



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ «Abbès LAGHROUR» DE KHENCHELA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



Département de Mathématiques et informatique

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)

Spécialité : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Sur la Convergence de la Méthode des Différences Finies

Réalisés par :

ZEBAIR Sofiane

BEKHOUCHE Fares

Membres de jury :

Mme ZAHY Ouanassa

MAA

U. Khenchela

Présidente

Mme DERDOUKH Asma

MAA

U. Khenchela

Examinatrice

Mr SAOUDI Khaled

MCA

U. Khenchela

Rapporteur

Présenter le 05/09/2017

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein de département de mathématique et informatique de l'université de khenchela.

*Nous exprimons nos vifs remerciements et reconnaissances au promoteur Monsieur : **SAOUDI Khaled**, Maître assistant A au département de mathématique et informatique de L'université de khenchela, pour avoir pris en soin le sujet, et qui par son assistance, son aide, ses conseils précieux, son savoir scientifique sa vue méthodique des choses et sa gentillesse formidable.*

Nous adressons toute notre reconnaissance au Monsieur le chef de département de mathématique et informatique, à qui nous exprimons notre profonde gratitude pour tous ses aides et ses orientations.

Nous remercions vivement les membres de jury pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de juger notre travail.

Nous ne pourrions terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de nos enseignants ainsi qu'à nos collègues avec qui nous avons partagé d'agréables moments durant cette formation.



Dédicaces

*Je dédie cet humble travail, tout particulièrement, aux personnes qui sont **les plus chères du monde**, qui m'inspirent et me donnent le courage et l'espoir.*

A ma mère que j'aime beaucoup

A mon père que j'estime beaucoup

A mes frères

Et mes sœurs

A mes chers amis

Z/SOUFIAN



Dédicaces

*Je dédie cet humble travail, tout particulièrement, aux personnes qui sont **les plus chères du monde**, qui m'inspirent et me donnent le courage et l'espoir.*

A ma mère que j'aime beaucoup

A mon père que j'estime beaucoup

A mes frères

Et mes sœurs

A mes chers amis

B/FARES

Table des matières

1	Préliminaire	6
1.1	Développements limités	7
1.1.1	Développement limité d'ordre n au voisinage de 0	7
1.1.2	Formule de Taylor	7
1.1.3	Formule de Maclaurin	8
1.1.4	Propriétés	8
1.2	Dérivées partielles	8
1.3	Maillage	9
1.4	Convergence	9
1.5	Espace de Lebesgue L^p	9
1.5.1	Espace L^∞	10
1.6	Transformation de Fourier	10
1.6.1	Transformée de Fourier de la dérivée	11
1.6.2	Inversion de Fourier	11
1.6.3	Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables	11
2	Équations aux Dérivées Partielles	12
2.1	Équations aux dérivées partielles	13
2.2	Équations aux dérivées partielles linéaire	14
2.3	Classification des EDP du second ordre	15
2.4	Conditions aux limites classiques	16
2.4.1	Condition aux bords de Dirichlet	16
2.4.2	Condition aux bords de Neumann	16
2.4.3	Condition mixte de Robin	16
2.4.4	Condition initiale ou condition de Cauchy	17
2.5	Problème aux limites	17
3	Convergence de la Méthode des Différences Finies	18
3.1	Principe de la méthode des différences finies	19
3.1.1	Principe générale de la méthode et ordre de précision	19
3.1.2	Schémas des différences finies approximant la première dérivée	20
3.1.3	Dérivée d'ordre supérieur	23
3.2	Généralisation de la notation indicielle	23
3.3	Discrétisation des dérivées en temps	24
3.3.1	Approximation de la dérivée première $\frac{\partial u}{\partial t}$	24

TABLE DES MATIÈRES

3.4	Approximation de Condition initiale et Conditions aux limites	25
3.5	Convergence	25
3.6	Consistance et ordre de précision	26
3.6.1	Erreur de troncature	26
3.6.2	Consistance	26
3.6.3	Ordre de consistance	26
3.7	Stabilité : principes généraux	26
3.7.1	Stabilité L^2 : la méthode de Fourier-Von Neumann	28
3.7.2	Stabilité L^∞ (Principe de maximum discret)	29
3.7.3	Théorème de Lax	29
4	Applications	30
4.1	Approximation par différence finies de l'équation de diffusion à une dimension	31
	31	
4.1.2	Consistance et ordre du schéma	32
4.1.3	Stabilité du schéma	33
4.1.4	Convergence du schéma	37
4.2	la solution exacte de l'équation de diffusion	
	d'ordre 1	39
4.3	Programmation de la Méthode	40
4.3.1	Programmation de la solution exacte	40
4.3.2	Programmation de la solution approchée	41
4.3.3	Comparaison des méthodes	44

TABLE DES MATIÈRES

Notation

$O(x^n)$	Reste de Young
f^n	Dérivée nième de f
$\frac{\partial f}{\partial x}$	La dérivée partielle première de la fonction f par rapport à x
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	La dérivée partielle second de la fonction f par rapport à x
(X, \mathcal{M}, μ)	Espace mesuré
\mathcal{M}	Tribu
$L^p(X, \mathcal{M}, \mu), p \in [1, +\infty]$	Espace de Lebesgue
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire
$\ \cdot\ $	La norme
$\hat{f}(\lambda)$	Transformation de Fourier
$\partial\Omega$	Frontière de Ω
\vec{n}	Normale extérieure

Introduction

La résolution des équations différentielles ou plus généralement des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. Chacune de ces disciplines apporte une contribution différente mais complémentaire à la compréhension et à la résolution de tels problèmes.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différences finies, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc.

La problématique de ce mémoire réside dans la compréhension et l'application de la méthode des différences finies, ainsi que l'importance de la convergence de ces schémas numériques.

La MDF est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qui est fort utile, même sur le plan très pratique.

Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18^{ème} siècle (Euler, Taylor, Leibniz...).

L'arrivée du calcul numérique et de méthodes de résolution performantes par ordinateur a permis de populariser et diffuser cette méthode.

Le but de notre travail porte une étude de la convergence des schémas de la MDF, soumise à des contraintes telles que la stabilité et la consistance.

On a justifier par le biais du théorème de Lax, que cette méthode converge bien vers la solution approchée d'un problème d'évolution EDP.

Enfin, on a essayer de faciliter sa conception par l'application du schéma programmé (MATLAB) d'Euler explicite pour l'équation de diffusion d'ordre 1.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons à titre de rappel, quelques résultats préliminaires particulièrement d'analyse fonctionnelle et numérique, nécessaires pour aborder les chapitres suivants.

Nous essayons dans le second chapitre, de présenter le concept des équations aux dérivées partielles et quelques conditions aux limites.

Le troisième chapitre, but de notre mémoire, est consacré à l'étude de la méthode des différences finies, ainsi que l'importance de la convergence de ces schémas numériques.

Suite aux applications nombreuses et variées sollicitées par des ingénieurs de diverses disciplines utilisant cette méthode, que ce soit en mécanique des fluides ou des solides, mais aussi pour les problèmes thermiques, électromagnétiques, chimiques, etc. Et, à titre d'amélioration, nous essayons dans ce dernier chapitre, de faciliter la compréhension de cette méthode, semblable à celle des éléments finis (Transformant la résolution d'une EDP secondée par des conditions aux limites, à la résolution d'un tel système matriciel [3], [6]), par l'application d'un schéma programmé (Matlab) d'Euler explicite pour l'équation de diffusion d'ordre 1.

À titre de conclusion, on donne certaines remarques importantes relatives à cette méthode et quelques développements possibles.

Enfin, il convient de signaler que notre travail est essentiellement basé sur une combinaison de recettes déjà vues (étudiées).

Chapitre 1

Préliminaire

Dans le premier chapitre, nous présentons à titre de rappel, quelques résultats préliminaires particulièrement d'analyse fonctionnelle et numérique, nécessaires pour aborder les chapitres suivants.

1.1 Développements limités

1.1.1 Développement limité d'ordre n au voisinage de 0

Définition 1.1. Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, s'il existe un intervalle ouvert I de centre 0 et des constantes a_0, a_1, \dots, a_n tels que pour tout $x \neq 0$ appartenant à I

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n\epsilon(x),$$

où est une fonction définie dans I , telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

On écrit aussi

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + O(x^n).$$

Le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + x^n$ est dit partie régulière du développement et $x^n\epsilon(x)$ reste ou terme complémentaire.

Unicité

Théorème 1.1. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, ce développement est unique.

Corollaire 1.1. Si une fonction paire (resp impaire) admet un développement limité au voisinage de 0, sa partie régulière est un polynôme pair (resp impair).

Théorème 1.2. Si $f^n(0)$ existe, alors f admet le développement limité (unique)

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x),$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0.$$

1.1.2 Formule de Taylor

Définition 1.2. Si une fonction f est définie et continue sur $[a, b]$, ainsi que ses n premières dérivées, et si elle admet dans l'intervalle $]a, b[$ une dérivée d'ordre $n + 1$, alors il existe une valeur $c \in]a, b[$ pour laquelle

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^n(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Cette égalité peut encore s'écrire avec $h = b - a$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + \theta h),$$

avec $0 < \theta < 1$.

1.1.3 Formule de Maclaurin

Définition 1.3. Dans le cas particulier où $0 \in [a, b]$ on a pour tout $x \in]a, b[$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x).$$

Cette formule est un cas particulier de la formule de Taylor dans laquelle on prend $a = 0$ et $b = x$.

1.1.4 Propriétés

Théorème 1.3. Soit f, g deux fonctions admettant des développements limités au même ordre n au voisinage de l'origine. Alors les fonctions $f + g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n en 0 , et il est de même de $\frac{f}{g}$ si $g(0) \neq 0$. De plus

- (i) La partie régulière du développement limité de $f + g$ est la somme des parties régulières des développements limités de f et g .
- (ii) La partie régulière du développement limité du produit fg s'obtient en ne gardant dans le produit des parties régulières que les termes de degré inférieure ou égal à n .
- (iii) La partie régulière du développement limité du quotient $\frac{f}{g}$ est le quotient à l'ordre n dans la division suivant les puissances croissantes de la partie régulière de f par la partie régulière de g .

1.2 Dérivées partielles

Définition 1.4. Soit f une fonction des deux variables x, y et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$.

