الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
جامعة عباس لغرور خنشلة
Abbes Laghrour - Khenchela University

Faculty of Sciences and Technology
Department of Mathematics and Computer Science

N° de série : ...

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière : **Mathématiques**
Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

دراسة رياضية لبعض المعادلات التفاضلية ذات مشتقات جزئية ناقصية

Réalisé par : **BALOULI Rayene**
BENACHI Hayet

Dirigé par : **M. BOUSSAADA Mourad**

Membres de jury :

Président : **Pr. MECHRAOUI Rachid**
Examinateur : **M. MEFTAH Yacin**

2022/2021

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

شُكر وتَقدير

قال تعالى:

(وَلَقَدْ آتَيْنَا لُقْمَانَ الْحِكْمَةَ أَنِ اشْكُرْ لِلَّهِ وَمَنْ يَشْكُرْ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ لِنَفْسِهِ)

سورة لقمان [12]

أحمد الله تعالى حمدًا كثيرًا طيبًا مباركًا ملء السموات و الأرض على ما أكرمني به من إتمام هذه الرسالة التي أرجو أن تنال رضاه،

ثم أتوجه بجزيل الشكر و عظيم الامتنان الى كل من :

مد يد العون لإنارة دربي، إلى كل من علمني علمًا نافعًا.

إلى جمال الروح وصدق العطاء الأستاذ: **بوسعدة مراد** الذي أفادني بنصحه وتوجيهه، لك منا كل معاني التقدير والعرفان.

إلى أعضاء لجنة المناقشة :

الأستاذ : أ. **مشراوي رشيد**

الأستاذ : **مفتاح ياسين**

لقبولهم مناقشة و إثراء هذه المذكرة.

إلى كل من ساهم في إنجاز هذا العمل من قريب أو من بعيد.

إهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

وصلى الله على صاحب الشفاعة سيدنا محمد النبي الكريم ،و على آله و صحبه الميامين ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين و بعد :

اهدي تخرجي إلى والدي عزيز حفظه الله و إلى التي جعل الله الجنة تحت أقدامه إلى قرة عيني و فؤادي أمي الغالية أطال الله في عمرها إلى

من قاسموني أفراحي و أحزاني إخوتي (فوزي، صهيب، صبرينة).

إلى من جمعني به القدر خطيبي خليل.

إلى زوجات إخوتي و أبنائهم (أروى ،روان،إياد).

إلى جميع عائلتي (أعمامي وعماتي وأخوالي و خالتي)

إلى جميع صديقات (وهيبة، بيشة، منار، إكرام ، كوثر،أميرة، هديل، أسيا ، حياة ،هدى..)

إلى كل من علمني و كان أستاذا لي من صغر حتى تخرج.

إلى الاستاذ الكريم: بوسعدة مراد حفظه الله .

إلى كل من ساهم في إتمام هذا البحث .

إلى جميع طلبة التخرج قسم رياضيات 2022/2021

بالولي ريان

إهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

وصلى الله على صاحب الشفاعة سيدنا محمد النبي الكريم ،و على آله و صحبه الميامين

ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين و بعد :

اهدي تخرجي إلى والدي عزيز حفظه الله و إلى التي جعل الله الجنة تحت أقدامه إلى قرة

عيني و فؤادي أمي الغالية أطال الله في عمرها إلى

من قاسموني أفراحي و أحزاني إخوتي

إلى من جمعني به النصيب زوجي الغالي

إلى أبنائي قرة عيني (مريم نور ، أحمد كنان)

إلى إحوتي و أخواتي وأزواج أخواتي و أبنائهم

إلى جميع عائلتي (أعمامي وعماتي وأخوالي و خالتي)

إلى جميع صديقات (دلال ، سامية، سارة ،..)

إلى كل من علمني و كان أستاذا لي من صغر حتى تخرج.

إلى الأستاذ الكريم: بوسعدة مراد حفظه الله .

إلى كل من ساهم في إتمام البحث .

إلى جميع طلبة التخرج قسم رياضيات 2022/2021

بن عشي حياة

الفهرس

قائمة الرموز

قائمة الرموز

الرموز	المعنى
$x = (x_1, x_2, \dots \dots, x_N)$	عنصر من $\mathbb{R}^n$
$r = \lvert x \rvert = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2)}$	طويلة $\mathbf{X}$
$B(x_0, r)$	كرة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$ مركزها $\mathbf{x_0}$ نصف قطرها $\mathbf{r}$
$\bar{B}(x_0, r)$	كرة مغلقة من $\mathbb{R}^n$ مركزها $\mathbf{x_0}$ نصف قطرها $\mathbf{r}$
$\partial\Omega$	حافة Ω
$\Omega' \subset\subset \Omega$	$\mathbf{\Omega}$ مفتوح من $\mathbb{R}^n$ بحيث $\bar{\Omega}' \subset\subset \mathbf{\Omega}$
$supp(\varphi)$	حامل $\boldsymbol{\varphi}$
$\lvert A \rvert$	قياس $\mathbf{A}$
$\mathrm{D_{ij}}u = \partial_{ij}u = u_{x_{ij}} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$	الاشتقاق بالنسبة $\boldsymbol{x_j}$ و $\boldsymbol{x_i}$
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	تدرج $\boldsymbol{u}$
$\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_N}$	لابلاس ل $\boldsymbol{u}$
$\lVert . \rVert_X$	نظيم في فضاء **Banach** ل $\boldsymbol{X}$
$\rightarrow$	تقارب بقوة في فضاء **Banach** ل $\boldsymbol{X}$
$\vec{X}$	تقارب ضعيف في فضاء **Banach** ل $\boldsymbol{X}$
X'	ثنوي $\boldsymbol{X}$
$\langle \dots \rangle$	جداء سلمي

$S.C.I$	نصف مستمرة من الاسفل
$F.S.C.I$	نصف مستمرة بضعف من الاسفل
f^{+}	الجزء الموجب لf
f^{-}	الجزء السالب ل f
$L^{p}(\Omega)$	التوابع القيوسة المعرفة من $u:\Omega\to\mathbb{R}$ بحيث $\int_{\Omega}\|u\|^{p}<\infty$ حيث $P\in[1,\infty[$
$L^{\infty}(\Omega)$	التوابع القيوسة المعرفة من $U:\Omega\to\mathbb{R}$ بحيث $\int_{\Omega}\|u\|^{p}\leq C$ شك على Ω
$L^{k.p}(\Omega)$	فضاء $sobolev$ المعمم
$w_{0}^{k.p}(\Omega)$	فضاء جزئي من $w^{k.p}(\Omega)$ معدوم على الحافة
$w^{-k.p}(\Omega)$	ثنوي $w_{0}^{k.p}(\Omega)$
$\boxed{\hookrightarrow}$	انغامس مستمر
$\boxed{\hookrightarrow}\boxed{\hookrightarrow}$	انغماس متراص
f موجب	$f\geq 0$ و $f\neq 0$

مقدمة

مقدمة

مازالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن تستخدم في فهم العلوم الفزيائية و الهندسية بالاضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي و من ثم يمكن القول دون تجاوز أو مبالغة أن المعادلات التفاضلية يمتد تاثيرها ليشمل العديد من العلوم الاجتماعية مثل علم النفس و الاقتصاد و الاجتماع حيث أن أغلب العلاقات و القوانين الحاكمة بين متغيرات أي مسالة هندسية أو فيزيائية تظهر على صورة معادلات تفاضلية.

لفهم هذه المسائل كان لابد من حل هذه المعادلات التفاضلية أو على الاقل معرفة كثير من خصائص هذا الحل .و نظرا لاهميتها وقع إختيارنا عليها كموضوع لمذكرتنا " دراسة رياضية لبعض المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الناقصية" حيث قمنا بتقسيمها إلى ثلاث فصول.

حيث تناولنا في الفصل الاول الإطار العام لحلول المعادلات التفاضلية الجزئية وبعض التعاريف المتعلقة بفضاء L^p و الفضاءات الشعاعية والبناخية و فضاء Sobolev وخصائصها، بعض نتائج التصغير التي تعد وسائل مهمة في إيجاد حلول للمعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الناقصية.

أما في الفصل الثاني تناولنا بعض التعاريف حول الطرق التغايرية المستعملة بكثرة في حلول المعادلات التفاضلية كما قدمنا نظرية Lax–Milgram التي تضمن لنا وجود ووحدانية الحل للمعادلة التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الناقصية.

