



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de **Master**
Filière: **Mathématiques**
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

**L'étude de l'existence locale et globale
des solutions pour quelques problèmes
de réaction diffusion**

Réalisé par : **ATHMANI Zineb**
BOUTARFI Nassima

Dirigé par : **Dr. SANDEL Saida**

Membres de jury :

Dr. RAMOUL Hichem **Président**
Dr. MANSOURI Djamel **Examineur**

2021-2022

Remerciements

*Tout d'abord nous tenons à remercier **Allah** pour tout ce que nous étions donné de force, courage et surtout de connaissances. Aussi que ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'intervention, consciente, d'un grand nombre de personnes. Nous souhaitons ici les en remercier.*

*Nous tenons d'abord à remercier très chaleureusement **Mlle. Sandel Saida** qui nous a permis de bénéficier de son encadrement, les conseils qu'il nous a prodigué, la confiance qu'il nous a témoignés ont été déterminants dans la réalisation de notre travail de recherche.*

*Nous remercions tout particulièrement **Mr. Ramoul Hichem** qui accepte de devenir le président de notre jury et **Mr. Mansouri Djamel** l'examineur de notre jury, pour leurs efforts pour étudier notre mémoire et leurs conseils pour corriger les erreurs et les fautes.*

Nos remerciements s'étendent également à tous nos enseignants durant les années des études, et bien sure a nos familles et nos amis qui par leurs prières et leurs encouragements, on a pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, nous tenons à remercier tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.



❖ Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et reconnaissance

A mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci!

Boutarfi & Massima





❖ Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma chère mère et à mon cher père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et reconnaissance

A mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous ceux qui m'ont aidé - de près ou de loin - et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci!

Athmani & Lineb



Notations

\mathbb{R} Ensemble de nombres réels.

Ω Un domain borné dans l'espace eclidien \mathbb{R} à frontière $\Gamma(\partial\Omega)$ suffisamment régulière

x Le vecteur (x_1, x_2, \dots, x_n) de \mathbb{R}

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$ Désigne la dèriveè normale de u exterieure à $\partial\Omega$

η Le vecteur unitaire normal exterieur à Γ

∇u Grad $u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$

Δu Le Laplacien de u et dèfini par $\Delta u = (\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2})$

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	4
1.1 Les espace L^p	4
1.2 Les espaces de Hilbert	6
1.3 Les espaces de sobolev	6
1.4 Formule de Green	7
1.5 Inégalités fondamentales	8
1.6 Formes quadratiques	10
1.7 Semi-groupes	11
1.8 Région invariante	13
2 Existence globale pour un système de réaction diffusion par l'utilisation de la fonction de lyaponov	14
2.1 Position du problème	14
2.2 Existence locale et Positivité	17
2.2.1 Existence locale	17
2.2.2 Positivité	18
2.3 Existence globale	19
3 Existence globale d'un système de réaction-diffusion avec contrôle de masse	30
3.1 Dissipation ou contrôle de masse, structure $(P) + (M)$	30
3.2 Quelques exemples de systèmes de réaction-diffusion avec des propriétés $(\mathbf{P}) + (\mathbf{M})$	39
3.3 Existence de solutions classiques globales	43
3.3.1 Un résultat typique sur les systèmes 2×2	43

3.3.2 Application	45
3.4 Extension aux systèmes $m \times m$	49
Bibliographie	50

Introduction

L'étude de l'existence globale en temps des solutions des systèmes appelés de réaction-diffusion constitue l'une des questions fondamentales de la théorie générale des équations aux dérivées partielles, devenues aujourd'hui l'un des thèmes importants de la compréhension scientifique.

Les SRD (système de Réaction-diffusion) sont des systèmes d'équations aux dérivées partielles de type parabolique semi-linéaires qui s'écrivent formellement :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u) \quad \text{sur} \quad \Omega \times]0, T [$$

Avec des conditions aux limites et initiales données. Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n le terme de diffusion $D\Delta u$, $u(x, t)$ est un vecteur à m composantes, D est une matrice diagonale d'ordre m . $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (terme de réaction) est une application non linéaire.

Ces équations modélisent des phénomènes qui apparaissent dans des secteurs variés, tels que : la Chimie, la Biologie, la Neurophysiologie, la combustion, la Génétique, des populations,.....etc.

Depuis longtemps, du côté mathématique, l'existence d'une solution globale positive pour les SRD en temps, était l'objet de plusieurs études.

Dans ce mémoire, On s'intéresse à l'étude de l'existence globale des solutions par deux méthodes :

La 1^{re} méthode décrite au sein de notre deuxième chapitre pour des problèmes de réaction diffusion étudiés dans K.Saoudi[6] et Kouachi-Youkana[9] de type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u = f(u, v) \\ \qquad \qquad \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2\Delta v = g(u, v) \end{cases} \quad (1)$$

Avec des conditions aux bords

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \quad (2)$$

Et des données initiales :

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x) \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \quad (3)$$

Ou Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n différentiable. Le principe de cette méthode se base sur l'obtention des estimations a priori (bornitude dans $L^\infty(\Omega)$) sur les fonctions u et v en utilisant la fonctionnelle dite de Lyapunov qui est introduite par S.Kouachi-A.Youkana [9] cette fonctionnelle aide à appliquer le théorème de Hannerly [2] qui assure la L^∞ -bornitude des solutions si $f \in L^\infty([0, T], L^p(\Omega))$.

La 2^{ème} méthode sera le but de notre 3^{ème} chapitre, elle a été proposée par Michel-pierre [7] pour des problèmes de Réaction diffusion qui vérifient deux propriétés principales telles que :

1- (P) : la quasi positivité de la non linéarité (terme de réaction) ce qui donne la positivité des solutions.

2- (M) : propriété de contrôle de la masse [ie]; les deux composantes u et v de la solution sont bornées dans $L^1(\Omega)$.

En Applique cette méthode pour des problèmes de types :

$$\begin{cases} \partial_t u - d_1 \Delta u = -uh(v) & \text{on } (0, \infty) \times \Omega \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = uh(v) & \text{on } (0, \infty) \times \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \geq 0, v(0, \cdot) = v_0(\cdot) \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

Avec $d_1, d_2 > 0$, $d_1 \neq d_2$, Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n et h est une fonction régulière donnée est plus

généralement pour des systèmes de m équations de type :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, m \\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, \dots, u_m) \text{ ou } (0.T)\Omega. \\ \forall i, \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \beta_i \geq 0 \text{ ou } (\forall i, u_i = \beta_i \geq) \text{ ou } (0.T)\partial\Omega \\ u_i(0, \cdot) = u_{i_0} \in L^\infty(\Omega), u_{i_0} \geq 0. \end{array} \right.$$

Dans les deux cas on donne des théorèmes d'existence démontrés par Michel-pierre et finalement on termine par des applications et des exemples sur des modèles de R.D. vérifiant les propriétés $(p) + (M)$.

Préliminaires

1.1 Les espace L^p

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur Ω à valeur Dans \mathbb{R} , on pose :

$$\|u\|_{L^1} = \int_{\Omega} |u(x)| dx. \tag{1.1}$$

Définition 1.1. Soit $p \in \mathbb{R}$ $1 \leq p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \Rightarrow \mathbb{R} ; u \text{ mesurable et } |u|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Muni de la norme :

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right]^{1/p}. \tag{1.2}$$

Définition 1.2. On pose . . :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \Rightarrow \mathbb{R} ; u \text{ mesurable existe une constante } C \text{ telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

On note

$$\|u\|_{L^\infty} = \inf\{C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}. \tag{1.3}$$

Remarque 1.1. Les espaces $L^p(\Omega)$ munis de la norme (1.2) sont des espaces de Banach .

En particulier $L^2(\Omega)$ (pour $p = 2$) est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Définition 1.3. Soit X un espace de Banach, on désigne par $L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions mesurables $u :]0, T[\Rightarrow X$ tel que

$$L^p(0, T, X) = \{u \text{ mesurable de } [0, T] \Rightarrow X : \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty, 1 \leq p < \infty\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0, T, X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{1/p}. \quad (1.4)$$

Définition 1.4. On dit que M est le sup ess de f sur Ω si l'ensemble $\{x \in \Omega; f(x) > M\}$ est de nulle.

On a :

$$L^\infty(0, T, X) = \{u \text{ mesurable de } [0, T] \rightarrow X \sup \text{ess}_{t \in [0, T]} \|u\|_X < \infty\}$$

Muni de la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(0, T, X)} = \sup \text{ess}_{t \in [0, T]} \|u\|_X. \quad (1.5)$$

1.2 Les espaces de Hilbert

Définition 1.5. -[5]- Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire (u, v) est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique, définie positive [i.e. $(u, v) \geq 0 \quad \forall u \in H$ et $(u, u) > 0$ si $u \neq 0$].

Rappelons qu'un produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2}(v, v)^{1/2} \quad \forall u, v \in H.$$

Rappelons aussi que

$|u| = (u, u)^{1/2}$ est une norme.

Définition 1.6. -[5]- Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire (u, v) et qui est complet pour la norme $(u, u)^{1/2}$.

1.3 Les espaces de Sobolev

Pour tous $m \in \mathbb{N}$, on définit les espaces de Sobolev $\mathbb{H}^m(\Omega)$ par :

pour $m = 1$

$$\mathbb{H}^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

\mathbb{H}_0^1 est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans \mathbb{H}^1 et on écrit

$$\mathbb{H}_0^1 = \{u \in \mathbb{H}^1, u|_{\Gamma} = 0\}$$

D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}$ et on définit :

$$\mathbb{H}^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{H}^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\mathbb{H}^{-m}(\Omega) = \mathcal{L}(\mathbb{H}_0^m(\Omega), \mathbb{R})$ est l'espace dual de $\mathbb{H}_0^m(\Omega)$.

