(\sigma) \geq 0$ pour $\sigma \geq 0$ fixé .

Fixons $j \in \underline{m}$ et considerons deux cas séparé.

(a) $\underline{\underline{1^{\text{ier}}\text{ cas}}}$: si $m > 1$ et $i < m$ on définit :

$$\phi_k(s) = \begin{cases} 0 & si \quad s \in [-h, -h_i - 1/k] \\ (ks + 1 + kh_{i)} e_j & si \quad s \in (-h_i - 1/k, -h_i] \\ (-ks + 1 - kh_i) e_j & si \quad s \in (-h_i, -h_i + 1/k] \\ 0 & si \quad s \in (-h_i + 1/k, 0] \end{cases}$$

et ona :

$$x_k'(\sigma) = A_0(\sigma)x_k(\sigma) + A_i(\sigma)x_k(\sigma - h_i) + \int_{-h}^{0} B(\sigma, s)x_k(\sigma + s)ds$$

d'après la condition initiale (3.2)

$x(\sigma) = \phi(0)$ donc $x_k(\sigma) = \phi_k(0)$ alors :

$$x_k'(\sigma) = A_0(\sigma)\phi_k(0) + A_i(\sigma)\phi_k(-h_i) + \int_{-h}^{0} B(\sigma, s)\phi_k(s)ds$$

et pour $s = 0$ ona $\phi_k(s) = \phi_k(0) = 0$ et $\phi_k(-h_i) = (k(-h_{i)} + 1 - kh_i)e_j = e_j$

$$x_k'(\sigma) = A_i(\sigma)e_j + \int_{-h}^{0} B(\sigma, s)\phi_k(s)ds$$

pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand :

$$\lim_{k\to\infty} x_k'(t) = \lim_{k\to\infty} [A_i(\sigma)e_j + \int_{-h}^{0} B(\sigma,s)\phi_k(s)ds]$$

et d'après le thèoréme de la convergence dominée de lebesgue

$$\lim_{k\to\infty} x_k'(t) = \lim_{k\to\infty} A_i(\sigma)e_j + \int_{-h}^{0} \lim_{k\to\infty} B(\sigma,s)\phi_k(s)ds$$

alors :

$$\lim_{k\to\infty} x_k'(t) = A_i(\sigma)e_j$$

et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned} e_r^T x_k'(\sigma) &= e_r^T \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x_k(\sigma+\varepsilon)+x_k(\sigma)}{\varepsilon} \\ &= e_r^T \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{x_k(\sigma+\varepsilon)-e_j}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{e_r^T x_k(\sigma+\varepsilon)}{\varepsilon} \geq 0 \end{aligned}$$

$\lim_{k\to\infty} e_r^T x'(\sigma) = e_r^T A_i(\sigma)e_j \geq 0$, pour toute $r, j \in \underline{n}$.

donc :

$$A_i(\sigma) \geq 0, \text{ pour chaque } \sigma \geq 0.$$

(b) $\underline{\underline{2^{\text{éme}}\text{ cas}}}$: si $m \geq 1$ et $i = m$ la preuve est similaire au cas ci-dessus.

pour (iii) :

On montre que $B(t,s) \geq 0$ pour tous $(t,s) \in R_+ \times [-h,0]$.

Soit $\phi \in C([-h_1,0], R^n)$avec $\phi(0) = \phi(-h_1) = 0$ et $\phi \geq 0$. Nous prolongeons ϕ sur $[-h,0]$ en posons $\phi(s) = 0, s \in [-h,h_1]$.

Pour tout $\sigma \geq 0$, on a

$$x(\cdot) := x(\cdot;\sigma,\phi) \geq 0$$

Par définition

$$x'(\sigma) = \lim_{\in\to 0^+} \left(\frac{x(\sigma+\epsilon)-x(\sigma)}{\epsilon}\right) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left(\frac{x(\sigma+\epsilon)}{\epsilon}\right) \geq 0$$

D'autre part, puisque $x(\cdot)$ satisfait (3.1),

$$x^{'}(\sigma) = \int_{-h_1}^{0} B(\sigma, s)\,\phi(s)\,ds.$$

Donc

$$\int_{-h_1}^{0} B(\sigma, s)\phi(s)\,ds \geq 0.$$

pour toute

$$\phi \in C([-h_1, 0], \mathbb{R}^n), \phi \geq 0, \phi(0) = \phi(-h_1) = 0. \text{ par [15, Lemme 3.4]};$$

$B(\sigma, s) \geq 0$ pour toute $\sigma \geq 0$ et tout $s \in [-h_1, 0]$. De la même manière, on peut montrer que $B(\sigma, s) \geq 0$ pour toute $\sigma \geq 0$et tout $s \in [-h_{i+1}, -h_i]$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., m-1\}$.

Inversement, supposons que $A_0(t)$ est une **matrice de Metzler** pour tout $t \geq 0, A_i(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et tout $i \in \underline{m}$ et $B(t, s) \geq 0$ pour tout $(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times [-h, 0]$.