وفي الاخير تطرقنا في الفصل الثالث للخطوات الاربعة لايجاد الحلول للمعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الناقصية المتعلقة بالتدرج .

الفصل الأول: مفاهيم أولية وتعاريف

2.1 بعض نتائج التحليل

2.2 فضاءات Sobolev $w^{m.p}(x)$

الهدف من هذا الفصل هو إعطاء تذكيرات مختصرة على بعض الملاحظات وأدوات التحليل التابعي التي هي على علاقة بالمسائل المدروسة.

وسوف نعطي بعض النتائج المدمجة في خصائص فضاءات سوبولاف، كذلك بعض نتائج المقاربات للمسائل المرادفة.

1. بعض نتائج التحليل:

1.1 التطبيق المتراص:

تعريف:

ليكن F و E فضائين لبناخ. نقول عن التطبيق $f: E \to F$ أنه متراص إذا كان:

$$\forall A \subset E \text{ محدود } \Rightarrow \overline{f\,(A)} \text{ متراص}$$

ملاحظة :

كل تطبيق خطي متراص هو مستمر.

قضية:

لتكن $(u_n)_n$ متتالية من E بحيث $u_n \to u$ بضعف

ليكن $f: E \to F$ تطبيق خطي متراص $\Leftarrow f(u_n) \to f(u)$ بقوة

2.1 الفضاء الانعكاسي:

تعريف:

ليكن E فضاء لبناخ، وليكن J التباين القانوني من E نحو E''.

(E'' ثنوي الثنوي لـ E)، : نقول عن E انعكاسي إذا كان $J(E) = E''$

قضية 1 :

ليكن E فضاء لبناخ ، E انعكاسي إذا و فقط إذا كان E' انعكاسي .

قضية 2:

ليكن $A \subset E$ فضاء لبناخ و انعكاسي، مغلق و محدب و غير خالي و التابع :

$$\varphi : A \to]-\infty ; +\infty]$$

محدب و نصف مستمر من الاسفل و$\varphi \not\equiv +\infty$ بحيث:

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to +\infty}} \varphi(x) = +\infty$$

اذاφ يدرك حده الادني على A

اي: يوجد $x_0 \in A$ بحيث :

$$\varphi(x_0) = \min_A \varphi$$

نظرية :

ليكن E فضاء بناخ انعكاسي، و لتكن $\{x_n\}_n \subset E$ متتالية محدودة في E ،اذا توجد $\left(x_{n_k}\right)$ مستخرجة من $\left(x_n\right)$متقاربة في طبولوجيا$\sigma(E, E')$ (الطبولوجيا ضعيفة).

3.1الفضاء القابل للفصل

تعريف:

نقول عن فضاء متري E انه قابل للفصل اذا وجد جزء $A \subset E$قابل للعد و كثيف .

قضية:

ليكن E فضاء متري قابل للفصل و F جزء منه إذا F قابل للفصل .

نظرية 1:

ليكن E فضاء لبناخ بحيث E' قابل للفصل اذا F قابل للفصل .

نظرية 2 :

ليكن E فضاء لبناخ إذا:

(E انعكاسي و قابل للفصل) $\Leftrightarrow$ ('E انعكاسي و قابل للفصل) .

قضية 1 :

ليكن V فضاء لبناخ قابل للفصل ذو بعد غير منتهي اذا توجد عائلة حرة غير قابلة للعد

$\{v_i\}_{i\in N}$ و $v_i \in V$ بحيث المزج الخطي المنتهي ل$\{v_i\}$ كثيف في V .

(أنظر المرجع [2] .)

4.1 التقارب بضعف

تعريف:

ليكن Eفضاء لبناخ و ليكن 'E ثنوي E.

نقول عن متتالية $(u_n)_n \in E$ انها متقاربة بضعف نحو $u \in E$ اذا كان:

$$\forall f \in E' : \ f(u_n) = \langle f, u_n\rangle_{E',E} \rightarrow \langle f, u\rangle_{E',E} = f(u)$$

مع: $\langle f, u_n\rangle_{E',E}$ قوس ثنوي.

5.1 التابع المحدب :

تعريف:

نقول عن التابع f : $f: E \rightarrow \ ]-\infty, +\infty]$ حيث: E شعاعي فضاء.

انه محدب اذا كان :

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \ : \ \forall x, y \in E \wedge \forall t \in [0,1]$$

ملاحظة 1:

اذا كان f محدب اذا من اجل كل $\beta \in \mathbb{R}$ ليدنا المجموعة $[\varphi \leq \beta]$ محدبة

لكن العكس غير صحيح.

ملاحظة 2:

اذا كان f_1, f_2 تابعين محدبين فان$f_1 + f_2$ تابع محدب.

6.1 الفضاءات البناخية

$\left(E, \|.\|_E\right)$ فضاء شعاعي نظيمي

تعريف 1:

نقول أنّ $\left(E,\|.\|_E\right)$ تام اذا كانت كل متتالية كوشية هي متقاربة.

تعريف 2:

نقول أنّ متتالية $(x)_{n=1}^{n=\infty}$ انها كوشية اذا و فقط اذا كان :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon)\epsilon N(\forall n, m\epsilon N), n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_E \leq \varepsilon$$

تعريف 3 :

نقول عن متتالية $(x)_{n=1}^{n=\infty}$ من E انها متقاربة نحو x من E.

(و نكتب $x_n \to x$) اذا كان لدينا :

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\|_E = 0$$

تعريف4: (الفضاء البناخي)

ليكن $(E, \|.\|_E)$ فضاء شعاعي نظيميا.

نقول عن $(E, \|.\|_E)$ انه فضاء بناخي اذا كان فضاء نظيميا تاما .

اي مفهوم الكوشية و مفهوم التقارب نفس الشئ.

ملاحظة:

كل فضاء هلبرتي هو فضاء بناخي .

أمثلة :

- $\mathbb{R}^n$ مرفقة بنظيم $(a, b) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i b_i$ هو هلبرتي و منه بناخي .
- الفضاءات $H_0^m(\Omega), L^2(\Omega), H^m(\Omega)$ هي فضاءات هلبرتية ومنه هي بناخية . ولا ننسى ان النظيم المستعمل في هذه الحالة هو نظيم ناتج من الجداء السلمي .

7.1 الدالة نصف مستمرة و نصف المستمرة بضعف من الاسفل :

تعريف:

ليكن X فضاء لبناخ :

- لتكن الدالة $J: X \to \mathbb{R}$ نقول انها نصف مستمرة من الادنى اذا و فقط اذا تحقق

ما يلي :

- $u_n \to u \Rightarrow \quad J(u) \le \lim_{n\to\infty} inf J(u_n)$
- نقول عن J انها دالة نصف مستمرة بضعف من الاسفل من اجل كل متتالية
- $(x_n) \in X$ تتقارب نحو $x \in X$ أيّ أن : $J(x) \le \lim_{n\to\infty} inf J(u_n)$

8.1 الدالة الناقصية:

تعريف:

الدالة المعرفة على الفضاء البناخي X تكون ناقصية اذا و فقط اذا كان :

$$\lim_{n\to\infty} J(x) = +\infty$$

نظرية 1:

ليكن X انعكاسي، والتطبيق $I: \to \mathbb{R}$ اذا كان I متقارب و نصف مستمر

من الاسفل فان I نصف مستمر بضعف من الاسفل.

نظرية 2:

ليكن $I: X \to \mathbb{R}$ حيث X فضاء بناخ اذا كان X انعكاسي $X = (X')'$

و I مستمر بضعف من السفل و I تابع ناقصي اذا :

$$\begin{cases} \inf_x I > -\infty \\ \exists \bar{u} \in X: \quad I(\bar{u}) = \inf_x I(u) \end{cases} و$$

توطئة 1:

ليكن X فضاء لبناخ و انعكاسي و I تابع محدب و نصف مستمر من الادنى

و ناقصي اذن :

$$\alpha = \inf_x I < +\infty \qquad \exists u_0 \in X \ : \ I(u_0) = \alpha$$

9.1 الفضاءات L^p $(\infty > p \ge 1)$

ليكن (X, A, μ) فضاء مقيسا و ليكن M فضاء التوابع القيوسة من (X, A) في $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$.

