



MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE «Abbés LAGHROUR» DE
KHENCHELA
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA
TECHNOLOGIE



Département Sciences de la matière

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité : physique des matériaux

Option : physique

Oscillateur harmonique dépendant de l'énergie
dans l'espace non- commutatif

Réalisé par : -Zabab Ouidad
- Benbouzid Nawel

Dirigé par : M. Dr.. Hemame Zoubir

Membres de jury :

F. Lekmine MCA. Université de khenchela
A. Bourocha MAA Université de khenchela
Z. . Hemame MAA Université de khenchela

Président
Examineur
Examineur

Présenté le



Dédicace

Afin d'être reconnaissant envers tous ceux qui me sont chers, je dédie ce mémoire :

A mes parents pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A tous ceux qui m'aime et que ma réussite leur tient à cœur



Remerciement

Tout d'abord remerçons Dieu tout puissant qui nous a éclairé vers le bon chemin.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de Mémoire professeur : Hemame Zoubir

Je remercie les membres de jury : Dr. F. Lekmine et Dr. A. Bourocha qui ont accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion 2022.

Je tiens à remercier mes parents qui sont fatigués à cause de moi, ma famille et mes amis



Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 4 |
| 1 Non Commutativité en Physique | 8 |
| 1.1 La Géométrie non commutative : | 8 |
| 1.2 l'espace non commutativité en physique quantique | 8 |
| 1.3 Un bref rappel historique sur son apparition en Physique : | 9 |
| 1.4 Algèbre d'espace-temps non-commutative : | 10 |
| 1.5 Non commutativité positionnelle : | 12 |
| 1.6 Conséquences pour la théorie quantique : | 12 |
| 1.7 Formule de Moyal-Weyl | 13 |
| 1.7.1 Le produit star | 13 |
| 1.7.2 Propriétés du de produit star : | 13 |
| 1.8 Le décalage "BOPP SHIFT" : | 14 |
| 1.8.1 Application : Oscillateur harmonique à deux dimensions sur un espace non commutatif | 15 |
| 2 Solution exacte de l'équation de Schrödinger | 19 |
| 2.1 Introduction | 19 |
| 2.2 Contexte historique et développement de l'équation de Schrödinger | 19 |
| 2.3 le système de landau | 21 |
| 3 L'Oscillateur harmonique dépendant de l'énergie en Espace non commutatif | 24 |
| 3.1 oscillateur de Schrödinger dans l'espace non commutatif à 2 dim | 24 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.1.1 | Equation de Schrödinger : | 27 |
| 3.1.2 | Arguments conduisant ‘a l’equation de Schrodinger | 29 |
| 3.1.3 | construction de l’equation de schrodinger : | 30 |
| 3.2 | propriétés de l’équation de Schrödinger | 33 |
| 3.2.1 | La fonction d’onde | 34 |
| 3.3 | oscillateur de Schrödinger dans l’espace non commutatif à trois dimensions . . . | 35 |
| 3.4 | Aplication | 41 |
| 4 | conclusion générale | 44 |

NOMENCLATURE

E : énergie

λ : longueur d'onde

ν : fréquence spécifique

k : le nombre d'ondes

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$: Constante de Planck

p : pulsation

ω : l'impulsion

V : L'énergie potentielle

m ou μ : la masse

Ψ : fonction d'onde

\hat{H} : l'hamiltonien

$\vec{\nabla}$:opérateur nabla

Δ :Laplacien

t : temps

y_l^m : harmoniques sphériques

T : Température

k_B : constante de Boltzmann

Ψ :Une fonction d'onde qui décrit un système quantique

Introduction général

L'article de Snyder de 1947 a été le premier à introduire le concept [71,] d'espace-temps non commutatif en physique des particules. La théorie quantique des champs était censée être capable de se débarrasser des divergences ultraviolettes tout en conservant la covariance de Lorentz. Cependant, à la suite des résultats impressionnants de la théorie de la renormalisation, l'hypothèse de Snyder a été oubliée. Lors de l'examen des théories des supercordes, la notion de coordonnées non commutatives est récemment revenue, car la longueur intrinsèque des cordes fait que l'espace-temps est structuré différemment à de très petites échelles.

Il est bien établi que la théorie quantique des champs est intrinsèquement non locale. Aux hautes énergies, la non-localité des phénomènes devient tout à fait évidente. Par conséquent, toute mé

thode d'unification des interactions physiques devrait inclure les effets de non-commutativité de l'espace dans la caractérisation de la localisation des processus physiques. C'est l'une des raisons pour lesquelles la théorie des cordes a récemment avancé dans une tentative d'unifier la physique. De plus, cette non-commutativité de l'espace pourrait théoriquement absorber les infinis associés aux théories conventionnelles des champs. Autrement dit, nous serions réduits à une renormalisation planckienne dans laquelle, plutôt que des interactions rayonnement-matière mesurées, nous aurions des corrélations spatiales quantifiées.

La découverte de la mécanique quantique par Heisenberg en 1925 a transformé les états spatiaux géométriques d'un système microscopique, comme un atome, en ajoutant de nouveaux attributs à ses coordonnées, comme le moment et la position, qui ne coïncident plus. Nous utilisons une autre topologie, connue depuis peu sous le nom de géométrie non commutative. L'objectif de cette géométrie non commutative est de généraliser la dualité entre espace

géométrique et algèbre à un scénario plus général dans lequel l'algèbre n'est plus commutative. Cela nécessite la modification de deux idées fondamentales des mathématiques, à savoir l'espace et la symétrie, ainsi que l'adaptation de tous les instruments mathématiques pertinents. Lorsqu'on étudie l'effet de la géométrie non commutative sur les orbites classiques d'une particule, par exemple, la relation de commutation sera implémentée par la modification suivante $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$, qui caractérise les espaces non commutatifs et exprime la comparaison entre les observateurs de position qui génèrent des contraintes sévères sur la valeur du paramètre non commutatif. À cette fin, des recherches importantes ont été menées sur la mécanique quantique déformée par la géométrie spatiale non commutative, y compris l'extraction de la mécanique quantique non commutative à partir de la théorie quantique des champs non commutative dans le cas non relativiste[2].

Avec la découverte par Heisenberg de la mécanique quantique, la géométrie des états d'un système microscopique, un atome s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, telles que le moment et les positions non commandées plus longues.

La première apparition du concept d'espace-temps physique non commutatif des particules remonte aux travaux de Snyder dans Le but est de pouvoir éliminer la divergence de la théorie quantique des champs tout en gardant la covariance de Lorentz.

Dans de nombreuses recherches, l'idée fondamentale dans les difficultés physiques allant de la mécanique quantique non commutative à la mécanique quantique commutative est avant tout l'utilisation du produit star. En revanche, les potentiels dépendants de l'énergie sont apparus pour la première fois dans la mécanique quantique relativiste, par exemple, dans l'équation de Pauli-Schrodinger [3] et le problème relativiste à plusieurs corps. Ainsi, les équations d'onde avec des potentiels dépendant de l'énergie sont bien connues en physique, même lorsque le potentiel n'est pas précisément proportionnel à l'énergie. De nombreux auteurs [4][5][6] se sont récemment intéressés à l'équation d'onde à potentiel dépendant de l'énergie en mécanique quantique commutative. En raison de la dépendance énergétique du potentiel dans les équations d'onde, il est nécessaire de modifier le produit scalaire afin de maintenir la norme. Nous étudions l'effet de la non-commutativité entre les coordonnées et le potentiel dépendant de l'énergie de l'oscillateur harmonique sur les valeurs propres d'énergie et la normalisation des fonctions d'onde à l'aide de la mécanique quantique non commutative.

De la théorie quantique habituelle, qui a été écrite sur des espaces commutatifs qui répondent aux relations de commutation suivantes.

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (1)$$

il est facile de redéfinir cette théorie dans un autre espace non commutatif, en changeant les relations de commutation sous cette forme

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (2)$$

où θ_{ij} est un tenseur antisymétrique.

Pour surmonter les problèmes d'unitarité et de causalité qui se posent dans la théorie non commutative à ce stade ($\theta_{0j} = 0$, $\theta_{ij} \neq 0$), nous proposons que toutes les composantes du temps θ_{0j} soient égales à zéro.

Il est intéressant de noter que, dans le même cadre de la théorie quantique non commutative, les modèles fournis par les relations de commutation discutées ci-dessus (2) peuvent être réalisés en termes de produit étoile, c'est-à-dire remplacer directement l'algèbre commutative par le produit usuel de fonctions par Algèbre de Moyal avec le produit étoile.

$$(f * g)(x) = \exp \left[\frac{i}{2} \theta_{\mu\nu} \partial_{x\mu} \partial_{y\nu} \right] \quad (3)$$

$f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions arbitraires infiniment différentiables.

dans la mécanique quantique, par exemple l'équation de Pauli-Schrodinger et la théorie relativiste problème à plusieurs corps. Par conséquent, les équations d'onde avec des potentiels dépendants de l'énergie connaissent la physique même si le potentiel ne dépend pas directement de l'énergie. Potentiels dépendants de l'énergie appliqués à la description du quark lourd system et la propagation des solitons. Récemment, l'équation d'onde avec un potentiel dépendant de l'énergie en quantique commutatif la mécanique a reçu un grand intérêt de la part de nombreux auteurs. La dépendance à l'égard l'énergie du potentiel dans les équations d'onde nécessite de changer le produit scalaire en assurer la norme. Dans cet article, dans le cadre de la mécanique quantique non commutative, nous étudier l'influence de la non-commutativité entre les coordonnées et l'énergie dépendante potentiel de l'oscillateur harmonique sur les valeurs pro

Dans ce mémoire et dans le premier chapitre qui est consacré aux préliminaires, on à com-

mencé par une introduction à la géométrie non-commutative et j'ai présenté son importance en physique. Ensuite, j'ai donné les différentes algèbres de commutateurs qui généralisent l'algèbre de Heisenberg à un espace non-commutatif et le système quantique du sera étudié analytiquement dans le cadre de cette nouvelle version de la mécanique quantique. Avant cela on expose les différents Outils et techniques utilisés dans la reformulation des relations de commutation ordinaires (produit de moyai, hamiltonien modifié...)