Soit $\sigma = 0$ et fixons :

$$\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n),\ \phi \geq 0.$$

On montre que $x(t; \phi) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

Fixon $T > 0$. Puisque $A_0(\cdot)$ est continue sur$[0, T]$ et $A_0(t)$ est une **matrice de metzler** pour tout $t \geq 0$, on peut choisir $r > 0$ tel que $rI_n + A_0(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Considérons

$$z : [-h, T] \to \mathbb{R}^n, t \longmapsto z(t) := e^{rt}x(t; \phi).$$

Alors z satisfait :

$$z^{'}(t) = (A_0(t) + rI_n)\,z(t) + \sum_{i=1}^{m} e^{rh_i}A_i(t)\,z(t-h_i) + \int_{-h}^{0} e^{-rs}B(t, s)\,z(t+s)\,ds, \forall t \in [0, T]. \tag{3.3}$$

Il reste à considérer deux cas :

►$\underline{\underline{1^{\text{ier}}\text{cas}}}$:

Supposons $\phi(0) \gg 0$. On montre que $z(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. À la recherche d'une contradiction, supposons $t_0 = \inf\{t \in [0, T] \mid z(t) \ngeq 0\} \in [0, T]$. Alors par continuité $z(t_0) \geq 0$

et donc (3.3) donne

$$\begin{aligned} z(t_0) &= z(0) + \int_0^{t_0} z'(\tau)\, d\tau \\ &= \phi(0) + \int_0^{t_0} \left[(A_0(\tau) + rI_n)\, z(\tau) + \sum_{i=1}^{m} e^{rh_i} A_i(\tau)\, z(\tau - h_i) + \int_{-h}^{0} e^{-rs} B(\tau, s)\, z(\tau + s)\, ds \right] d\tau \\ &\geq \phi(0) \gg 0 \end{aligned}$$

Par continuité, il existe $\epsilon > 0$ tel que $z(t) >> 0$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \epsilon]$. Cependant, cela contredit la définition de t_0; d'où $z(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Depuis $T \geq 0$ est arbitraire, on a $z(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$ et donc, $x(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$.

► 2 $^{\text{éme}}$cas :

Supposons $\phi(0) \geq 0$. Alors $\phi_k := \phi + (1/k)\, e$, ou $e = (1, 1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^n$et $k \in \mathbb{N}$, donne $\phi_k(0) \gg 0$. Maintenant, la dépendance continue des solutions de système sur les fonctions initiales, ([9, Th. 2.2]) avec la partie (i) donne :

$$\lim_{k \to \infty} x(t; \phi_k) = x(t; \phi) \geq 0, \forall t \geq 0.$$

Dans le cas de $\sigma > 0$, la preuve est similaire à la précédente, ceci complète la preuve du théorème.

■

3.2 Critère explicite pour la stabilité exponentielle des systèmes différentiels linéaires positifs à retard :

Dans cette section, nous traitons du problème de la stabilité exponentielle des systèmes différentiels linéaires à retard de la forme

$$x'(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i x(t - h_i) + \int_{-h}^{0} B(s) x(t+s) ds, t \geq 0 \tag{3.4}$$

où $A_i(i \in \underline{m_0})$ des matrice données et $B(.) : [-h, 0] \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ est une fonction continue a valeurs matricielles donnée et $0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_m \leq h$, des nombres réels donnés.

Soit $\phi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ une fonction donné et soit $x(.;\phi)$ la solution de (3.4) satisfaire à la condition initiale

$$x(s) = \phi(s), \; s \in [-h,0].$$

Définition 3.2.1 *Le système (3.4) est dit exponentiellement stable, si et seulement si il y a des nombres positifs α, M tels que :*

$$\forall t \geq 0.\forall \phi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n) : \|x(t;\phi)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\phi\| \tag{3.5}$$

Proposition 3.1 *Le systéme (3.4) est exponentiellement stable, si seulementans si*

$$det\left(\; zI_n - A_0 - \textstyle\sum_{i=1}^m A_i e^{-h_i z} - \int_{-h}^0 e^{zs}B(s)ds \; \right) \neq 0, \; \forall z \in \mathbb{C}_+.$$

(voir [9,ch.7])

Théorème 3.2 *Soit le systéme (3.4) positif. Alors les énoncés suivantes sont équivalentes*
(i) (3.4) est exponentiellement stable ;
(ii) $\mu(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i + \int_{-h}^0 B(s)ds) < 0$;
(iii) $A_0 + \sum_{i=1}^m A_i + \int_{-h}^0 B(s)ds)p \ll 0$ *pour certains* $p \in \mathbb{R}_+^n$;
(iv) $A_0 + \sum_{i=1}^m A_i + \int_{-h}^0 B(s)ds$, *est inversible et* $(\sum_{i=0}^m A_i + \int_{-h}^0 B(s)ds)^{-1} \leq 0$;
(v) Pour $r \in \mathbb{R}_+^n$ *donné,* $r \gg 0$, *il éxiste* $p \in \mathbb{R}_+^n$ *tel que*

$$\left(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i + \int_{-h}^0 B(s)ds \right) p + r = 0;$$

(vi) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$, *le vecteur ligne* $x^T(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i + \int_{-h}^0 B(s)ds$ *a au moins une entrée négative.*

Preuve Nous montrons d'abord que $(i) \Longleftrightarrow (ii)$.
Soit $\mu(A_0 + \sum_{i=1}^m A_i + \int_{-h}^0 B(s)ds) < 0$. Supposons le contraire que (3.4) n'est pas exponentiellement stable. donc, $\det(z_0 I_n - A_0 - \sum_{i=1}^m A_i e^{-h_i z_0} - \int_{-h}^0 e^{z_0 s}B(s)ds) = 0$, pour certains $z_0 \in \mathbb{C}_+$.