تعريف 1 :

ليكن$1 \leq P < \infty$ نسمي الفضاء$L^P(X, A, \mu)$ الفضاء الجزئي من M المعرف بان :

$$f \in L^P(X, A, \mu) \Leftrightarrow f \in M \text{ و } |f|\mu \text{ كمولة}$$

اذن توابع$L^p(X, A, \mu)$ هي توابع قيوسة و بحيثf $\int |f| \, d\mu < \infty$

و من اجل f من L^p نصف النظيم بالعبارة التالية :

$$N_p(f) = \left(\int_x |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{P}}$$

تعريف 2 : (التقارب في L^P)

نقول عن متتالية$\{f_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ انها متقاربة نحو f من L^p اذا تحقق:

$$\lim_{n \to \infty} N_p(f_n - f) = 0$$

و هذا يعني انه لدينا :

$$\lim_{n \to \infty} (\int |f_n - f|^p)^{\frac{1}{p}} = 0$$

10.1 الفضاءات L^∞:

تعريف 1 : (النظيم N_∞)

ليكن$f \in M_+$ و نعرفN_∞ بـ : $N_\infty(f) = Inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ / (f^{-1}(]\alpha, \infty])) = 0\}$

و يدعي $N_\infty(f)$ بالحد الاعلى بالقياس لتابع f او الحد الاعلى الاساسي لتابع f

من اجل $f \in M$ نعتبر$N_\infty(|f|)$ الذي نشير اليه ايضا بـ:$N_\infty(f)$

تعريف**2** : الفضاء$\mathbf{L}^\infty$

$L^\infty(X, A, \mu)$ هو تعريفا الفضاء الجزئي من M المعرف ب :

$$\mathrm{L}_\infty(\mathrm{f}) < \infty, \mathrm{f} \in M \Leftrightarrow \mathrm{f} \in \mathrm{L}^\infty$$

11.1 متباينة هولدر:

تعريف:

من اجل p و q عددين حقيقيين موجبين و مترافقين اي ان :

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$$

كانت لدينا متباينة هولدر القائلة : $N_1(fg) \leq N_p(f)N_q(g)$

هذاو من اجل كل $f, g \in M_+$

12.1 مبرهنة لوبيغ (التقارب بالهيمنة):

مبرهنة:

لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ متتالية من الفضاء L^p و ليكن $f \in M$ و نفرض ان :

1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ μ شك .

2) يوجد تابع $g \in L^p$ بحيث $|f_n(x)| \leq g(x)$ μ شك مهما كان $n \in N$.

عندئذ :

$f \in L^p$ و تكون المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ متقاربة في الفضاء L^p نحو f .

13.1 فضاء التوابع الاختبارية:

ليكن Ω جزء مفتوح من $\mathbb{R}^n$

نسمي فضاء التوابع المنتمية الى الفضاء $C^\infty(\Omega)$ و متراصة الحوامل بفضاء التوابع الاختبارية التي نرمز لها بالرمز $D(\Omega)$

$$f \in D(\Omega) \Leftrightarrow f \in C^\infty(\Omega) \text{ و } \operatorname{supp} f \text{ متراص}$$

14.1 دستور غرين:

تعريف:

ليكن Ω جزء مفتوح منتظم من الصنف C^1 من $\mathbb{R}_n$, و ليكن u تابع من الصنف $C^2(\overline{\Omega})$

v تابع من الصنف $C^1(\overline{\Omega})$, حيث كل التابعين ذات سند محدود على Ω .

اذن لدينا العلاقة التالية :

$$\int_{\Omega} \nabla u v dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds$$

حيث يرمز $\frac{\partial}{\partial \eta}$ للمشتق وفق ناظم الواحد الخارجي على Ω. يرمز $\partial\Omega$ و لحافة Ω

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \eta} = \nabla \mathrm{u}.\, \eta = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{i}=\mathrm{n}} \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x_i}} \eta_{\mathrm{i}}$$

من أجل اثبات كثافة لوبيغ نحتاج الى :

15.1 تساوي قابلية المكاملة في $L^p(X)$

تعريف:

لتكن X مجموعة قيوسة من $\mathbb{R}^n$ و $1 \leq p < \infty$

المتتالية $\{f_n\}$ للدوال من $L^P(X)$ كمولة اذا و فقط اذا كان :

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0: \forall E \subset X \ et\ |E| < \delta, \forall n: \int_E |f_n|^p < \varepsilon$$

كنتيجة نطبق التوطئة التالية :

توطئة:

لتكن $\{f_n\}$ متتالية محدودة في $L^1(x)$ حيث $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام نحو f

$\{f_n\}$ كمولة $\Rightarrow f \in \mathbf{L^p(X)}$

و اذا كان $|X| = \infty$ يستلزم انه من كلاجل ε يوجد γ قيوس بحيث $|\gamma| < \infty$

$$\int_{\gamma^c} |f_n|^p dx < \varepsilon \quad : \quad \forall n$$

اذن $f_n \to f$ بقوة f_n. تتقارب بقوة نحو f في $L^1(X)$.

وبصفة عامة التقنيات التغايرية في المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية هي كتابة حلول المعادلة التفاضلية ذات المشتقات الجزئية على شكل نقطة حرجة لتابع Jمعرفة على الفضاء التوابع الملائمة _ نستخدمها فيما يلي _ بحيث الحلول تكون ضعيفة او بمعنى اخر ثنوي بمفهوم الثنوي .

2. فضاءات(Ω) Sobolev $\mathbf{W^{m,p}}$

تعريف:

- الفضاءات$\mathbf{W^{1,p}(\Omega)}$

ليكن $\Omega \subset \mathbb{R}^{n}$ مفتوح . ليكن $\mathbf{p} \in \mathbb{R}$ حيث : $\mathbf{1 \leq p \leq +\infty}$

لدينا فضاء Sobolev $\mathrm{W^{1,p}(X)}$ معرف :

$$\boldsymbol{W^{1,p}}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^{p}(\Omega): \exists g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^{p}(\Omega) : \\ \int_{\Omega} u \dfrac{\delta\varphi}{\delta x_i} = -\int_{\Omega} g_i, \varphi \;\; . \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega): \forall i = 1,2, \ldots, N. \end{array} \right\}$$

كملاحظة : $\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x_i}} = \mathrm{g_i}$

- الفضاء$\mathbf{W^{1,p}}(\Omega)$ مزود بالنظيم :

$$\|u\|_{\Omega} = \left(\|u\|_{L^{p}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^{p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$$

و هذا يكافى احيانا :

$$\|u\|_{L^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^{p}(\Omega)}^{p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^{p}(\Omega)}^{p} \right)^{\frac{1}{p}} \quad : 1 \leq p < \infty$$

- اذا كان $p = \infty$ نستخلص$w^{1,\infty}(\Omega)$ من النظيم :

$$\|u\|_{L^{1,\infty}(\Omega)} = (\mathrm{SUPP}_{\Omega}|u| + \mathrm{SUPP}_{\Omega}|\nabla u|)$$

- اذا كان $p = 2$:

نلاحظ ان

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$$

الفضاء$H^1(\Omega)$ مزود بالجداء السلمي التالي :

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{dx_i}\right)_{L^2(\Omega)}$$

النظيم المشترك : $\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

و هي تكافؤ النظيم في$W^{1,2}(p)$.

خواص:

الفضاء$W^{1,p}(\Omega)$ هو فضاء :

- بناخي من اجل : $1 \leq p \leq \infty$
- انعكاسي من اجل : $1 < p < \infty$
- انفصالي من اجل : $1 \leq p < \infty$
- اذا كان $p = 2$ الفضاء$H^1(\Omega)$ فضاءهو هلبرت انفصالي.

الفضاءات$W^{m,p}(\Omega)$

ليكن : $\forall m \in Z - \{0,1\} \wedge \quad p \in \mathbb{R} : 1 \leq p \leq \infty$

تعريف1 :

$$w^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u \in L^p(\Omega): \quad \forall \alpha \ \ multi-indice \ \ \wedge |\alpha| \leq m \\ \exists g_\alpha \ \in L^p(\Omega): \int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi: \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

α متعدد الادلة و حيث: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)$ و $\alpha_i \in N$ مع $\alpha_i \geq 0$

و كذلك $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \wedge D^\alpha \varphi = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \cdots \alpha_N} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_i} \dots \partial x_N^{\alpha_N}}$

ملاحظة: $D^{\alpha}u = g_{\alpha}$

نرمز بالتراجع الى :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,p}(\Omega): \frac{\delta u}{\delta x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \forall i \in 1,2, \dots, N\right\}$$

الفضاء $W^{m,2}(\Omega)$ هو مزود بالنظيم :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}$$

ناخذ $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ بحيث $H^m(\Omega)$ مزود بالجداء السلمي :

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m}(D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)}$$

و منه هو فضاء لهلبرت

- **الفضاءات $w_0^{1,p}(\Omega)$**

ليكن $1 \leq p \leq \infty$ المعرف ب: $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

الفضاء $w_0^{1,p}(\Omega)$ هو ملاصقة $D(\Omega)$ في $W^{1,p}(\Omega)$.