Le deuxième chapitre qui est consacré des rappels sur le système de Landau en mécanique quantique ordinaire et en va présenter l'équation de Schrödinger en espace ordinaire à 2 et 3 dimensions

Dans le troisième chapitre on à étudier l'oscillateur harmonique de Schrodinger bidimensionnelle dans l'espace non commutative avec une fréquence dépendante de l'énergie. Enin, nous terminons notre mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Non Commutativité en Physique

1.1 La Géométrie non commutative :

La géométrie non commutative a été conçue à la fois pour répondre à des besoins en mathématiques et pour permettre d'aborder certains problèmes de physique théorique[5]

En mathématique, il s'agit de généraliser les outils de la géométrie ordinaire qui ont été développés depuis plus d'un siècle : structures différentiables, métriques, actions de groupes, fibrations, connexions... Ces constructions mathématiques sont désormais largement utilisées en physique théorique, et l'essentiel des théories modernes (le modèle standard des particules élémentaires, la relativité générale, la théorie quantique des champs) se fondent sur des propriétés mathématiques fines élaborées dans ce contexte. C'est à A. Connes que l'on doit, en 1985, d'avoir donné les premières voies concrètes de recherches dans le domaine de la géométrie non commutative, en définissant et en étudiant la cohomologie cyclique. Il montrait ainsi que la notion de calcul différentiel sur les variétés avait un équivalent non commutatif, au sens expliqué plus ci-dessous.[5]

1.2 l'espace non commutativité en physique quantique

En Physique, dans les années 60 et 70, les travaux sur les théories quantiques des champs ont permis de faire émerger des notions devant faire cohabiter structures géométriques et structures algébriques : d'un côté les algèbres d'opérateurs, de l'autre les théories de jauge, c'est à dire

la théorie des connexions sur les fibrés... Cependant, la plus forte motivation reste encore aujourd'hui l'espoir d'écrire une théorie quantique de la gravitation avec cette mathématique, puisque le principe fondateur de la géométrie non commutative est de fusionner dans un même cadre conceptuel l'aspect opératoire de la mécanique quantique et l'aspect géométrique de la relativité générale[7]

L'idée maîtresse de la géométrie non commutative est d'abord de caractériser une classe d'espaces « géométriques » bien particulière par un type d'algèbres de fonctions adapté, en munissant ces algèbres d'outils algébriques appropriés. Par exemple, il est possible de caractériser un espace topologique compact par son algèbre de fonctions continues bornées, et un espace mesurable par son algèbre des classes de fonctions mesurables bornées. Dans les cas favorables, ces outils algébriques n'utilisent pas explicitement la commutativité des algèbres de fonctions, ou des outils plus algébriques équivalents existent, ce qui rend alors possible l'étude des algèbres non commutatives du même type à l'aide de ces outils algébriques, sans avoir à mentionner d'espace sous-jacent[7]

1.3 Un bref rappel historique sur son apparition en Physique :

Le besoin d'introduire les coordonnées non commutatives a son origine depuis la naissance de la mécanique quantique et la théorie quantique des champs, malgré les prédictions extraordinaires de l'électrodynamique quantique (prédiction des interactions électromagnétiques électron photon avec une précision de l'ordre de 10^{-8} le moment magnétique de l'électron,...etc.), ces théories malgré leurs grand succès à décrire le monde atomique et subatomique présentent des difficultés intrinsèques qui surviennent à très hautes énergies ou à très courtes distances.

En effet, dans sa première formulation, la mécanique quantique apparaît sous une forme comparable à la mécanique Hamiltonienne où les coordonnées de l'espace des phases sont remplacées par des opérateurs qui ne commutent pas entre eux. Dirac lui-même sembla être fasciné par cette idée et suggéra la possibilité d'interpréter la mécanique quantique dans un formalisme géométrique non commutatif. Enfin, les travaux de Von Neumann sur la mécanique quantique furent à l'origine du domaine des mathématiques que nous appelons aujourd'hui les algèbres d'opérateurs[8].

L'idée que les coordonnées de l'espace-temps puissent ne pas commuter fut émise par Heisenberg en 1930. Pour se débarrasser des divergences qui apparaissent dans ces théories, Heisenberg a proposé d'introduire la notion de coordonnées non commutatives compatibles aux relations d'incertitudes pour fournir un cut-off naturel, cela a pour conséquence la modification de la structure de l'espace-temps à très courtes distances.[8] .[9] [13]

Cette idée fut ensuite reprise et concrétisée dans un article de Snyder en 1947. Il a introduit les coordonnées non-commutatives et par conséquent une incertitude sur les coordonnées d'espace se manifeste directement et d'une manière naturelle. Le but était de pouvoir se débarrasser des divergences ultraviolettes de la théorie quantique des champs tout en conservant la covariance de Lorentz. Mais, comme parallèlement à cela, la théorie de la renormalisation produisait des résultats remarquables la théorie de Snyder tomba dans l'oubli.

Le terme de "géométrie non commutative" (GNC) fut introduit par Alain Connes dans les années 1980 comme étant un programme visant à généraliser différents concepts empruntés à la géométrie ordinaire en des concepts équivalents pour des algèbres non commutatives et en particulier les concepts venant de la géométrie différentielle. Il montra qu'il est possible de généraliser un certain nombre de notions.[8]

En 1999, une autre approche a été proposée par Seiberg et Witten et qui consiste à remplacer l'espace-temps ordinaire par un espace non commutatif, cette notion de coordonnées non commutatives a émergé de la théorie des cordes, et la théorie des D-brane, en présence d'un champ magnétique antisymétrique. Aujourd'hui, les concepts de coordonnées non-commutatives sont pourquoi on cherche à discrétiser l'espace-temps en petites cellules (et abandonner la notion de point) .

1.4 Algèbre d'espace-temps non-commutative :

En mécanique quantique ordinaire, les relations de commutation canoniques dans l'espace de phase prennent la forme[11]

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \text{ et } , [\hat{p}_x, \hat{p}_j] = 0 , \text{ et } [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.1)$$

La géométrie espace-temps non commutative est une géométrie où les coordonnées de l'espace-temps ne commutent pas, dont la forme générale des commutateurs

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] \neq 0 \text{ et } [\hat{p}_x, \hat{p}_j] \neq 0 \quad (1.2)$$

et Et l'algèbre non commutative dans la forme générale présente par les relations suivantes[12] [13] [14] :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \quad (1.3)$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\sigma_{ij} \quad (1.4)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad (1.5)$$

Les quantités θ_{ij} et σ_{ij} sont des paramètres antisymétriques réelles pouvant dépendre des opérateurs \hat{x} et \hat{p} et satisfaisant à

$$\theta_{ij} = \varepsilon_{ij}\theta \quad (1.6)$$

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ij}\sigma \quad (1.7)$$

Avec :

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} = -1 \quad (1.8)$$

Lorsque on pose $\theta \rightarrow 0$ ou $\sigma \rightarrow 0$ nous trouvons les relations de la mécanique quantique ordinaire (commutative)

1.5 Non commutativité positionnelle :

Dans la littérature, on s'intéresse plus souvent à un cas particulier de l'algèbre non commutative dans laquelle les coefficients σ_{ij} sont nuls. Ainsi, la non commutativité n'est réalisée que sur les opérateurs position par le biais des paramètres θ_{ij} (Non commutativité positionnelle) [13] L'algèbre au-dessus se réécrit donc :

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \quad (1.9)$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (1.10)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\sigma_{ij} \quad (1.11)$$

Où θ_{ij} sont des paramètres réels antisymétriques et ont une dimension de $[\text{longueur}]^2$ et jouent un rôle analogue à \hbar dans la mécanique quantique ordinaire.

1.6 Conséquences pour la théorie quantique :

Les relations de commutation $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}$ impliquent les inégalités d'Heisenberg [13] :

$$\Delta\hat{x}_i \cdot \Delta\hat{x}_j \geq \frac{1}{2} |\theta_{ij}| \quad (1.12)$$

C'est-à-dire que la particule ne peut plus être localisée de manière précise. L'espace prend alors une structure de réseau.

Dans la suite, on se restreint au cas de non-commutativité positionnelle où les opérateurs d'impulsion commutent entre eux, (C'est l'algèbre la plus fréquemment rencontrée dans la littérature).

Au cas où la dimension d'espace est $D = 2$ on peut représenter les relations ci-dessus comme :

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta, [\hat{y}, \hat{x}] = -i\theta \quad (1.13)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar \quad (1.14)$$

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = [\hat{p}_y, \hat{y}] = -i\hbar \quad (1.15)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0 \quad (1.16)$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{p}_y, \hat{p}_x] = 0 \quad (1.17)$$

1.7 Formule de Moyal-Weyl

En mathématiques, et plus précisément en algèbre générale, l'algèbre de Weyl est un anneau d'opérateurs différentiels dont les coefficients sont des polynômes à une variable. Cette algèbre (et d'autres la généralisant, appelées elles aussi algèbres de Weyl) a été introduite par Hermann Weyl en 1928 comme outil d'étude du principe d'incertitude en mécanique quantique[15]

1.7.1 Le produit star

Le formalisme du star-produit introduit par Harman Weyl et Wigner pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace de phases[16]

$$(f * g)(x, p) = (fg)(x, p) + \frac{i}{2} \theta^{mn} \frac{\partial}{\partial x^m} f(x, p) \frac{\partial}{\partial x^n} g(x, p) + O(\theta^2) + \frac{i}{2} h \bar{\theta}^{mn} \frac{\partial}{\partial p^m} f(x, p) \frac{\partial}{\partial p^n} g(x, p) + O(\bar{\theta}^2) \quad (1.18)$$

ou $(f * g)(x, p)$ représente le produit star dans la mécanique quantique non-commutatif, $(fg)(x, p)$ représente le produit star dans la mécanique quantique et le deuxième terme représente l'effet de la position, le troisième terme représente l'effet de la phase

1.7.2 Propriétés du de produit star :

Le produit star satisfait les déferentes propriétés suivantes non commutatif[16]

$$f(x, p) * g(x, p) \neq g(x, p) * f(x, p) \quad (1.19)$$

– Associatif :

$$(f(x, p) * g(x, p)) * h(x, p) = f(x, p) (g(x, p) * h(x, p)) \quad (1.20)$$

– La relation du complexe conjugué :

$$(f(x, p) * g(x, p))^* = f(x, p)^* * g(x, p)^* \quad (1.21)$$

– La relation d'intégrale :

$$\int d^D x (f * g)(x, p) = \int d^D x (g * f)(x, p) = \int d^D x f(x, p) g(x, p) \quad (1.22)$$

– Permutation cyclique :

$$\int d^D x (f * g * h)(x, p) = \int d^D x (h * f * g) = \int d^D x (f * h * g) \quad (1.23)$$

– La règle de Leibniz :

$$\partial_\mu (f * g) = \partial_\mu f * g + f * \partial_\mu g \quad (1.24)$$

1.8 Le décalage "BOPP SHIFT" :

Sur un espace des phases non commutatif, l'algèbre non commutatif peut \hat{x}_i et \hat{p}_i écrite comme suit : [23]

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij} \quad (1.25)$$

$$[\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\bar{\theta}_{ij} \quad (1.26)$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad (1.27)$$

ou $i\theta_{ij}$ est liée à la non commutativité des coordonnées de l'espace alors que $i\bar{\theta}_{ij}$ reflète la non

commutativité des moments, et les deux sont des matrices antisymétriques avec des éléments constants réels[23].