Cela implique $0 \leq \Re_{z_0} \leq \mu(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-h_i z_0} + \int_{-h}^{0} e^{z_0 s} B(s)ds)$. Puisque (3.4) est positif, A_0 est une **matrice de Metzler** et $A_i \geq 0, i \in \underline{m}$ et $B(s) \geq 0$ pour tout $s \in [-h, 0]$. Il s'ensuit que $| A_i e^{-h_i z_0} | \leq A_i$, pour toute $i \in \underline{m}$, et $| \int_{-h}^{0} e^{z_0 s} B(s)ds | \leq \int_{-h}^{0} | e^{z_0 s} B(s) | ds \leq \int_{-h}^{0} B(s)ds$. Alors **théorème 1.1 (iv)** donne $0 \leq \mu(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-h_i z_0} + \int_{-h}^{0} e^{z_0 s} B(s)ds) \leq \mu(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i + \int_{-h}^{0} B(s)ds)$, qui est un contradiction.
Inversement, supposons que(3.4) est exponentiellement stable et supposons au contraire que $\mu(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i + \int_{-h}^{0} B(s)ds) \geq 0$.
Considérons la fonction continue $f(t) := t - \mu(A_0 + \sum_{i=1}^{m} e^{-th_i} A_i + \int_{-h}^{0} e^{ts} B(s)ds), t \geq 0$. Depuis $f(0) = -\mu(A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i + \int_{-h}^{0} B(s)ds) \leq 0$ et $\underset{t \to \infty}{Lim} f(t) = \infty$, il s'ensuit que $f(t_0) = 0$ pour certains $t_0 \geq 0$.C'est $t_0 = \mu(A_0 + \sum_{i=1}^{m} e^{-t_0 h_i} A_i + \int_{-h}^{0} e^{t_0 s} B(s)ds)$.Comme A_0 est une **matrice de Metzler** et $A_i \geq 0, i \in \underline{m}$ et $B(s) \geq 0$ pour toute $s \in [-h, 0]$, $A_0 + \sum_{i=1}^{m} e^{-t_0 h_i} A_i + \int_{-h}^{0} e^{t_0 s} B(s)ds$ est une **matrice de Metzler**. D'après le **théorème 1.1(i)**, $det(t_0 I_n - A_0 - \sum_{i=1}^{m} A_i e^{-h_i t_0} - \int_{-h}^{0} e^{t_0 s} B(s)ds) = 0$.Ainsi, (3.4) n'est pas exponentiellement stable. C'est une contradiction qui complète la preuve de$(i) \Longleftrightarrow (ii)$.
Enfin, depuis $A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i + \int_{-h}^{0} B(s)ds$ est une matrice de Metzler, les implications $(ii) \Longleftrightarrow (iii) \Longleftrightarrow (iv) \Longleftrightarrow (v) \Longleftrightarrow (v) \Longleftrightarrow (vi)$, suivre directement de **Théorème 1.2**. Ceci complète la preuve. ■

Dans cette section, nous donnons quelques extensions du **théorème3.1** aux systèmes différentiels linéaires à retard variant dans le temps et aux systèmes différentiels non linéaires à retard

3.2.1 Stabilité des systèmes différentiels linéaires à retard variant dans le temps :

Considérons un système différentiel linéaire à retard variant dans le temps de la forme :

$$x'(t) = A_0 x(t) + \sum_{k=1}^{m} A_k x(t - h_k(t) + \int_{-h(t)}^{0} B(s)x(t+s)ds \tag{3.6}$$

Où $t \geq 0$ et $h(\cdot)$, $h_k(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}(k \in \underline{m})$ sont des fonctions continues donnée telles que

$$0 < h(t) \leq h, 0 < h_k(t) \leq h_k, \forall t \geq 0, \forall k \in \underline{m} \tag{3.7}$$

Pour certains nombres positifs $h, h_k(k \in \underline{m})$, $h \geq \max_{k \in \underline{m}}\{h_k\}$ et $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}(k \in \underline{m_0})$ des matrices données et $B(\cdot) : [-h, 0] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ est une fonction continue a valeurs matricielle donnée.

Rappelons que par définition le systéme (3.6) est exponentiellement stable si, et seulement si, (3.5) est valable où $x(\cdot, \phi)$ est l'unique solution de (3.6) satisfaisant la condition initiale$x(s) = \phi(s), s \in [-h, 0]$.