Remarque 1.2. Si u est une fonction et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, On note $D^\alpha u$ la dérivée d'ordre α de u

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$$

1.4 Formule de Green

On se donne Ω un ouvert borné de frontière régulière Ω et $\vec{\eta} = (\vec{\eta}_1, \dots, \vec{\eta}_n)$ la normale extérieure au point x .

Soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ et v une fonction de $H^1(\Omega)$.

Alors la formule de Green s'écrit

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\Omega - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx \quad (1.6)$$

Remarque 1.3. *La forme vectorielle de la formule de Green est :*

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot v dx = \int_{\Gamma} u \cdot v d\Omega - \int_{\Omega} v \cdot \nabla v dx. \quad (1.7)$$

On a

$$\nabla(u \cdot v) = \nabla u \cdot v + u \nabla v. \quad (1.8)$$

Et

$$\nabla(\nabla u) = \Delta u.$$

1.5 Inégalités fondamentales

Lemme 1.1. *-[5]- (Inégalité de Cauchy)*

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Lemme 1.2. *-[5]- (Inégalité de Young)*

Pour $1 < p, q < \infty$, telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a, b > 0$ on a l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme 1.3. -[5]-

(Inégalité de Hölder)

Soient $u \in L^p$ et $v \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors $u.v \in L^1$ et

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}.$$

Inégalité de Gronwall

Lemme 1.4. (la forme différentielle de l'inégalité de Gronwall)

Soit $\eta (\cdot)$ une fonction absolument continue positive sur $[0, T]$, qui satisfait pour p.p l'inégalité différentielle

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t),$$

ou $\phi (t)$ et $\psi (t)$ sont des fonctions sommables, positives sur $[0, T]$. Aors

$$\eta(t) \leq \exp\left(\int_0^t \phi ds\right) \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right]$$

pour tout $0 \leq t \leq T$ Notamment, si

$$\eta' \leq \phi\eta \text{ sur } [0, T] \text{ et } \eta(0) = 0$$

Alors

$$\eta \equiv 0 \text{ sur } [0, T]$$

Lemme 1.5. (la forme intégrale de l'inégalité de Gronwall)

Soit $f(t)$ une fonction sommable , positive sur $[0, T]$ qui satisfait pour p.p l'inégalité intégrale :

$$f(t) \leq C_1 \int_0^t f(s) ds + C_2,$$

pour les constantes $C_1, C_2 \geq 0$. Alors

$$f(t) \leq C_2(1 + C_1te^{-C_1t})$$

pour p.p $0 \leq t \leq T$

Notamment, si

$$f(t) \leq C_1 \int_0^t f(s)ds$$

pour p.p, $0 \leq t \leq T$

$$f(t) = 0 \text{ p.p.}$$

1.6 Formes quadratiques

Définition 1.7. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice symétrique, alors une forme quadratique $T(u_1, u_2, \dots, u_n)$, associée à la matrice A est un polynôme homogène du second degré relativement aux n variables u_1, u_2, \dots, u_n , qui se représente sous la forme :

$$T(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}u_iu_j \text{ Ou } a_{ij} = a_{ji} \text{ Et } i = 1, \dots, n \quad (1.9)$$

Définition 1.8. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)^t$ une matrice colonne et la forme quadratique $Au, u = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}u_iu_j$. Alors ; $\langle Au, u \rangle = Au, u$ si A est symétrique réelle, alors $\langle Au, u \rangle$ est dite forme quadratique réelle.

Définition 1.9. Une forme quadratique est dite définie positive, i.e

$$A(u, u) > 0, u \neq 0.$$

Une forme quadratique est définie positive. Si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients sont positifs, i.e.

$$\det_1 > 0, \det_2 > 0, \dots, \det_n > 0.$$

Définition 1.10. Une forme quadratique est dite définie non-négative si, pour des valeurs réelles arbitraires, des variables non-tous nulles, On a

$$(u \neq 0), A = (u, u) \geq 0.$$

Théorème 1.1. -[3]-

Une forme quadratique est définie non négative si, est seulement si, tous les déterminants principaux de sa matrice de coefficients sont non négative.

1.7 Semi-groupes

Définition 1.11. Soit H un espace de Hilbert. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $S(t) : H \Rightarrow H$ dépendant du paramètre $t \geq 0$ forment un semi-groupe si :

$$\begin{cases} S(0) = I_H \\ S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Définition 1.12. Le semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ est dit fortement continu à l'origine, ou de classe C_0 si de plus $\forall x \in H \lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$.

Définition 1.13. On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble :

$$D(A) = \{\forall x \in H \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t)x - x}{t} \text{ existe}\}.$$

par :

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t)x - x}{t}, \forall x \in D(A).$$

Remarque 1.4.

1. - Il est clair, que le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe est un opérateur linéaire.
2. - Si $S(t)_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe dans H , alors l'adjoint $S^*(t)$ et aussi un C_0 -semi-groupe dans H .
3. - Le générateur infinitésimal de $(S^*(t))_{t \geq 0}$ est $(A^*, D(A^*))$.

Définition 1.14. On dit que $(S(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 -semi-groupe de contraction sur H , si

$$\|S(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.2. (Hille Yosida) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur A fermé de domaine $D(A)$ dense dans X soit générateur infinitésimal d'un semi-groupe de classe C_0 est qu'il existe deux nombres réels M et ω tel que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} : \text{tel que } \operatorname{Re}(\lambda) > \omega, \lambda$$

n'est pas dans le spectre de A .

et

$$\|(\lambda I - A^n)\| < \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

. On pose $A_\lambda x = \lambda R(\lambda, A)(x)$.

1.8 Région invariante

Définition 1.15. *un sous ensemble fermé $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ est appelé une région invariante pour le système de R.D, si tout solution $(u(x,t), v(x,t))$ ayant ses valeurs initiales et aux limites dans Σ , reste dans Σ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $t \in [0, T_{max}[$*

Existence globale pour un système de réaction diffusion par l'utilisation de la fonction de Lyapounov

Dans ce chapitre on étudie l'existence et l'unicité des solutions restant uniformément bornées pour une classe de systèmes de réaction-diffusion, en utilisant la fonctionnelle de Lyapounov et le théorème de Henry.

2.1 Position du problème

On considère le système de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = -f(u, v) \\ \qquad \qquad \qquad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = f(u, v) \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec conditions aux bords (**Neuman**)

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega \quad (2.2)$$

Et des données initiales :

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x) \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \quad (2.3)$$

Ω est un ouvert borné de classe C^1 de \mathbb{R}^n à frontière $\Gamma(\partial\Omega)$ suffisamment régulière, $\frac{\partial}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale extérieur à $\partial\Omega$, d_1 et d_2 sont deux constantes strictement positives .

Les données initiales sont supposées dans une région Σ définie par :

$$\Sigma = \{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad u_0 \geq 0; v_0 \geq 0\},$$

f représente l'interaction non linéaire, supposée continument différentiable dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, non négative vérifiant : $f(0,s)=0 \quad \forall s \geq 0$ Et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(1 + f(r, s))}{s} \right] < \alpha < \alpha^* \quad \forall r \geq 0, \quad (2.4)$$

$$\alpha^* = \frac{8d_1d_2}{n \|u_0\|_\infty (d_1 - d_2)^2}, \quad (2.5)$$

Notre but est d'établir l'existence globale en temps d'une solution du système (2.2)-(2.3) où on utilise les techniques de la fonctionnelle de **Lyapunov**, voir [6] [9] .

En générale pour démontrer l'existence globale en temps des solutions d'un système de réaction-

diffusion, il suffit de montrer que les termes de réaction sont dans $L^\infty([0, T_{max}[, L^p(\Omega))$ pour certain $p > \frac{n}{2}$ où $n = \dim\Omega$.

Cette méthode est justifiée par l'application du théorème de l'existence globale par **effet régularisant**.

Théorème 2.1. [6] Soit l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(t, x, u) & \text{sur } [0, T[\times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sur } [0, T[\times \partial\Omega \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

Si $f(t, x, u)$ est dans $L^\infty([0, T[, L^p(\Omega))$ pour $p > \frac{n}{2}$ où $n = \dim\Omega$, alors la solution de (2.6) est globale.

Remarque 2.1.

$$f(t, x, u) \in L^\infty([0, T[, L^p(\Omega)), \quad (2.7)$$

Alors

$$\sup_{0 \leq t < T} \| f(t, x, u) \|_{L^p(\Omega)} < +\infty, \quad (2.8)$$

D'où

$$\int_{\Omega} |f(t, x, u)|^p dx \leq c \quad \forall t \in [0, T],$$

Ce qui montre que la solution est globale, voir ([2]).