و نكتب : $w_c^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}}}$.

حيث ان :

بقوة $u \in w^{1,p}(\Omega) \leftrightarrow \exists\{\varphi_n\} \subset D(\Omega): \varphi_n \xrightarrow{w^{1,p}(\Omega)} u$.

نظرية :

ليكن $u \in W^{1,p}(\Omega)$, اذن $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ و فقط اذا كان $u = 0$ على $I = \partial\Omega$

تعريف2 :

من اجل كل $1 \leq r \leq +\infty$ نعرف r^* مرافق حرج ل r ب:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^*} = \frac{1}{r} - \frac{1}{d} & : r > d \\ r^* \ / \ 1 \leq r^* < \infty & : r = d \\ r^* = +\infty & : r > d \end{cases}$$

حيث d هو بعد الفضاء الذي نعمل فيه .

1.2الخصائص الطبولوجية لفضاءات Sobolev

- **الكثافة :**

بعض خصائص الدوال من C^1 تبقى محققة من اجل الدوال من $W^{1,p}(\Omega)$.

تكون ملائمة جدا لدراسة خصائص الكثافة .

نظرية 1 : التقريب العام

ليكن Ω محدود و $u \in W^{1,p}(\Omega)$ اذن توجد متتالية $\{u_n\}$ من $W^{1,p}(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega)$ بحيث :

$\{u_n\} \to u$ في $W^{1,p}(\Omega)$.

قي الحالة Ω محدود و بدقة لدينا نتيجة الكثافة التالية:

نظرية 2: التقريب العام

ليكن : $u \in W^{1,p}(\Omega)$ اذن :

حيث K كثيف في Ω : $K \subset \Omega' \vee \Omega \subset\subset \Omega' \forall$:0 $\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

2.2الانغماس في الفضاءات Sobolev

الانغماس في فضاءات sobolev مهم جدا في دراسة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية .بحيث يعطي لنا متباينات بين النظيم في الفضاءات sobolev و النظيم في L^p

- **الانغماس المستمر و الانغماس المتراص**

ليكن E و F فضائين لبناخ

تعريف 1:

نقول عن E انه منغمس باستمرار في F اذا كان التباين القانوني مستمر اي :

و $i: E \to F$ (التباين القانوني) مستمر و نرمز له ب : $E \hookrightarrow F$ و $E \subseteq F$ و.

تعريف2 :

نقول عن E انه منغمس بالتراص في F اذا كان التباين القانوني متراص اي :

$i \;:\; E \to F$ (التباين القانوني) متراص و نرمز له بالرمز $F \hookrightarrow\hookrightarrow E$ و$F \subseteq$ E.

نظرية 1. " متباينة poincaré"

ليكن Ω" **مجال** محدود باتجاه معين"**المباشر الاتجاه** $1 \leq p < \infty$ اذن يوجد ثابت c بحيث :

$$c := c(\Omega, p) \quad : \forall u \in w_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty \quad : \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

بالاخص الكمية $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ تمثل نظيم للفضاء $w_0^{1,p}(\Omega)$ المستخلصة من $w^{1,p}(\Omega)$.

حالة في $u \neq 0$ على $\partial\Omega$ المتباينةالتاليةنستعمل

نظرية 2 : "متباينة Poincaré-Wirtinger":

ليكن $1 \leq p < \infty$ و $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ مجال محدود مجاور ليبشينزي , اذن يوجد ثابت c ومستقيل

وحيد ل Ωو p بحيث : $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

أو :

$$u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\,(y)dy$$

تكون القيمة المتوسطة ل u على Ωالعدد$|\Omega|$ و تمثل مقدار $Lebesgue$ للمجال Ω

اذ كان $\Omega \equiv \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ اذن متباينة Poincaré غير محققة و بالعكس المتباينة تكون كالتالي :

نظرية 3 متباينة "Sobolev–Gagllardo-Neremberg":

ليكن $1 \leq p \leq \infty$ يوجد ثابت c حيث: $c := c(\Omega, p)$

حيث: $\forall u \in w^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ $\quad \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})} \leq c\|\nabla U\|_{L^p(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})}$

مع : $$p^* = \frac{pN}{N-p}$$

نتيجة 1 :

الفضاء $W^{1,p}(\mathrm{R}^{\mathrm{N}})$ منغمس باستمرار في $L^q(\mathrm{R}^{\mathrm{N}})$ و هذا $\forall q \in [\![p, p^*]\!]$

ملاحظة1 :

- في الحالة $w^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}), p = N$ منغمس بالستمرار في $L^q(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$: $q \in [N, +\infty[$
- في الحالة $w^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}), p > N$ منغمس بالستمرار في $L^q(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$: $q \in [N, +\infty]$
- خاصة حالة: كل عناصر $w^{1,p}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ تقبل تمثيل مستمر .
- عندما يكون Ω محدود تكون كل الانغماسات المزكورة(نعوض $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ بـΩ)

تبقي صالحة من اجل كل $q \in [1, p^*]$ في هذه الحالة متباينة $Sobolev$ تصبح :

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq c\|u\|_{W^{1,p}}$$

نلاحظ ان المتباينة تبقى نفسها في $w_0^{1,p}((\Omega))$

في الحالة العامة الانغماسات المذكورة تعطى بالنظرية التالية :

نظرية4 :

لتكن Ω مفتوح و منتظم من $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ ليكن $m \leq 1$ و $p \in [1, +\infty[$

- اذا كان $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ اذن: $w^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.
- اذا كان $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ اذن : $w^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

من اجل $q \in [p, +\infty[$ و لكن ليس في L^∞ اذا كان $p > 1$.

- اذا كان $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ اذن : $w^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

في هذه الحالة اذا كان $m - \frac{N}{p} > 0$ ليس صحيح اذن :

$w^{m,p}(\Omega) \subset C^K(\Omega)$ بدون فرضية الناظمية ل Ω مع $K := \left[m - \frac{N}{p}\right]$

بدون فرضية الانتظام الانغماسات سابقة صحيحة محليا , تبقى بصفة عامة صحيحة من اجل $w_0^{m,p}(\Omega)$

النتيجة المجزئة الضرورية هي نظرية kondrachov_Rellich التي تعني ان

الانغماس في فضاءات $w^{1,p}(\Omega)$sobolev متراصة في بعض فضاءات $L^q(\Omega)$.

نظرية 5 _"Kondrachov_Rellich" :

ليكن Ω محدود من الصنف C^1 نجد :

- اذا كان $p < N$ اذن :

$$w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \quad : \forall q \in [1,p^*[$$

مع :
$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

- اذا كان $p = N$ اذن :

$$w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) ,\forall q \in [1, +\infty[$$

- اذا كان $p > N$ اذن :

$$w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega})$$

ملاحظة 2 :

– الانغماسات السابقة صحيحة من اجل $w_0^{1,p}(\Omega)$ بدون شروط على المجال محدود Ω .

يجب اذن استرجاع الخيار التالي :

– من اجل كل متتالية $\{u_n\}$ اذا كانت $\{u_n\}$ متتالية محدودة في $w^{1,p}(\Omega)$ مع :

$(1 \leq p < N)$ اذن نستطيع استخراج متتالية جزئية $\{u_{n_k}\}$ من $\{u_n\}$ حيث : $\{u_{n_k}\}$

متقاربة بقوة في $L^q(\Omega)$ و هذا $\forall q \in [1,p^*[$.

نظرية :

ليكن H فضاء هيلبرت اذا كانت (u_n) متتالية محدودة من H إذًا توجد متتالية مستخرجة $\left(u_{\delta(n)}\right)$ من (u_n) وتابع u من H بحيث:

$$u_n \xrightarrow{\text{تقارب بضعف}} u$$

مبرهنة النقطة الصامدة لشودار :

مبرهنة شودار هي تعميم لمبرهنة براور في الفضاءات الشعاعية الطبولوجيا ذات البعد غير المنته.