Théorème 3.3 *: Supposer que A_0 est une **matrice de Metzler** et $A_k \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour chaque $k \in \underline{m}$ et $B(s) \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ pour chaque $s \in [-h, 0]$. Alors le systéme (3.6) est exponentiellement stable pour tout retard satisfaisant (3.7) si, et seulement si, une des conditions $(i) - (vi)$ équivalentes énoncées dans le **théorème 3.2** est vraie.*

Preuve :

Puisque A_0 est une **matrice de Metzler** et $A_K \geq 0, k \in \underline{m}$ et

$$B(s) \geq 0, \ s \in [-h, 0], \ A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k + \int_{-h}^{0} B(s) ds$$

est une **matrice de Metzler** .Ainsi, deux des conditions$(i) - (vi)$ énoncées dans le **théorème 3.2** sont équivalentes, il reste à montrer que le systéme (3.6) est exponentiellement stable pour tout retard satisfaisant (3.7) si,et seulement si, (iv) du **théorème 3.2** est vérifié. Soit $\phi \geq 0$ et soit $x(\cdot; \phi)$ soit la solution de (3.6) satisfaisant la condition de valeur initiale $x(t) = \phi(t)$, $t \in [-h, 0]$. Un argument similaire à celui de la preuve de la condition suffisante de théorème1 montre que : $x(t; \phi) \geq 0$, $\forall t \geq 0$.

Supposons :

$$\left(A_0 + \sum_{k=1}^{m} A_k + \int_{-h}^{0} B(s) ds \right) p << 0, \tag{3.8}$$

pour certains $p \in \mathbb{R}_+^n$. Par continuité (3.8) tient pour certains $p \in \mathbb{R}_+^n, p \gg 0$.

Soit $p := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T, \alpha_i > 0, \forall i \in \underline{n}$. En outre, (3.8) implique que

$$\left(A_0 + \sum_{k=1}^{m} e^{\beta h} A_k + \int_{-h}^{0} e^{-\beta s} B(s) ds \right) p \ll -\beta \left(\alpha_1 \cdots , \alpha_n \right)^T , \tag{3.9}$$

pour certains $\beta > 0$ suffisamment.

Soit $\phi \in C\left([-h, 0], \mathbb{R}^n\right), \phi \geq 0$ et $\|\phi\| \leq 1$. Alors il existe $K > 0$ tel que $\phi(t) \ll Ke^{-\beta t}p$ pour toute $t \in [-h, 0]$ et pour tout $\phi \geq 0, \|\phi\| \leq 1$.

On définit :

$$u(t) := Ke^{-\beta t}p, t \in [-h, \infty[$$

Nous prétendons que $x(t) := x(t; \phi) \leq u(t)$ pour tout $t > 0$, supposons au contraire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $x(t_0) \nleq u(t_0)$. Positionner $t_1 := \inf \{t > 0 : x\left(t\right) \nleq u(t)\}$, par continuité $t_1 > 0$ il existe $i_0 \in \underline{n}$ tel que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq u(t), \forall t \in [0, t_1);\ x_{i_0}(t_1) = u_{i_0}(t_1), \\ x_{i_0}(t) &> u_{i_0}(t), \forall t \in (t_1, t_{1+\epsilon}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

pour certains $\epsilon > 0$ suffisamment petit. D'autre part, nous avons pour chaque $i \in \underline{n}$:

$$\begin{aligned} x_i'(t) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(0)} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j(t - h_k(t)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \int_{-h(t)}^{0} b_{ij}(s) x_j(t + s) ds. \end{aligned}$$

Où $A_0 := \left(a_{ij}^{(0)}\right), A_k := \left(a_{ij}^{(k)}\right), k \in \underline{m}$, et $B\left(\cdot\right) := \left(b_{ij}\left(\cdot\right)\right)$. Puisque A_0 est une **matrice de Metzler** et $A_k \geq 0$ pour chaque $k \in \underline{m}$ et $B\left(s\right) \geq 0, s \in [-h, 0]$, la première inégalité et l'égalité dans (3.10) impliquent que

$$x_{i_0}'(t_1) \overset{(3.7)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(0)} \left(Ke^{-\beta t_1}\alpha_j\right) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)} \left(Ke^{-\beta t_1}\alpha_j\right) e^{h\beta} + \sum_{j=1}^{n} \int_{-h}^{0} b_{i_0 j}\left(s\right) \left(Ke^{-\beta t_1}\alpha_j e^{-\beta s}\right) ds$$

$$= Ke^{-\beta t_1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(0)}\alpha_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}^{(k)}\alpha_j e^{h\beta} + \sum_{j=1}^{n}\int_{-h}^{0} b_{i_0 j}\left(s\right)\alpha_j e^{-\beta s} ds\right)$$

$$\overset{(3.9)}{<} Ke^{-\beta t_1}\left(-\beta\alpha_{i_0}\right) = u_{i_0}'\left(t_1\right)$$

Cependant, cela contredit (3.10).

Ainsi, pour tout $\phi \in C\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right), \| \phi \| \leq 1, \phi \geq 0$ on a $0 \leq x\left(t;\phi\right) \leq Ke^{-\beta t}p, \forall t \geq 0$

Donc, il existe $K_1 > 0$ tel que $\| x(t,\phi) \| \leq k_i e^{-\beta t}$; $\forall t \geq 0$ pour tout $\phi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$, $\| \phi \| \leq 1$, $\phi \geq 0$.

Par la linéarité de (3.6)

$$\|x\left(t;\phi\right)\| \leq K_1 e^{-\beta t}\|\phi\|, \forall t \geq 0, \forall \phi \in C\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right),\ \phi \geq 0$$

Pour $\phi \in C\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)$, donnée peut être décomposé en $\phi = \phi^+ - \phi^-$ où $\phi^+, \phi^- \in C\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)$ et $\phi^+ \geq 0$, $\phi^- \geq 0$.