2.2 Existence locale et Positivité

2.2.1 Existence locale

On transforme le système (2.2)-(2.3) en une équation différentielle abstraite de premier ordre dans l'espace de Banach $\mathbb{X} = C(\Omega) \times C(\Omega)$, muni de la norme :

$$\| Z \|_{\mathbb{X}} = \| u \|_{C(\Omega)} + \| v \|_{C(\Omega)}, \quad (2.9)$$

Où $Z = (u, v)$ et

$$\| u \|_{C(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |u(x)|, \quad (2.10)$$

de la forme

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = \mathbb{T}Z(t) + F(Z(t)) & t > 0 \\ Z(0) = Z_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

$Z_0 = (u_0, v_0) \in X$, Et

$$Z : \mathbb{R}^+ \longrightarrow X,$$

$$t \longrightarrow Z(t) = (u(t), v(t)),$$

Et

$$\mathbb{T} : D(A) \times D(A) \longrightarrow X,$$

Un opérateur linéaire définit par :

$$\mathbb{T}Z(t) = (d_1 Au(t), d_2 Av(t)),$$

Avec

$$Au = \Delta u \quad \text{sur} \quad D(A),$$

Où

$$D(A) = \left\{ u \in C(\Omega) : \Delta u \in C(\Omega) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \right\}, \quad (2.12)$$

Et

$$F(Z(t)) = (-f(u, v), f(u, v)),$$

Il est clair que la fonction abstraite (vectorielle) F est localement lipschitzienne en Z , et l'opérateur linéaire \mathbb{T} engendre un semi-groupe analytique d'opérateurs linéaires sur X , voir [6]

Théorème 2.2. [2] *Pour toute donnée unitaire $Z_0 \in X$ le problème (2.11) admet une solution locale unique forte définie sur $[0, T_{max}[$*

2.2.2 Positivité

Pour la positivité des solutions du système (2.2)-(2.3), on va utiliser la technique des régions invariantes et du principe du maximum. Toute fois on a besoin des résultats suivants.

Théorème 2.3. [4]

Considérons le système de réaction diffusion suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = g(u, v) \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (2.13)$$

$$f(0, v) \geq 0, \forall v \geq 0 \quad \text{et} \quad g(u, 0) \geq 0, \forall u \geq 0,$$

Alors la région Σ définie par (**Déf 1.15**) est invariante pour ce système

Application au système étudié :

Pour la première équation du système (2.2)-(2.3) , on a :

$$-f(0, v) = 0 \geq 0, \forall v \geq 0.$$

Pour la deuxième :

$$f(u, 0) \geq 0, \forall u \geq 0,$$

Puisque f est par définition positive.

Alors si $u_0(x) \geq 0$ et $v_0(x) \geq 0$ sur Ω , on déduit que $u(t, x) \geq 0$ et $v(t, x) \geq 0$ sur $[0, T_{max}[\times \Omega$.

2.3 Existence globale

Il n'est pas évident de prouver l'existence globale des solutions de (2.2)-(2.3) quand on utilise les méthodes classiques , telles que la méthode des régions invariantes vu la complexité et la difficulté des termes de réaction de certains systèmes de réaction-diffusion.

Pour cela , nous nous consacrons fonctionnelle basée sur la fonctionnelle de "Lyapunov " qui a justifiée des résultats satisfaisants (voir kouachi [9]) .

Pour l'existence globale des solutions du système (2.2)-(2.3) a l'alternative .

Théorème 2.4. -/6/-

Pour toute solution $(u(t,x), v(t,x))$ du problème (2.2)-(2.3) on a :

(i) Soit $\| u(t, \cdot) + v(t, \cdot) \|_{\infty}$ est bornée sur $[0, T_{max}[$ et la solution est globale (i.e $T_{max} = +\infty$)

(ii) Soit $\lim_{t \rightarrow T_{max}} \| u(t, \cdot) + v(t, \cdot) \|_{\infty} = +\infty$ et la solution n'est pas globale ou on dit qu'elle explose en temps fini T_{max} ou bien qu'elle cesse d'exister .

Dans tout ce qui suit on suppose que $u_0 \in L^{\infty}(\Omega)$

Pour la bornitude de u on va utiliser le principe du maximum dont l'une des formes les plus simplifiées est la suivantes :

Théorème 2.5. Si $u(t,x)$ vérifie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u \leq 0 \quad \text{sur } [0, T_{max}[\times \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} \leq 0 \quad \text{sur } [0, T_{max}[\times \Omega,$$

Alors

$$u(t, x) \leq \max_{x \in \Omega} u_0(x),$$

Alors le problème (le plus délicat) qui reste à aborder est la bornitude de v pour laquelle toutes les techniques citées plus haut (**Région Invariante, Principe du Maximum,...** etc) ne marchent pas. Pour cela on va étudier ce problème par la technique basée sur la Fonctionnelle de "Lyapunov ".

Définition 2.1. On appelle fonctionnelle de **Lyapunov** associée à un système de réaction-diffusion formé de m équations, toute fonction :

$$L : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+,$$

$$t \longrightarrow L(t),$$

telle que

$$\frac{\partial L(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot))}{\partial t} \leq 0. \quad (2.14)$$

Pour toute solution $(u_1(t, \cdot), u_2(t, \cdot), \dots, u_m(t, \cdot))$. Selon [2] , il suffit d'estimer uniformément $\| f(u, v) \|_p$ sur $[0, T_{max}[$, pour $p > \frac{n}{2}$.

Le résultat principal suivant , répond dans quelques sens à cette préoccupation .

Théorème 2.6. Soit $(u(t, \cdot), v(t, \cdot))$ solution du problème (2.1)-(2.3) , alors :

$$\text{La fonctionnelle : } \quad t \longrightarrow L(t) = \int_{\Omega} (M - u(t, x))^{-\gamma} \exp(\beta, v(t, x)) dx \quad (2.15)$$

est non croissante sur $[0, T_{max}[$, pour toutes constantes positives β et γ telles que :

$$\beta M < \gamma < \frac{4d_1 d_2}{(d_1 - d_2)}, \quad (2.16)$$

et tout M satisfaisant :

$$\| u_0 \|_{\infty} < M. \quad (2.17)$$

Démonstration. La continuité de la solution $u(t, x)$ et la condition (2.16) argumentent le

fait que la fonctionnelle de **Lyapunov** est bien définie pour tout $t > 0$ et pour des raisons convenables, on peut supposer qu'elle est bien définie pour tout $t \geq 0$

Pour que L soit décroissante, il faut et il suffit qu'elle admette une dérivée négative :

$$\begin{aligned}
L'(t) &= \frac{\partial L(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (M - u)^{-\gamma} e^{\beta v} dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} [(M - u)^{-\gamma} e^{\beta v}] dx \\
&= \int_{\Omega} [-\gamma(-u_t)(M - u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} + \beta(M - u)^{-\gamma} (v_t) e^{\beta v}] dx \\
&= \int_{\Omega} [\gamma(d_1 \Delta u - f)(M - u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} + \beta(d_2 \Delta v + f)(M - u)^{-\gamma} e^{\beta v}] dx \\
&= \int_{\Omega} [\gamma d_1 (M - u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} \Delta u + \beta d_2 (M - u)^{-\gamma} e^{\beta v} \Delta v] dx \\
&\quad + \int_{\Omega} [\beta(M - u)^{-\gamma} - \gamma(M - u)^{-\gamma-1}] \cdot f \cdot e^{\beta v} dx \\
&= I + J.
\end{aligned}$$

Montrons que I et J sont négatives

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Omega} [\gamma d_1 (M - u)^{-\gamma-1} e^{\beta v} \Delta u + \beta d_2 (M - u)^{-\gamma} e^{\beta v} \Delta v] dx. \\
&= - \int_{\Omega} [\nabla(\gamma d_1 ((M - u)^{-\gamma-1}) e^{\beta v}) \nabla u dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} (\gamma d_1 ((M - u)^{-\gamma-1}) e^{\beta v}) d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla(\beta d_2 ((M - u)^{-\gamma}) e^{\beta v}) \nabla v] dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} (\nabla(\beta d_2 ((M - u)^{-\gamma}) e^{\beta v})) d\Gamma.
\end{aligned}$$

On a :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} (\gamma d_1 ((M - u)^{-\gamma-1}) e^{\beta v}) d\Gamma = 0$$

Et

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} (\nabla(\beta d_2 ((M - u)^{-\gamma}) e^{\beta v})) d\Gamma = 0.$$

Donc

$$\stackrel{(1.7)}{=} - \int_{\Omega} [\nabla(\gamma d_1((M-u)^{-\gamma-1})e^{\beta v})\nabla u + \nabla(\beta d_2((M-u)^{-\gamma})e^{\beta v})\nabla v] dx.$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(1.8)}{=} & - \int_{\Omega} [\gamma d_1(\nabla(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v} + (M-u)^{-\gamma-1}\nabla(e^{\beta v})\nabla u) dx \\ & - \int_{\Omega} [\beta d_2(\nabla((M-u)^{-\gamma})e^{\beta v} + (M-u)^{-\gamma}\nabla(e^{\beta v}))\nabla v] dx. \\ = & - \int_{\Omega} [\gamma d_1((-\gamma-1)(-\nabla u))(M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v} + (M-u)^{-\gamma-1}\beta e^{\beta v}(\nabla v)\nabla u] dx \\ & - \int_{\Omega} [\beta d_2((-\gamma)(-\nabla u)(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v} + \beta(M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}(\nabla v))\nabla v] dx \\ = & - \int_{\Omega} [\gamma d_1((\gamma+1)(M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v}|\nabla u|^2 + \beta(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}.\nabla u.\nabla v)] dx \\ & - \int_{\Omega} [\beta d_2(\gamma(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v}.\nabla u.\nabla v + \beta(M-u)^{-\gamma}e^{\beta v}|\nabla v|^2)] dx \\ = & - \int_{\Omega} [\gamma d_1(\gamma+1)|\nabla u|^2 + \beta(M-u)\nabla u\nabla v + \beta\gamma\gamma(M-u)\nabla u\nabla v + \beta^2 d_2(M-u)^2|\nabla v|^2] \\ & (M-u)^{-\gamma-2}e^{\beta v} dx. \end{aligned}$$

$$I = - \int_{\Omega} T(\nabla u, \nabla v)(M-u)^{-\gamma-1}e^{\beta v} dx,$$

Où

$$T(\nabla u, \nabla v) = \gamma d_1(\gamma+1)|\nabla u|^2 + \beta\gamma(d_1+d_2)(M-u)\nabla u.\nabla v + \beta^2 d_2(M-u)^2|\nabla v|^2,$$