Le décalage de Bopp relie les variables non commutatives aux variables commutatives. A partir des relations précédentes, on peut obtenir le décalage de Bopp généralisé comme

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{1}{2}\theta_{ij}p_j \quad (1.28)$$

$$\hat{p}_i = p_i + \frac{1}{2}\bar{\theta}_{ij}x_j \quad (1.29)$$

ou \hat{x}_i, \hat{p}_i sont les opérateurs des coordonnées et de moment sur l'espace des phases non commutatif, et x_i, p_i sont les opérateurs des coordonnées et de moment sur l'espace des phases habituelle (commutatif)

et le décalage de Bopp devient

$$\hat{x}_i = -\frac{1}{2}\theta_{ij}p_j \quad (1.30)$$

$$\hat{p}_i = p_i \quad (1.31)$$

Des potentiels plus compliqués peuvent conduire (mener) à un hamiltonien non-local une fois que le décalage de Bopp est effectué.

Dans un espace non commutatif on peut utiliser l'équation de Schrodinger avec le produit et les coordonnées de l'espace-temps ordinaires à condition de décaler l'argument de potentiel d'une quantité égale à $\frac{\tilde{\theta}}{2}$ (ce qu'on appelle décalage de Bopp)[23]

1.8.1 Application : Oscillateur harmonique à deux dimensions sur un espace non commutatif

Dans cette section nous allons étudier le problème l'oscillateur harmonique à deux dimensions dans le cadre de la mécanique quantique non commutative, le but de cette étude est de pratiquer les outils que nous présentons dans le paragraphe précédent

Hamiltonien non commutatif d'un oscillateur harmonique :

L'équation de Schrödinger s'écrit dans ce cas sous la forme

$$\hat{H} * \Psi(\hat{x}, \hat{y}) = E\Psi(x, y) \quad (1.32)$$

où le hamiltonien a pour expression :

$$\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y \quad (1.33)$$

$$\hat{H}_x = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \quad (1.34)$$

$$\hat{H}_y = \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2 \quad (1.35)$$

on remplace (1.34) (1.35) dans 1.33 ou trouve

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2 \quad (1.36)$$

Avec les conditions de la non commutativité

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta, [\hat{y}, \hat{x}] = -i\theta \quad (1.37)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar \quad (1.38)$$

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = [\hat{p}_y, \hat{y}] = -i\hbar \quad (1.39)$$

$$[\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0 \quad (1.40)$$

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = [\hat{p}_y, \hat{p}_x] = 0 \quad (1.41)$$

Nous utilisons maintenant le nouveau système des coordonnées

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x} = x - \frac{\theta_{ij}}{2} p_y \\ \hat{x} = x - \frac{\theta}{2} p_y \\ x = \hat{x} + \frac{\theta}{2} p_y \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \hat{y} = y - \frac{\theta_{ji}}{2} p_x \\ = y + \frac{\theta_{ji}}{2} p_x \\ = y + \frac{\theta}{2} p_x \\ y = \hat{y} - \frac{\theta}{2} p_x \end{array} \right. \quad (1.42)$$

$$\hat{p}_x = p_x \quad (1.43)$$

$$\hat{p}_y = p_y \quad (1.44)$$

Nous avons montré que les nouvelles variables vérifient les relations de commutation canoniques :

$$[x, y] = 0 \quad (1.45)$$

$$[x, p_x] = [y, p_y] = i\hbar \quad (1.46)$$

$$[p_x, p_y] = [x, p_y] = [y, p_x] = 0 \quad (1.47)$$

Alors :

$$\hat{H} * \Psi(\hat{x}, \hat{y}) = H_\theta \Psi(x, y) \quad (1.48)$$

Avec :

$$x = \hat{x} + \frac{\theta}{2} p_y \quad (1.49)$$

$$y = \hat{y} - \frac{\theta}{2} p_x \quad (1.50)$$

$$\hat{p}_x = p_x \quad (1.51)$$

$$\hat{p}_y = p_y \quad (1.52)$$

Alors :

$$\hat{H} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x - \frac{\theta}{2\hbar}p_y \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(y + \frac{\theta}{2\hbar}p_x \right)^2 \quad (1.53)$$

on remplace 1.49 1.50 1.51 1.52 dans 1.53 ou trouve :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2) \left(1 + \frac{\theta^2\omega^2}{4\hbar^2} \right) + \frac{1}{2}m\omega^2 (x^2 + y^2) - \frac{\theta m\omega^2}{4\hbar} L_z$$

Chapitre 2

Solution exacte de l'équation de Schrödinger

2.1 Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation fondamentale de la mécanique quantique non relativiste. Elle joue en mécanique quantique le même rôle fondateur que l'équation de Newton en mécanique classique ou les équations de Maxwell en électromagnétisme. Elle décrit l'évolution temporelle et spatiale de l'état d'un objet quantique représenté par une fonction d'onde[13].

Depuis la publication du travail de Schrödinger, les physiciens théoriciens se sont penchés à trouver des solutions à l'équation de Schrödinger pour différents systèmes physiques à partir de plusieurs méthodes, soit analytique ou numérique, à partir de cette solution, on obtient une fonction d'onde qui nous permet d'identifier le système quantique étudié[13]

2.2 Contexte historique et développement de l'équation de Schrödinger

d La découverte par Max Planck de la lumière quantique (voir rayonnement du corps noir) et l'interprétation d'Einstein selon laquelle le nom "quantum" utilisé par Planck est un photon ou une "particule" optique", et a suggéré que l'énergie d'un photon devrait être proportionnelle à sa fréquence, et cette idée était l'une des premières hypothèses sur la dualité onde-particule.

Étant donné que l'énergie et l'impulsion du mouvement p sont liées à la fréquence et au nombre d'onde dans la théorie restreinte de la relativité, il en résulte que l'impulsion du photon est directement proportionnelle à son nombre.

forme d'onde k

$$p = \frac{h}{\lambda} = k\hbar \quad (2.1)$$

Et Louis de Broglie a émis l'hypothèse que cela s'applique à toutes les particules, y compris l'électron. Et il a montré que, en supposant que l'onde matérielle progresse parallèlement à sa particule, alors l'électron forme une onde[18]

stagnant, ce qui signifie qu'il ne contient que des fréquences angulaires discrètes autour du noyau atomique qu'il est autorisé à prendre. Ces orbitales quantiques dans l'atome appartiennent à des niveaux d'énergie distincts (c'est-à-dire qu'elles ont leurs propres valeurs intrinsèques), et de Broglie a pu expliquer le modèle de Bohr de la structure atomique et les niveaux qu'il contient. pour l'énergie. Le modèle de Bohr était basé sur la conception quantique du moment cinétique (c'est-à-dire qu'il a ses propres valeurs propres).

$$L = n \frac{\hbar}{2\pi} = n\hbar \quad (2.2)$$

Selon de Broglie, l'électron est décrit comme une onde avec un nombre entier de longueur d'onde, et que dans un atome le nombre d'onde doit correspondre à l'orbite de l'électron

$$n\lambda = 2\pi r \quad (2.3)$$

Mais cette hypothèse limite l'onde électronique à une dimension et tourne sur une orbite circulaire. Partant de ces hypothèses, le physicien Peter Debye a fait remarquer que si les particules se comportent dans les propriétés des ondes, elles doivent satisfaire un certain type de fonction d'onde. Et de ce commentaire Présenté par "Debye", Schrödinger a tenté d'atteindre une équation d'onde en trois dimensions qui s'applique à l'électron. Il a utilisé ce que Hamilton avait fait pour montrer la symétrie entre la mécanique des corps et atteindre

Et les propriétés de la lumière, qui consiste à voir que la limite zéro de la longueur d'onde (c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde atteint 0) est équivalente au cas d'un système en méca-

nique classique.[19]Schrödinger à l'équation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(r,t) = \frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r,t) + V(r,t)$$

2.3 le système de landau

En mécanique quantique ordinaire, les relations de commutation canoniques dans l'espace de phase prennent la forme : [24] :

$$[x_i, x_j] = 0 \tag{2.4}$$

$$[p_i, p_j] = 0 \tag{2.5}$$

$$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}1 \tag{2.6}$$

Avec $i, j = 1, \dots, d$ (d est la dimension de l'espace) .

considérons le cas d'une particule chargée électriquement (de charge e) se propageant dans un espace tridimensionnel soumis à un champ magnétique constant

B décrit par un potentiel vecteur A tel que[?]

$$\vec{B} = \vec{rot}\vec{A} \tag{2.7}$$

le Hamiltonien d'un tel système est donné par :

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 \tag{2.8}$$

c'est -à-dire que l'on modifier l'impulsion canonique usuelle \vec{p} en définissant une impulsion

$$\tilde{\mathbf{\Pi}} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \tag{2.9}$$

Or , étant données les relations 2.9.les composantes de cette impulsion $\tilde{\mathbf{\Pi}}$ ne commutent plus entre elles

$$[\Pi_i, \Pi_j] = -i\hbar \frac{e}{c} B_{ij} \mathbf{1} \quad (2.10)$$

avec

$$B_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad (i, j \in \{1, 2, 3\}) \quad (2.11)$$

Dans le cas ou le champ magnétique est constant suivant $\vec{e}_3, \vec{B} = B\vec{e}_3$. on peut utiliser les jauge suivantes pour le potentiel vecteur $\vec{A} = (A_1, A_2, 0)$:

Jauge symétrique : $\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x}\wedge\vec{B}$ jauge de Landau : $\vec{A} = (0, Bx_1, 0)$ ou $\vec{A} = (-Bx_2, 0, 0)$

la Hamiltonien de système prend la forme

$$H = \frac{1}{2m}(\Pi_1^2 + \Pi_2^2) \quad (2.12)$$

ou nous avons omis le terme $\frac{1}{2}P_3^2$ décrivant le mouvement libre le long de direction x_3 . on a la relation de commutation

$$[\Pi_1; \Pi_2] = i\hbar \frac{e}{c} B \mathbf{1} \quad (2.13)$$

or, si l'on définit un nouvel opérateur $X = \frac{e}{cB}\Pi_1$ la relation de commutation et la Hamiltonien deviennent :

$$[X, \Pi_2] = i\hbar \mathbf{1} \quad (2.14)$$

$$H = \frac{1}{2m}\Pi_2^2 + \frac{1}{2}m\omega_B^2 X^2 \quad (2.15)$$

avec

$$\omega_B = \frac{|eB|}{mc} \quad (2.16)$$

Autrement dit, les opérateurs X, Π_2 sont des variables canoniquement conjuguées pour lesquelles le Hamiltonien prend la forme de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_b

Grace à cette remarque on en déduit directement le spectre d'énergie :

$$E_n = \hbar \frac{|eB|}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.17)$$