Finalement, on a

$$\|x\left(t;\phi\right)\| \leq K_2 e^{-\beta t}\|\phi\|, \forall t \geq 0, \forall \phi \in C\left([-h,0],\mathbb{R}^n\right)$$

et pour un certain $K_2 > 0$, par la linéarité de systéme (3.6). Par conséquent (3.6) est exponentiellement stable.

Inversement, si le systéme (3.6) est exponentiellement stable pour tout retard satisfaisant (3.7) puis en particulier il est exponentiellement stable avec $h_k(t) := h, t \geq 0$ pour chaque $k \in \underline{m}$. Alors, (iv) tient par le **théorème 3.2**, ceci complète la preuve.

Nous étendons maintenant les **théorèmes 3.2**, IV.1 pour des cas des systèmes qui ne sont pas nécessairement positifs. ■

Théorème 3.4 *: Soit* $A_0 = \left(a_{ij}^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et soit*

$$M := diag\left(a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, ..., a_{nn}^{(0)}\right) + \mid A_0 - diag\left(a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, ..., a_{nn}^{(0)}\right) \mid + \sum_{k=1}^{m} \mid A_k \mid + \int_{-h}^{0} \mid B\left(S\right) \mid ds.$$

Si M satisfait l'une des conditions équivalentes$(i)-(v)$ du théorèmeI.2, alors (3.6) est exponentiellement stable pour tout retard satisfaisant (3.7)

Preuve :

La preuve est presque la même que celle du **théorème 3.3**. Puisque M est une **matrice de Metzler**, des énoncées $(i)-(v)$ du **théorème 1.2** sont équivalentes, comme le montre la démonstration du **théorème 3.3**, il existe $p := (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)^T \in \mathbb{R}_+^n, p >> 0$ et $\beta > 0$ tel que

$$[diag\left(a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, ..., a_{nn}^{(0)}\right) + \mid A_0 - diag\left(a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, ..., a_{nn}^{(0)}\right) \mid$$

$$+\sum_{k=1}^{m} e^{\beta h} \mid A_k \mid + \int_{-h}^{0} e^{-\beta s} \mid B(s) \mid ds]p$$

$$\ll -\beta(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)^T.$$

Soit $\phi \in C([-h, 0]; \mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$ et $\|\phi\| \leq 1$. Alors $\exists K > 0$ tel que

$\mid \phi(t) \mid \ll Ke^{-\beta t}p$ pour toute $t \in [-h, 0]$ et pour tout $\phi \geq 0, \|\phi\| \leq 1$.

on définit

$$u(t) := Ke^{-\beta t}p, t \in [-h, \infty)$$

et soit $x(t) := x(t; \phi)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Nous prétendons que $\mid x(t) \mid \leq u(t)$ pour tout $t > 0$. Pour chaque $i \in \underline{n}$ on a :

$$\frac{d}{ds} \mid x_i(t) \mid = sgn(x_i(t)) x_i'(t) \leq a_{ii}^{(0)} \mid x_i(t) \mid$$

$$+ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mid a_{ij}^{(0)} \mid\mid x_j(t) \mid$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij}^{(k)} \mid\mid x_j(t - h_k(t)) \mid$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \int_{-h}^{0} \mid b_{ij}(s) \mid\mid x_j(t+s) \mid ds,$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$. Donc,

$$\begin{aligned} D^{+} \quad & \mid \quad x_i(t) \mid = \lim\sup_{h\to 0^+} \frac{\mid x_i(t+h) \mid - \mid x_i(t) \mid}{h} \\ & = \quad \lim\sup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \frac{d}{ds} \mid x_i(s) \mid ds \leq a_{ii}^{(0)} \mid x_i(t) \mid \\ + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} & \mid \quad a_{ij}^{(0)} \mid\mid x_j(t) \mid \\ + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} & \mid \quad a_{ij}^{(k)} \mid\mid x_j(t-h_k(t) \mid \\ + \sum_{j=1}^{n}\int_{-h}^{0} & \mid \quad b_{ij}(s) \mid\mid x_j(t+s) \mid ds, \end{aligned} \tag{3.11}$$

Où D^{+} désigne la dérivée supérieure droite de Dini. Par les mêmes arguments que dans la preuve du **théorème 3.3** avec $A_0, A_i, B(\cdot)$ et $x(\cdot)$ sont remplacés par

$$diag\left(a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, ..., a_{nn}^{(0)}\right) + \mid A_0 - diag\left(a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, ..., a_{nn}^{(0)}\right) \mid, \mid A_i \mid, \mid B(\cdot) \mid et \mid x(\cdot) \mid,$$

respectivement, (3.11) donne $D^{+} \mid x_{i_0}(t_1) \mid < D^{+}u_{i_0}(t_1)$.