T est une forme quadratique en ∇u et ∇v , c-à-d :

$$[T(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2]$$

Pour confirmer que I est négative, nous devons assurer que la forme quadratique T est non négative, ce qui entraîne, compte tenu du théorème (1.1) que tous ces déterminants principaux de sa matrice des coefficients doivent être non négative, c'est à dire :

$det1 \geq 0$ et $det2 \geq 0$ en effet :

$$det1 = d_1\gamma(\gamma + 1) \geq 0$$

Et par suite , on a

$$\begin{aligned} det2 &= \begin{vmatrix} d_1\gamma(\gamma + 1) & \frac{\beta\gamma(d_1 + d_2)(M - u)}{2} \\ \frac{\beta\gamma(d_1 + d_2)(M - u)}{2} & \beta^2 d_2 (M - u)^2 \end{vmatrix} \\ &= d_1\gamma(\gamma + 1)\beta^2 d_2 (M - u)^2 - \frac{\beta^2 \gamma^2 (d_1 + d_2)^2 (M - u)^2}{4}, \\ &= \frac{4(d_1\gamma(\gamma + 1)\beta^2 d_2 (M - u)^2)}{4} - \frac{\beta^2 \gamma^2 (d_1 + d_2)^2 (M - u)^2}{4}, \\ &= \frac{\beta^2 (M - u)^2 (4\gamma d_1 (\gamma + 1) d_2 - \gamma^2 (d_1 + d_2)^2)}{4}, \end{aligned}$$

D'où

$$det 2 \geq 0 \Rightarrow \beta^2 (M - u)^2 (4\gamma d_1 (\gamma + 1) d_2 - \gamma^2 (d_1 + d_2)^2)$$

Ce qui entraine ;

$$\begin{aligned} &4d_1 d_2 \gamma (\gamma + 1) - \gamma^2 (d_1 + d_2)^2 \geq 0, \\ &\Rightarrow 4d_1 d_2 \gamma^2 + 4d_1 d_2 \gamma - \gamma^2 (d_1^2 + d_2^2 + 2d_1 d_2) \geq 0 \\ &\Rightarrow (4d_1 d_2 \gamma^2 + 4d_1 d_2 \gamma - \gamma^2 d_1^2 - \gamma^2 d_2^2 - 2\gamma^2 d_1 d_2) \geq 0 \\ &\Rightarrow (2\gamma^2 d_1 d_2 - \gamma^2 d_1^2 - \gamma^2 d_2^2 + 4d_1 d_2 \gamma) \geq 0 \\ &\Rightarrow -\gamma^2 (-2d_1 d_2 + d_1^2 + d_2^2) + 4d_1 d_2 \gamma \geq 0 \end{aligned}$$

il vient

$$4d_1 d_2 \gamma - \gamma^2 (d_1 - d_2)^2 \geq 0,$$

Ce qui donne :

$$4d_1 d_2 \gamma \geq \gamma^2 (d_1 - d_2)^2$$

$$\Rightarrow \gamma \leq \frac{4d_1d_2(\gamma + 1)}{(d_1 - d_2)^2},$$

Et pour que

$$J = \int_{\Omega} [\beta(M - u)^{-\gamma} - \gamma(M - u)^{-\gamma-1}] \cdot f \cdot e^{\beta v} dx,$$

Soit aussi négative , il faut et il suffit que :

$$\beta(M - u)^{-\gamma} - \gamma(M - u)^{-\gamma-1} \leq 0,$$

$$(M - u)^{-\gamma-1}(\beta(M - u) - \gamma) \leq 0$$

$$\Rightarrow \beta(M - u) - \gamma \leq 0$$

comme

$$\forall u, 0 < u < M$$

Alors

$$(M - u)^{-\gamma-1} > 0$$

Si $\gamma > \beta M$

On a $\beta M - \beta u - \gamma < \gamma - \beta u - \gamma = -\beta u < 0$.

Ainsi , pour tout γ et β positives , telle que :

$$\beta M < \gamma < \frac{4d_1d_2}{(d_1 - d_2)^2},$$

On a $I \leq 0$ et $J \leq 0$. et donc sous les condition(2.15)et(2.16) $L'(t) \leq 0$. □

Corollaire 2.1. Supposons que la fonction $f(r,s)$ est différentiablement continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, non négative , avec $f(0,s)=0$ pour tout $s \geq 0$ et vérifie la condition (2.4), alors :

Toutes solutions de (2.1)-(2.3) avec les données initiales dans la régions Σ , sont globales en

temps et uniformément bornées sur $[0, +\infty[\times \Omega$.

Preuve

Il est visiblement clair que la région Σ est invariante pour le système (2.1)-(2.3) (théoreme(2.4)), ce qui assure une couverture théorique permettant d'étudier l'évolution des solutions positives quelque soit le temps.

Comme la réaction f est continue dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ et $0 < u \leq M$, alors on peut justifier que la limite de (2.4) est uniforme pour tout r dans $[0, M]$ et dans ce cas, on peut choisir une constante α positive telle que :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(1 + f(r, s))}{s} \right] < \alpha < \alpha^*$$

reste uniforme pour r dans $[0, M]$, alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists \beta > 0 : \forall s > 0, \text{ pour } s > \beta,$$

On a :

$$\left| \frac{\ln(1 + f(r, s))}{s} - \alpha \right| \leq \epsilon$$

D'où :

$$\ln(1 + f(r, s)) \leq \alpha.s$$

L'inégalité reste vraie pour $\beta > 0$

$$\ln(1 + f(r, s)) \leq \beta + \alpha.s \Leftrightarrow \ln(1 + f(r, s)) \leq \ln(c) + \alpha.s \ln(e); \ln(c) = \beta$$

$$\Leftrightarrow \ln(1 + f(r, s)) \leq \ln.c.e^{\alpha.s}$$

$$(1 + f(r, s)) \leq ce^{\alpha.s} \quad \text{pour tout } s \geq 0 \quad \text{et tout } r \in [0, M]$$

Conséquence du théorème 2.6

L'estimation utilisées dans ce théorème par le biais de la fonctionnelle de "Lyapunov " , nous permet d'en déduire des résultats importants considérés comme le pierre angulaire de la théorie d'existence globale des solutions des systèmes de réaction-diffusion, auquel on a montré que :

$$L'(t) \leq 0$$

Ce qui signifie que cette fonctionnelle :

$$L(t) \leq cte$$

Et par suite , en vertu de la définition de celle-ci , on déduit le résultat suivant :

$$\int_{\Omega} (M - u)^{-\gamma} e^{\beta v} dx < +\infty$$

$$\Leftrightarrow \|(M - u)^{-\gamma} e^{\beta v}\|_{L^1(\Omega)} < +\infty \quad \forall 0 \leq t \leq T_{max}$$

$$\Leftrightarrow \sup \|(M - u)^{-\gamma} e^{\beta v}\| < +\infty$$

On aboutit au résultat suivant

$$(M - u)^{-\gamma} e^{\beta v} \in L^\infty([0, T_{max}[, L^1(\Omega)) \quad \text{en(2.22)}$$

Maintenant , par une démarche analogue à celle introduisant (2.22), tenant compte du fait que :

$$(M - u)^{-\gamma} \geq M^{-\gamma}$$

On aboutit au résultat suivant :

$$(M - U)^{-\gamma} e^{\beta v} \in L^\infty([0, T_{max}[, L^1(\Omega))$$

$$\Rightarrow M^{-\gamma} e^{\beta v} \in L^\infty([0, T_{max}[, L^1(\Omega)))$$

$$\Rightarrow M^{-\gamma} \int_{\Omega} e^{\beta v} dx < +\infty, \quad \forall 0 \leq t \leq T_{max}$$

$$\Rightarrow e^{\beta v} \in L^\infty([0, T_{max}[, L^1(\Omega)))$$

qui entraine que

$$\int_{\Omega} e^{\beta v} dx < +\infty \quad (2.23)$$

Conséquence du corollaire 2.1

Ici , aussi , une autre estimation utilisée par le biais de la condition (2.4) qui découle immédiatement du fait que pour tout $s \geq 0$ et pour tout $r \in [0, M]$ on a

$$(1 + f(r, s)) \geq ce^{\alpha.s}$$

D'où

$$f(r, s) \leq ce^{\alpha.s}$$

Par suite

$$f(u, v) \leq ce^{\alpha.v} \quad (2.24)$$

De plus

$$\alpha < \frac{8d_1d_2}{n \| u_0 \|_\infty (d_1 - d_2)^2}$$

D'où

$$\frac{n}{2}\alpha < \frac{4d_1d_2}{\| u_0 \|_\infty (d_1 - d_2)^2}$$

On peut choisir pour $p > \frac{n}{2}$, tel que :

$$p\alpha < \frac{4d_1d_2}{\|u_0\|_\infty (d_1 - d_2)^2}$$

et posons $\beta = p\alpha$, d'où

$$\beta \|u_0\|_\infty < \frac{4d_1d_2}{(d_1 - d_2)^2}$$

Alors nous pouvons choisir γ et M tel que (2.2)-(2.3) soient satisfaites et utilisons les conséquences du théorème (2.2) et du corollaire (2.1), nous déduisons que :

$$e^{\beta v} = e^{(p\alpha)v} = e$$

$$e^{\beta v} = e^{(p\alpha)v} = (e^{\alpha v})^p \in L^\infty([0, T^*[, L^1(\Omega))$$

Par conséquent

$$e^{\beta v} \in L^\infty([0, T^*[, L^1(\Omega))$$

et de (2.24), nous obtenons :

$$f(u, v) \in L^\infty([0, T^*[, L^p(\Omega)) \quad p > \frac{n}{2}$$

Par les remarques préliminaires, nous pouvons conclure que la solution de (2.1)-(2.3) est globale en temps et uniformément bornée sur $\mathbb{R}^+ \times \Omega$, et ainsi la démonstration du corollaire se trouve achevée.