Supposons l'application partielle $f_x : x \rightarrow f(x, y_0)$ définie sur un voisinage de x_0 tel que $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$. Si f_x admet une dérivée au point x_0 , on dit que cette dérivée est la **dérivée partielle** de f par rapport à x au point (x_0, y_0) .

On note f'_x ou $\frac{\partial f}{\partial x}$ cette dérivée et l'on

$$f'_{x(x_0, y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

De même, la dérivée de la fonction f_y est la dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0) . On la note

$$f'_{y(x_0, y_0)} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Si f'_x et f'_y existent, on dit que f est **dérivable**.

Exemple 1.1. Soit $f(x, y) = x^2y^5$. Alors, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5x^2y^4, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 64, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 80.$$

Théorème 1.4. *Si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) , on a*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

1.3 Maillage

Définition 1.5. *Pour la méthode de différence finie, un maillage est un ensemble des points isolés (appelle noeud), situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles, un grille sur les seuls noeuds de laquelle sont définies les inconnues, correspondant aux valeurs approximation.*

1.4 Convergence

Définition 1.6. *La convergence d'un schéma numérique est une propriété théorique globale assurant que l'écart (au sens d'une norme) entre la solution approchée et la solution exacte tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation tend vers 0 (ou lorsque chacun des pas globaux aux différentes directions tend vers 0).*

Définition 1.7. *Un schéma stable, consistant est convergent c-à-d :*

$$\text{Stabilité} + \text{Consistance} = \text{Convergence}$$

1.5 Espace de Lebesgue L^p

On considère un espace mesuré (X, \mathcal{M}, μ) , et on notera $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 1.8. *Soit $p \in [1, +\infty[$. On définit :*

$$\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ mesurable, } \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

Pour $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, on note par

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

la norme de \mathcal{L}^p .

Les cas les plus importantes sont $p = 1$ (i.e : l'ensemble $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ des fonctions intégrables), et $p = 2$ (i.e : l'ensemble des fonctions de carré intégrable).

Définition 1.9. Considérons alors \mathcal{R} la relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ définie par :

$f \mathcal{R} g$ ssi $f(x) = g(x)$ pour μ -presque tout $x \in X$, i.e : $\|f - g\|_p = 0$

Etant donnée une application $f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$, on note $[f]$ la classe d'équivalence de f pour la relation \mathcal{R} , c'est à dire que

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu) \text{ telle que } g(x) = f(x) \mu - \text{presque partout}\}$$

Définition 1.10. Soit $p \in [1, +\infty]$. On note $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ Le quotient de $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ par la relation d'équivalence \mathcal{R} , i.e :

$$L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{[f] \text{ telle que } f \in \mathcal{L}^p(X, \mathcal{M}, \mu)\}$$

Théorème 1.5. L'espace de Lebesgue est un espace de Banach (i.e : un espace vectoriel normé complet) pour tout $p \in [1, +\infty]$.

Corollaire 1.2. Pour $p = 2$, l'espace $L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) \overline{g(x)} d\mu \quad f, g \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$$

1.5.1 Espace L^∞

Définition 1.11. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists C \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C; \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}$$

On vérifiera ultérieurement que $\|\cdot\|_{L^\infty}$ est une norme.

Remarque 1.1. Si $f \in L^\infty$ on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \text{ p.p sur } \Omega.$$

1.6 Transformation de Fourier

Définition 1.12. Soit une fonction de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. on appelle transformée de Fourier de la fonction de la variable $\lambda \in \mathbb{R}$ notée \hat{f} ou $\mathcal{F}(f)$ telle que

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} d\mu(x)$$

Définition 1.13. La transformée de Fourier est une application linéaire de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ dans l'espace des fonctions

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \mathcal{F}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \mathcal{F}(f_1) + \beta \mathcal{F}(f_2)$$

1.6.1 Transformée de Fourier de la dérivée

Théorème 1.6. Soit f telle que ses $m - 1$ dérivées existent et soient sommables, partout continues, et telle que la dérivée d'ordre m de f existe presque partout et soit sommable. Alors :

$$\mathcal{F} [f^{(m)}] (\lambda) = (i\lambda)^k \mathcal{F} [f] (\lambda)$$

Théorème 1.7. Soit f sommable, et $a \in \mathbb{R}^*$, alors on a

- i. $\mathcal{F} [f(ax)] (\lambda) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F} (f) \left(\frac{\lambda}{a} \right)$, $a \neq 0$
- ii. $\mathcal{F} [f(x - a)] (\lambda) = e^{-i\lambda a} \mathcal{F} (f) (\lambda)$
- iii. $\mathcal{F} [f(x + a)] (\lambda) = e^{i\lambda a} \mathcal{F} (f) (\lambda)$

1.6.2 Inversion de Fourier

Théorème 1.8 (Théorème d'inversion). Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, et soit \mathcal{F} sa transformée de Fourier. Si \mathcal{F} est sommable alors on a :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\mu(\lambda)$$

1.6.3 Transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables

Soient les vecteurs de \mathbb{R}^n : $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. On définit un produit scalaire et une norme par :

$$\langle x, \lambda \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \lambda_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Définition 1.14. On considère f une fonction sommable de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} . On définit la transformée de Fourier de f par :

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\lambda x} d\mu(x)$$

avec : $d\mu(x) = d\mu(x_1) \dots d\mu(x_n)$

Théorème 1.9 (Plancherel). soit $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} \in L^2$ et de plus

$$\|\hat{f}\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2 = 2\pi \|f\|_{\mathcal{L}(L^2)}^2$$

Chapitre 2

Équations aux Dérivées Partielles

Dans ce second chapitre, nous présentons le concept des équations aux dérivées partielles et quelques conditions aux limites.

2.1 Équations aux dérivées partielles

Définition 2.1. Une *équation aux dérivées partielles* est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (u ci-dessous) et les variables indépendantes (x, y, \dots ci-dessous) une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme :

$$F \left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots \right) = 0 \quad (2.1)$$

où F est une fonction de plusieurs variables. Si n est le nombre de variables indépendantes, alors nous considérons le n -tuplet de variables indépendantes (x, y, \dots) comme appartenant à un domaine \mathcal{D} convenable de \mathbb{R}^n . Nous utiliserons **EDP** comme abréviation d'équation aux dérivées partielles.

Définition 2.2. Une *solution* de l'équation (2.1) est une fonction $u = u(x, y, \dots)$ des variables indépendantes x, y, \dots dont les dérivées partielles apparaissant dans l'équation existent aux points de \mathcal{D} et telle qu'après avoir substitué cette fonction et ses dérivées partielles dans l'équation (2.1), celle-ci est satisfaite

Exemple 2.1.

$$x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \sin(x^2 + y^2) = 0$$

est un exemple d'EDP pour le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$.

Exemple 2.2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

est un exemple d'EDP pour le domaine $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$. et $u(x, y) = (x + y)^3$, $u(x, y) = \sin(x - y)$ sont deux solutions de cette dernière équation. En effet, si $u(x, y) = (x + y)^3$, alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3(x + y)^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3(x + y)^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6(x + y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6(x + y)$$

et nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6(x + y) - 6(x + y) = 0.$$

Si $u(x, y) = \sin(x - y)$. nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cos(x - y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x - y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin(x - y)$$

et nous obtenons que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin(x - y) - (-\sin(x - y)) = 0.$$

2.2. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRE

On voit par cet exemple que les solutions d'une EDP peuvent être très différentes. Il y a en général une infinité de solutions pour une EDP donnée. Nous verrons plus tard qu'en plus de l'EDP, il y a des conditions initiales et/ou aux frontières dans un problème typique et que ces dernières ont comme conséquence de réduire le nombre de solutions jusqu'à une seule dans une situation idéale.

Définition 2.3. L'ordre d'une EDP est l'ordre de la dérivée partielle d'ordre le plus élevé.

Exemple 2.3.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + x \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 = e^x$$

est une EDP d'ordre 3.

2.2 Équations aux dérivées partielles linéaire

Définition 2.4. Un **opérateur** L désignera une transformation qui associe à toute fonction $u = (x, y, \dots)$ de plusieurs variables x, y, \dots sur un domaine \mathcal{D} : une fonction $Lu = Lu(x, y, \dots)$ sur ce même domaine. Parfois il faudra exiger que les dérivées partielles de u existent jusqu'à un certain ordre. Si $u = u(x, y)$, alors

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial x}$$

est un exemple d'opérateur. Cependant pour que Lu soit bien définie, il est nécessaire que la dérivée partielle de u par rapport à x existe sur le domaine \mathcal{D} . L'équation (2.1) peut donc s'écrire sous la forme $Lu = f(x, y, \dots)$ où $f(x, y, \dots)$ est une fonction des variables indépendantes, L est un opérateur et u est une fonction à déterminer.

Définition 2.5. Un **opérateur** L est **linéaire** si et seulement si $L(au + bv) = aLu + bLv$ quels que soient les nombres réels a, b et les fonctions u, v .

Définition 2.6. Une **EDP** est dite **linéaire** si elle est de la forme $Lu = f(x, y, \dots)$ où L est un opérateur linéaire, $f(x, y, \dots)$ est une fonction des n variables indépendantes, (x, y, \dots) appartient à un domaine \mathcal{D} convenable de \mathbb{R}^n et u est la fonction recherchée. Si en plus $f(x, y, \dots) \equiv 0$, on dit alors que l'équation est linéaire **homogène**. Si non elle est **non-homogène**.

Exemple 2.4.

$$u + y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

est une EDP linéaire non-homogène pour $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$, où $u = (x, y)$. Dans cet exemple,

$$Lu = u + y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

2.3. CLASSIFICATION DES EDP DU SECOND ORDRE

est un opérateur linéaire et $f(x, y) \equiv 1$. En effet L est linéaire, car si a et b sont deux nombres réels quelconques et u et v deux fonctions, alors

$$\begin{aligned} L(au + bv) &= (au + bv) + y \frac{\partial^2(au + bv)}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2(au + bv)}{\partial y^2} \\ &= a \left(u + y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + b \left(v + y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= aLu + bLv. \end{aligned}$$

Exemple 2.5.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + xu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \sin y$$

est une EDP n'est pas linéaire pour $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$, où $u = (x, y)$. Dans cet exemple,

$$Lu = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + xu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

n'est pas un opérateur linéaire et $f(x, y) = \sin y$. Pour vérifier que Lu n'est pas opérateur linéaire, il suffit de considérer par exemple les deux nombres réels $a = b = 1$ et les deux fonctions $u(x, y) = v(x, y) = x^2$. Avec ces choix, nous obtenons que $L(u + v) = 16x$, $Lu + Lv = 8x$ et clairement $L(u + v) \neq Lu + Lv$.