Cependant, ceci est en contradiction avec (3.10). Le reste de la preuve est le même que celui du **théorème 3.3**. Ceci complète la preuve. Nous illustrons le **théorème 3.4** par un exemple simple. ■

Exemple 3.2.1 *Considérons un système différentiel linéaire à retard variant dans le temps dans* $\mathbb{R}^2$ *donné par*

$$x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h_1(t)) + \int_{-h(t)}^{0} B(\tau) x(t+\tau)\, d\tau, t \geq 0, \tag{3.12}$$

où

$$A_0 \begin{pmatrix} -3 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -3 \end{pmatrix};\ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ B(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ -2s & s \end{pmatrix},\ s \leq 0$$

et $h_1(\cdot), h(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}+$ *sont des fonctions continues. Pour* $h > 0$, *définissons.*

$$
\begin{aligned}
M \quad : &= diag(-3,-3) + \mid A_0 - diag(-3,-3) \mid + \mid A_1 \mid + \int_{-h}^{0} \mid B(s) \mid ds \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \left| \begin{pmatrix} -3 & \frac{-1}{2} \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| + \int_{-h}^{0} \left| \begin{pmatrix} s & 0 \\ -2s & s \end{pmatrix} ds, \ s \leq 0 \right| \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left| \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} \int_{-h}^{0} sds & 0 \\ -2\int_{-h}^{0} sds & \int_{-h}^{0} sds \end{pmatrix} ds, \ s \leq 0 \right| \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{h^2}{2} & 0 \\ h^2 & \frac{h^2}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 + \frac{h^2}{2} & \frac{5}{2} \\ h^2 & -3 + \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

IL s'ensuit que $\mu(M) = \left(\frac{1}{2}\right) h^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) h - 3$. *Ainsi (*3.12*) est exponentiellement stable pour* $\mu(M) < 0$, $0 < h_1(t) \leq h$, $0 < h(t) \leq h, \forall t \geq 0$, *ou équivalent,* $0 < h < \left(\frac{(\sqrt{34} - \sqrt{10})}{2}\right)$, $0 < h_1(t) \leq h$, $0 < h(t) \leq h, \forall t \geq 0$, *par le théorème 3.4.*

3.2.2 Stabilité des systèmes différentiels non linéaires à retard :

Considérons un système différentiel non linéaire à retards variant dans le temps de la forme

$$
x'(t) = Ax(t) + F\left(t; x(t - h_1(t)), \cdots, x(t - h_m(t)), \int_{-h(t)}^{0} B(s)\, x(t+s)\, ds\right), t \geq \sigma \geq 0 \tag{3.13}
$$

où $(i) : h_k(\cdot), h(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, k \in \underline{m}$,sont données des fonctions continues telles que $0 \leq h_k(t) \leq h_k, , 0 \prec h(t) \leq h, h \geq h_k, \forall k \in \underline{m}$, pour certains nombres positifs $h, h_k, k \in \underline{m}$;

$(ii) : A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est donnée et $B(\cdot) : [-h, 0] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ sont données des fonctions continues

$(iii) : F(\cdot\ \cdot, \ldots, \cdot) : \mathbb{R}_+ \times \overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots. \times \mathbb{R}^n}^{(m+1)fois} \to \mathbb{R}^n$,est une fonction continue donnée telle que $F(t; 0, \ldots, 0) = 0, \forall t \geq 0$ et $F(t; u_1, u_2, \ldots, u_{m+1})$ est (localement) Lipschitz continu par rapport à $u_1, u_2, \ldots, u_{m+1}$ dans chaque sous-ensemble compact de $\overbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots. \times \mathbb{R}^n}^{(m+1)fois}$.

Théorème 3.5 *Les condition* $(i), (ii)$ *et* (iii) *implique que pour un fixe* $\sigma \geq 0$ *et* $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ *donnée, il existe une solution unique locale du systéme (*3.13*) vérifiant la condition initiale*

$$x(s+\sigma) = \phi(s), s \in [-h, 0]. \tag{3.14}$$

Cette solution est continue sur$[\sigma - h, \gamma)$ *pour certains* $\gamma > \sigma$ *et satisfait (*3.13*) pour tout* $t \in [\sigma, \gamma[$. *(Voir[4],[9]) Il est noté par* $x(\cdot; \sigma, \phi)$

Définition 3.2.2 *: si l'intervalle* $[-h, 0)$ *l'intervalle maximal de l'existance de la solution* $x(., \sigma, \phi)$. *Alors* $x(., \sigma, \phi)$ *est dit non continuable.*
L'existence d'une solution non contiuable découle du lemme de Zorn et l'intervalle maximal d'existence doit être ouvert.

Définition 3.2.3 *La solution de* (3.13) *est dite localement exponentiellement stable s'il existe des nombres positifs* r, K, β, *tels que pour chaque* $\sigma \in \mathbb{R}_+$ *et chacun* $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ *avec* $\|\phi\| \leq r$, *la solution* $x(\cdot; \sigma, \phi)$ *de* (3.13), (3.14) *existe sur*$[\sigma - h, \infty)$ *et en outre satisfait*

$$\|x(t; \sigma, \phi)\| \leq K e^{-\beta(t-\sigma)}, \forall t \geq \sigma.$$

Définition 3.2.4 *La solution nulle de (*3.13*) est dite globalement exponentiellement stable s'il existe des nombres positifs* K, β *tels que pour chaque* $\sigma \in \mathbb{R}_+$ *et chaque* $\phi \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, *la solution* $x(\cdot; \sigma, \phi)$ *de (*3.13*)* , (3.14) *existe sur* $[\sigma - h, \infty)$ *et en outre satisfait*

$$\|x(t; \sigma, \phi)\| \leq K e^{-\beta(t-\sigma)} \|\phi\|, \forall t \geq \sigma.$$