Chapitre 3

L'Oscillateur harmonique dépendant de l'énergie en Espace non commutatif

3.1 oscillateur de Schrödinger dans l'espace non commutatif à 2 dim

Notre objectif est d'étudier le potentiel de l'oscillateur harmonique à fréquence dépendant de l'énergie en mécanique quantique non-commutative à deux dimensions. Par conséquent, nous souhaitons résoudre l'équation de Schrödinger[32],

$$\hat{H} * \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \quad (3.1)$$

où l'hamiltonien du système prend la forme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} \omega_{\hat{E}}^2 [\hat{x}^2 + \hat{y}^2] \quad (3.2)$$

avec la fréquence $\omega_{\hat{E}} = \omega_0 (1 + \gamma E)^q$ en fonction de l'énergie $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ est l'opérateur d'énergie et q est un paramètre. Le produit en étoile dans l'équation de Schrödinger 3.1 est le résultat de la non-commutativité entre les opérateurs de coordonnées qui satisfont à la relation de

commutation

$$[\hat{x}^2 + \hat{y}^2] = i\theta \quad (3.3)$$

où le paramètre de non-commutativité θ est une constante réelle. Nous pouvons revenir au produit habituel en utilisant le produit étoile de Moyal

$$(f * g)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\partial_{x_\mu}\partial_{y_\nu}\right) f(x) f(y)|_{x=y} \quad (3.4)$$

ou le décalage de Bopp shift

$$\hat{x} = \hat{x} - \frac{1}{2\hbar}\theta\hat{p}_y \quad (3.5)$$

$$\hat{y} = \hat{y} + \frac{1}{2\hbar}\theta\hat{p}_x \quad (3.6)$$

alors, l'hamiltonien dépendant de l'énergie du système (2) en deux dimensions prend la nouvelle forme

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(1 + \frac{m\omega_{\hat{E}}^2\theta^2}{4\hbar}\right) (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2m}m\omega_{\hat{E}}^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \frac{m\omega_{\hat{E}}^2\theta}{2\hbar}L_z \quad (3.7)$$

où $L_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$

$$\left[\frac{1}{2m} \left(1 + \frac{m\omega_{\hat{E}}^2\theta^2}{4\hbar}\right) (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2m}m\omega^2 \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) \left[(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \frac{m\theta}{2\hbar}\hat{L}_z \right] \right] \Psi(x, y, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x, y, t) \quad (3.8)$$

Prenons les coordonnées polaires, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, alors l'équation de Schrödinger.3.8 prend la forme

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{1}{2}m\omega^2 \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) \rho^2 + \frac{im\theta}{2}\omega^2 \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi(\rho, \varphi, t) \quad (3.9)$$

où la masse et la fréquence dépendantes de l'énergie sont respectivement

$$M \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{m}{1 + \frac{m^2\theta^2\omega^2 \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)}{4\hbar^2}} \quad (3.10)$$

$$\omega \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) = \omega_0 \left(1 + \gamma i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^q \quad (3.11)$$

avec q et γ sont des paramètres.

Si on décompose Ψ sur la base $\{\Phi_{E_{n,m_l}}(\rho)\}$, on obtient

$$\Psi(\rho, \varphi, t) = \sum_{n,m_l} a(E_{n,m_l}) e^{(E_{n,m_l}t - \hbar m_l \varphi)} \Phi_{E_{n,m_l}}(\rho) \quad (3.12)$$

alors nous avons

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2ME_{n,m_l}} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{1}{2} m \omega^2 E_{n,m_l} \rho^2 + \frac{im\theta}{2} \omega^2 E_{n,m_l} \frac{\partial}{\partial t} \right] \Phi_{E_{n,m_l}}(\rho) = E_{n,m_l} \Phi_{E_{n,m_l}}(\rho) \quad (3.13)$$

A ce stade, nous avons le problème de la masse et du potentiel dépendant de l'énergie. potentiel dépendant de l'énergie. En multipliant 3.13 avec ME_{n,m_l} ce problème peut être transformé en un potentiel dépendant de l'énergie avec une masse constante.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + V(\rho, \theta, E_{n,m_l}) \right] \Phi_{E_{n,m_l}}(\rho) = E_{n,m_l} \Phi_{E_{n,m_l}}(\rho) \quad (3.14)$$

où

$$E_{n,m_l} = ME_{n,m_l} \left(E_{n,m_l} + \frac{1}{2} \omega^2 E_{n,m_l} m m_l \theta \right) \quad (3.15)$$

$$V(\rho, E_{n,m_l}) = \frac{1}{2} \Omega_{E_{n,m_l}}^2 \rho^2 \quad (3.16)$$

$$M_{E_{n,m_l}} = \frac{m}{1 + \frac{m^2 \theta^2 \omega^2 (E_{n,m_l})}{4\hbar^2}} \quad (3.17)$$

$$\omega(E_{n,m_l}) = \omega_0 (1 + \gamma E_{n,m_l})^q \quad (3.18)$$

$$\Omega_{E_{n,m_l}}^2 = m M_{E_{n,m_l}} \omega_{E_{n,m_l}}^2 \quad (3.19)$$

En résolvant 3.14, on trouve les valeurs propres de l'énergie et les fonctions d'onde comme suit

$$E_{n,m_l} = \frac{\hbar \Omega_E}{M_{E_{n,m_l}}} (2n + |m_l| + 1) - \frac{m m_l \theta \omega_{E_{n,m_l}}^2}{2} \quad (3.20)$$

$$\Phi_{E_{n,m_l}}(\rho) = N \rho^{|m_l|} F \left(-n, |m_l| + 1, \frac{\Omega_{E_{n,m_l}}^2}{\hbar} \rho^2 \right) e^{\left(-\frac{\Omega_{E_{n,m_l}}^2}{\hbar} \rho^2 \right)} e^{im_l \varphi} \quad (3.21)$$

où N est la norme qui dépend de l'énergie. Ici $\omega_{E_{n,m_l}} = \omega_0 (1 + \gamma E)^q$ et $F\left(-n, |m_l| + 1, \frac{\Omega_{E_{n,m_l}}^2}{\hbar} \rho^2\right)$ est la fonction hypergéométrique confluyente.

Afin de calculer la norme N , il est nécessaire de dériver la condition de normalisation liée au potentiel et à la masse dépendant de l'énergie en coordonnées polaires.

condition liée au potentiel et à la masse dépendant de l'énergie en coordonnées polaires Pour ce faire, nous considérons deux

$\Phi_{E_{n_1,m_{l_1}}}$ et $\Phi_{E_{n_2,m_{l_2}}}$ avec des énergies $E_{n_1,m_{l_1}}$ et $E_{n_2,m_{l_2}}$ satisfaisant 3.13 Ensuite, en multipliant la première équation par $\Phi_{E_{n_1,m_{l_1}}}^*(\rho)$ et la seconde (conjuguée complexe) par $\Phi_{E_{n_2,m_{l_2}}}(\rho)$ et après soustraction, en intégrant sur tout l'espace et en prenant la limite $E_{n_1,m_{l_1}} \rightarrow E_{n_2,m_{l_2}}$ nous obtenons

$$\int \rho d\rho \Phi_{E_{n,m_l}}(\rho) \Phi_{E_{n,m_l}}^*(\rho) \frac{1}{M_{E_{n,m_l}}} \frac{\partial}{\partial E_{n,m_l}} [(E_{n,m_l} - V(\rho, E_{n,m_l}))] = 1 \quad (3.22)$$

qui peut être mis sous la forme

$$\int \rho d\rho \Phi_{E_{n,m_l}}(\rho) \Phi_{E_{n,m_l}}^*(\rho) \left[\frac{1}{M_{E_{n,m_l}}} \left[E_{n,m_l} + \frac{1}{2} m \omega_{E_{n,m_l}}^2 (m_l \theta - \rho^2) \right] \frac{\partial M_{E_{n,m_l}}}{\partial E_{n,m_l}} + \left[1 + m \omega_{E_{n,m_l}} (m_l \theta - \rho^2) \right] \frac{\partial M_{E_{n,m_l}}}{\partial E_{n,m_l}} \right] = 1 \quad (3.23)$$

où $\omega_{E_{n,m_l}}$ et $M_{E_{n,m_l}}$ satisfaisant à 3.14

3.1.1 Equation de Schrödinger :

A toute particule d'énergie E et de quantité de mouvement P est associée une onde pulsation $\omega = \frac{E}{\hbar}$ est de vecteur d'onde $K = \frac{P}{\hbar}$

La longueur d'onde correspondante, dite longueur d'onde de Broglie, est donc[?]

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (3.24)$$

A toute particule est associée une fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$ qui caractérise entièrement son état (c'est-à-dire qu'elle contient toute l'information qu'il est possible de connaître sur la particule)

et qui représente physiquement son amplitude de probabilité de présence. Ainsi, $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi * \psi d^3\vec{r}$ est la probabilité de trouver la particule entre \vec{r} et $\vec{r} + d\vec{r}$ à l'instant t . La Particule

devant nécessairement se trouver quelque part, sa fonction d'onde doit être normalisée de telle sorte que :

La particule devant nécessairement se trouver quelque part, sa fonction d'onde doit être normalisée de telle sorte que :

$$\int |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3\vec{r} = \langle \frac{\psi}{\psi} \rangle = 1 \quad (3.25)$$

Soit m la masse m de la particule ; la fonction d'onde est alors solution de l'équation de Schrödinger :

$$H\psi(\vec{r}, t) = E\psi(\vec{r}, t) \quad (3.26)$$

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.27)$$

H est l'opérateur Hamiltonien du système dans le cas unidimensionnel donné par

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x) \quad \text{avec} \quad P = i\hbar \Leftrightarrow P^2 = -\hbar^2 \vec{\nabla}^2 \quad (3.28)$$

Donc :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(x) + V(x) \psi(x) \quad (3.29)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi(x) + V(x) \psi(x) \quad (3.30)$$

Où $V(x)$ est le potentiel ressenti par la particule il s'agit en fait d'une énergie potentielle.

$\vec{\nabla}^2$ est l'opérateur de laplace à une dimension

$$\vec{\nabla}^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (3.31)$$

3.1.2 Arguments conduisant 'a l'equation de Schrodinger

Nous donnons ci-après des arguments conduisant 'a l'equation de Schrodinger étant bien entendu qu'ils ne constituent pas une démonstration.