2.3 Classification des EDP du second ordre

Définition 2.7. Considérons tout d'abord l'équation du 2ème ordre linéaire, qui décrit le comportement de la grandeur inconnue u par rapport aux variables x et y :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu = g$$

Si a, b, c, d, e, f et g sont constants, l'EDP est **linéaire à coefficients constants**. S'ils dépendent de x et y , elle est, **linéaire**. S'ils dépendent en plus de l'inconnu u , elle est **quasi-linéaire**. Le caractère de ses solutions dépend pour une large part du signe de $b^2 - 4ac$. Selon que les racines sont réelles, complexes ou doubles.

* Si $b^2 - 4ac > 0$, alors l'EDP est dite **hyperbolique** et ce type d'équations qui modélisent des phénomènes dépendant du temps par exemple l'équation des Ondes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c > 0$$

* Si $b^2 - 4ac = 0$, alors l'EDP est dite **parabolique** et ce type d'équation qui modélisent souvent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles, associées à des processus de diffusion par exemple l'équation de Diffusion :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad d > 0$$

* Si $b^2 - 4ac < 0$, alors l'EDP est dite **elliptique** et ce type d'équation qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c-à-d n'évoluant pas du cours du temps) par exemple l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2.4 Conditions aux limites classiques

Nous nous plaçons dans le cas où une EDP est définie sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^n$ de frontière, $\partial\Omega$ suffisamment régulière. On notera par \vec{n} sa normale extérieure.

2.4.1 Condition aux bords de Dirichlet

Définition 2.8. La condition de Dirichlet aux bords peut se définir comme la donnée d'une fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sur la frontière de Ω , ce qui peut se noter :

$$u(t, x) = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

La fonction f est une donnée du problème.

En particulier, en mécanique des milieux continus, ces conditions de Dirichlet reviennent à imposer une vitesse ou un déplacement sur le bord du milieu.

2.4.2 Condition aux bords de Neumann

Définition 2.9. La condition de Neumann aux bords peut se définir comme la donnée de la dérivée de la fonction $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par rapport à \vec{n} sur la frontière de Ω , ce qui peut se noter

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial \vec{n}} = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

La fonction g est une donnée du problème.

2.4.3 Condition mixte de Robin

Définition 2.10. Il y a plusieurs façons d'obtenir des conditions mixtes de Neumann-Dirichlet. La première est d'imposer des conditions de Dirichlet dans certaines directions et de conditions de Neumann d'en autres au même point du bord. La seconde façon est imposer une moyenne pondérée des deux types de conditions sur un partie du bord de Ω :

$$\alpha(x) u(t, x) + \beta(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial \vec{n}} = f(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$$

On parle alors de la condition mixte de Robin aux bords.

2.4.4 Condition initiale ou condition de Cauchy

Définition 2.11. *La condition de Cauchy pour les EDP est simplement la donnée de la valeur de $u(t)$ en t_0 , soit*

$$u(t_0) = u_0, u_0 \in \mathbb{R}^n$$

2.5 Problème aux limites

Définition 2.12. *On appelle **problème aux limites**, une équation aux dérivées partielles munie de conditions aux limites sur la totalité de la frontière ou bord du domaine sur lequel elle est posée.*

Définition 2.13. *On dit qu'un problème est **bien posé** si :*

- i. il existe une solution de l'EDP satisfaisant les conditions frontières (existence).*
- ii. la solution doit être unique (unicité).*
- iii. la solution doit être stable par rapport aux conditions aux frontières imposées (stabilité).*

Remarque 2.1. *Les EDP est un sujet de recherche très actif en mathématiques et elles sont à l'origine de la création de beaucoup de concepts mathématiques comme, par exemple, la transformée de Fourier et la théorie des distributions.*

Chapitre 3

Convergence de la Méthode des Différences Finies

Ce troisième chapitre, est consacré à l'étude de la méthode des différences finies, ainsi que l'importance de la convergence de ces schémas numériques.

Dans la plupart des cas, il est très difficile, voir impossible d'exhiber les solutions d'une équation aux dérivées partielles. Dans certains cas on arrive à montrer que le problème est bien posé où nous devons recourir à l'utilisation de M.D.F pour calculer une solution approchée et d'assurer sa convergence.

3.1 Principe de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une méthode couramment utilisée dans la résolution des problèmes aux limites posés dans des domaines bornés. Le principe de cette méthode est le suivant :

le domaine de variation continue des arguments (par exemple un intervalle fermé) est remplacé par un ensemble fini de points (les noeuds) appelé réseau, au lieu des fonctions à argument discret définis aux noeuds du réseau que nous appellerons fonctions discrètes. Les dérivées figurant dans l'équation différentielle et les conditions aux limites, sont remplacées par des formules discrètes. Donc la résolution numérique du problème aux limites par la méthode des différences finies se décompose en deux étapes :

- (i) Ecriture du système d'équation discrètes (schémas discrets) approchant le problème posé pour l'équation différentielle.
- (ii) Résolution de ce système d'équations.

3.1.1 Principe générale de la méthode et ordre de précision

Cette méthode consiste à approximer les dérivées des équations au moyen des développements de Taylor. Elle est due aux travaux de plusieurs mathématiciens du 18-ème siècle (Euler, Taylor, Leibniz,..).

Le principe général de la méthode est basé sur la formule de Taylor. La définition de la dérivée donne

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0)$$

On pose $x - x_0 = h$, donc on a

$$\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \approx \frac{\partial u}{\partial x}(x_0)$$

En appliquant la formule de Taylor au voisinage de x_0 , on obtient

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x_0} \right) + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2} \right) + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_0^3} \right) + \dots$$

En traquant la série au premier ordre en h , on obtient

$$\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x_0} + O(h),$$

qui est une approximation de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial x_0}$ d'ordre 1.

La puissance de h avec laquelle l'erreur de troncature tend vers zéros est appelée l'ordre de schéma.

Notation indicielle

Considérons un cas monodimensionnel où l'on souhaite déterminer une grandeur $u(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. La recherche d'une solution discrète de la grandeur u amène à constituer un maillage de l'intervalle de définition. On considère un maillage composé de $N + 1$ points x_i pour $i = 0, \dots, N$ régulièrement espacés avec un pas h . Les points $x_i = ih$ sont appelés les noeuds du maillage.

Le problème continu de départ de détermination d'une grandeur sur un ensemble de dimension infinie se ramène ainsi à la recherche de N valeurs discrètes de cette grandeur aux différents noeuds du maillage.

Notation. On pose

$$u(x) = u_i, \quad u(x+h) = u_{i+1}, \quad u(x-h) = u_{i-1}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$$

Si $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction appartenant à \mathcal{C}^∞ , on a

$$u_{i+1} = u_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + \dots \quad (3.1)$$

$$u_{i-1} = u_i - h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + \dots \quad (3.2)$$

3.1.2 Schémas des différences finies approximant la première dérivée

Schéma d'ordre un

D'après (3.1) et (3.2) alors les développements limités d'ordre 2 sont :

$$u_{i+1} = u_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(h^2), \quad (3.3)$$

$$u_{i-1} = u_i - h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(h^2). \quad (3.4)$$

En tenant compte de la formule (3.3), on a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + O(h). \quad (3.5)$$

Cette formule est appelée schéma **avant** ou **décentré avant** aux différences finies d'ordre 1 de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$.

De même en utilisant la formule (3.4), on a :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + O(h). \quad (3.6)$$

Cette formule est appelée schéma **arrière** ou **décentré arrière** aux différences finies d'ordre 1 de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$.

Des deux formules (3.3) et (3.4), on obtient

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(h^2)$$

D'où

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h). \quad (3.7)$$

Cette formule est appelée schéma **centrée** d'ordre 1 de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$.

Schéma d'ordre supérieur

Les schémas aux différences finies d'ordre supérieur peuvent être construits en manipulant des développements de Taylor au voisinage de x_i et on écrit :

$$u_{i+1} = u_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(h^3), \quad (3.8)$$

$$u_{i-1} = u_i - h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(h^3). \quad (3.9)$$

La soustraction des dernières équations donne

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2h \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + O(h^3),$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux dit **centré**,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + O(h^2). \quad (3.10)$$

Pour obtenir des ordres supérieurs, il suffit d'utiliser plusieurs noeuds voisins à x_i , par exemple pour l'obtention d'un schéma aux différences finies d'ordre trois pour la dérivée première, on pose

$$h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = au_{i-1} + bu_i + cu_{i+1} + du_{i+2}, \quad (3.11)$$

$$u_{i+1} = u_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(h^4), \quad (3.12)$$

$$u_{i-1} = u_i - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(h^4). \quad (3.13)$$

$$u_{i+2} = u_i + 2h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{(2h)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(2h)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(h^4). \quad (3.14)$$

En substituant (3.12), (3.13) et (3.14) dans la formule (3.11) on obtient

$$\begin{aligned} h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i &= a \left[u_i - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i - \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i \right] + bu_i \\ &+ c \left[u_i + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i \right] \\ &+ d \left[u_i + 2h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i + \frac{(2h)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + \frac{(2h)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i \right] + O(h^4). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i &= (a + b + c + d) u_i \\ &+ h(-a + c + 2d) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \\ &+ h^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2} + 2d \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \\ &+ h^3 \left(-\frac{a}{6} + \frac{c}{6} + \frac{4d}{3} \right) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i \end{aligned} \quad (3.15)$$

En identifiant les deux membres de (3.11) et (3.15), on trouve

$$\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ -a + c + 2d = 0 \\ a + c + 4d = 0 \\ -a + c + 8d = 0 \end{cases}$$

En résolvant le système, on obtient

$$a = -\frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = 1, \quad d = -\frac{1}{6},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{-2u_{i-1} - 3u_i + 6u_{i+1} - u_{i+2}}{6h} + O(h^3)$$

Ce schéma est d'ordre 3.