Existence globale d'un système de réaction-diffusion avec contrôle de masse

3.1 Dissipation ou contrôle de masse, structure $(P) + (M)$

Considérons le système élémentaire d'équations différentielles ordinaires (ODE) où

$h : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ est une fonction régulière donnée et $u, v : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions inconnues :

$$(E) \quad \begin{cases} d_t u = -uh(v) \\ d_t v = uh(v) \\ u(0) = u_0 \geq 0, v(0) = v_0 \geq 0. \end{cases}$$

Il est classique qu'une solution locale existe et puisse être étendue sur un intervalle maximal $[0, T_{max})$.

Si nous supposons, $h(0) \geq 0$, cette solution est positive.

De plus, l'addition des deux équations et l'intégration sur $[0, T]$ donne :

$$\int_0^t (d_s u + d_s v) ds = 0.$$

Alors :

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) + v(t) = u_0 + v_0.$$

Avec la non négativité, cela implique que $u(t), v(t)$ restent uniformément bornées sur $[0, T_{max})$.

Il s'ensuit que $T_{max} = +\infty$ et que la solution est globale en temps.

Maintenant, **que se passe-t-il lorsque la diffusion spatiale se produit ?**

Considérons par exemple le système d'équations de réaction-diffusion, suivant : $u = u(t, x)$,
 $v = v(t, x), (t, x) \in [0, \infty) \times \Omega$ Sont les fonctions inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - d_1 \Delta u = -uh(v) & \text{on } (0, \infty) \times \Omega \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = uh(v) & \text{on } (0, \infty) \times \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \geq 0, v(0, \cdot) = v_0(\cdot) \geq 0 & \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } (0, \infty) \times \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Ici, $d_1, d_2 > 0, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert, borné et régulier et h est comme en avant.

Comme pour l'ODE, si $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$, l'existence locale d'une solution classique non négative est vérifiée, et la solution peut être étendue sur un intervalle maximal $[0, T_{max})$ (voir chapitre 2). Si la solution $(u(t), v(t))$ est uniformément bornées sur $[0, T_{max})$, alors $T_{max} = +\infty$.

Si $d_1 = d_2 = d$, en rassemblant les deux équation de (3.1) on obtient :

$$\partial_t(u + v) - d\Delta(u + v) = 0. \quad (3.2)$$

En particulier, on en déduit par principe du maximum avec la condition au limite de Newman que :

$$\|u(t) + v(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0 + v_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Avec la non négativité, cela implique que $u(t)$ et $v(t)$ restent uniformément bornées dans $L^\infty(\Omega)$ et donc $T_{max} = +\infty$. Ainsi, la situation est la même que celle de l'O.D.E.

QUESTION : Que se passe-t-il lorsque $d_1 \neq d_2$? Il est connu que différentes diffusions peuvent entraîner la perte des propriétés de stabilité des solutions . Mais, différentes diffusions peuvent détruire l'existence globale ?

Nous verrons plus loin que la situation est alors bien différente. Cependant, comme pour l'O.D.E., on peut rassembler les deux équations :

$$\partial_t(u + v) - \Delta(d_1u + d_2v) = 0.$$

En intégrant par rapport à t et x . En tenant compte les conditions aux limites, on obtient :

$$\int_0^t \int_\Omega \frac{\partial(u + v)}{\partial s} dx ds - \int_0^t \int_\Omega \Delta(d_1u + d_2v) dx ds = 0 \quad (3.4)$$

D'après la formule de Green on a :

$$- \int_\Omega (\Delta(d_1u + d_2v)) dx = \int_\Omega \nabla(d_1u + d_2v) \cdot \nabla 1 - \int_\Gamma \frac{\partial(u + v)}{\partial n} \cdot 1 d\gamma$$

$$- \int_\Omega \Delta(d_1u + d_2v) dx = \int_\Omega \nabla(d_1u + d_2v) \cdot \nabla(1) dx$$

Est comme :

$$\nabla(1) = 0$$

Alors :

$$- \int_{\Omega} \Delta(d_1 u + d_2 v) dx = 0$$

Alors (3.4) entraîne :

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial(d_1 u + d_2 v)}{\partial s} dx ds &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} [d_1 u + d_2 v]_0^t dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} [(d_1 u + d_2 v)(t, x) - (u_0 + v_0)(x)] dx &= 0 \\ \Rightarrow \int_{\Omega} (d_1 u(t, x) + d_2 v(t, x)) dx &= \int_{\Omega} (u_0 + v_0) dx. \end{aligned}$$

Encore une fois, avec la non négativité de u, v , cela implique que

$$\forall t \in [0, T_{max}), \quad \|u(t)\|_{L^1(\Omega)}, \|v(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^1(\Omega)} + \|v_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

En d'autres termes, la masse totale des deux composantes de la solution n'explose pas, et $u(t), v(t)$ restent bornées dans $L^1(\Omega)$ *uniformément par rapport au temps*. d'une autre façon on pose la question de l'existence globale suivant :

QUESTION : comment les L^1 -estimations sur la solution, qui sont uniformes en temps, contribuent-elles à prouver une existence globale ?

En revenant à la première équation du système (3.1), et en intégrant dans l'espace et dans

le temps, on obtient, où $Q_T = (0, T) \times \Omega$:

$$\int_{Q_T} uh(v) \leq \int_{\Omega} u_0$$

Ceci implique que *la non-linéarité de (3.1) est a priori bornée dans $L^1(Q_T)$* . D'où une autre question naturelle et intéressante :

QUESTION : Que peut-on dire d'un système de réaction-diffusion dont les termes réactions non linéaires sont bornés dans $L^1(Q_T)$?

Nous répondrons à toutes les questions ci-dessus dans ce chapitre. Plus généralement, nous citons la plupart des principaux résultats sur l'existence globale dans le temps pour une famille de $m \times m$ systèmes de réaction-diffusion vérifiant les deux principales propriétés suivantes :

- la non négativité des solutions .
- la masse totale des composantes est a priori bornée sur tout intervalle fini.

Plus précisément, introduisons le système général

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, m \\ \partial_t u_i - d_i \Delta u_i = f_i(u_1, \dots, u_m) \text{ on } (0, T) \times \Omega, \\ \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial n} + (1 - \alpha_i) u_i = \beta_i \text{ on } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u_i(0, \cdot) = u_{i_0}, \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où les $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^1 de $u = (u_1, \dots, u_m)$, et pour tout $i = 1 \dots m$, $d_i \in (0, \infty)$, $\alpha_i \in [0, 1]$, $\beta_i \in C^2([0, T] \times \bar{\Omega})$, $\beta_i \geq 0$. On note $\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega$.

On signifie par une solution classique de (3.4) sur $[0, T)$ l'existence de :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C([0, T); L^1(\Omega)^m) \cap L^\infty([0, T - \tau] \times \Omega)^m, \forall \tau \in (0, T), \\ \forall k, l = 1 \dots N, \forall p \in [1, \infty), \partial_t u, \partial_{x_k} u, \partial_{x_k x_l} u \in L^p((\tau, T - \tau) \times \Omega)^m, \\ \text{et les équations de (3.4) sont satisfaites.} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

La plupart du temps, et à partir de la régularité de f , les solutions seront suffisamment régulières pour que les dérivées puissent être comprises dans le sens usuel.

Rappelons d'abord le résultat d'existence locale classique sous les hypothèses ci-dessus :

Lemme 3.1.

Supposons que $u_0 \in (L^\infty(\Omega))^m$. Alors, il existe $T > 0$ et une unique solution classique de (3.4) sur $[0, T)$. Si T_{max} désigne le maximum des T , alors

$$\left[\sup_{t \in [0, T_{max}), 1 \leq i \leq m} \|u_i(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \right] \Rightarrow [T_{max} = +\infty]. \quad (3.6)$$

Si, de plus, la non-linéarité $(f_i)_{1 \leq i \leq m}$ est **quasi-positive** (voir (3.7) ci-dessous), alors

$$[\forall i = 1, \dots, m, u_{i0} \geq 0] \Rightarrow [\forall i = 1, \dots, m, \forall t \in [0, T_{max}), u_i(t) \geq 0].$$

La non-négativité des solutions est préservée si et seulement si la non-linéarité

$f = (f_1, \dots, f_m)$ est *quasi-positive* ce qui signifie que

$$(P) \forall r \in [0, +\infty)^m, \forall i = 1 \dots m, \quad f_i(r_1, \dots, r_{i-1}, 0, r_{i+1}, \dots, r_m) \geq 0, \quad (3.7)$$

où nous notons $r = (r_1, \dots, r_m)$. Cela sera supposé pour toutes les non-linéarités dans ce

chapitre.