- L'énergie totale d'une particule matérielle est égale 'a la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = \frac{P^2}{2m} + V \quad (3.32)$$

- pour des particules non relativistes. Utilisons les équations de de Broglie pour une particule de matière $E = \hbar\omega$ et $p = \hbar k$ $\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V$
- En comparant à ce que nous avons trouvé pour une onde électromagnétique, nous pouvons penser que l'équation d'onde doit relier la dérivée première de la fonction d'onde par rapport au temps 'a la dérivée seconde de la fonction d'onde par rapport 'a l'espace (cf. remarque page précédente). L'énergie potentielle doit aussi apparaître dans l'équation.
- L'équation d'onde doit être une équation linéaire en terme de la fonction d'onde $\psi(x, t)$: en effet, ceci assure que si $\psi_1(x, t)$ et $\psi_2(x, t)$ sont des solutions de l'équation d'onde, alors $\psi(x, t) = a * \psi_1(x, t) + b * \psi_2(x, t)$ est aussi une solution de l'équation d'onde.
- Nous devons retrouver une fonction d'onde harmonique, c.à.d. une combinaison linéaire de fonctions sinusoidales, dans le cas particulier de la fonction d'onde d'une particule libre, c.à.d. une particule sur laquelle ne s'exerce aucune force. Nous postulons l'équation de Schrodinger pour une particule de masse m dans un problème à une dimension :

$$\frac{-\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (3.33)$$

L'énergie potentielle peut varier en fonction du lieu et du temps et le facteur i apparaissant devant la dérivée par rapport au temps est le nombre imaginaire pur tel que $i^2 = -1$ Visiblement, l'équation satisfait à toutes les conditions demandées aux points 1)

- précédents. Examinons l'exigence 4) : sur une particule libre aucune force n'agit, par

conséquent,

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \implies V(x, t) = V_0 = cst \quad (3.34)$$

- Nous voyons tout de suite que
- Les fonction d'onde de la forme $\Psi(\vec{r}, t) = A \sin(kx - \omega t)$ ou $\Psi(\vec{r}, t) = A \cos(kx - \omega t)$ ne satisfont pas à l'équation de Schrodinger postulée, puisque la dérivée *p.r.* au temps change le sinus en cosinus et inversement, alors que la dérivée seconde *p.r.* à x redonne sinus ou cosinus.
- La combinaison complexe des fonctions harmoniques est cependant solution de l'équation de Schrödinger :

$$\psi(x, t) = A \exp^{i(kx - \omega t)} = A [\cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t)] \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega A \exp^{i(kx - \omega t)} = -i\omega \psi(x, t) \text{ et } \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = (ik)^2 A \exp^{i(kx - \omega t)} = -k^2 \psi \implies \frac{-\hbar}{2m} (-k^2 \psi) + V_0 \psi = i\hbar (-i\omega \psi(x, t)) \implies \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = \hbar\omega$$

- Cette dernière égalité est bien celle que nous désirons pour l'énergie totale d'une particule libre.

3.1.3 construction de l'équation de schrodinger :

le physicien autrichien Erwin Schrodinger[?] utilisa les résultats de De Broglie pour établir une équation régissant l'évolution spatiale et temporelle de la fonction d'onde d'un système physique . pour obtenir l'équation de Schrodinger , en prenant la forme de l'onde plan de Broglie :

$$\Psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar} \quad (3.36)$$

ou ω : la pulsation et k : le nombre d'onde

D'après les postulats de la mécanique quantique sont liés à la particule classique par la relation de planck-Einstein :

$$E = \hbar\omega \quad (3.37)$$

et la relation de

L . De Beoglie :

$$\vec{P} = \hbar\vec{K} \quad (3.38)$$

alors :

$$\Psi(\vec{r}, t) = Ae^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar} \quad (3.39)$$

on dérive l'onde par rapport au temps [?] :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\hbar}EAe^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar} = -\frac{i}{\hbar}E\Psi(\vec{r}, t) \quad (3.40)$$

on

obtient

$$E\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r}, t) \quad (3.41)$$

donc

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (3.42)$$

\hat{E} : est l'opérateur d'énergie En dérivant l'onde par rapport à l'espace, il vient

$$\vec{\nabla}\Psi(\vec{r}, t) = \frac{i}{\hbar}pAe^{i(\vec{p}\vec{r} - Et)/\hbar} = \frac{i}{\hbar}p\Psi(\vec{r}, t) \quad (3.43)$$

ou

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad (3.44)$$

$\vec{\nabla}$ est l'opérateur gradient , alors[?]

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (3.45)$$

est l'opérateur d'impulsion

on mécanique classique , l'énergie mécanique de particule libre est donnée par :

$$E = E_C = T = \frac{p^2}{2m} \quad (3.46)$$

cette quantité apparait dans la formulation hamiltonienne pour une particule libre ($V(\vec{r}) = 0$)de la mécanique classique

En appliquant le principe de correspondance entre les valeur classiques et quantique, pour l'énergie, de equation(3.46) et equation (3.47) on obtient :

$$\frac{p^2}{2m}\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) \quad (3.47)$$

ou l'impulsion

$$\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla} \quad (3.48)$$

d'ou

$$\frac{p^2}{2m}\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2\Psi(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi(\vec{r},t) \quad (3.49)$$

ou

$\vec{\nabla}^2 = \nabla$:est le Laplacien

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) \quad (3.50)$$

l'opérateur hamiltonien du systeme pour une particule libre s'écrit

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta \quad (3.51)$$

on utilisant \hat{H} on peut simplifier l'écriture de l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.52)$$

Lorsque la particule est plongée dans un potentiel scalaire $V(\vec{r})$ (par exemple le potentiel d'un oscillateur harmonique) d'après la mécanique classique, l'énergie totale de système s'écrit comme suit :

$$E = T + V(\vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) \quad (3.53)$$

avec cette nouvelle valeur d'énergie est à partir de l'équation 3.53 est l'opérateur d'impulsion \hat{p} , l'équation de Schrödinger devient :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.54)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

m la masse de la particule

Δ^2 est le laplacien

$V(r)$ l'énergie potentielle de la particule au point r .

L'énergie totale ce n'est que l'opérateur Hamiltonien du système :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \quad (3.55)$$

$$\hat{H} \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.56)$$

3.2 propriétés de l'équation de Schrödinger

Cette équation est également linéaire et homogène. Ses solutions sont donc linéairement superposables. Si $|\psi_1(t)\rangle$ et $|\psi_2(t)\rangle$ sont deux solutions de l'équation et si $|\psi\rangle$: l'état initial du système et défini par [20]

$$|\psi(t_0)\rangle = \lambda_1 |\psi_1(t_0)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t_0)\rangle \quad (3.57)$$

alors l'état du système au temps t est donné par :

$$|\psi(t)\rangle = \lambda_1 |\psi_1(t)\rangle + \lambda_2 |\psi_2(t)\rangle \quad (3.58)$$

il existe donc une correspondance linéaire entre $|\psi(t_0)\rangle$ et $|\psi(t)\rangle$.

Les équations de Schrödinger dépendantes du temps sont des équations différentielles du premier ordre par rapport au temps par conséquent, si on connaît ψ à un instant initial (x, t_0) on peut déterminer son évolution, ceci montre que l'état dynamique du système est entièrement déterminé par la fonction ψ .

Si l'hamiltonien du système ne dépend pas du temps, la solution de l'équation de Schrödinger s'écrit sous la forme [20]

$$\psi(x, t) = \psi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \quad (3.59)$$

Avec $\psi(x)$ vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad (3.60)$$

E : La valeur propre de l'hamiltonien

Donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de trouver des états stationnaires parmi tous les états possibles du système qui est en effet un cas particulier d'une équation générale dépendante du temps qui donne l'évolution de la fonction d'onde quel que soit l'état du système

3.2.1 La fonction d'onde

Les solutions de l'équation de Schrödinger d'un système quantique sont appelées les fonctions d'onde, elles peuvent être considérées comme un postulat quantique qui décrit l'état quantique d'une particule et contient toutes les informations qu'on veut connaître du système. La fonction d'onde $\psi(x, t)$ doit satisfaire les conditions suivantes :

Elle doit être continue pour x . La dérivée $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ doit être continue, ces contraintes sont appliquées sous condition de la limite sur les solutions. Elle doit être normalisée. Cela implique que la fonction d'onde en approche à zéro comme x approche à l'infinité c'est-à-dire[20]

$$\int \psi^* \psi d^3 r = \int |\psi|^2 d^3 r \quad (3.61)$$

Avec $|\psi(\vec{r}, t)|^2$ est la densité de probabilité.

Comme on a vu que l'équation de Schrödinger est une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport au temps et de deuxième ordre par rapport aux coordonnées spatiales. C'est une équation difficile à résoudre pour la plupart de systèmes quantiques.

Il existe deux types d'équations de Schrödinger : l'équation de Schrödinger indépendante du temps (stationnaire) et l'équation de Schrödinger dépendante du temps (non stationnaire)

3.3 oscillateur de Schrödinger dans l'espace non commutatif à trois dimensions

Maintenant, dans le contexte de la mécanique quantique non commutative, nous suggérons de développer l'article[79], où l'on résout explicitement l'équation de l'oscillateur du Schrödinger dans l'espace non commutatif, ci-dessous

$$H * \Psi = E\Psi. \quad (3.62)$$

où l'hamiltonien du système prend la forme

$$H = \frac{P_x^2}{2\mu} + \frac{P_y^2}{2\mu} + \frac{P_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega_E^2 [X^2 + Y^2 + Z^2] \quad (3.63)$$

Avec la fréquence $\omega_E = \omega (1 + \gamma E)^q$ dépendant de l'énergie et q, γ est un parametres

En d'autres part, il est bien connu que dans le cas où $[p_i, p_j] = 0$, la mécanique quantique non commutative peut être réduite à la mécanique quantique habituelle lorsque les opérateurs de coordonnées non-commutatives sont exprimés en termes des opérateurs de coordonnées commutatives et leurs opérateurs du moments sous la forme suivante[22]

$$x_i \rightarrow x_i - \frac{1}{2\hbar} \theta_{ij} p_j \quad \text{et} \quad p_i \rightarrow p_i, \quad i = \overline{1,3} \quad (3.64)$$

avec les paramètres du tenseur antisymétrique θ sont choisis comme

$$\theta_{ij} = \epsilon_{ijk} \theta_k \quad \text{et} \quad \theta_3 = \theta \quad (3.65)$$

et les autres composantes égales à zéro

Sur la base de ce fait, on peut réécrire la transformation 3.64 sous la forme condensée suivante[17]

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \frac{\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{p}}{2\hbar}, \quad \text{avec} \quad \theta_{12} = -\theta_{21} = \theta_3 = \theta \quad (3.66)$$

avec \times est le produit vectoriel.