ويمكن أيضا صياغتها في صغتين :

الصيغة الاولى (محدب-متراص) :

ليكن E فضاء بناخيا و K جزء غير خال محدب و متراص من E و T تطبيق من K نحو K

إذا كان T مستمرا ، فان ل T نقطة صامدة على الاقل في K .

الصيغة الثانية (محدب- مغلق) :

ليكن E فضاء بناخيا و C جزء غير خال محدب و مغلق من E و T تطبيق من C نحو C.

إذا كان T مستمرا و $T(C)$ متراص نسبيا، فان لـ T نقطة صامدة على الاقل في C.

الفصل الثاني: المسائل الناقصية و الطرق التغايرية

1.2 المسائل الناقصية والطرق التغايرية

2.2 بعض الاستعمالات التطبيقية

المسائل الناقصية و الطرق التغايرية :

ان اصل الطرق التغايرية تتمثل في البحث عن حل المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية كنقطة حرجة لدالة **J** المعرفة على فضاءات الدوال المختارة بعناية .

اذا الحلول الناتجة بهذا المعنى الضعيف او بمعني الثنوي .

●النتيجة الاولى في هذا الاتجاه و بدون ارتياب (شك), نظرية**Lax-Miligrame**

او التطبيقات داخل المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الخطية الظاهرة .

تعريف :

نقول عن شكل ثنائي الخطية

$$a\ :\ H\times H\ \rightarrow\ R$$
$$(u,v)\ \rightarrow\ a\,(u,v)$$

انه :

• مستمر : يوجد c ثابت بحيث :

$$\forall u,v\ \in H \quad \text{مع}\ \|a(u,v)\| \leq c\|u\|\|v\|$$

• ناقصي : يوجد ثابت a> 0:

$$a(u,v) \geq\ a\,\|u\|^2 \quad \forall u \in H$$

كنتيجة لدينا النظرية التالية :

نظرية Lax-Millgram

ليكن$a(u,v)$ الثنائية الحطية و مستمر و ناقصي , اذن من اجل كل$\varphi \in H'$ يوجد

$\mathbf{u} \in H$بحيث :

$$a(u,v) = \langle\varphi,v\rangle \qquad \forall v \in H \ldots\ldots\ldots..(*)$$

$$\text{حيث:}\ \langle\varphi,v\rangle = L(v)$$

و زيادة على ذلك اذا كانت a متناظر اذن u يمتاز بالخصائص التالية :

$$\frac{1}{2}a(u,u) - \langle\varphi,u\rangle = \min_{v\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle\varphi,v\rangle\right\}\ldots\ldots(**)\text{و}\ u \in H$$

ملاحظة :

من المهم الربط بين المعادلة (*) وو(**)

مثال تطبيقي :

نعتبر المسالة التالية :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \;\; Dans \;\; \Omega \;\; (1.2) \\ u_{|\partial\,\Omega} = 0 \end{cases}$$

حيث ان Ω هي جزء محدودR^N و $f \in L^q(\Omega)$ من اجل :

$$q > \frac{2N}{N+1}$$

ليكن$X = H_0^1(\Omega)$ هو فضاء هلبرتي نضع :

$$a(u,v) = \int \nabla u \nabla v \;\; dx$$

واضح انa هي ثنائي الخطية و مستمر و ناقصي علىX نضع :

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} fv dx$$

و منه φ صيغة خطية مستمرة على X حسب نظرية $LAX - MILIGRAME$ يوجد u ينتمي X هو حل المشكل $a(u,v) = \varphi(v) \quad \forall\, v \in X$.

بالإضافة الى ذلك u يحقق القيمة الدنيا لدالة الطاقة التالية:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx - \int_{\Omega} fv dx$$

نتيجة1:

u هو حل ضعيف للمسألة (2.1).

$$\begin{cases} -\Delta u = u^q & Dans\ \Omega \\ u \geq 0 & Dans\ \Omega \\ & u_{|\partial\Omega} \end{cases} \qquad (2.2)$$

من اجل $0 < q < 1$ وΩجزء محدود منR^N من الواضح ان الحلول الضعيفة ل(2.2)

نقاط حرجة للدالة J معرفة على الفضاء$X = H_0^1(\Omega)$ ب :

$$\mathrm{J(v)} = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v\|^2 dx \frac{1}{q+1}\int_\Omega v_+^{q+1} dx$$

حيث :

$\mathrm{v_+ = max\{0,v\}}$ الجزء الموجب منv.

اذا كان q>1 اذن باستخدام متباينة Holderو poincaré*لدينا :*

$$\int_\Omega v_+^{q+1} dx \leq \mathrm{C(\Omega)}\left(\int_\Omega v_+^2 dx\right)^{\frac{q+1}{2}} \leq \mathrm{C}\ \|v\|^{q+1} 2_x$$

اذن :

$$\mathrm{J(v)} \geq \frac{1}{2}\|v\|_x^2 - C\|v\|_x^{\frac{q+1}{2}} \to +\infty \text{ اذا كان } \|v\| \to +\infty$$

نتيجة 2 :

نستنتج ان J ناقصي و محدود من الاسفل نضع

$$m = inf_{v\in X} J(v) > \infty$$

* نستنتج ان J من الصنفC^1علىX.

* من اجل انهاء البرهان يجب اثبات ان J يدرك حده الادنى.

* لتكن$\{u_n\}_n$ متتالية تصغرية ل m اي$\mathrm{J(v_n)} \underset{n\to+\infty}{\Longrightarrow} m$

بما ان J ناقصي, نستنتج ان$\{u_n\}_n$ متتالية محدودة في الفضاء الإنعكاسي X

اذن يمكن استخراج متتالية نرمز لها ب$\{v_n\}$ حيث$(v_n \to v)$ في X ,باستخدام

الانغماس المتراص في فضاءات sobolev, نستنتج ان *:*

$v_n \to v$ بقوة في$L^s(\Omega)$ و هذا$\forall s < 2^*$.

$$p = 2 \wedge w^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^s(\Omega)$$

نستنتج ان : $v_n \to v$ بقوة في L^{q+1} .

و ايضا:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega v_+^{q+1} dx \leq \lim_{n\to\infty} \inf\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega (v_n)_+^{q+1} dx\right) = m$$

إذن : $J(v) = m$ و $J'(v) = m$

اذن v حل ضعيف ل (2.2) .

ملاحظة 2:

نقول عن متتالية تصغيرية لـ J على المجموعة K هي المتتالية $\{u_n\}_n$ حيث :

$$\forall n \quad u_n \in K \ \wedge \lim_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{v\in K} J(v)$$

بصفة عامة :

لدينا مسالة الوجود التالية التي نبرهنها بنفس الطريقة السابقة.

نظرية :

لتكن f دالة وموجبة مستمرة بحيث $\frac{f(u)}{u} \downarrow$ اذن لدينا المسالة التالية :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u), u > 0 \quad dans\ \Omega \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

تقبل حل وحيد و موجب وهو عبارة عن نقطة حرجة ل J المعرف ب:

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega F(v) dx$$

$$F(s) = \int_0^s f(t)\, dt$$

ملاحظة3 :

وحدانية الحل للمسالة (3.2) تعتمد على توطئة المقارنة التالية و البرهان بالتفصيل موجود

في المرجع[1] .

توطئة :

لتكن f تابع موجب و مستمر و يحقق $\downarrow \frac{f(u)}{u}$.

نفرض ان : $u,v \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ بحيث :

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geq f(u),\ u > 0 & dans\ \Omega \\ -\Delta_p v \leq f(v)\ ,\ v > 0 & dans\ \Omega \end{cases} \qquad (4.2)$$

عندئذ $v \geq u$ على Ω .

تعريف 2 شرط (*Palais-Smale*) :

ليكن X فضاء لبناخ و $J: X \to R$ تابع من الصنف C^1 .

اذا كان$c \in R$, نقول عن J يحقق شرط $palais - Smale$ عند المنقطع c, اذا كان من اجل كل متتالية $(u_n)_n \subset X$ بحيث :

$$J(u_n) \overset{R}{\to} c$$

و

$$J'(u_n) \overset{X'}{\to} 0$$

عندئذ يمكن استخراج متتالية جزئية $(u_{n_k})_{n_k}$ متقاربة .