Remarque 3.1. *D'après (3.6), une L^∞ bornitude de la solution impliquent une existence globale. Comme déjà remarqué en (3.2), (3.3), c'est le cas si tous les d_i sont égaux, et l'existence globale est alors vérifiée pour des données initiales bornées. La situation est bien plus compliquée si les coefficients de diffusion sont différents les uns des autres et cela sera analysé dans la suite*

Sans hypothèse supplémentaire sur f , les explosions se produisent généralement en un temps fini ($T_{max} < +\infty$). Ici, nous supposons que f satisfait une "structure de contrôle de masse"

$$(M) \forall r \in [0, +\infty)^m, \sum_{1 \leq i \leq m} f_i(r) \leq C \left[1 + \sum_{1 \leq i \leq m} r_i \right]. \quad (3.8)$$

Notez que ceci était satisfait dans l'exemple (3.1) avec $C = 0$ et même avec l'égalité au lieu de l'inégalité. Avec des conditions aux limites "correctes", (3.8) implique que *la masse totale de la solution est bornée sur chaque intervalle*. En effet, posons $W = \sum_{1 \leq i \leq m} u_i$. L'intégration et la somme de m équations de (3.4) donne :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\Omega} w(t) dx - \int_{\Omega} \sum_i d_i \Delta u_i dx &= \int_{\Omega} \sum_i f(u_i) dx \\ &\leq C \left[1 + \sum_i u_i \right] \\ &\leq C [1 + w(t)] \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green (1.6) sur la deuxième terme du premier membre de l'inégalité ci-dessus on obtient :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sum_i d_i \Delta u_i dx &= -d_i \sum_i \int_{\Omega} \Delta u_i \cdot 1 \\ &= d_i \sum_i \left[\int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla 1 - \int_{\partial\Omega} \nabla u_i \cdot \vec{n} \partial\Gamma \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_i d_i \int_{\partial\Omega} \nabla u_i \cdot \vec{n} \, \partial\Gamma \\
 &= - \int_{\partial\Omega} \sum_i d_i \nabla u_i \cdot \vec{n} \, \partial\Gamma
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\partial_t \int_{\Omega} W(t) - \int_{\partial\Omega} \sum_i d_i \nabla u_i \cdot \vec{n} \, \partial\Gamma \leq C \int_{\Omega} [1 + W(t)].$$

Supposons par exemple que : $\forall i, \alpha_i \in (0, 1]$. Ensuite, en utilisant les conditions aux limites

D'après (3.4) on a :

$$\begin{aligned}
 -\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial n} &= (1 - \alpha_i) u_i - \beta_i \text{ on } (0, T) \times \partial\Omega, \\
 -\frac{\partial u_i}{\partial n} &= \frac{(1 - \alpha_i) u_i - \beta_i}{\alpha_i}
 \end{aligned}$$

Alors :

$$- \int_{\partial\Omega} \sum_i d_i \nabla u_i \cdot \vec{n} \, \partial\Gamma = \int_{\partial\Omega} \sum_i d_i \frac{(1 - \alpha_i) u_i - \beta_i}{\alpha_i} \, \partial\Gamma$$

et

$$\int_{\partial\Omega} \sum_i d_i \frac{(1 - \alpha_i) u_i - \beta_i}{\alpha_i} \geq - \int_{\partial\Omega} \sum_i \frac{d_i \beta_i}{\alpha_i}$$

on pose :

$$- \int_{\partial\Omega} \sum_i \frac{d_i \beta_i}{\alpha_i} = -c$$

Alors

$$- \int_{\partial\Omega} \sum_i d_i \nabla u_i \cdot \vec{n} \, \partial\Gamma \leq c$$

On a donc l'inégalité de Gronwall

$$\begin{aligned}
 \partial_t \int_{\Omega} W(t, x) dx &\leq \int_{\partial\Omega} \sum_i d_i \nabla u_i \cdot \vec{n} \, \partial\Gamma + C \int_{\Omega} [1 + w(t, x)] dx. \\
 &\leq c + C \int_{\Omega} [1 + w(t, x)] dt.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_t \int_{\Omega} w(t, x) dx &\leq c + C \int_{\Omega} 1 dx + c \int_{\Omega} w(t, x) dx \\ &\leq c + C\lambda(\Omega) + C \int_{\Omega} w(t, x) dx \end{aligned}$$

On Appliquant le lemme de Gronelle(1.4), on pose ;

$$\eta(t) = \int_{\Omega} w(t, x) dx, \psi(t) = c + C\lambda(\Omega), \phi(t) = C$$

alors ;

$$\begin{aligned} \eta'(t) &\leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t) \\ \Rightarrow \eta(t) &\leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] \\ \int_{\Omega} w(t, x) dx &\leq e^{\int_0^t C ds} \left[\int_{\Omega} w(0) dx + \int_0^t [c + \lambda\Omega] ds \right] \\ &\leq e^{Ct} \left[\int_{\Omega} w(0) dx + \int_0^t [c + \lambda(\Omega)] ds \right] \\ &\leq e^{Ct} \int_{\Omega} w(0) dx + e^{Ct} \cdot Ct \cdot \frac{c + \lambda(\Omega)}{C} \end{aligned}$$

Ce qui implique que, pour chaque t dans l'intervalle d'existence

$$\int_{\Omega} W(t) \leq e^{tC} \int_{\Omega} W(0) + k (tce^{tC}), k = \left(c + \int_{\Omega} C \right) / C. \quad (3.9)$$

Il s'ensuit que la masse totale $\int_{\Omega} W(t)$ est bornée sur tout intervalle $[0, T)$.

D'où la question : comment cette L^1 estimation aide à prouver une existence globale ?

Au lieu de (M), nous pourrions supposer que, pour certains $a = (a_i)_{1 \leq i \leq m}$ avec $\forall i, a_i > 0$

$$(M') \forall r \in [0, +\infty)^m, \sum_{1 \leq i \leq m} a_i f_i(r) \leq C \left[1 + \sum_{1 \leq i \leq m} r_i \right]. \quad (3.10)$$

Évidemment, (\mathbf{M}') peut être réduit à (\mathbf{M}) , après avoir multiplié chaque i -ième équation de (3.4) par a_i et après avoir remplacé u_i par $a_i u_i$. Pour simplifier, nous utiliserons principalement (\mathbf{M}) dans la suite, bien que des exemples puissent survenir avec (\mathbf{M}') . Comme indiqué ci-dessus lorsque $\alpha_i > 0$ pour tout i , les conditions $(\mathbf{P})+(\mathbf{M})$ [i.e. (3.7) +(3.8)] impliquent pour la plupart des conditions aux limites que la masse totale est contrôlée. Cependant, il faut faire attention : si $\alpha_i = 0, \beta_i \neq 0$ pour certains i et $\alpha_i > 0$ pour d'autres, alors, les L^1 - estimations peuvent échouer . Ceci explique pourquoi nous restreindrons généralement les valeurs de α_i, β_i . Beaucoup de systèmes viennent naturellement avec les deux propriétés (\mathbf{P}) et (\mathbf{M}) (ou (\mathbf{M}')) dans les applications. L'objet de la section suivante est de donner quelques exemples de ce genre. Il convient donc de se poser la question de l'existence globale dans le temps avec ces deux seules propriétés. Nous considérerons également des systèmes, où non seulement la masse totale est bornée dans L^Ω sur tout intervalle, mais aussi les non-linéarités sont bornées dans $L^1(Q_T)$ pour tout $T < +\infty$.

3.2 Quelques exemples de systèmes de réaction-diffusion avec des propriétés $(\mathbf{P}) + (\mathbf{M})$

Nous donnons ici quelques exemples de systèmes de réaction-diffusion trouvés dans la littérature comme modèles pour des applications très différentes et pour lesquels les deux propriétés $(\mathbf{P}) + (\mathbf{M})$ sont vérifiées.

- **Le Bruxellois.** Commençons par le model classique dit "Bruxellois" apparaissant dans

la modélisation *des processus chimiques morphogénétiques* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - d_1 \Delta u = -uv^2 + bv \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = uv^2 - (b+1)v + a \\ u|_{\partial\Omega} = b/a, v|_{\partial\Omega} = a \\ a, b, d_1, d_2 > 0. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Si nous dénotons

$$f(u, v) = -uv^2 + bv, \quad g(u, v) = uv^2 - (b+1)v + a$$

alors pour tous $u, v \geq 0$,

$$f(0, v) = bv \geq 0, g(u, 0) = a \geq 0, f(u, v) + g(u, v) \leq a$$

de sorte que **(P)** + **(M)** soit vérifié. L'existence globale de solutions classiques peut être prouvée en petite dimension en utilisant des arguments d'amorçage. [7]

Des systèmes très similaires sont également utilisés dans *les modèles de glycolyse* ou dans *les modèles dits de Gray-Scott* .

- **Un modèle quadratique.** Un modèle pour la dynamique diffusive du calcium avec des termes quadratique .