Maintenant, si en tenant compte de la transformation ?? représentant le passage d'un espace non commutatif vers un autre espace commutatif dans l'équation 3.66, la solution stationnaire de l'équation de l'oscillateur du Schrödinger dans l'espace non commutatif s'écrira comme suit

$$\left\{ \left(1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) (p_x^2 + p_y^2) + \mu^2 \omega_E^2 (x^2 + y^2) + \mu^2 \omega_E^2 z^2 - \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta}{\hbar} L_z + p_z^2 \right\} \psi = 2\mu E \psi \quad (3.67)$$

où $L_z = xp_y - yp_x$ est l'opérateur de moment cinétique

Maintenant, il est suitable d'exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction de coordonnées cylindriques (r, φ, z) dans la prédite équation 3.67, pour obtenir

$$\left[\hbar^2 \left(1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \right. \quad (3.68)$$

$$\left. - \mu^2 \omega_E^2 r^2 + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu^2 \omega_E^2 z^2 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta}{\hbar} \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \psi(r, \varphi, z) = -2\mu E \psi(r, \varphi, z) \quad (3.69)$$

On sépare les variables radiales, ongulaires et axiales de la fonction d'onde ψ en posant

$$\psi(r, \varphi, z) = C e^{i|m|\varphi} \frac{R(r)}{\sqrt{r}} \Psi^{osc}(z) \quad (3.70)$$

En remplaçant $\psi(r, \varphi, z)$ par son expression dans l'équation 3.68, on trouve

$$\frac{1}{R(r)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \frac{\mu^2 \omega_E^2}{M^2} r^2 + N \right] R(r) = \frac{1}{\Psi^{osc}(z)} \left[-\frac{\hbar^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\mu^2 \omega_E^2}{M^2} z^2 \right] \Psi^{osc}(z) = b \quad (3.71)$$

avec

$$M^2 = \hbar^2 \left(1 + \frac{\mu^2 \omega_E^2 \theta^2}{4\hbar^2} \right) \quad (3.72)$$

$$N = \frac{1}{M^2} (2\mu E + \mu^2 \omega_E^2 \theta |m|) \quad (3.73)$$

Le terme radial est égal au terme axial si chaque équation est égale à la même constante de séparation b , les deux équations s'écrivent

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} - \frac{\mu^2 \omega_E^2}{M^2} r^2 + \alpha \right) R(r) = 0 \quad (3.74)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\mu^2 \omega_E^2}{\hbar^2} z^2 - \beta \right) \Psi^{osc}(z) = 0 \quad (3.75)$$

avec $\alpha = N - b$, $\beta = -\frac{M^2}{\hbar^2} b$

Pour l'équation(3.75) on pose, $z^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega} \rho^2$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{4} \rho^2 + n_z + \frac{1}{2} \right) F(\rho) = 0 \quad (3.76)$$

avec

$$\beta = -\frac{(2n_z + 1) \mu \omega_E}{\hbar}, \quad b = \frac{\mu \omega_E \hbar}{M^2} (2n_z + 1) \quad (3.77)$$

dont $n_z = 1, 2, 3, \dots$ est le nombre quantique principal[15].

Nous aurons une équation de type parabolique, possédant la même fonction que celle de

Weber $D_n(\rho)$

$$D_{n_z}(\rho) = N_0 \exp\left(-\frac{\rho^2}{4}\right) H_{n_z}\left(2^{-\frac{1}{2}}\rho\right) \quad (3.78)$$

par déduction, nous obtenons

$$\Psi_{n_z}^{osc}(z) = D_{n_z}\left(\sqrt{\frac{2\mu\omega_E}{\hbar}}z\right) = N_0 \exp\left(-\frac{\mu\omega_E z^2}{2\hbar}\right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega_E}{\hbar}}z\right) \quad (3.79)$$

avec N_0 , est la constante de normalisation, $H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}z\right)$ est le polynôme d'hermite.

Pour l'équation (3.74), la fonction d'onde $R(r)$ se transforme à

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\chi^2} - \chi^2 - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{\chi^2} + \varepsilon\right) R(\chi) = 0 \quad (3.80)$$

avec

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{M}{\mu\omega}} \\ \chi = \frac{r}{M^a} \\ \varepsilon = \frac{M^a}{\mu\omega_E} \alpha \end{cases} \quad (3.81)$$

Maintenant, lorsque nous introduisons une nouvelle variable $\xi = \chi^2$ et une nouvelle fonction $W(\xi)$ par la relation

$$g(\chi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^\kappa W(\xi), \quad (3.82)$$

nous arrivons à

$$\left\{ \xi \frac{d^2}{d\xi^2} + \left(2\kappa + \frac{1}{2} - \xi\right) \frac{d}{d\xi} + n \right\} W(\xi) = 0, \quad (3.83)$$

avec

$$\begin{cases} 4\kappa(\kappa - \frac{1}{2}) = (\lambda^2 - \frac{1}{4}) \\ n = \frac{\varepsilon}{4} - \kappa - \frac{1}{4} \end{cases} \quad (3.84)$$

d'où

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(|m| + \frac{1}{2} \right) \quad (3.85)$$

L'équation(3.83) est une équation de la fonction confluyente hyper-géométrique

$$W(\xi) = \lambda_{norm} F(-n; |m| + 1, \xi). \quad (3.86)$$

Où la forme finale de la fonction d'onde $R(r)$, s'écrit

$$R_{n,m}(r) = \frac{\lambda_{nom}}{a(|m|+\frac{1}{2})} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} r^{|m|} F\left(-n; |m|+1, \frac{r^2}{a^2}\right). \quad (3.87)$$

avec

$$a^2 = \frac{\hbar}{\mu\omega_E} \left(1 + \frac{\mu^2\omega_E^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.88)$$

Alors la forme générale de l'équation 3.79, est réécrite comme

$$\varphi_{1n,\lambda}(r, \varphi, z) = \frac{N e^{i|m|\varphi}}{a(|m|+\frac{1}{2})} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{\mu\omega_E z^2}{\hbar}\right)\right] r^{|m|} F\left(-n; |m|+1, \frac{r^2}{a^2}\right) H_{n_z}\left(\sqrt{\frac{\mu\omega_E}{\hbar}} z\right). \quad (3.89)$$

avec $N = N_0\lambda_{nom}$ est la constante de normalisation.

Injectant les expressions 3.84, (3.85), 3.86, 3.87, (3.88) dans l'équation(3.89), les valeurs propres de l'énergie seront données par

$$E_{n,n_z,|m|} = \hbar\omega_E \left(1 + \frac{\mu^2\omega_E^2\theta^2}{4\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} (2n + |m| + 1) + \hbar\omega_E (n_z - 1) - \left(\frac{\mu^2\omega_E^2\theta}{\hbar}\right) \frac{\hbar|m|}{2\mu}. \quad (3.90)$$

Considérons les valeurs particulières suivantes de q (γ et θ)

1er cas : $q = 1$ ($\omega_E = \omega_0 (1 + \gamma E_{n,n_z,m})$)

L'équation 3.90 peut s'écrire sous la forme

$$aE_{n,n_z,m}^4 + bE_{n,n_z,m}^3 + cE_{n,n_z,m}^2 + dE_{n,n_z,m} + e = 0 \quad (3.91)$$

où

$$a = \frac{\mu^2\theta^2\gamma^4\omega^4}{4} \left[|m|^2 - (2n + |m| + 1)^2\right] \quad (3.92)$$

$$b = \frac{1}{a} \left[\left[\mu^2\theta^2\gamma^4\omega^4 \left[|m|^2 - (2n + |m| + 1)^2\right] + \mu\theta|m|\gamma^2\omega^2 [1 - \hbar\gamma\omega (n_z - 1)] \right] \right] \quad (3.93)$$

$$c = \frac{1}{a} \left[\frac{3\mu^2\theta^2\gamma^2\omega^4}{2} \left[|m|^2 - (2n + |m| + 1)^2 \right] + \mu\theta |m| \omega^2 \gamma [2 - 3\hbar\omega\gamma (n_z - 1)] - \hbar^2\omega^2\gamma^2 (2n + |m| + 1)^2 + [1 - \hbar\omega\gamma (n_z - 1)]^2 \right] \quad (3.94)$$

$$d = \frac{1}{a} \left[\mu^2\theta^2\gamma\omega^4 \left[|m|^2 - (2n + |m| + 1)^2 \right] - 2\hbar^2\omega^2\gamma (2n + |m| + 1)^2 + \mu\theta |m| \omega^2 + \hbar (n_z - 1) [2\omega [\hbar\omega\gamma (n_z - 1) - 1] - \mu\theta |m|] \right] \quad (3.95)$$

$$e = \frac{1}{a} \left[\left[\frac{\mu^2\theta^2\omega^4}{4} \left[|m|^2 - (2n + |m| + 1)^2 \right] - \hbar^2\omega^2 (2n + |m| + 1)^2 + \hbar^2\omega^2 (n_z - 1)^2 - \hbar\mu\theta\omega^3 (n_z - 1) \right] \right] \quad (3.96)$$

l'équation peut être résolue via l'équation suivante du deuxième ordre [27]

$$E_{n,n_z,m}^2 + (b + A) \frac{E_{n,n_z,m}}{2} + y_{n,n_z,m} + \frac{by_{n,n_z,m} - d}{A} = 0 \quad (3.97)$$

où $A = \pm \sqrt{8y_{n,n_z,m} + b^2 - 4c}$. Ainsi, il existe quatre solutions

$$E_{(n,n_z,m)_{1,2,3,4}} = \frac{1}{4} \left[-(b + A) \pm \sqrt{(b + A)^2 - 16 \left(y_{n,n_z,m} + \frac{by_{n,n_z,m} - d}{A} \right)} \right] \quad (3.98)$$

, et $y_{n,n_z,m}$ est l'une des racines réelles de l'équation cubique

$$8y_{n,n_z,m}^3 - 4cy_{n,n_z,m}^2 + (2bd - 8e)y_{n,n_z,m} + e(4c - b^2) - d^2 = 0 \quad (3.99)$$

où $y_n = \sqrt[3]{\sqrt{D} - \frac{Q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{D} + \frac{Q}{2}} - \frac{R}{3}$

avec $D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2$, $P = S - \frac{R^2}{3}$, $Q = 2\left(\frac{R}{3}\right)^3 - \frac{RS}{3} + \frac{e(4c-b^2)-d^2}{8}$, $R = -\frac{c}{2}$, et $S = \frac{bd}{4} - e$

A partir des quatre solutions données par l'Eq.3.98, une seule racine positive satisfaisant les conditions

$$|1 + \gamma E_{n,n_z,m}| \succ 0 \text{ et } [4aE_{n,n_z,m}^3 + 3bE_{n,n_z,m}^2 + 2cE_{n,n_z,m} + d] \succ 0 \text{ pistes aux fonctions}$$

d'onde normalisables

$$\begin{aligned} \psi_{E_{n,n_z,m}}(r, \varphi, z) = & \sqrt{\frac{2\pi\sigma_{n,n_z,m} (2n + |m| + n_z) n!}{\pi M_{n,n_z,m} [4aE_{n,n_z,m}^3 + 3bE_{n,n_z,m}^2 + 2cE_{n,n_z,m} + d] \Gamma(n + |m| + 1)}} \quad (3.100) \\ & \times e^{i|m|\varphi} \frac{1}{r} \left(\frac{\sigma_{n,n_z,m}}{\hbar} r^2 \right)^{\frac{|m|+n_z}{2}} e^{-\frac{\sigma_{n,n_z,m}}{2\hbar} r^2} L_n^m \left[\frac{\sigma_{n,n_z,m}}{\hbar} r^2 \right] \end{aligned}$$

où $L_n^m \left[\frac{\sigma_{n,n_z,m}}{\hbar} r^2 \right]$ sont des fonctions de Laguerre, $\sigma_{n,n_z,m} = \mu\omega_0 \frac{1+\gamma E_{n,n_z,m}^+}{\sqrt{1+\frac{\mu^2\theta^2\omega_0^2(1+\gamma E_{n,n_z,m}^+)^2}{4\hbar^2}}}$, $M_{n,n_z,m} = \frac{\mu}{1+\frac{\mu^2\theta^2\omega_0^2(1+\gamma E_{n,n_z,m}^+)^2}{4\hbar^2}}$ et $E_{n,n_z,m}^+$ satisfaisant l'éq. 3.98