نظرية **Ambrosetti-Rabinowitz:**

ليكن X فضاء بناخ و$J \in C^1(X,R)$ و تحقق شرط $PALAIS - SMALE$

نفرض ان $\boldsymbol{J(0) = 0}$ و انه**:**

– يوجد $R > 0$ و $\alpha > 0$ بحيث : $\|u\| = R$ اذا : $J(u) \geq \alpha$.

– يوجد $\mathbf{u_0} \in \mathbf{X}$ بحيث : $\|\mathbf{u}\| > R$ اذا : $\mathbf{J(u)} < \alpha$.

اذن $\mathbf{J}$ يملك قيمة حرجة $\mathbf{c}$ بحيث $\mathbf{c \geq \alpha}$.

و بالاخص اذا كان :

$$.\, p = \{p \in C([0,1],X), p(0) = 0, p(1) = u_0\}$$

و :

$$c = inf max_{P \in P t \in [0,1]} J\big(p(t)\big)$$

اذن C قيمة حرجة ل J و $c \geq \alpha$.

نظرية(Stampacchia):

ليكن Ω جزء مفتوح ومحدود منR^N: بحيث Ω من الصنف C^1

و لتكن $p \succ \dfrac{N}{2} / f \in L^2 \cap L^p$

و لتكن A مصفوفة تحقق الفرضيات

1- $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$ من اجل كل$1 \leq i,j \leq N$

2-من اجل كل تقريب شبه كلي $x \in \Omega$ و كل $\xi \in R^N$

$$A(x)\xi\xi = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$$

إذا كان u الحل الوحيد الضعيف في H_0^1

$$\begin{cases} -div(A\nabla u) = f & dans\Omega \\ u = 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

$$w_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q . \forall q \prec 2^*$$

اذن $.\, u \in L^{\infty}(\Omega)$

2.2 بعض الاستعمالات التطبيقية

نظرية مبدأ الاعظمية

ليكن$u \in w_0^{1,2}(\Omega)$ بحيث :

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 & dans\ \Omega \\ u \geq 0 & sur\ \partial\Omega \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} u > 0 & dans\ \Omega \\ u = 0 & dans\ \partial\Omega \end{cases}$$

إذاأخذنا معادلات تفاضلية ذات مشتقات جزئية ناقصية في الشكل :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,\nabla u) & dans\ \ \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(5.2)}$$

بما أن f متعلق بالتدرج يمكن تطبيق مباشرة الطرق التغايرية من أجل إيجاد الحل.

النسخة الاولى في هذا الصدد هي نظرية النتيجة الاولى في هذه الدراسة هي نظرية $leray-lions$

المذكورة في المرجع**[4]**

3 نظرية $Leray-Lions$:

نعتبر المسالة (5.2) حيث f يحقق الشرط التالي

$$\left|f\left(x,s,\zeta\right)\right| \le M \ \ \forall\left(x,s,\zeta\right) \in \Omega\times \ \times R\times R^N$$

عندئذ المسالة (5.2) تقبل حل توزيعي محدود و معرف في. $H_0^1(\Omega)$

(اي :.) $H_0^1(\Omega)$ تقبل حل بمفهوم التوزيعات في

مثال :

لتكن Ω جزء محدود و منظم من $\mathbb{R}^n$

و ليكن $1 < q < 2$ و$1 < p < 2^* - 1$

$$\begin{cases} -\Delta u + |\nabla u|^q = \gamma u - u^p \\ u_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

ولنعتبر مسالة المقاربة التالية:

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u|^q} = \gamma u_n - u_n^p \\ u_n \ge 0 \\ (u_n)_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad (7.2)$$

الهدف هو اثبات ان المسالة (7.2) تقبل حل وحيد في $W_0^{1.2}(\Omega)$.

ثم اثبات ان المسالة (7.2) تتقارب نحو المسالة (6.2) . بالمرور الى النهاية .

المسالة (7.2) تقبل حل وحيد حسب مبرهنة $Loray - Lions$

و باعتبار التابع :

$$f(x,u,\zeta) = \gamma u - u^p - \frac{|\zeta|^q}{1+\frac{1}{n}|\zeta|^q}$$

او :

$$f(x,u_n,\nabla u_n) = \gamma u_n - u_n^p - \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q}$$

نلاحظ ان :

$$f(x,u,\zeta) \leq M_\gamma \ : \quad \forall (x,u,\zeta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$$

و هذا لان ξ, u محدودين :

تقبل حل وحيد $leray - lions$ اذن حسب (Ω) $u_n \in w_0^{1.p}$ •

•المرور الى النهاية :

حل موجب ووحيد للمسالة θليكن :

$$\begin{cases} -\Delta\theta = \gamma\theta - \theta^p \\ \theta_{|\partial\Omega} = 0 \end{cases} \qquad (8.2)$$

ملاحظة :

ان وجود الحل θ للمسالة (8.2) بسيط مبدا التصغير المذكور سابقا .

من الواضح ان :

$$-\Delta\theta + \frac{|\nabla\theta|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \geq \gamma\theta - \theta^p$$

اذن بتطبيق مبدأ مقارنة الناتج من مبرهنة نستنتج ان $Alaa - Pierre$:

$$\forall n \in \mathbb{N}.\, u_n \leq \theta$$

• نضع الان:

$$.H\left(\nabla u_n\right)=\frac{\left|\nabla u_n\right|^q}{1+\frac{1}{n}\left|\nabla u_n\right|^q}$$

ثم نعتبر u_nكتابع اختباري في (7.2) .

و نكامل الطرفين فنجد u_nنضرب طرفي المسالة (7.2) في:

$$-\int_\Omega \Delta u_n u_n+\int_\Omega u_n H\left(\Delta u_n\right)=\gamma\int_\Omega u_n^2-\int_\Omega u_n^{p+1}$$

و باستعمال $Green$ نجد:

$$\int_\Omega\left|\nabla u_n\right|^2+\int_\Omega u_n H\left(\Delta u_n\right)=\gamma\int_\Omega u_n^2-\int_\Omega u_n^{p+1}$$

اذن:

$$\int_\Omega\left|\nabla u_n\right|^2+\int_\Omega u_n H\left(\Delta u_n\right)\le\gamma\int_\Omega u_n^2\le\gamma\int_\Omega\theta^2$$

نستنتج ان:

$$.\int u_n H(\nabla u_n)\le C \; .\int\left|\nabla u_n\right|^2 < C$$

و $.\int u_n H(\nabla u_n)\le C$

اذن يوجد $\bar{u}\in w_0^{1.2}$:

$.\, w_0^{1.2}(\Omega)$فيضعف$u_n \to \bar{u}$

و بما ان :

$$W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q, \forall q \prec 2^*$$

اذن:.

$.\, L^1(\Omega)$ $\gamma u_n-u_n^p\to\gamma\bar{u}-\bar{u}^p$ بقوة في

من اجل انهاء البرهان :

يكفي اثبات ان :

$\frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \to |\nabla u|^2$ فيقوة $L^1(\Omega)$.

لذلك نعتبر التابع المنتظم ψ و الذي يحقق : $\psi(0)=0$ و $\psi \geq 0$.

ثم نعتبر الاختياري $\psi(u_n-u)$.

ونضرب طرفي (6.2) في $\psi(u_n-u)$ و نستخدم Green نجد :

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\psi(u_n-u)) + \int_\Omega H(\nabla u_n)\psi(\nabla u_n - u) = \int_\Omega (\gamma u_n - u_n^p)\psi(u_n-u)$$

لدينا :

شبه كلي : $\psi(u_n-u) \to 0$

(لأنّ: التقارب القوي في $L^1(\Omega)$ يستلزم التقارب الشبه كلي).

اذا :

شبه كلي $(\gamma u_n - u_n^p)\psi(u_n-u) \to (\gamma u - u^p)\psi(0) = 0$.

و بما ان :

$$\left|(\gamma u_n - u_n^p)\psi(u_n-u)\right| \leq (\gamma\theta + \theta^p)\psi(\theta-\theta)\ \nabla u_n - \nabla u = \nabla(u_n-u)$$

لان :ψمتزايدة و $u_n \leq \theta$.