3.1.3 Dérivée d'ordre supérieur

Pour construire un schéma d'approximation de la dérivée second de u_i , le principe est le même et repose sur les développements de Taylor au voisinage de x_i . L'addition de deux équations (3.12) et (3.13) donne :

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u_i + h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + O(h^4).$$

On obtient un schéma approximant la dérivée seconde dite **centrée** d'ordre deux

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Il existe aussi une formulation avant et arrière, toutes les deux d'ordre 1.

Schéma **avant** ;

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} + O(h).$$

Schéma **arrière** ;

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} + O(h).$$

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées, troisième, quatrième,...

3.2 Généralisation de la notation indicielle

Dans le cas 1D instationnaire, considérons l'évolution d'une grandeur $u(x, t)$ en fonction de l'espace et du temps. Le domaine de définition de u est décomposé en N noeuds

x_i répartis régulièrement avec un pas d'espace h . De même, le temps est décomposé en intervalle élémentaire de pas constant τ . On notera u_i^j la valeur discrète de la grandeur $u(x, t)$ au noeud x_i et au temps $j\tau$

$$(x_i, t^j) = (ih, j\tau) \quad \text{pour } i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}.$$

3.3 Discrétisation des dérivées en temps

3.3.1 Approximation de la dérivée première $\frac{\partial u}{\partial t}$

L'idée basé sur la formule de Taylor peut être décrite en partant de la définition de la dérivée première $\frac{\partial u}{\partial t}$ au point $x = x_i$ et à l'instant $t = t^j$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(x_i, t^j + \tau) - u(x_i, t^j)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.16)$$

Si la fonction $u(x, t)$ est régulière, on peut construire, à partir de cette relation (3.16), une approximation raisonnable de $\frac{\partial u}{\partial t}$ si τ est suffisamment petit

$$\frac{u(x_i, t^j + \tau) - u(x_i, t^j)}{\tau} \approx \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.17)$$

Pour préciser cette approximation, nous utiliserons le développement en série de Taylor de $u(x_i, t^j + \tau)$ autour du point $u(x_i, t^j)$ à l'ordre m

$$\begin{aligned} u(x_i, t^j + \tau) &= u(x_i, t^j) + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(x_i, t^j)} + \frac{\tau^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{(x_i, t^j)} + \frac{\tau^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_{(x_i, t^j)} \\ &+ \dots + \frac{\tau^m}{m!} \left(\frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right)_{(x_i, t^j)} + \frac{\tau^{m+1}}{m+1!} \left(\frac{\partial^{m+1} u}{\partial t^{m+1}} \right)_{\zeta} \end{aligned} \quad (3.18)$$

où ζ est un point dans l'intervalle $[t^j, t^j + \tau]$. Le dernier terme de ce développement peut être identifié à un reste d'ordre $O(\tau^{m+1})$. En utilisant ce développement à l'ordre $m = 1$, nous pouvons en déduire l'approximation par différences finies de la dérivée première :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(x_i, t^j)} = \frac{u(x_i, t^j + \tau) - u(x_i, t^j)}{\tau} + O(\tau)$$

Notation. On pose

$$u(x_i, t^j) = u_i^j, \quad u(x_i, t^j + \tau) = u_i^{j+1}, \quad u(x_i, t^j - \tau) = u_i^{j-1}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{(x=x_i, t=t^j)} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^j$$

Et donc nous obtenons

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^j = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + O(\tau)$$

3.4. APPROXIMATION DE CONDITION INITIALE ET CONDITIONS AUX LIMITES

Cette formule est appelée schéma **avant** ou **décentré avant** aux différences finies d'ordre 1 de $(\frac{\partial u}{\partial t})_i^j$.

Il est également possible de construire, par le même procédé, des schémas aux différences finies d'ordre 1 (schéma arrière et schéma centrée) et des schémas aux différences finies d'ordre supérieur pour les dérivées, seconde, troisième ...

3.4 Approximation de Condition initiale et Conditions aux limites

Dans tous schéma il y a bien sûr une donnée initiale pour démarrer les itération en j : les valeurs initiales $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ sont définies par exemple par $u_i^0 = g(x_i)$ où g est la donnée initiale de l'équation.

S'il y a un second membre $f(x, t)$ dans l'équation aux dérivées partielles, alors les schémas se modifient en remplaçant zéro au second membre par une approximation consistante de $f(x, t)$ au point (x_i, t^j) .

Si l'équation est définie sur un domaine borné, par exemple $x \in [a, b]$, le maillage spatiale sera restreint à cet intervalle c'est-à-dire $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ avec $x_0 = a$ et $x_N = b$ et $h = \frac{b-a}{N+1}$. Il faut de plus ajouter des conditions aux limites qui peuvent être de plusieurs types.

Par exemple, si on a des conditions aux limites de Dirichlet

$$u(a, t) = L, \quad u(b, t) = M, \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+,$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$w_0^j = L, \quad w_{N+1}^j = M, \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}.$$

Si on a des conditions de Neumann

$$\partial_x u(a, t) = L, \quad \partial_x u(b, t) = M \quad \text{pour } t \in \mathbb{R}_*^+,$$

elles se traduisent au niveau discret en

$$\frac{w_1^j - w_0^j}{h} = L, \quad \frac{w_N^j - w_{N-1}^j}{h} = M, \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}.$$

3.5 Convergence

Définition 3.1. *Un schéma consistant, stable est convergent.*

3.6 Consistance et ordre de précision

Définition 3.2. *Nous nous limitons pour le moment à la dimension 1 d'espace et considérons une équation aux dérivées partielles (2.1) définie pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ avec une condition initiale $u(x, 0) = g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:*

(remarquons que $F(u)$ est une notation pour une fonction de u et de ses dérivées partielles en tout point). On note u_i^j la valeur d'une solution discrète approchée au point (x_i, t^j) et $u(x, t)$ la solution exacte (inconnue). Un schéma aux différences finies est défini par la formule, pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, $F_{h,\tau}(\{u_i^j\})$

3.6.1 Erreur de troncature

Définition 3.3. *Considérons le schéma aux différences finies $F_{h,\tau}(\{u_i^j\})$ pour l'approximation de l'équation aux dérivées partielles (2.1). Soit $u(x, t)$ une solution suffisamment régulière de cette équation. On appelle erreur de troncature du schéma la quantité*

$$\epsilon_i^j \equiv F_{h,\tau}(\{u(x_i, t^j)\}).$$

3.6.2 Consistance

Définition 3.4. *Le schéma aux différences finies $F_{h,\tau}(\{u_i^j\})$ est dit consistant avec l'équation aux dérivées partielles (2.1) si l'erreur de troncature du schéma tend vers zéro, uniformément par rapport à (x, t) , lorsque h et τ tendent vers zéro indépendamment.*

3.6.3 Ordre de consistance

Définition 3.5. *Le schéma aux différences finies $F_{h,\tau}(\{u_i^j\})$ est précis à l'ordre p en espace et à l'ordre q en temps avec l'équation aux dérivées partielles (2.1) si l'erreur de troncature du schéma tend vers zéro comme $O(h^p + \tau^q)$ lorsque h et τ tendent vers zéro.*

3.7 Stabilité : principes généraux

Avant d'aborder la notion de stabilité du schéma numérique, une notion intuitivement simple mais délicate à définir mathématiquement, il est utile de préciser ce que nous entendrons par convergence du schéma. Intuitivement, la convergence signifie que, dans une certaine norme, l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée tend vers 0 quand τ et h tendent vers 0. C'est le sens plus précis du « tend vers 0 » qu'il nous faut définir. On supposera dans toute la suite que nous nous intéressons à l'approximation de la solution dans un intervalle de temps fixe $[0, T]$, $T > 0$. Nous nous limiterons à la convergence L^∞ en temps à valeur L^p en espace.

3.7. STABILITÉ : PRINCIPES GÉNÉRAUX

Définition 3.6. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on définit, à partir de $(u_i^j)_{i \in \mathbb{N}}$ la fonction u_h^j via une interpolation linéaire

$$u_h^j \in V_h = \{u_h \in L^2 / \forall i \in \mathbb{Z}, u_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \in P_1\}$$

où P_1 désigne ci-après l'espace des polynômes d'une variable de degré inférieur ou égal à 1, telle que u_h est définie par

$$\forall i \in \mathbb{Z} \quad u_h(x_i) = u_i$$

Définition 3.7. On dit qu'un schéma numérique produisant une suite $u_h^j \in L^p$ converge dans $L^\infty(0, T; L^p)$ ssi, pour toute donnée initiale u^0 dans L^p ,

$$\lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left(\sup_{t^j \leq T} \|u(\cdot, t^j) - u_h^j\|_{L^p} \right) = 0. \quad (3.19)$$

Selon le principe qu'une condition nécessaire pour qu'une suite converge est qu'elle soit bornée, nous introduisons le principe de stabilité L^p .

Définition 3.8. On dit qu'un schéma numérique est L^p -stable ssi, pour tout temps $T > 0$, il existe une constante $C(T)$ indépendante de h et τ , telle que pour toute donnée initiale u^0 dans L^p ,

$$\forall t^j \leq T, \quad \|u_h^j\|_{L^p} \leq C(T) \|u^0\|_{L^p} \quad (3.20)$$

Remarque 3.1. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux schémas numériques à un pas produisant une suite u_h^j satisfaisant une relation de récurrence du type

$$u_h^{j+1} = S_h(\tau)u_h^j, \quad S_h(\tau) \in \mathcal{L}(L^p) \quad (3.21)$$

Remarque 3.2. Démontrer un résultat de stabilité L^p pour un schéma à un pas du type (3.21) correspond à l'obtention d'une estimation uniforme en (h, τ) de

$$\|S_h(\tau)^j\|_{\mathcal{L}(L^p)} = \sup_{v \in L^p} \frac{\|S_h(\tau)^j v\|_{L^p}}{\|v\|_{L^p}}.$$

En effet, la définition équivaut à

$$\forall t^j \leq T, \quad \|S_h(\tau)^j\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq C(T) \quad (3.22)$$

Une condition suffisante de stabilité, très utile dans la pratique, est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.1. Une condition suffisante de stabilité L^p du schéma (3.21) est qu'il existe une constante $v \geq 0$ telle que

$$\forall (h, \tau) \in S, \quad \|S_h(\tau)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1 + v\tau$$

où S définit le domaine de stabilité de la méthode
Auquel cas on a

$$\|S_h(\tau)^j\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq e^{vt^j},$$

ce qui entraîne en particulier (3.20) avec $C(T) = e^{vT}$.