*Lorsque la solution nulle de (*3.13*) est localement exponentiellement stable, globalement exponentiellement stable alors on dit aussi que (*3.13*) est localement exponentiellement stable, globalement exponentiellement stable, respectivement.*

Théorème 3.6 *Supposons qu'il existe* $A_1, A_2, \ldots, A_{m+1} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ *de sorte que*

$$| F(t; u_1, ..., u_{m+1}) | \leq \sum_{k=1}^{m+1} A_k | u_k |, \tag{3.15}$$

pour tous $t \geq 0, u_1, \ldots, u_{m+1} \in \mathbb{R}^n$. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *et soit*

$$M := diag\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) + \mid A - diag\,(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}) \mid + \sum_{k=1}^{m} A_k + \int_{-h}^{0} A_{m+1} \mid B\,(s) \mid ds.$$

si M *satisfait l'une des conditions équivalentes* $(i) - (v)$ *du* ***théorème 1.2*** *alors (*3.13*) est localement exponentiellement stable. De plus, si la fonction* F *est homogène positive de degré un par rapport à* $u_1, u_2, \ldots, u_{m+1},$ *c'est-à-dire*

$$F\,(t;\alpha u_1, ..., \alpha u_{m+1}) = \alpha F\,(t; u_1, ..., u_{m+1})\,,$$

pour toute $\alpha \geq 0, t \geq 0, u_1, u_2, \ldots, u_{m+1} \in \mathbb{R}^n$, *alors (*$3.13$*) est globalement exponentiellement stable.*

Remarque 3.2.1 *Il est important de noter que si* $F(t; u_1, u_2, ..., u_{m+1})$ *est (globalement) continue de.*

Lipschitz parrapport à $u_1, u_2, ..., u_{m+1}$ *dans* $\mathbb{R}_+ \times \overbrace{\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n}^{(m+1)times}$*et* $F\,(t; 0, 0, \ldots, 0) = 0, \forall t \geq 0.$ *Alors*(3.15) *est automatiquement vérifié pour certains* $A_k \in \mathbb{R}_+^{n\times n}, k \in \underline{m+1}$.

Preuve Puisque M est une **matrice de Metzler**, deux de $(i) - (v)$ du-**théorème 1.2** sont équivalents. Nous montrons d'abord que (3.13) est localement exponentiellement stable pour que (iv) du **théorème 1.2** soit vérifié. Soit $\phi \in C\,([-h, 0]\,, \mathbb{R}^n)$ soit donné et soit

$$x(t) := x(t; \sigma, \phi), t \in [\sigma - h, \gamma)$$

une solution non continuable de(3.13), (3.14). En tenant compte de (3.15), par un argument similaire à celui de la preuve du **théorème 3.4**, on peut montrer qu'il existe $\beta > 0$ telle que pour tout $\sigma \geq 0$ et tout $r > 0$ et tout $\phi \in C\,([-h, 0]\,, \mathbb{R}^n)$
avec

$$\|\phi\| \leq r, \|x\,(t; \sigma, \phi)\,\| \leq K e^{-\beta(t-\sigma)}, \forall t \in [\sigma, \gamma[\tag{3.16}$$

Où $K > 0$ ne dépend que de β, r. Nous prétendons que $\gamma = \infty$ et donc (3.13) est localement exponentiellement stable. En cherchant une contradiction, on suppose que $\gamma < \infty$. Il résulte alors de (3.16) que $x(\cdot) := x(\cdot;\sigma,\phi)$ est limité à $[\sigma,\gamma)$. De plus, ceci avec (3.13)et (3.15)implique que $x'(\cdot)$ est borné $[\sigma,\gamma)$. Ainsi $x(\cdot)$ est uniformément continue sur $[\sigma,\gamma)$. Par conséquent, $\lim_{t\to\gamma^-} x(t)$ existe et $x(\cdot)$ peut être étendu à une fonction continue sur$[\sigma,\gamma]$. De plus, la fermeture de$\{x_t : t\in[\sigma,\gamma)\}$ est un ensemble compact en $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$, d'après le théorème **ascoli-d'Arzela[3]**. Notez que $\{(t;x_t) : t\in[\sigma,\gamma)\}\subset[\sigma,\gamma]\times$ la fermeture de $\{x_t : t\in[\sigma,\gamma)\}$. Ainsi la fermeture de $\{(t,x_t) : t\in[\sigma,\gamma)\}$ est un compact dans $\mathbb{R}_+\times C([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Depuis (γ,x_γ) appartient à cet ensemble compact, on peut trouver une solution (3.13) par ce point à droite de γ. Cela contredit l'hypothèse de non-continuité sur $x(\cdot)$. Ainsi γ doit être égal à ∞.