اذن يمكننا استخدام نظرية الهيمنة لان :

شبه كلي . $(\gamma u_n - u_n^p)\psi(u_n-u) \to (\gamma u - u^p)\psi(0) = 0$

و $\left|(\gamma u_n - u_n^p)\psi(u_n-u)\right| \leq (\gamma u - u^p)\psi(\theta-u)$

مع $(\gamma u - u^p)\psi(\theta-u)$ هو تابع مهيمن

و منه :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega (\gamma u_n - u_n^p)\psi(u_n-u) = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty}(\gamma u_n - u^p)\psi(u_n-u) = 0 \quad ....(1)$$

و من جهة اخرى لدينا :

$$\int_{\Omega}\nabla u_n\nabla\left(\psi\left(u_n-u\right)\right)=\int_{\Omega}\nabla u_n\nabla\left(u_n-u\right)\psi\left(u_n-u\right)$$

لان : $\nabla u_n\nabla\left(\psi\left(u_n-u\right)\right)=\nabla u_n\nabla\left(u_n-u\right)\psi\left(u_n-u\right)$

ومنه:

$$\int_{\Omega}\nabla u_n\nabla\left(\psi\left(u_n-u\right)\right)=\int_{\Omega}\left(\nabla u_n-\nabla u+\nabla u\right)\left(\nabla\left(u_n-u\right)\psi'\left(u_n-u\right)\right)$$

$$\int_{\Omega}\left(\nabla\left(u_n-u\right)^2\psi'\left(u_n-u\right)\right)+\int_{\Omega}\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\psi'\left(u_n-u\right)$$

لان : $\nabla u_n-\nabla u=\nabla(u_n-u)$

وباستخدام التقارب الضعيف لـ u_n نجد أنّ:

$$\int_{\Omega}\nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\psi'\left(u_n-u\right)\rightarrow 0$$

لان: $\psi'\left(u_n-u\right)\rightarrow\psi'(0)\Rightarrow\begin{cases}\left|\psi'\left(u_n-u\right)\right|\leq C\\ \nabla u\nabla\left(u_n-u\right)\rightarrow 0\end{cases}$ و

إذًا نستنتج أنّ:

$$\int_{\Omega}\nabla u_n\nabla\left(\psi\left(u_n-u\right)\right)=\int_{\Omega}\left|\nabla\left(u_n-u\right)\right|^2\psi'\left(u_n-u\right)+o(1)\text{........(2)}$$

بقي لنا تقدير الحد:

$$\int_{\Omega}\frac{\left|\nabla u_n\right|^q}{1+\frac{1}{n}\left|\nabla u_n\right|^q}\psi\left(u_n-u\right)$$

لدينا:

$$\int_{\Omega}\frac{\left|\nabla u_n\right|^q}{1+\frac{1}{n}\left|\nabla u_n\right|^q}\psi(u_n-u)\geq-\int_{\Omega}\frac{\left|\nabla u_n\right|^q}{1+\frac{1}{n}\left|\nabla u_n\right|^q}\left|\psi(u_n-u)\right|$$

$$\geq-\int_{\Omega}\left|\nabla u_n\right|^q\left|\psi(u_n-u)\right|$$

لأنّ:

$$\frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}\left||\nabla u_n|^q\right|} \le \left||\nabla u_n|^q\right|$$

ومنه:

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q\ |\psi(u_n-u)| \underbrace{\le}_{Holder} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega \psi(u_n-u)^{\frac{2}{2-q}}\right)^{\frac{2-q}{2}} \qquad (q<2)$$

عددين مترافقين . $\frac{2}{2-q}$ و $\frac{2}{q}$ بحيث :

إذًا:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q} \ge -\left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2\right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_\Omega \psi(u_n-u)^{\frac{2}{2-q}}\right)^{\frac{2-q}{2}}$$

نلاحظ أنّ**:**

$$\begin{cases} \psi(u_n-u)^{\frac{2}{2-q}} \longrightarrow 0 & \text{شبه كليا} \\ |\psi(u_n-u)|^{\frac{2}{2-q}} \le C \end{cases} \quad \text{و}$$

إِذًا باستخدام نظرية الهيمنة نستنتج أنّ:

$\psi(u_n-u)^{\frac{2}{2-q}} \longrightarrow 0$ **في** $L^1(\Omega)$.

أيّ:

$$\int_\Omega (\psi(u_n-u))^{\frac{2}{2-q}} \longrightarrow 0 \ : \quad q<2$$

بما أنّ $(u_n)_n$ محدودة في $W_0^{1.2}(\Omega)$ نستنتج ان :

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^q}{1+\frac{1}{n}|\nabla u_n|^q}|\psi(u_n-u)| = o(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

من(1),(2),(3) يكون لدينا :

$$\int_{\Omega}\left|\nabla(u_n-u)\right|^2\psi'(u_n-u)+o(1)\leq o(1)$$

نضع الان : $\psi(s)=e^{s}-1$

حيث:

$$\begin{cases}\psi(0)=0 \text{ و} \\ \psi'(s)\geq 0\end{cases}$$

إذًا:

$$.\int_{\Omega}\left|\nabla(u_n-u)\right|^2 e^{u_n-u}o(1)\leq o(1)$$

بما أنّ $u_n\leq\theta\leq M$ نستنتج أنّ:

$$\lim_{x\to\infty}|\nabla(u_n-u)|^2=0$$

خلاصة:

في $W_0^{1,2}(\Omega)\; u_n\to u$

في $L^1\; \dfrac{\left|\nabla u_n\right|^q}{1+\frac{1}{n}\left|\nabla u_n\right|^q}\to\left|\nabla u\right|^q$

إذن u هو الحل الوحيد لـ : (6.2).

الفصل الثالث: حل المسألة التناقصية المتعلقة بالتدرج

وجود حل محدود

نبحث عن وجود حل للمعادلة التالية :

$$-div(A(x,u)\nabla u) + a_0(x)u = f(x,u,\nabla u)$$

لتكن Ω جزء مفتوح و محدود من $\mathbb{R}^n$

لدينا الفرضيات التالية :

ف1: A مصفوفة معرفة ابتداءًا من دوال كراتودوري أي :

ثابت $\forall u$ $x \to A(x,u)$ وقابل للمكاملة

$u \to A(x,u)$ مستمر شبه كليا

مع A محدودة أيّ: $\exists \beta \succ 0 : |A(x,u)| \leq \beta$

ف2: $\exists \alpha > 0 : \forall \xi \in \mathbb{R}^n : A(x,\xi)\xi\xi > \alpha|\xi|$

ف3: a_0 تابع محدود أي $\alpha_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ يوجد $\alpha_0 \succ 0$

بحيث $a_0(x) \succ \alpha_0 \succ 0$

ف4: f تابع كراتودوري ويحقق :

$$\exists c_0, c_1 \succ 0 : \ |f(x,S,\xi)| \leq c_0 + c_1|\xi|^2 \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

نظرية 1.3 :

تحت شروط الفرضيات 1،2،3، و4 يوجد حل للمعادلة :

$$-div(A(x,u)\nabla u) + a_0(x)u = f(x,u,\nabla u) \dots (1.3)$$

تقبل حل $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ في $D'(\Omega)$.

ملاحظة: ولكل مصطلح موجود له معنى.

برهان النظرية:

نتبع الخطوات التالية:

1 الخطوة الاولى :التقارب Approximation

2 الخطوة الثانية : التقديرات في $H_0^1(\Omega)$ Estimation

3 الخطوة الثالثة : التقارب القوي في $H_0^1(\Omega)$ Convergence forte dans

4 الخطوة الرابعة : المرور إلى النهايات Passage à la limite

5 الخطوة الخامسة : التقديرات في $L^\infty(\Omega)$ Estimation

1 – الخطوة الأولى التقارب Approximation:

نعرف $0 \prec \varepsilon$ من اجل $f^\varepsilon(x,u,\zeta) = \dfrac{f(x,u,\zeta)}{1+\varepsilon|f(x,u,\zeta)|}$

لدينا: $|f^\varepsilon| \le |f|\,,\ |f^\varepsilon| \le \frac{1}{\varepsilon}$

اذًا يمكننا تعريف المسالة التقاربية التالية:

$$-div(A(x,u^\varepsilon)\nabla u^\varepsilon) + a_0 u^\varepsilon = f^\varepsilon(x,u^\varepsilon,\nabla u^\varepsilon) \quad ...(2.3)$$

نظرية: المسألة (2.3) تقبل على الاقل حل: $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$