3.7. STABILITÉ : PRINCIPES GÉNÉRAUX

Démonstration. Par définition de $\|S_h(\tau)\|_{\mathcal{L}(L^p)}$, il est clair que

$$\|S_h(\tau)^j\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq (1 + v\tau)^j$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser le résultat suivant : pour tout $x > 0$ et tout entier j

$$\left(1 + \frac{x}{j}\right) \leq e^x$$

En effet, pour $j = 1$, l'inégalité $1 + x \leq e^x$ traduit simplement le fait que le graphe de la fonction $x \rightarrow e^x$ est au dessus de sa tangente au point d'abscisse $x = 0$. Plus généralement, la fonction $x \rightarrow x^j$ étant croissante, il vient

$$\left(1 + \frac{x}{j}\right) \leq e^{\frac{x}{j}} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{x}{j}\right)^j \leq e^x.$$

□

Remarque 3.3. Si la condition (3.20) est réalisée avec $v = 0$, c'est à dire si

$$\forall (h, \tau) \in S, \quad \|S_h(\tau)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1,$$

alors on a

$$\|u_h^j\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq \|u_h^0\|_{\mathcal{L}(L^p)}$$

On parlera de **stabilité uniforme**.

Théorème 3.2. Pour qu'un schéma numérique du type (3.20) soit L^p stable, il faut qu'il existe une constante $v \geq 0$ telle que

$$\forall (h, \tau) \in S, \quad \|S_h(\tau)\|_{\mathcal{L}(L^p)} \leq 1 + v\tau$$

3.7.1 Stabilité L^2 : la méthode de Fourier-Von Neumann

Pour étudier la stabilité L^2 d'un schéma, on utilisera ensuite la transformée de Fourier (c'est la méthode de Fourier-Von Neumann)

Définition 3.9. On suppose qu'il existe une fonction $\lambda \in \mathbb{R} \rightarrow S_h(\lambda, \tau) \in \mathbb{C}$ telle que

$$\forall u \in L^2, \quad \mathcal{F}(S_h(\tau)u)(\lambda) = \hat{S}_h(\lambda, \tau)\mathcal{F}u(\lambda)$$

on dit aussi que $\hat{S}_h(\lambda, \tau)$ est le **symbole** de $S_h(\tau)$

Théorème 3.3.

$$\forall \tau, \quad \|S_h(\tau)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left| \hat{S}_h(\lambda, \tau) \right|$$

3.7. STABILITÉ : PRINCIPES GÉNÉRAUX

Démonstration. On applique le théorème de Plancherel 1.9

$$\begin{aligned}
 \|S_h(\tau)u\|_{\mathcal{L}(L^p)}^2 &= \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(S_h(\tau)u)(\lambda)\|^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int |\hat{S}_h(\lambda, \tau)|^2 |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\lambda \in \mathcal{R}} |(S_h(\tau)u)|^2 \int |\hat{u}(\lambda)|^2 d\lambda \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sup_{\lambda \in \mathcal{R}} |(S_h(\tau)u)|^2 \|\hat{u}(\lambda)\|_{L^2}^2 \\
 &= \sup_{\lambda \in \mathcal{R}} |(S_h(\tau)u)|^2 \|u\|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

ce montre que

$$\forall \tau, \quad \|S_h(\tau)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |\hat{S}_h(\lambda, \tau)|$$

□

Corollaire 3.1. *On dit qu'un schéma est L^2 stable ssi*

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{R}} |\hat{S}_h(\lambda, \tau)| \leq 1 + v\tau$$

3.7.2 Stabilité L^∞ (Principe de maximum discret)

Définition 3.10. *on dit qu'un schéma aux différences finies L^∞ stable ssi vérifie le principe du maximum discret si pour tout $j \geq 0$ et tout $1 \leq i \leq N-1$, on a*

$$\min_{0 \leq i \leq N} (u_i^0) \leq u_i^j \leq \max_{0 \leq i \leq N} (u_i^0)$$

quelle que soit la donnée initiale u_0 .

3.7.3 Théorème de Lax

Théorème 3.4. *Soit $u(x, t)$ la solution suffisamment régulière de l'équation aux dérivées partielles (2.1) avec des conditions aux limites appropriées. Soit u_i^j la solution numérique discrète obtenue par un schéma aux différences finies avec la donnée initiale $u_i^0 = g(x_i)$. Si le schéma est linéaire, consistant et stable pour une norme $\|\cdot\|$, alors le schéma est convergent au sens où*

$$\forall T > 0, \quad \lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left(\sup_{t^j \leq T} \|e_h^j\|_{L^p} \right) = 0.$$

avec $e_h^j = u_h^j - u(\cdot, t^j)$ l'erreur commise sur la solution.

De plus, l'ordre de convergence est donné par l'erreur de troncature : c'est à dire que si le schéma est d'ordre p en temps et d'ordre q en espace alors

$$\forall j \quad e_h^j = O((h)^p + (\tau)^q)$$

Chapitre 4

Applications

Dans ce dernier chapitre, nous essayons de faciliter la compréhension de cette méthode par l'application du schéma programmé(Matlab) d'Euler explicite pour l'équation de diffusion d'ordre 1.

4.1 Approximation par différence finies de l'équation de diffusion à une dimension

On appelle **équation de diffusion** l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

avec $v > 0$, où la fonction inconnue $u = u(x, t)$ est une fonction à valeurs réelles des deux variables réelles :

$x \in \mathbb{R}$: la variable d'espace et $t > 0$: le temps. On appelle problème de Cauchy avec condition de Dirichlet associé à l'équation de diffusion, le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, t) : [0, 2] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, 2], \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 2] \\ \text{où } u_0(x) \text{ est la donnée initiale.} \\ u(0, t) = u(2, t) = 0, \quad t > 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

4.1.1 Schéma de d'Eluler explicite¹ pour l'équation de diffusion

Nous allons écrire pour tout instant t^j , $j > 0$ et tout point x_i , une première équation discrète qui va remplacer (et approcher) l'équation (4.1) en (x_i, t^j) . On utilise

(i) une approximation décentrée avant d'ordre 1, pour $\frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t^j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau},$$

(ii) une approximation centrée d'ordre 2, pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}.$$

Le schéma numérique d'Euler explicite au point (x_i, t^j) s'écrit comme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} + v \frac{-u_{i-1}^j + 2u_i^j - u_{i-1}^j}{h^2} = 0 \\ u_i^0 = u_0(x_i) \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \quad \forall j \geq 1 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^{j+1} = \alpha u_{i-1}^j + (1 - 2\alpha) u_i^j + \alpha u_{i+1}^j, \quad \text{avec } \alpha = \frac{v\tau}{h^2} \\ u_i^0 = u_0(x_i) \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \quad \forall j \geq 1 \end{array} \right. \quad (4.3)$$

1. explicite \iff formule immédiate pour trouver u^{j+1} en fonction de u^j

4.1. APPROXIMATION PAR DIFFÉRENCE FINIES DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION À UNE DIMENSION

Quand on fixe j et $i = \overline{1, N}$, on obtient le système linéaire de $N - 1$ équations à $N - 1$ inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{j+1} = \alpha u_0^j + (1 - 2\alpha) u_1^j + \alpha u_2^j \\ u_2^{j+1} = \alpha u_1^j + (1 - 2\alpha) u_2^j + \alpha u_3^j \\ \vdots \\ u_N^{j+1} = \alpha u_{N-1}^j + (1 - 2\alpha) u_N^j + \alpha u_{N+1}^j \end{array} \right.$$

donc la forme matricielle est $U^{j+1} = M U^j + N$ telle que

$$M = \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha & \alpha & \dots & 0 \\ \alpha & 1 - 2\alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 - 2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \dots & 1 - 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} \alpha u_0^j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha u_{N+1}^j \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = \frac{v\tau}{h^2}$

4.1.2 Consistance et ordre du schéma

Nous commençons par l'étude de l'erreur de troncature on remplace u_k^m par $u(x_k, x^m)$ où u est une fonction régulière, $k = i - 1, i, i + 1$ et $m = j, j + 1$.

On définit l'erreur de troncature par

$$\epsilon_i^j = \frac{u(x_i, t^{j+1}) - u(x_i, t^j)}{\tau} + v \frac{-u(x_{i-1}, t^j) + 2u(x_i, t^j) - u(x_{i+1}, t^j)}{h^2}$$

Théorème 4.1. *Le schéma d'Euler explicite (4.2) est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace.*

Démonstration. On fait un développement de Taylor en x_i et en t^j , comme u est solution de l'équation (4.2), on a

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}, t^j) &= u(x_i, t^j) - h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + O(h^4) \\ u(x_{i+1}, t^j) &= u(x_i, t^j) + h \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{h^3}{3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) + O(h^4) \end{aligned}$$

4.1. APPROXIMATION PAR DIFFÉRENCE FINIES DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION À UNE DIMENSION

$$u(x_i, t^{j+1}) = u(x_i, t^j) + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + O(\tau^2) = u(x_i, t^j) + v\tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + O(\tau^2)$$

par conséquent l'erreur de troncature s'écrit

$$\begin{aligned} \epsilon_i^j &= \frac{u(x_i, t^{j+1}) - u(x_i, t^j)}{\tau} + v \frac{-u(x_{i-1}, t^j) + 2u(x_i, t^j) - u(x_{i+1}, t^j))}{h^2} \\ &= \frac{v\tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + O(\tau^2)}{\tau} + v \frac{-h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + O(h^4)}{h^2} \\ &= O(\tau + h^2). \end{aligned}$$

alors le schéma d'Euler explicite (4.2) est d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. □

4.1.3 Stabilité du schéma

Le schéma d'Euler explicite (4.2) produisant une suite u_h^j satisfaisant une relation de récurrence de type

$$u_h^{j+1} = S_h(\tau) u_h^j, \quad S_h(\tau) \in \mathcal{L}(L^p)$$

Stabilité en norme L^2

Théorème 4.2 (Fourier-Von Neumann). *Le schéma d'Euler explicite (4.2) est stable pour la norme ssi $\alpha = \frac{v\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$.*