Enfin, on montre que(3.13)est globalement exponentiellement stable pourvu que F soit homogène positive de degré une par rapport à $u_1,u_2,...,u_{m+1}$. Soit $\phi\in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ soit donné. Puisque F est homogène positif de degré une par rapport à $u_1,u_2,...,u_{m+1}$, il s'ensuit que $(1/\|\phi\|)x(\cdot;\sigma,\phi)$ est l'unique solution de (3.13) vérifiant la condition initiale

$$x(t+\sigma) = (1/\|\phi\|)\,\phi(t)\,, t\in[-h,0]\,.$$

Depuis $(1/\|\phi\|)\,\phi\in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ et $\|\,(1/\|\phi\|)\,\phi\| = 1$,

Nous avons $\|\,(1/\|\phi\|)\,x(t;\sigma,\phi)\,\| \le Ke^{-\beta(t-\sigma)}, \forall t\ge\sigma$ou équivalent, $\|x(t;\sigma,\phi)\,\| \le Ke^{-\beta(t-\sigma)}\|\phi\|, \forall t\ge\sigma$. Ici K,β sont indépendants avec σ,ϕ et donc (3.13) est globalement exponentiellement stable. Ceci complète la preuve. ■

Conclusion

Nous concluons a la fin de ce mémoire que même si les matrices associes aux systèmes différentiels linéaires à retard ne sont pas constantes, c'est-à-dire qu'ils dépend de t, et au lieu de la réaliser par la méthode de Lyapunov-Razumikhin qui recherche des fonctions qu'il doivent vérifiées des conditions pour l'atteindre. On peut obtenue par le théorème de (Perron-Frobenius) et le principe de comparaison qui réduisons également le problème de la stabilité des systèmes à retard qui variant dans le temps à des retards constants par une majoration des matrices associer aux ces systèmes par des matrices constantes.

Biblieographie

[**1**] A.Berman and R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences. New York :Academic, 1979.

[**2**] M.Buslowicez, “Robust stability of positive continuous time linear systems with delays, ”Int. J.Appl. Math. Compul. Sci., vol. 20, no. 4, pp. $665 - 670$, 2010.

[**3**] J. Dieudonne, Foundations of Modern Analysis. New York : Academic, 1988.

[**4**] R. D. Driver, “Existence and stability of solutions of a delay differential system, ”Archive for Rational Mechan. Anal., vol. 10, no. 1, pp. $401 - 426$, 1962.

[**5**] T. Erneux, Applied Delay Differential Equations. New York : Springer, 2009, vol .3, Series : Surveys and Toutorials in the Appl. Math. Sci..

[**6**] L. Farina and S. Rinaldi, Positive Linear Systems : Theory and Applications. New York : Wiley, 2000.

[**7**] W. M. Haddad And V. Cellaboina, “Stability theory for nonnegative and compartmental dynamical systems with time delay,” Syst. contr. lett., vol. 51, no. 5, pp. $355 - 361$, 2004.

[**8**] W. M. Haddad, V. Chellaboina, and Q. Hui, Nonnegative and Compartmental Dynamical Systems. Princeton, NJ :Princeton Univ. Press, 2010.

[**9**] J. Hale and S. M.V. Lunel, Introduction to Functional Differential Equations. New York : Springer- Verlag, 1993.

[**10**] T. Kaczorek, Positive 1D and 2D Systems. London, U. K. :Springer -Verlag, 2002.

[**11**] T. Kaczorek, “Stability of positive continuous - time linear systems with delays,” Bull. Polish Acad. Sci . Tech . Sci.,vol. 57, no .4, pp. $395 - 398$, 2009.

[**12**] T.Kaczorek, “Stability of continuous -discrete linear systems described by the general model,” Bull . Pol. Acad .Sci .Techan,vol .59,no .2 ,pp. $189-193$, 2011.

[**13**] Y. Kuang, Delay Differential Equations With Applications in Popula-tion Dynamics, Mathematics in Science and Engineerring Vol. 191. New York :Academic, 1993.

[**14**] X. Liu, W. Yu, and L. Wang, “Stability analysis for continuous-time positive systems with time -variyng delays, ” IEEE Trans . Autom. Control, vol. 55, no . 4, pp. $1024-1028$, Apr. 2010.

[**15**] P. H. A. Ngoc, T. Naito, J. S. Shin, and S. Murakami, “On stability and robust stability of positive linear Volterra equations, ” SIAM J. Contr. Optim., vol . 4, no. 2, pp. $975-996$, 2008.

[**16**] P. H. A Ngoc, “On positivity and stability of linear Volterra systems with delay, ”SIAM J. Contr. Optim, vol., 48, no. 3, pp. $1939-1960$, 2009.

[**17**] N. K. Son and D. Hinrichsen, “Robust stability of positive continuous-time systems, ”Numer. Function. Anal. Optimiz., vol. 17, no. $5-6$, pp. $649-659$, 1996.

[**18**]Boufrioua Hadia ;Ètude La stabilité exponentielle des systèmes différentiels linéaires à retard variant dans le temps ; Mémoire de Master ; univercité Abbes Laghrour-Khenchela ; 2020.

[**19**]Imen Ellouze ; Ètude de La stabilité et de stabilisation des systémes à retard et des systémes implusifs ; Mémoire Doctorat ; univercité sfex ;2010.

[**20**]Berrah Sameh, Ben bouzid Fatma ; caractérisation des normes matricielles ;Mémoire de licence ; univercité Abbes Laghrour-Khenchela ; 2014.

[**21**]Yassine Ariba,Sur la stabilité des systèmes à retards variant dans le temps : théorie et application au contrôle de congestion d’un routeur ; Mémoire Doctorat ; Université Toulouse 3 Paul Sabatier ;2009.

[22]Analyse fonctionnelle ; espace vectoriel topologique.