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_1 = d_1 \Delta u_1 + \lambda (\gamma_0 + \gamma_1 u_4) (1 - u_1) - \frac{p_1 u_1^4}{p_2^4 + u_1^4} \\ \partial_t u_2 - d_2 \Delta u_2 = -k_1 u_2 + k'_1 u_3 \\ \partial_t u_3 - d_3 \Delta u_3 = -k'_1 u_3 - k_2 u_1 u_3 + k_1 u_2 + k'_2 u_4 \\ \partial_t u_4 - d_4 \Delta u_4 = k_2 u_1 u_3 + k'_3 u_5 - k'_2 u_4 - k_3 u_1 u_4 \\ \partial_t u_5 - d_5 \Delta u_5 = k_3 u_1 u_4 - k'_3 u_5. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

- **Diffusion de polluants dans l'atmosphère.** Un autre exemple intéressant provient de la modélisation des transferts de polluants dans l'atmosphère (ici $N = 3$) ce système de 20 équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \phi_i = d_i \partial_{zz}^2 \phi_i + \omega \cdot \nabla \phi + f_i(\phi) + g_i, \forall i = 1 \dots 20 \\ + \text{conditions aux bord et des conditions initiales} \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Ici les non-linéarités f_i sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l}
 f_1(\phi) = -k_1\phi_1 + k_{22}\phi_{19} + k_{25}\phi_{20} + k_{11}\phi_{13} + k_9\phi_{11}\phi_2 + k_3\phi_5\phi_2 \\
 \quad + k_2\phi_2\phi_4 - k_{23}\phi_1\phi_4 - k_{14}\phi_1\phi_6 + k_{12}\phi_{10}\phi_2 - k_{10}\phi_{11}\phi_1 - k_{24}\phi_{19}\phi_1 \\
 f_2(\phi) = k_1\phi_1 + k_{21}\phi_{19} - k_9\phi_{11}\phi_2 - k_3\phi_5\phi_2 - k_2\phi_2\phi_4 - k_{12}\phi_{10}\phi_2 \\
 f_3(\phi) = k_1\phi_1 + k_{17}\phi_4 + k_{19}\phi_{16} + k_{22}\phi_{19} - k_{15}\phi_3 \\
 f_4(\phi) = -k_{17}\phi_4 + k_{15}\phi_3 - k_{16}\phi_4 - k_2\phi_2\phi_4 - k_{23}\phi_1\phi_4 \\
 f_5(\phi) = 2k_4\phi_7 + k_7\phi_9 + k_{13}\phi_{14} + k_6\phi_7\phi_6 - k_3\phi_5\phi_2 + k_{20}\phi_{17}\phi_6 \\
 f_6(\phi) = 2k_{18}\phi_{16} - k_8\phi_9\phi_6 - k_6\phi_7\phi_6 + k_3\phi_5\phi_2 - k_{20}\phi_{17}\phi_6 - k_{14}\phi_1\phi_6 \\
 f_7(\phi) = -k_4\phi_7 - k_5\phi_7 + k_{13}\phi_{14} - k_6\phi_7\phi_6 \\
 f_8(\phi) = k_4\phi_7 + k_5\phi_7 + k_7\phi_9 + k_6\phi_7\phi_6 \\
 f_9(\phi) = -k_7\phi_9 - k_8\phi_9\phi_6 \\
 f_{10}(\phi) = k_7\phi_9 + k_9\phi_{11}\phi_2 - k_{12}\phi_{10}\phi_2 \\
 f_{11}(\phi) = k_{11}\phi_{13} - k_9\phi_{11}\phi_2 + k_8\phi_9\phi_6 - k_{10}\phi_{11}\phi_1 \\
 f_{12}(\phi) = k_9\phi_{11}\phi_2 \\
 f_{13}(\phi) = -k_{11}\phi_{13} + k_{10}\phi_{11}\phi_1 \\
 f_{14}(\phi) = -k_{13}\phi_{14} + k_{12}\phi_{10}\phi_2 \\
 f_{15}(\phi) = k_{14}\phi_1\phi_6 \\
 f_{16}(\phi) = -k_{19}\phi_{16} - k_{18}\phi_{16} + k_{16}\phi_4 \\
 f_{17}(\phi) = -k_{20}\phi_{17}\phi_6 \\
 f_{18}(\phi) = k_{20}\phi_{17}\phi_6 \\
 f_{19}(\phi) = -k_{21}\phi_{19} - k_{22}\phi_{19} + k_{25}\phi_{20} + k_{23}\phi_1\phi_4 - k_{24}\phi_{19}\phi_1 \\
 f_{20}(\phi) = -k_{25}\phi_{20} + k_{24}\phi_{19}\phi_1
 \end{array} \right. \quad (3.14)$$

où les k_i sont des nombres réels positifs. Ces non-linéarités peuvent sembler compliquées, mais elles sont quadratiques et satisfont évidemment **(P)** + **(M)**. La principale nouveauté de ce système est que la diffusion ne se produit que dans le sens vertical. En conséquence, de nombreux outils, qui reposent sur les effets régularisants de la diffusion, doivent être revisités. Même le terme de transport peut poser de nouvelles difficultés dues à l'absence de diffusion dans les deux sens.

3.3 Existence de solutions classiques globales

3.3.1 Un résultat typique sur les systèmes 2×2

Considérons le système 2×2 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - d_1 \Delta u = f(u, v) \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = g(u, v) \\ u(0, \cdot) = u_0(\cdot) \geq 0, v(0, \cdot) = v_0(\cdot) \geq 0, \\ \text{soit } \frac{\partial v}{\partial n} = \beta_1, \frac{\partial v}{\partial n} = \beta_2 \text{ on } (0, +\infty) \times \theta\Omega, \\ \text{ou : } u = \beta_1, v = \beta_2 \text{ on } (0, +\infty) \times \partial\Omega, \end{array} \right. \quad (3.15)$$

où $d_1, d_2 \in (0, +\infty), \beta_1, \beta_2 \in [0, +\infty)$ et $f, g : [0, +\infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 .

Pour $u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$ avec $u_0, v_0 \geq 0$, l'existence de solutions bornées non négatives classiques est assurée sur un intervalle maximal $[0, T_{max})$ (voir Lemme 3.1). Alors, nous avons le premier résultat d'existence global suivant :

Théorème 3.1. [7]

Supposons que (P)+(M) soit vérifié pour (3.15) (voir (3.7), (3.8)). Supposons de plus que

$u_0, v_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_D, v_0 \geq 0$ et, pour certains $U, C \geq 0$

$$\forall u \geq U, \forall v \geq 0, f(u, v) \leq C[1 + u + v], \quad (3.16)$$

$$\exists r \geq 1; \quad \forall u, v \geq 0, |g(u, v)| \leq C[1 + u^r + v^r]. \quad (3.17)$$

Alors, $T_{max} = +\infty$.

Commentaires : La condition (3.17) signifie que la croissance de $g(u, v)$ pour $u, v \rightarrow +\infty$ est au plus polynomiale. La première condition (3.16) signifie que la première équation est "bonne". Un cas typique est par exemple lorsque $f \leq 0$ auquel cas u est uniformément borné sur le temps d'existence par le principe du maximum. C'est plus généralement le cas lorsque $f \leq C(1 + u)$. En fait, dans l'énoncé du théorème 3.1, on peut remplacer (3.16) par la connaissance a priori que u est uniformément bornée, quelle que soit la raison de ce bornage. Dans ce cas, la deuxième condition (3.17) peut être remplacée par la condition de wezker $g(u, v) \leq \varphi(u)(1 + v^r)$ où $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est non décroissante. L'idée générale de ce théorème est que, pour les systèmes de structure **(P)** + **(M)**, si de plus l'un de u ou v est uniformément bornée sur $[0, T_{max})$, alors, l'autre aussi; d'où l'existence globale.

Avant de donner l'idée principale de la preuve de ce théorème, appliquons-la à certains des exemples précédents.

peruve du théorème (3.1)

La démonstration de ce théorème (3.1), ce basse sur le lemme suivant :

Lemme 3.2. *Soient w, z des fonctions régulières (au sens de (1.5)), Satisfaisant*

$$\partial_t \omega - d_1 \Delta \omega = \partial_t z - d_2 \Delta z \text{ ou } QT. \quad (3.18)$$

avec les mêmes conditions aux limites constantes de Neumann ou de Dirichlet pour ω z et avec des données initiales bornées. Ensuite, pour tout $1 \leq p \leq +\infty$ Il existe $C_1 C_2$ telle que, pour tout $t \in [0.T]$

$$C_1 \|\omega\|_{L^p Q(t)} \leq \|z\|_{L^p Q(t)} + 1 \leq C_2 [\|\omega\|_{L^p Q(t)} + 1].$$

Plus généralement, si (3.22) est remplacé par

$$\partial_t \omega - d_1 \Delta \omega + \Theta_1 \omega \leq \Theta_2 \partial_t z + \Theta_3 \Delta z + \Theta_4 z + H \text{ sur } QT.$$

où $\Theta_i \in \mathbb{R}$ et $H \in L^p(QT), H \geq 0$ alors il existe C_1 tel que, pour tout $t \in [0.T]$

$$C_1 \|w^+\|_{L^p Q_t} \leq \|z\|_{L^p Q_t} + 1 + \int_0^t \|H(s)\| ds \quad (3.19)$$

Ce lemme est une conséquence du L^p théorie de la régularité pour les opérateurs paraboliques .

En effet, très grossièrement, on peut réécrire (3.22) comme si $\omega = A_{d_1}^{-1} A_{d_2} z$ Ou $A_{d_i} = \partial_t - d_i \Delta$.