Démonstration. On utilise la transformation de Fourier, on a

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \hat{u}_h^{j+1}(\lambda) = \hat{S}_h(\lambda, \tau) \hat{u}_h^j(\lambda)$$

donc

$$\begin{aligned} \hat{u}_h^{j+1}(\lambda) &= \alpha \hat{u}(x_i + h, t^j) + (1 - 2\alpha) \hat{u}_h^j(\lambda) + \alpha \hat{u}(x_i - h, t^j) \\ &= \alpha e^{i\lambda h} \hat{u}_h^j(\lambda) + (1 - 2\alpha) \hat{u}_h^j(\lambda) + \alpha e^{-i\lambda h} \hat{u}_h^j(\lambda) \\ &= [\alpha e^{i\lambda h} + \alpha e^{-i\lambda h} + 1 - 2\alpha] \hat{u}_h^j(\lambda) \\ &= [2\alpha \cos(\lambda h) + 1 - 2\alpha] \hat{u}_h^j(\lambda) \\ &= [-2\alpha(1 - \cos(\lambda h)) + 1] \hat{u}_h^j(\lambda) \\ &= \left[-4\alpha \left(\sin^2 \left(\frac{\lambda h}{2} \right) \right) + 1 \right] \hat{u}_h^j(\lambda) \end{aligned}$$

donc

$$\hat{S}_h(\lambda, \tau) = 1 - 4\alpha \left(\sin^2 \left(\frac{\lambda h}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{si } 1 - 4\alpha \left(\sin^2 \left(\frac{\lambda h}{2} \right) \right) \geq -1 &\iff \alpha \left(\sin^2 \left(\frac{\lambda h}{2} \right) \right) \leq \frac{1}{2} \\ &\iff \alpha \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc d'après les théorèmes 3.2 et 3.3, on a

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{R}} \left| \hat{S}_h(\lambda, \tau) \right| = 1$$

donc le schéma d'Euler explicite est stable dans L^2

$$\hat{S}_h(\lambda, \tau) = 1 - 4\alpha \left(\sin^2 \left(\frac{\lambda h}{2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \text{si } 1 - 4\alpha \left(\sin^2 \left(\frac{\lambda h}{2} \right) \right) < -1 &\iff \alpha \left(\sin^2 \left(\frac{\lambda h}{2} \right) \right) > \frac{1}{2} \\ &\iff \alpha > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

donc d'après les théorèmes 3.2 et 3.3, on a

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{R}} \left| \hat{S}_h(\lambda, \tau) \right| = 4\alpha - 1$$

donc le schéma d'Euler explicite est instable dans L^2

□

Stabilité en norme L^∞

Théorème 4.3. *Le schéma explicite est stable en norme L^∞ ssi*

$$\alpha = \frac{v\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$$

4.1. APPROXIMATION PAR DIFFÉRENCE FINIES DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION À UNE DIMENSION

Démonstration. Le schéma explicite est équivalent à

$$u_i^{j+1} = \alpha u_{i-1}^j + (1 - 2\alpha) u_i^j + \alpha u_{i+1}^j$$

* si $\alpha = \frac{v\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$

on va montrer par récurrence

pour $m \leq 0 \leq M$, on a

$$m \leq u_i^0 \leq M \Rightarrow m \leq u_i^1 \leq M, \quad 1 \leq i \leq N \text{ et } j \geq 0 \quad (4.4)$$

i. on va montrer que (4.4) est satisfait pour $j = 0$

on a $u_i^1 = \alpha u_{i-1}^0 + (1 - 2\alpha) u_i^0 + \alpha u_{i+1}^0$
 et comme $m \leq u_i^0 \leq M, \forall 1 \leq i \leq N$ alors

$$\begin{aligned} m \leq u_{i+1}^0 \leq M &\Rightarrow \alpha m \leq \alpha u_{i+1}^0 \leq \alpha M \\ m \leq u_i^0 \leq M &\Rightarrow (1 - 2\alpha) m \leq (1 - 2\alpha) u_i^0 \leq (1 - 2\alpha) M \\ m \leq u_{i-1}^0 \leq M &\Rightarrow \alpha m \leq \alpha u_{i-1}^0 \leq \alpha M \end{aligned}$$

donc

$$m \leq u_i^1 \leq M, \forall \quad 1 \leq i \leq N$$

ii. on suppose que (4.4) satisfait pour $j = n$ i.e :

$$[m \leq u_i^n \leq M, \forall 1 \leq i \leq N \Rightarrow m \leq u_i^n \leq M, \forall 1 \leq i \leq N, \forall n \geq 0]$$

iii. on suppose que (4.4) satisfait pour $j = n + 1$

$$\text{on a } u_i^{j+1} = \alpha u_{i-1}^j + (1 - 2\alpha) u_i^j + \alpha u_{i+1}^j$$

d'après (ii), on a

$$m \leq u_i^0 \leq M, \forall 1 \leq i \leq N \Rightarrow m \leq u_i^n \leq M, \forall 1 \leq i \leq N, \forall n \geq 0$$

alors

$$\begin{aligned} m \leq u_{i+1}^1 \leq M &\Rightarrow \alpha m \leq \alpha u_{i+1}^n \leq \alpha M \\ m \leq u_i^1 \leq M &\Rightarrow (1 - 2\alpha) m \leq (1 - 2\alpha) u_i^n \leq (1 - 2\alpha) M \\ m \leq u_{i-1}^1 \leq M &\Rightarrow \alpha m \leq \alpha u_{i-1}^n \leq \alpha M \end{aligned}$$

donc

$$m \leq u_i^{n+1} \leq M, \forall 1 \leq i \leq N \text{ et } \forall n \geq 0$$

alors en déduit que (4.4) est satisfait donc le schéma est stable en L^∞ .

4.1. APPROXIMATION PAR DIFFÉRENCE FINIES DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION À UNE DIMENSION

* si $\alpha = \frac{v\tau}{h^2} > \frac{1}{2} \Rightarrow$ le schéma instable en norme L^∞
 car **Exemple**

$$u_i^0 = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

on va montrer par récurrence que

$$u_i^j = (-1)^i (1 - 4\alpha)^j \quad (4.5)$$

i. on montrer que (4.5) est satisfait pour $j = 1$
 on a

$$\begin{aligned} u_i^1 &= \alpha u_{i-1}^0 + (1 - 2\alpha) u_i^0 + \alpha u_{i+1}^0 \\ &= \alpha (-1)^{i-1} + (1 - 2\alpha) (-1)^i + \alpha (-1)^{i+1} \\ &= -\alpha (-1)^i + (1 - 2\alpha) (-1)^i - \alpha (-1)^i \\ &= (1 - 4\alpha) (-1)^i \end{aligned}$$

ii. on suppose que (4.5) est satisfait pour $j = n$ i.e :

$$u_i^n = (-1)^i (1 - 4\alpha)^n$$

iii. on va montrer que (4.5) est satisfait pour $j = n + 1$
 on a

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= \alpha u_{i-1}^n + (1 - 2\alpha) u_i^n + \alpha u_{i+1}^n \\ &= \alpha (-1)^{i-1} (1 - 4\alpha)^n + (1 - 2\alpha) (-1)^i (1 - 4\alpha)^n + \alpha (-1)^{i+1} (1 - 4\alpha)^n \\ &= -\alpha (-1)^i (1 - 4\alpha)^n + (1 - 2\alpha) (-1)^i (1 - 4\alpha)^n - \alpha (-1)^i (1 - 4\alpha)^n \\ &= (1 - 4\alpha) (-1)^i (1 - 4\alpha)^n \\ &= (-1)^i (1 - 4\alpha)^{n+1} \end{aligned}$$

donc en déduit que $u_i^j = (-1)^i (1 - 4\alpha)^j$
 on a

$$\begin{aligned} 2\alpha > 1 &\Rightarrow 1 - 4\alpha < -1 \\ &\Rightarrow (1 - 4\alpha)^j < (-1)^j \end{aligned}$$

donc

$$u_i^j = (-1)^i (1 - 4\alpha)^j < (-1)^{i+j}$$

si $i + j$ impaire $\Rightarrow u_i^j < -1$ donc Contradiction car $u_i^0 \geq -1$
 donc le schéma instable en norme L^∞ .

□

4.1.4 Convergence du schéma

Passons maintenant à la convergence du schéma (4.2) dans $L^\infty(0, T; L^2)$ en montrant d'après la définition (3.7) que pour toute donnée initiale dans L^2

$$\lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left(\sup_{t^j \leq T} \|u(\cdot, t^j) - u_h^j\|_{L^p} \right) = 0.$$

ou u est la solution continue de (4.1) et u_h^j est la suite produite par le schéma (4.2). Nous introduisons donc l'erreur commise sur la solution

$$e_h^j = u(\cdot, t^j) - u_h^j$$

et obtenons la convergence du schéma comme une conséquence de sa consistance et de sa stabilité.

La première étape consiste donc à relier l'erreur e_h^j à l'erreur de troncature ϵ_h^j . On a

$$\epsilon_h^j = \frac{u(x, t^{j+1}) - u(x, t^j)}{\tau} + v \frac{-u(x-h, t^j) + 2u(x, t^j) - u(x+h, t^j)}{h^2}$$

nous déduisons que

$$u(\cdot, t^{j+1}) = S_h(\tau)u(\cdot, t^j) + \tau \epsilon_h^j$$

et comme on a

$$u(x_h, t^{j+1}) = S_h(\tau)u(x_h, t^j)$$

alors par différence

$$e_h^{j+1} = S_h(\tau)e_h^j + \tau \epsilon_h^j$$

et par suite

$$e_h^j = S_h(\tau)e_h^0 + \tau \sum_{k=1}^j S_h(\tau)^{j-k} \epsilon_h^{k-1}$$

En passant aux normes, on obtient alors

$$\|e_h^j\|_{L^2} = \|S_h(\tau)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|e_h^0\|_{L^2} + \tau \sum_{k=1}^j \|S_h(\tau)^{j-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \|\epsilon_h^{k-1}\|_{L^2}$$

Si on suppose l'hypothèse de stabilité satisfaite, on a

$$\|S_h(\tau)^{j-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq 1 + v\tau$$

4.1. APPROXIMATION PAR DIFFÉRENCE FINIES DE L'ÉQUATION DE DIFFUSION À UNE DIMENSION

Or on sait que

$$\forall t^q \leq T, \quad \|S_h(\tau)^{j-k}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq e^{vt^q} \leq e^{vT}.$$

Nous avons donc,

$$\forall t^q \leq T, \quad \|e_h^j\|_{L^2} \leq e^{vT} \left(\|e_h^0\|_{L^2} + t^j \sup_{k-1 \leq j} \|\epsilon_h^{k-1}\|_{L^2} \right)$$

ce qui mène à l'estimation d'erreur

$$\sup_{t^j \leq T} \|e_h^j\|_{L^2} \leq e^{vT} \left(\|e_h^0\|_{L^2} + T \sup_{k-1 \leq j} \|\epsilon_h^{k-1}\|_{L^2} \right).$$

Bien entendu, dans le cas d'un schéma uniformément stable ($v = 0$), l'estimation devient

$$\sup_{t^j \leq T} \|e_h^j\|_{L^2} \leq \left(\|e_h^0\|_{L^2} + T \sup_{t^j \leq T} \|\epsilon_h^j\|_{L^2} \right).$$

Dans le cas particulier $e_h^0 = 0$, il vient

$$\sup_{t^j \leq T} \|e_h^j\|_{L^2} \leq T \sup_{t^j \leq T} \|\epsilon_h^j\|_{L^2}$$

.