3.4 Application

Dans le cas où $\gamma \neq 0$ (potentiel dépendant de l'énergie), $\theta = 0$ (espace commutatif), $M_{n,n_z,m} \rightarrow \mu$, et $\sigma_{n,n_z,m} \rightarrow \mu\omega_0 (1 + \gamma E_{n,n_z,m}^+)$ et les valeurs propres d'énergie et les les fonctions d'onde sont respectivement

$$E_{n,n_z,|m|} = \frac{\hbar\omega_0 [2n + |m| + n_z]}{1 - \gamma\hbar\omega_0 [2n + |m| + n_z]} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \psi_{E_{n,n_z,m}}(r, \varphi, z) = & \sqrt{\frac{n!}{\pi\mu [1 - \hbar\omega_0\gamma [2n + |m| + n_z]] \Gamma(n + |m| + n_z)}} \quad (3.102) \\ & \times e^{i|m|\varphi} \frac{1}{r} \left(\frac{\mu\omega_{n,n_z,|m|}}{\hbar} r^2 \right)^{\frac{|m|+n_z}{2}} e^{-\frac{\omega_{n,n_z,m}}{2\hbar} r^2} L_n^{|m|} \left[\frac{\omega_{n,n_z,m}}{\hbar} r^2 \right] \end{aligned}$$

dans le premier et le second cas où $\gamma = 0$ (le potentiel ne dépendant pas de l'énergie) et $\theta \neq 0$ (espace non commutatif), $M_{n,n_z,m} \rightarrow M_\theta$, $\omega_{n,|m|,n_z} \rightarrow \omega_0$ et $\sigma_{n,n_z,m} \rightarrow \sigma_\theta$, alors l'énergie et les fonctions d'onde sont données, respectivement, par

$$E_{n,n_z,|m|} = \hbar\omega_0 \left(1 + \frac{\mu^2\omega_0^2\theta^2}{4\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} (2n + |m| + 1) + \hbar\omega_0 (n_z - 1) - \left(\frac{\mu^2\omega_0^2\theta}{\hbar} \right) \frac{\hbar |m|}{2\mu} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \psi_{E_{n,n_z,m}}(r, \varphi, z) &= \sqrt{\frac{n!}{\pi\Gamma(n + |m| + n_z)}} \\ &\times e^{i|m|\varphi} \frac{1}{r} \left(\frac{\sigma_\theta}{\hbar} r^2\right)^{\frac{|m|+n_z}{2}} e^{-\frac{\sigma_\theta}{2\hbar} r^2} L_n^{|m|} \left[\frac{\sigma_\theta}{\hbar} r^2\right] \end{aligned} \quad (3.104)$$

Dans le premier et le second cas où $\gamma = 0$ (le potentiel ne dépendant pas de énergie) et $\theta = 0$ (espace commutatif), $\omega_{n,n_z,m} \rightarrow \omega_0$, $M_{n,n_z,m} \rightarrow \mu$ et $\sigma_\theta \rightarrow \mu\omega_0$

alors l'énergie et les fonctions d'onde sont données par

$$E_{n,n_z,|m|} = \hbar\omega_0 [2n + |m| + n_z] \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \psi_{E_{n,n_z,m}}(r, \varphi, z) &= \sqrt{\frac{n!}{\pi\Gamma(n + |m| + n_z)}} \\ &\times e^{i|m|\varphi} \frac{1}{r} \left(\frac{\mu\omega_0}{\hbar} r^2\right)^{\frac{|m|+n_z}{2}} e^{-\frac{\mu\omega_0}{2\hbar} r^2} L_n^{|m|} \left[\frac{\mu\omega_0}{\hbar} r^2\right] \end{aligned} \quad (3.106)$$

De même que le cas précédent, le comportement énergétique dans le cas $q = 1$ peut être étudié graphiquement

Nous voyons sur la *Fig.1* que la dépendance de l'énergie sur le paramètre θ est insignifiant pour des valeurs de γ négatives comme dans le cas précédent. Encore une fois, différentes valeurs de γ entraînent des écarts par rapport aux valeurs d'énergie normales (c'est-à-dire $\theta = \gamma = 0$). Ici, seules les valeurs γ négatives sont considérées comme des valeurs γ positives ne satisfaisant pas la normalisation état en général.

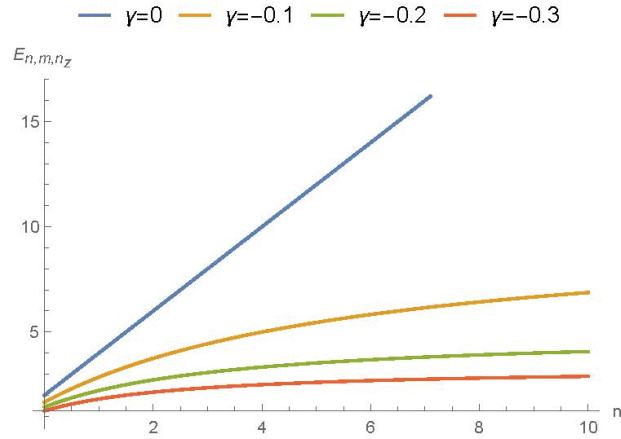


Figure1 : $\gamma \theta = 0$, γ variable

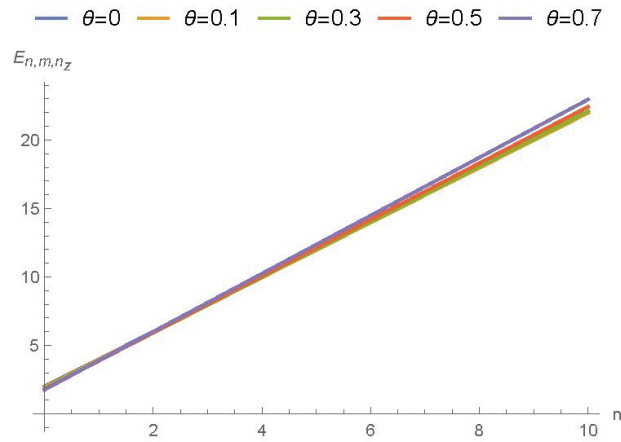


Figure2 : $\gamma = 0$, θ variable

La Figure 2 montre la dépendance γ de l'énergie. Un effet de type Zeeman est à nouveau observé. Nous voyons aussi que les différences dans le paramètre de non-commutativité θ font n'affecte pas les valeurs énergétiques de manière significative

Chapitre 4

conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons donné une solution exacte pour l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique avec une fréquence dépendante de l'énergie en mécanique quantique tridimensionnelle dans l'espace non commutative.

Nous avons déterminé la correction relative à la condition de normalisation. La présence d'un oscillateur harmonique dépendant de l'énergie dans l'équation de Schrodinger avec non-commutativité entre les coordonnées conduit au problème du potentiel dépendant de l'énergie, ce qui nécessite une modification de la condition de normalisation habituelle pour maintenir la conservation de la norme.

Les valeurs propres d'énergie et les fonctions d'onde sont étudiées pour deux scénarios distincts ($q = 1$), ainsi que certaines limites ($\gamma = 0$, c'est-à-dire le potentiel indépendant de l'énergie, et $\theta = 0$, c'est-à-dire l'espace commutatif). En physique quantique non relativiste, la non-commutativité entre les coordonnées affectait la condition de normalisation dans laquelle la fréquence de l'oscillateur harmonique dépendait directement de l'énergie. Les effets des paramètres sur les valeurs propres de l'énergie ont été examinés plus en détail par analyse graphique. Nous avons remarqué que les écarts par rapport à la valeur standard $\gamma = 0$ produisent un effet Zeeman.

Bibliographie

- [1] H. S. Snyder, Phys. Rev. 71, 38 (1947).
- [2] P.M. Ho and H.C. Kao, Phys. Rev. Lett. 88, (2002) 151602.
- [3] W. Pauli : Z. Physik 43 (1927) 601.
- [4] J. Formanek, J. Mares and R. Lombard, Czech. J. Phys. 54, 289 (2004).
- [5] A. Benchikha and L. Chetouani, Cent.Eur.J.Phys. 12, 392 (2014).
- [6] A Benchikha, M Merad, T Birkandan - Modern Physics Letters A, 2017
- [7] orge Luis BorgesTlön, Uqbar, Orbis tertius, FiccionesLo recuerdo en el corredor del hotel, con un libro de matemáticas en la mano, mirando a veces los colores irrecuperables del cielo
- [8] Emmanuel Sérié, Théories de jauge en géométrie non commutative et généralisation du modèle de Born-Infeld, Université Paris 6, (2005)..
- [9] KHELILI FARID Aspects mathématiques et physiques de la géométrie non commutative Université de Arizona 2007
- [10] Matthieu Lefrançois Théorie des champs topologiques et mécanique quantique en espace non-commutatif Thèse de Doctorat Soutenue le 5 décembre 2005 à l'Université Claude Bernard Lyon-I
- [11] C Cohen-Tannoudji, J Dalibard. . . - Einstein aujourd'hui . . . , 2005 - college-de-france.fr
- [12] L Mezincescu - arXiv preprint hep-th/0007046, 2000 - arxiv.org arXiv :hep-th/0007046v2 21 Jul 2000 Page 1 arXiv :hep-th/0007046v2 21 Jul 2000 July 2000UMTG - 233 Star operation in Quantum Mechanics * L. Mezincescu† Department of Physics, University of Miami, Coral Gable

- [13] Matthieu Lefrançois Théorie des champs topologiques et mécanique quantique en espace non-commutatif Thèse de Doctorat Soutenue le 5 décembre 2005 à l'Université Claude Bernard Lyon-I
- [14] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED, Phys. Rev. Lett. 86(2001) 2716, hep- .th/0010175 [19] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Co
- [15] H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig, Hirzel, 1928.
- [16] Abdelouahab Mohamed,Bahache Fouad,Nouveau traitement de l'équation de Schrödinger pour le nouveau potentiel de Cornell modifié dans l'espace de phase non commutatif à deux dimensions,Du diplôme de Master Académique,UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA,2019
- [17] Begui Mohamed, calcul des éléments de matrice dipolaires dans un géométrie non comu- tative ,diplome de magister , Université el-oud,2013
- [18] de Broglie L. (1925). "Recherches sur la théorie des quanta" [On the Theory of Quanta] (PDF). Annales de ^ .2 .Physique. 10 (3) : 22–128. Translated version
- [19] Encyclopaedia of Physics (2nd Edition), R.G. Lerner, G.L. Trigg, VHC publishers, 1991, (Verlagsgesellschaft) 3- ^ .4 527-26954-1, (VHC Inc.) ISBN 0-89573-752-3
- [20] Chourab Manel Quelques structures à l'équation de Schrödinger linéaire au moyen de la méthode des transformées différentielles, MÉMOIRE DE MASTER,Université Mohamed Khider de Biskra, 2019/2020
- [21] Boulkorn mouna,Boulkorn ilhem,TRAITEMENT DE QUELQUES SYSTEMES QUAN- TIQUES VIA L'ESPACE NON COMMUTATIF,MEMOIRE de Master,Université Larbi ben M'hidi Oum el Bouaghi,2020
- [22] B. Mirza and M. Mohadesi, Commun. Theor. Phys. 42, 664 (2004).
- [23] Siham HAYOUNE,La géométrie non commutative et application sur l'atome d'hydro- gène,Mémoire de Master,Université Abderahmane MIRA - Béjaia,2013