Ainsi, la question est la continuité de l'opérateur $A_{d_1}^{-1} A_{d_2}$ de $L^p(QT)$ en soi.

En réduisant à la limite zero et aux données initiales, l'opérateur est linéaire et la question équivaut à la continuité de l'opérateur dual de la double espace $L^q(QT)$, $q=p/(p-1)$

En soi Cette continuité vaut pour $P \in]0. + \infty[$ selon le L^q théorie de la régularité.

3.3.2 Application

Application 1 : Commençons par le tout premier exemple donné en précédement :

$$\begin{cases} \partial_t u - d_1 \Delta u = -uh(v) \\ \partial_t v - d_2 \Delta v = uh(v), \end{cases} \quad (3.20)$$

avec $h \geq 0$ et des conditions aux limites de Neumann homogènes. Alors, (3.16) est vérifiée

Pour $C = 0$. Par principe du maximum on a

$$\forall t \in [0, T_{max}), \quad \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Maintenant, il n'est pas évident que v soit borné. Le théorème 3.1 affirme que c'est le cas si de plus h croît au plus comme un polynôme tel que $v \rightarrow +\infty$.

Application 2 : Le système de Brusselator dans (3.11). D'après le théorème 3.1, il existe une existence globale de solutions classiques pour ce système en toute dimension (cela a été prouvé dans Michell pierr[7])

Application 3 : Considérons la famille de systèmes qui sont des modèles 2×2 typiques pour notre propos : nous choisissons les non-linéarités

$$f(u, v) = k_1 u^p v^q - k_2 u^\alpha v^\beta, g(u, v) = k_3 u^\alpha v^\beta - k_4 u^p v^q, \quad (3.21)$$

avec $k_1 > 0, p, q, \alpha, \beta \geq 1$.

Alors, (M') est vérifié si $k_1 k_3 \leq k_2 k_4$.

En effet, pour $k \in [k_1 k_4^{-1}, k_2 k_3^{-1}]$

On a :

$$\begin{aligned} (f + kg)(u, v) &= (k_1 u^p v^q - k_2 u^\alpha v^\beta) + k(k_3 u^\alpha v^\beta - k_4 u^p v^q) \\ &= (k_1 u^p v^q - k_2 u^\alpha v^\beta) + k k_3 u^\alpha v^\beta - k k_4 u^p v^q \\ &\leq (k_1 u^p v^q - k_2 u^\alpha v^\beta) + \frac{k_2}{k_3} k_3 u^\alpha v^\beta - k k_4 u^p v^q \\ &\leq k_1 u^p v^q - k_2 u^\alpha v^\beta + k_2 u^\alpha v^\beta - \frac{k_1}{k_4} k_4 u^p v^q \\ &\leq k_1 u^p v^q - k_2 u^\alpha v^\beta + k_2 u^\alpha v^\beta - k_1 u^p v^q \leq 0 \end{aligned}$$

Alors :

$$[k_1 k_3 \leq k_2 k_4] \Rightarrow [\forall k \in [k_1 k_4^{-1}, k_2 k_3^{-1}] f + kg \leq 0] \Leftrightarrow (\mathbf{M}')$$

Supposons que cette dernière condition est vérifiée. Alors l'existence globale d'une solution est assurée D'après le théorème (3-1) Si : .

$$\left\{ \begin{array}{l} [\beta > q \text{ et } \beta p - \alpha q \leq \beta - q] \text{ ou } [\beta = q \text{ et } p < \alpha] \\ \text{Ou } [p > \alpha \text{ et } \beta p - \alpha q \leq p - \alpha] \text{ ou } [p = \alpha \text{ et } \beta < q]. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

En effet, supposons par exemple que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta > q, \text{ et } \beta p - \alpha q \leq \beta - q \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Dans ce cas on peut écrire :

$$f(u, v) = k_2 u^p v^q \left[\frac{k_1}{k_2} - u^{\alpha-p} v^{\beta-q} \right].$$

Sur l'ensemble :

$$\{(u, v) \in (0, \infty)^2; u^{\alpha-p} v^{\beta-q} \geq k_1/k_2\}$$

ona :

$$f \leq 0$$

Sur le complément K de cet ensemble, on écrit :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in K u^{p-1} v^q &= [u^{\alpha-p} v^{\beta-q}]^{\frac{q}{\beta-q}} u^{(p-1) - \frac{(\alpha-p)q}{\beta-q}} \\ &\leq \left[\frac{k_1}{k_2} \right]^{\frac{q}{\beta-q}} u^{\frac{\beta p(-\beta-pq+q) - \alpha q + pq}{\beta-q}}. \end{aligned}$$

$$\leq \left[\frac{k_1}{k_2} \right]^{\frac{q}{\beta-q}} u^{\frac{\beta p - \alpha q}{\beta - q}}. \quad (*)$$

D'après l'hypothèse(*) :

$$\frac{\beta p - \alpha q}{\beta - q} \leq 1$$

Alors la puissance de u est négative dans le dernier terme ci-dessus : il s'ensuit que :

$$\forall (u, v) \in K \text{ avec } u \geq 1 \quad f(u, v) = k_2 u^p v^q [k_1 k_2^{-1}] - u^{\alpha-p} v^{\beta-q}$$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= k_2 \cdot \frac{k_1}{k_2} u^p v^q - k_2 u^{\alpha-p} v^{\beta-q} \\ &\leq k_1 u^p v^q \end{aligned}$$

puisque

$$k_2 u^{\alpha-p} v^{\beta-q} \geq 0.$$

$$\text{On obtient } f(u, v) \leq k_1 u (u^{p-1} v^q) \Rightarrow f(u, v) \leq \left[\frac{k_1}{k_2} \right]^{\frac{q}{\beta-q}} u^{\frac{\beta p - \alpha q}{\beta - q}}$$

et comme $u \geq 1$ et sa puissance

$$\frac{\beta p - \alpha q}{\beta - q} \leq 0$$

$$\text{alors, } u^{\frac{\beta p - \alpha q}{\beta - q}} \leq 1$$

$$\text{ce qui implique } f(u, v) \leq k_1 u \left[\frac{k_1}{k_2} \right]^{\frac{q}{\beta-q}} = C \cdot u \leq c(1 + u + v)$$

et donc la condition du théorème (3.1) est vérifiée

Ainsi, (3.16) se satisfait pour $U = 1$ et C comme défini juste au-dessus. Supposons maintenant

$\beta = q, p < \alpha$. Alors, on écrit

$$f(u, v) = k_2 u^p v^q \left[\frac{k_1}{k_2} - u^{\alpha-p} \right],$$

Il est évident que $f \leq 0$ pour $u \geq U = [k_1 k_2^{-1}]^{(\alpha-p)^{-1}}$. La deuxième ligne de 3.22) est exactement la même condition que dans la première ligne lorsque nous échangeons les rôles de u et v .

3.4 Extension aux systèmes $m \times m$

La démarche précédent a été étendue pour des systèmes $m \times m$ à structure ditetriangulaire, ce qui signifie essentiellement que $f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3, \dots$ sont tous bornées Supérieurement par une fonction linéaire des u_i . Nous pouvons enoncer les résultat suivant :

Théorème 3.2. -[7]-

Soit $f \in C^1$ avec au plus croissance polynomiale et satisfiant sont la quasi-positivité (P). Supposons de plus qu'il existe $C \geq 0, b \in \mathbb{R}$ et une matrice p triangulaire inférieure inversible $m \times m$ avec des entrées non négatives telles que

$$\forall r \in [0, \infty)^m, pf(r) \leq [1 + \sum_{1 \leq i \leq m} r_i]b$$

où l'ordre habituel dans \mathbb{R}^m est utilisé. Ensuite, le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, m \\ \partial_t u_i - di \Delta u_i = f_i(u_1, \dots, u_m) \text{ ou } (0, T) \times \Omega. \\ \forall i, \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \beta_i \geq 0 \text{ (ou } \forall i, u_i = \beta_i \geq 0) \text{ ou } (0, T) \times \partial \Omega \\ u_i(0, \cdot) = u_{i_0} \in L^\infty(\Omega), u_{i_0} \geq 0. \end{array} \right.$$

admet une solution globale.

Bibliographie

- [1] A.Haraux and A .youkan, ON A RESULT OF K. MASUDA CONCERNING REACTION-DIFFUSION EQUATIONS, Tshoku Math. J.40(1988), 159-163
- [2] D.Henry, Gometric theory of semilinear parabolic Equation lecture Notes in mathematics 840. Springer-Verlag, New-york, 1984
- [3] F.R.Gantmacher, théorie de matrices, tomel. Paris
- [4] J.smoller, shock waves and Réaction-Diffusion Equation, springer verlag, New york (1983)
- [5] H.Brezis,Analyse Fonctionnelle théorie et applications.Masson,Paris New York Barceline Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [6] K.Saoudi. Existence Globale et Comportement Asymptotique des solutions d'une Classe de Systèmes de Réaction-Diffusion avec Réaction à Croissance Exponentielle. Memoire Magister
- [7] M.Pierre.Global Existence in Reaction-Diffusion Systems with Control of Mass. Mathematics Subject Classification (2000). Primary 3502,35K57 ; Secondary 92C45,92E20.
- [8] S.Kouachi.Global existence for coupled reaction diffusion systems modelling some reversible chemical reactions.Communicated by Y. Charles Li, received October 14, 2010
- [9] S.kouchi and A.youkana, Global Existence and Asymptotics for a class of Reaction-Diffusion systems.Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics Januray 2001, 49(3)