Et comme le schéma d'Euler explicite est consistant alors

$$\exists C \geq 0, \sup_{t^j \leq T} \|\epsilon_h^j\|_{L^2} \leq C(h^2 + \tau)$$

donc

$$\sup_{t^j \leq T} \|e_h^j\|_{L^2} \leq CT(h^2 + \tau)$$

si $h \rightarrow 0$ et $\tau \rightarrow 0$

donc

$$\lim_{h, \tau \rightarrow 0} \left(\sup_{t^j \leq T} \|e_h^j\|_{L^2} \right) = 0$$

4.2 la solution exacte de l'équation de diffusion d'ordre 1

Proposition 4.1. *La forme générale de la solution exacte (4.1) est donnée par :*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^2 u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \right] e^{-v\frac{n^2\pi^2}{4}t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

Démonstration. Voir [2], page 42. □

Remarque 4.1. *Posons $u_0(x) = 20x(2-x)$*

on a :

$$\begin{aligned} \int_0^2 u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx &= \int_0^2 20x(2-x) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= 40 \int_0^2 x \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx - 20 \int_0^2 x^2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx \\ &= 40 \left[\frac{4}{n\pi} (-1)^{n+1} \right] - 20 \left[\frac{8}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{16}{n^3\pi^3} ((-1)^n - 1) \right] \\ &= \frac{320}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

donc

$$u(x, t) = 320 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^3\pi^3} \right] e^{-v\frac{n^2\pi^2}{4}t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

4.3 Programmation de la Méthode

4.3.1 Programmation de la solution exacte

Pour évaluer la valeur numérique de $u(x, t)$ pour tout point appartenant dans la grille, nous devons faire une boucle qui, pour chaque point (x_i, t^j) , calcule $u(x_i, t^j)$. Posons $N = 100$ acceptable en analyse numérique, nous avons donc le programme suivant qui calcule les éléments de la matrice v représentant exactement les valeurs de $u(x_i, t^j)$.

```
v=0.12;h=0.25;
d=1/3;
dt=(h*h*d)/v;
T=100*dt;
cla=0; clb=0;
a=0; b=2;
N=(b-a)/h;
M=T/dt;
x=0:h:b; t=0:dt:T;
%la solution exacte
Se=zeros(N+1,M+1);
n=1;
while(n<=100)
    for i=1:N+1
        for j=1:M+1
            u(i,j)=Se(i,j)+320*(1-(-1)^n)/(n^3*pi^3)*sin(n*pi*x(i)/2)*
                exp(-0.12*n^2*pi^2*t(j)/4);
            Se(i,j)=u(i,j);
        end
    end
    n=n+1;
end
mesh(t,x,Se);
title('solutuion exacte')
```

Voici la courbe que nous avons obtenue pour $d = \frac{1}{3}$

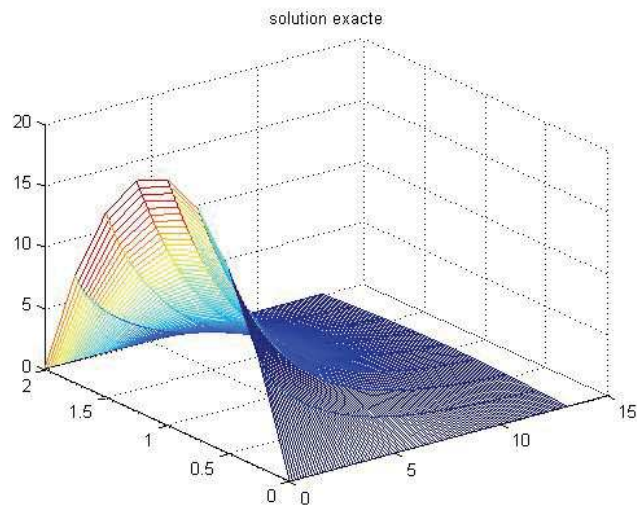


FIGURE 4.1 – Représentation graphique de la solution exacte

4.3.2 Programmation de la solution approchée

```
v=0.12;h=0.25;
d=1/3;
dt=(h*h*d)/v;
T=100*dt;
a=0; b=2;
N=(b-a)/h;
M=T/dt;
x=0:h:b; t=0:dt:T;
%condition aux limite
cla=0; clb=0;
%condition initiale
for i=1:N+1
Ci(i)=20*x(i)*(2-x(i));
end
%la solution approchée
for i=1:N-1
b(i)=0;
end
b(1)=d*cla;
b(N-1)=d*clb;
for i=1:N-2
A(i,i)=1-2*d;
A(i,i+1)=d;
A(i+1,i)=d;
end
```

4.3. PROGRAMMATION DE LA MÉTHODE

```
A(N-1,N-1)=1-2*d;
for i=1:N-1
X(i)=Ci(i+1);
end
j=1;
X=X';
while(j < M + 2)
for i=1:N-1
Sp(i,j)=X(i);
end
X=A*X+b';
j=j+1;
end
for i=N:-1:2
for j=M+1:-1:1
Sp(i,j)=Sp(i-1,j);
end
end
for j=1:M+1
Sp(1,j)=0;
Sp(N+1,j)=0;
end
%erreur de convergence
for i=1:N+1
for j=1:M+1
Ec(i,j)=abs(Se(i,j)-Sp(i,j)),
end
end
end
mesh(t,x,Se);
```

Voici les courbes obtenues après compilation² pour les deux cas :

2. Nous avons choisi l'outil **matlab** pour la programmation et la visualisation des solutions.

4.3. PROGRAMMATION DE LA MÉTHODE

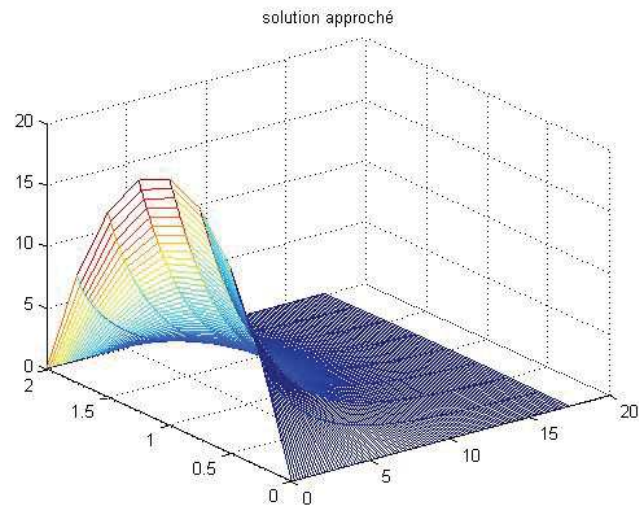


FIGURE 4.2 – Courbe de la solution numérique, méthode explicite pour $d < \frac{1}{2}$

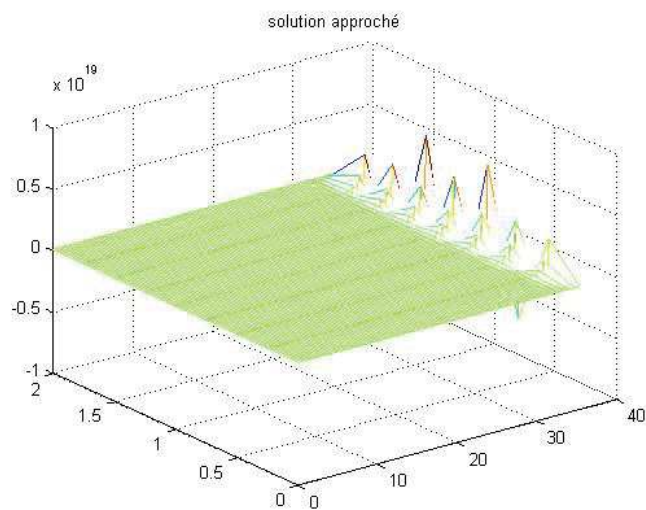


FIGURE 4.3 – Courbe de la solution numérique, méthode explicite pour $d > \frac{1}{2}$

Constatations

Nous avons remarqué, d'après les deux graphes correspondants à $d < \frac{1}{2}$ et $d > \frac{1}{2}$, que la méthode présente deux régions de stabilité. Si $d < \frac{1}{2}$ la méthode est stable et converge vers la solution exacte (analytique).

Mais $d > \frac{1}{2}$ si la méthode présente des failles et la courbe ne converge même pas.

4.3.3 Comparaison des méthodes

En fonction de d , nous voulons comparer graphiquement la méthode numérique explicite (directe) avec la solution analytique pour voir comment la solution approchée se rapproche à la solution exacte.