- [24] DEFFAF ABLA, Solution de l'équation de Schrödinger dans l'espace non commutative avec plusieurs types d'interactions, MEMOIRE de Master, Université Mohamed Boudiaf - M'sila, 2016
- [25] H. Sobhania, and H. Hassanabadi, *Physics of Particles and Nuclei Letters*, 2018, Vol. 15, No. 5, pp. 469–472
- [26] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, and A. Luis, “Chirality quantum phase transition in the Dirac oscillator,” *Physical Review A*, vol. 77, no. 6, ArticleID063815, 2008.
- [27] C. Grosche, *J. Phys. A : Math. Gen.* 29, L183 (1996).
- [28] A. Maireche, Non relativistic Atomic Spectrum for Companioned Harmonic Oscillator Potential and its Inverse in both NC-2D : RSP, *International Letters of Chemistry, Physics and Astronomy*, Vol. 56, pp. 1-9, Jul. 2015.
- [29] R. de Lima Rodrigues, “On the Dirac oscillator,” *Physics Letters A*, vol. 372, no. 15, pp. 2587–2591, 2008.
- [30] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A* 22 (1989) L817.
- [31] E. T. Jaynes and F.W. Cummings, “Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 51, no. 1, pp. 89–109, 1963.
- [32] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two Level Atoms*, Dover Publications, Mineola, New York, USA, 1987.
- [33] M. Moreno and A. Zentella, “Covariance, CPT and the Foldy- Wouthuysen transformation for the Dirac oscillator,” *Journal of Physics A :Mathematical and General*, vol. 22, no. 17, L821 pages, 1989.
- [34] R. P. Martinez-y-Romero and A. L. Salas-Brito, “Conformal invariance in a Dirac oscillator,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 33, no. 5, 1831 pages, 1992.
- [35] J. Benitez, R. P. Martinez y Romero, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, “Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator,” *Physical Review Letters*, vol. 64, 1643, no. 14, 1990.
- [36] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 1999, no. 09, article 032, 1999.

- [37] R. Gopakumar, S. Minwalla, and A. Strominger, “Noncommutative solitons,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2000, no. 05, 2000.
- [38] S. Cai, T. Jing, G. Guo, and R. Zhang, “Dirac oscillator in non-commutative phase space,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 49, no. 8, pp. 1699–1705, 2010.
- [39] A. Boumali and H. Hassanabadi, “Exact solutions of the (2 + 1)-dimensional Dirac oscillator under a magnetic field in the presence of a minimal length in the non-commutative phase space,” *Zeitschrift für Naturforschung A - A Journal of Physical Sciences*, vol. 70, no. 8, 619 pages, 2015.
- [40] B.P. Mandal and S.K. Rai, “Noncommutative Dirac oscillator in an external magnetic field,” *Physics Letters A*, vol. 376, no. 36, pp. 2467–2470, 2012.
- [41] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, and J. N. Prata, “Noncommutative graphene,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 28, no. 16, Article ID 1350064, 13 pages, 2013.
- [42] Z.-Y. Luo, Q. Wang, X. Li, and J. Jing, “Dirac oscillator in noncommutative phase space and (anti)-Jaynes-Cummings models,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 51, no. 7, pp. 2143–2151, 2012.
- [43] K. S. Novoselov et al., *Science* 306, 666 (2004).
- [44] K. S. Novoselov et al., *Proc. Natl. Acad. Sci.* 102, 10451 (2005).
- [45] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov and A. K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* 81, 10 (2009).
- [46] N. Peres, *Rev. Mod. Phys.* 82, 2673 (2010).
- [47] Charles L. Fefferman and Michael I. Weinstein, *J. Amer. Math. Soc.* 25, 1169 (2012).
- [48] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Nat. Phys.* 2, 620 (2006).
- [49] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Nat. Phys.* 2, 620 (2006).
- [50] V. Santos, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *Ann. Phys.* 349, 402 (2014).
- [51] A. K. Geim and K. S. Novoselov, *Nature Materials* 6 (3) (2007) 183.
- [52] V. P. Gusynin, and S. G. Sharapov, *Phys. Rev. Lett.* 95 (2005) 146801.

- [53] K. Novoselov, E. McCann, S. Morozov, V. Fal'ko, M. Katsnelson, U. Zeitler, D. Jiang, F. Schedin, and A. Geim, *Nature Physics* 2 (3) (2006) 177.
- [54] P. Streda, *J. Phys. C* 15 (1982) L717.
- [55] Z. Jiang, E.A. Henriksen, L.C. Tung, Y.-J. Wang, M.E. Schwartz, M.Y. Han, P. Kim and H.L. Stormer, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 197403.
- [56] B. Muthukumar, and P. Mitra, *Phys. Rev. D* 66, 027701 (2002).
- [57] M. Najafzadeh, M. Saadat, *Chinese Journal of Physics* 51, 94 (2013).
- [58] V.V. Dixit, T.S. Santhanam, and W.D. Thacker, *J. Math. Phys.* 33 (1992) 1114.
- [59] R.P. Martinez-y-Romero, H.N. Nunez-Yepe, and A.L. Salas-Brito, *Eur. Phys. J.* 16 (1995) 135.
- [60] C. Hoa and P. Royb, *Ann. Phys.* 312 (2004) 161.
- [61] C. Wu and K. Xue, *Int. J. Theor. Phys.* 43 (2004) 2395.
- [62] N. Ferkous and A. Bounames, *Phys. Lett. A* 325 (2004) 21.
- [63] S. Bruce and P. Mining, *Nuovo Cimento A*106, 711 (1993).
- [64] V. V. Dvoeglazov, *Nuovo Cimento A*107, 1413 (1994).
- [65] Y. Nedjadi and R.C. Barrett, *J. Phys. A : Math. Gen.* 27 (1994) 4301.
- [66] Y. Nedjadi and R.C. Barrett, *J. Phys. A : Math. Gen.* 31 (1998) 6717.
- [67] Y. Nedjadi, S. Ait-Tahar, and R.C. Barrett, *J. Phys. A :Math. Gen.* 31 (1998) 3867.
- [68] D.A. Kulikov, R.S. Tutik, and A.P. Yaroshenko, *Mod.Phys. Lett. A* 26 (2004) 12.
- [69] Y. Chargui, L. Chetouani, and A. Trabelsi, *Commun. Theor. Phys.* 53, 231 (2010).
- [70] M. G. Garcia, A. S. de Castro, L. B. Castro, P. Alberto *Annals of Physics* 378 (2017) 88.
- [71] H. S. Snyder *Phys. Rev.* 71 (1947) 38.
- [72] A. Kempf, *J. Math. Phys.* 35 (1994) 4483 ; A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, *Phys. Rev. D* 52 (1995) 1108.
- [73] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov *Rev. Mod. Phys.* 73 (2001) 977.
- [74] G. Amelino-Camelia *Phys. Lett. B* 510 (2001) 255 ; G. Amelino-Camelia *Int. J. Mod. Phys. D* 11 (2002) 35.

- [75] S. Capozziello, G. Lambiase, G. Scarpetta, *Int.J.Theor.Phys.* 39 (2000) 15.
- [76] F. Scardigli, *Phys. Lett. B*452 (1999) 39 ; F. Scardigli and R. Casadio, *Class. Quant. Grav.* 20 (2003) 3915.
- [77] S. Mignemi, *Phys. Rev.* 84 (2011) 025021.
- [78] S. Ghosh and S. Mignemi, *Int. J. Theor. Phys.* 50 (2011) 1803.
- [79] S. Mignemi *Class. Quantum Grav.* 29 (2012) 215019.
- [80] M.M. Stetsko, *J. Math. Phys.* 56 (2015) 012101.
- [81] M. Moreno and A. Zentella, *J. Phys. A : Math. Gen.* 22, L821 (1989).
- [82] M. Pacheco, R. Landim, and C. Almeida, *Phys. Lett. A* 311, 93 (2003).
- [83] F. Ravndal, *Phys. Lett. B* 113, 57 (1982).
- [84] Kh. Nouicer, *J. Phys. A : Math. Gen.* 39, 5125 (2006).
- [85] M. Falek, M. Merad, and T. Birkandan, *J. Math. Phys.* 58, 023501 (2017).
- [86] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic, New York, 1980).
- [87] Y. Xiao, Z. Long, and S. Cai, *Int. J. Theor. Phys.* 50, 3105 (2011).
- [88] L.S. Brown and G. Gabrielse, *Rev. Mod. Phys.* 58, 233 (1986) ; R.K. Mittleman, I.I. Ioannou, H.G. Dehmelt, and N. Russell, *Phys. Rev. Lett.* 83, 2116 (1999)
- [89] L.N Chang, D. Minic, N. Okamura and T. Takeuchi, *Phys. Rev. D*65 (2002) 125027.
- [90] M. H. Pacheco, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, and R. R. Landim, *Europhys. Lett.* 108, 10005 (2014).
- [91] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999).

Résumé:

Dans la mécanique quantique non commutative, le problème de l'oscillateur harmonique dépendant de l'énergie est étudié en résolvant l'équation de Schrödinger en coordonnées sphérique. La présence de la non-commutativité dans les coordonnées spatiales et la dépendance à l'énergie pour la masse et le potentiel de rendement potentiel dépendant de l'énergie. La correction de la condition de normalisation est calculée et les dépendances des paramètres des résultats sont étudiées graphiquement.

Les mots clés : l'équation de Schrödinger, mécanique quantique ,espace non- non commutatif, coordonnées sphérique

Abstract:

In noncommutative quantum mechanics, the energy-dependent harmonic oscillator problem is studied by solving the Schrödinger equation in spherical coordinates. The presence of non-commutativity in spatial coordinates and the energy dependence for mass and energy-dependent potential yield potential. The correction of the normalization condition is calculated and the dependencies of the parameters of the results are studied graphically

Key words: Schrödinger equation, quantum mechanics, non-commutative space, spherical coordinates

ملخص

في ميكانيك الكم اللاتبادلية يتم دراسة مشكلة الهزاز التوافقي المعتمد على الطاقة من خلال حل معادلة شرودنجر في الاحداثيات الكروية . وجود الاحداثيات في فضاء الهندسة اللاتبادلية والاعتماد على طاقة الكتلة والطاقة التي تعتمد على الكمون ويتم التأكد من صحة الحسابات والنتائج بيانيا

الكلمات المفتاحية

.ميكانيك الكم .الهندسة اللاتبادلية . الاحداثيات الكروية ;معادلة شرودنجر