Comparison de $Se(x, 30)$ et $Sp(x, 30)$

Nous combinons le programme de la solution analytique avec celui de la solution numérique directe pour pouvoir faire la comparaison, puis on ajoute à la fin du nouveau programme, la partie suivante :

Rémarquons que $t_j = 5.208$ si $j = 30$.

```
se1=Se(:,30);
sp1=Sp(:,30);
SEc1=Ec(:,30);
plot(x,se1,'r')
hold on
plot(x,sp1,'b');
plot(x,sEc1,'g');
grid;
```

Voici donc les courbes comparatives de ces deux méthodes aux points 5.208 et la courbe de l'erreur de convergence :

4.3. PROGRAMMATION DE LA MÉTHODE

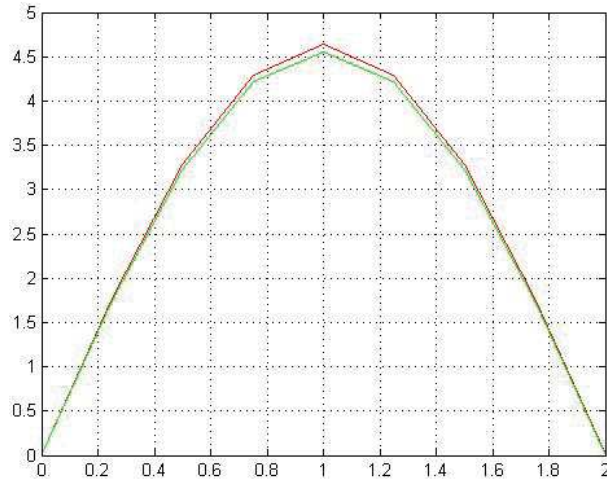


FIGURE 4.4 – Comparaison graphique de $Se(x, 30)$ et $Sp(x, 30)$

Voici donc la courbe de l'erreur de convergence :

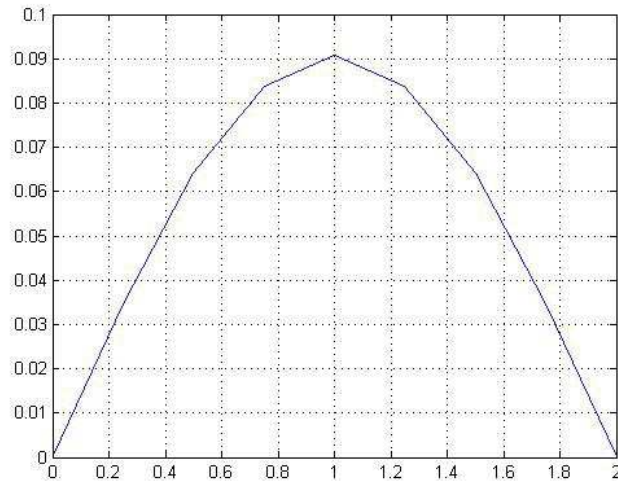


FIGURE 4.5 – Erreur entre solution exacte et solution approchée

Comparison de $Se(3, t)$ et $Sp(3, t)$

Rémarquons que $x_i = 0.60$ si $i = 3$.

```

se1=Se(3,:);
sp1=Sp(3,:);
SEc1=Ec(3,:);
plot(t,se1,'r')
hold on
plot(t,sp1,'b');
plot(t,sEc1,'g');
grid;

```

Voici donc les courbes comparatives de ces deux méthodes aux points 0.75 et la courbe de l'erreur de convergence :

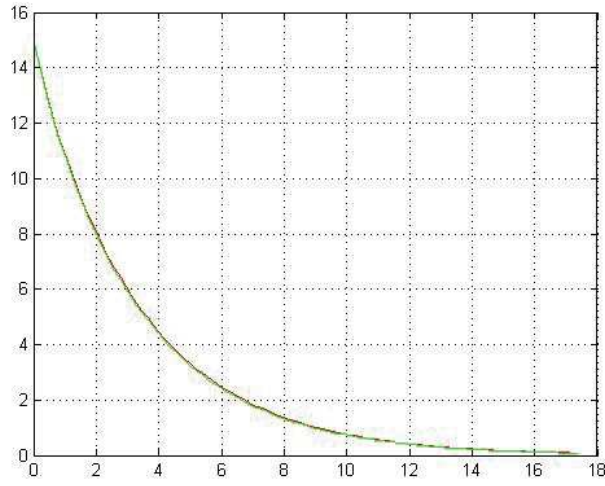


FIGURE 4.6 – Comparaison graphique de $Se(3, t)$ et $Sp(3, t)$

Voici donc la courbe de l'erreur de convergence :

4.3. PROGRAMMATION DE LA MÉTHODE

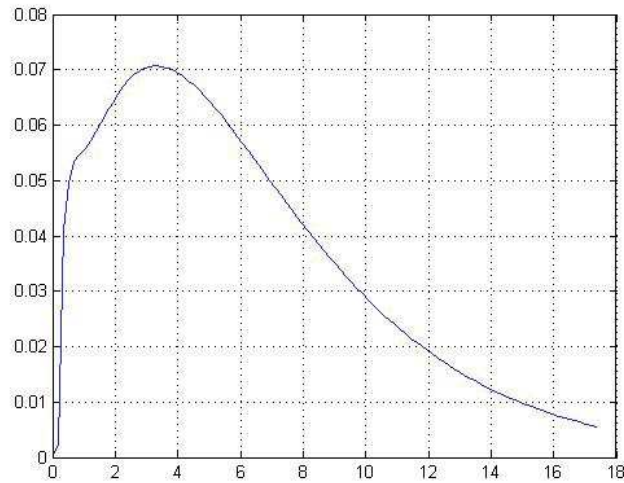


FIGURE 4.7 – Erreur entre solution exacte et solution approchée

Remarque 4.2. Selon les variations (courbes) des erreurs fixées à des valeurs faibles égales à 0.09% par port à l'espace x et 0.07% par port du temps t , alors notre MDF prouve une bonne précision.

Remarque 4.3. On la notera dans la programmation

<i>dans mémoire</i>	<i>dans programme (matlab)</i>
u_0^j	<i>cla</i>
u_{N+1}^j	<i>clb</i>
α	<i>r</i>
τ	<i>dt</i>

Conclusion

La problématique de ce mémoire réside dans la compréhension et l'application de la méthode des différences finies, ainsi que l'importance de la convergence de ces schémas numériques.

Notre travail porte une analyse justifiant à l'aide du théorème de Lax, que la MDF converge bien vers la solution approchée d'un problème d'évolution EDP. Enfin, on a essayé de faciliter la conception de cette méthode par l'application du schéma programmé (MATLAB) d'Euler explicite pour l'équation de diffusion d'ordre 1.

Deux remarques importantes relatives à cette méthode et quelques développements possibles.

* Le tableau suivant discute les avantages et les inconvénients de cette méthode

Avantages	Inconvénients
Méthode simple	Forte régularité des solutions nécessaire
Rapidité et performance des algorithmes	Peu de souplesse de maillage
Facilité de monter en ordre	Conditions de type Neumann difficiles à gérer
Grand nombre d'EDP approchables	

* Le théorème de Lax a été élargi en une équivalence ainsi qu'aux EDP d'évolution non linéaire mais cette démonstration n'est pas présentée ici.

* Nous estimons une éventuelle amélioration de l'algorithme et de la programmation de cette méthode par le langage d'informatique spécifique à l'analyse numérique, qui est bien sur, le Fortran.

Enfin, il convient de signaler que notre travail est essentiellement basé sur une combinaison de recettes (cours) déjà vues (étudiées).

Bibliographie

- [1] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri. *Méthodes Numériques*. Springer-Verlag Italia, Milano, 2004.
- [2] Aude Rondepierre, Adeline Rouchon. *Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles-Étude théorique*, Université de Toulouse, 2012-2013.
- [3] Ciarlet Jean-Pierre. *Analyse Numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences, ed, EDP Sciences, 2006.
- [4] Daveau Christian. *Méthodes d'approximation des équations aux dérivées partielles*. Cours de l'Université de Cergy-Pontoise, 2009-2010.
- [5] Eric Goncalvès da Silva. *Méthodes et Analyse Numériques*. Engineering school, Institut Polytechnique de Grenoble.
- [6] Franck Jedrzejewski. *Introduction aux méthodes numériques* . Springer-Verlag France, Paris, 2005-2006.
- [7] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Éditions de l'École polytechnique, Octobre 2012.
- [8] Kada Allab. *Éléments D'Analyse*. Office des Publications Universitaires, Place Centrale de Ben Aknoun-Alger, 2007.
- [9] M Lakrib. *Cours d'Analuse Numérique* . Office des Publications Universitaires, Place Centrale de Ben Aknoun-Alger, 2005.
- [10] Raphaèle Herbin. *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Université Aix Marseille 1, 2008.
- [11] Robert Bédard. *Équations aux Dérivées Partielles*. Universié du Québec, Montréal, juillet 2007.
- [12] Sylvie Benzoni. *Analyse de Fourier*. Université de Lyon-Lyon 1-ICJ, 2011.
- [13] Thierry Gallay. *Théorie de la Mesure et de L'Intégration*. Université Joseph Fourier, Grenoble, 2009.

Résumé

La problématique de ce mémoire réside dans la compréhension et l'application de la méthode des différences finies, ainsi que l'importance de la convergence de ces schémas numériques.

Notre travail porte une analyse justifiant à l'aide du théorème de Lax, que la MDF converge bien vers la solution approchée d'un problème d'évolution EDP.

Enfin, on a essayé de faciliter la conception de cette méthode par l'application du schéma programmé (MATLAB) d'Euler explicite pour l'équation de diffusion d'ordre 1.

À titre de conclusion, on donne certaines remarques importantes relatives à cette méthode et certaines recommandations

Abstract

The problem of this memory lies in the understanding and application of the method finite differences, as well as the importance of the convergence of these digital patterns.

Our work carries an analysis justifying, using the Lax theorem, that the MDF converges well towards the approximate solution of an EDP evolution problem.

Finally, we tried to facilitate the design of this method by the application of the programmed (MATLAB) of Euler explicit scheme for the equation of diffusion of order 1.

As a conclusion, we give some important notes about this method and some recommendations

ملخص

تكمّن إشكالية هذه المذكرة في فهم وتطبيق طريقة الفروق المحدودة مع أهمية تقارب أنماطها العددية.

يشمل عملنا تحليلاً يبرر باستخدام نظرية لاس، أن هذه الطريقة تتقارب بشكل جيد نحو الحل التقريبي لمسألة تفاضلية زمنية: م ت ج.

أخيراً، حاولنا تسهيل مفهوم هذه الطريقة بتطبيق نمط أويلر الضاهري المبرمج بماتلاب على معادلة الانتشار من المرتبة 1

ختاماً، نتقدم ملاحظات هامة حول هذه الطريقة وبعض التوصيات.