برهان النظرية: نطبق نظرية النقطة الصامدة لشودر Point fixe de Schoulder

من أجل $0 \prec \varepsilon$ ثابت، نعرف التطبيق :

$$T: H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$
$$\overline{v} \to T(\overline{v}) = v$$

بحيث v حل للمسألة:

$$-div(A(x,\overline{v})\nabla v) + a_0(x)v = f^\varepsilon(x,\overline{v},\nabla\overline{v}) \qquad (3.3)$$

$$\Leftrightarrow \forall w \in H_0^1: \int_\Omega A(x,\overline{v})\nabla v\nabla w + \int_\Omega a_0\, vw = \int_\Omega f^\varepsilon w \qquad ....(1)$$

(المسالة التغايرية)

أ- التطبيق T معرف جيدا لان :

من اجل كل $\bar{v}$ من$\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ المسالة(1) تقبل حل بحيث v من$\mathrm{H}_0^1(\Omega)$

باستعمال نظرية Lax-Millgram وبأخذ:

$$a(v, C) = \int_{\Omega} Av\nabla C + \int_{\Omega} a_0\, vC$$
$$l(C) = \int_{\Omega} f^{\varepsilon}\, C$$

ب- $T: C \to C$ تطبيق مستمر

$$\overline{v} \to T(\overline{v}) = v$$

بحيث C معرف كمايلي:

$$\mathrm{C} = \{\, \mathrm{v} \mid \mathrm{v} \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \mid \|\mathrm{v}\|_{\mathrm{H}_0^1(\Omega)} \leq \mathrm{C}_2 = \frac{1}{2\mathrm{a}_0}\frac{1}{\varepsilon^2}|\Omega|\}$$

من الواضح أن C مغلق ومحدب.

T مستمر على $H_0^1(\Omega)$ لان :

لتكن $(u_n)_{n\in N}$متتالية من $H_0^1(\Omega)$ بحيث $u_n \to u$ في $H_0^1(\Omega)$

ونرمز لـ: $v_n = T(u_n)$

المتتالية v_n محدودة في $H_0^1(\Omega)$ $(T: C \to C)$

اذن يمكن استخراج متتالية$v_{\delta(n)}$ و ايجاد $v \in H_0^1(\Omega)$ بحيث

$$\mathrm{v}_{\delta(n)} \xrightarrow[\text{تقارب بضعف}]{} v$$

يمكن استخراج متتالية$u_{\delta(n)}$ من$(u_n)_{n\in N}$ وايجاد Hو G من$L^2(\Omega)$

بحيث

$$\begin{cases} u_{\delta(n)} \to u \\ \nabla u_{\delta(n)} \to \nabla u \\ \left|u_{\delta(n)}\right| \leq G \\ \left|\nabla \delta_{(n)}\right| \leq H \\ A\left(x, u_{\delta(n)}\right) \to A(x,u) \end{cases} \qquad \text{في شك}\ \Omega$$

و بما ان f تابع لـ: $Carathéodory$، باستخدام التعريف نستنتج ان

$$f_n^{\varepsilon}\left(x, u_{\delta(n)}, \nabla u_{\delta(n)}\right) \to f_n^{\varepsilon}(x, u, \nabla u) \qquad \text{شك في}\ \Omega$$

وباستخدام الفرضية نستنتج أنّ:

$$|f_n^{\varepsilon}| \leq \left|f\left(x, u_{\delta(n)}, \nabla u_{\delta(n)}\right)\right| \leq \left(C_0 + C_1\left|\nabla u_{\delta(n)}\right|^2\right)$$

$$\leq (C_0 + C_1|H|^2) \in L^2(\Omega)$$

وباستخدام نظرية الهيمنة لـ– لوبيغ :

نستنتج أنّ:

$$f^{\varepsilon}\left(x, u_{\delta(n)}, \nabla u_{\delta(n)}\right) \to f^{\varepsilon}(x, u, \nabla u)\ \text{في}\ L^2(\Omega)$$

وباستخدام المرور الى النهاية في المسالة التغايرية نجد:

$$\int_{\Omega} A(x, u_{\delta(n)}) \nabla v_{\delta(n)} \nabla w + \int_{\Omega} a_0 + v_{\delta(n)}\, w = \int_{\Omega} f^{\varepsilon}\, (x, u_{\delta(n)}, \nabla u_{\delta(n)}) w,$$

$$\forall w \in H_0^1$$

$$\int_{\Omega} A(x,u) \nabla v \nabla w + \int_{\Omega} a_0 + v\, w = \int_{\Omega} f^{\varepsilon}\, (x, u, \nabla u) w, \forall w \in H_0^1$$

و هذا يبرهن أن $T(u) = v$

ومنه نستنتج أن: $T(u_{\delta(n)}) \to T(u)$ في $H_0^1(\Omega)$

و بما أن الحل وحيد فان: $T(u_n) \to T(u)$ في $L^2(\Omega)$

إذن T مستمر على Ω.

ج-Tمتراص نسبيا اي نبرهن أن :

$\overline{T(c)}$ متراص

لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$متتالية من C بحيث $v_n = T(u_n) \in C$

و بما انC محدود فإن (v_n) و (u_n) محدودتان في $H_0^1(\Omega)$ إذن:

إذًا يمكن استخراج متتاليتين $u_{\delta(n)}$ من $v_{\delta(n)}$ من (v_n) و (u_n) على التوالي:

بحيث:

$$\begin{cases} u_{\delta(n)} \xrightarrow[H_0^1(\Omega)\text{تقارب بضعف}]{} u \\ v_{\delta(n)} \xrightarrow[H_0^1(\Omega)\text{تقارب بضعف}]{} v \end{cases}$$

باستخدام نظرية Relliche نجد أنّ:

$$v_{\delta(n)} \xrightarrow{\text{تقارب في } L^2\ (\Omega)} v$$

و نرمز لـ :$g_n = f^{\varepsilon}(x, u_n, \nabla u_n)$ وباستخدام الفرضية نجد أن :

$$|g_n| \le (C_1 + C_2|\nabla u_n|)$$

أيّ أنّ (g_n) محدودة في $L^2(\Omega)$

إذن يمكن استخراج متتالية$g_{\delta(n)}$ من g_n بحيث:

$$g_{\delta(n)} \xrightarrow{\text{تقارب بضعف في} L^2(\Omega)} g$$

باستخدام المرور إلى النهاية نجد أنّ :

$$\int_{\Omega} A(x, u_{\delta(n)}) \nabla v_{\delta(n)} \nabla C + \int_{\Omega} a_0 + v_{\delta(n)}\, C = \int_{\Omega} f^{\varepsilon}\,(x, u_{\delta(n)}, \nabla u_{\delta(n)}) C$$

$$= \int_{\Omega} g_n\, C, \forall C \in H_0^1(\Omega)$$

يعطي لنا:

$$\int_{\Omega} A(x,u)\nabla v\nabla C + \int_{\Omega} a_0\, vC = \int_{\Omega} g_n C\,, \forall C \in H_0^1(\Omega)$$

$$\leq \int_{\Omega} A(x,u_{\delta_n})|\nabla(v_n - v)|^2 - (\nabla(v_n - v)$$

$$= \int_{\Omega}(g_{\delta_n} - g)(v_{\delta_n} - v) - \int_{\Omega}(A - A_n)\nabla v\nabla(v_{\delta_n} - v) - \int_{\Omega} a_0\,(v_{\delta_n} - v)^2$$

وبما أنّ:

$$v_{\delta_n} \xrightarrow{L^2} v$$

$$g_{\delta(n)} \xrightarrow{L^2} g$$

$$(A - A_n)\nabla v\nabla(v_{\delta_n} - v) \xrightarrow{\text{شك في } \Omega} 0$$

و

$$\begin{cases} A_n \to A \\ \nabla v_{\delta_n} \to \nabla v \\ \left|(A - A_n)\nabla v\nabla(v_{\delta_n} - v)\right| \leq \alpha, \nabla v \in L^2 \end{cases} \quad \text{شك في } \Omega$$

من مبرهنة الهيمنة نستنتج أنّ:

$$\int_{\Omega}(A - A_n)\nabla v\nabla(v_{\delta(n)} - v) \xrightarrow{L^2} 0$$

إذا: $\left\|\nabla(v_{\delta(n)} - v)\right\|_{L^2} \to 0$

اي: $\nabla v_{\delta(n)} \xrightarrow{L^2} \nabla v$

ومنه: $v_{\delta(n)} \xrightarrow{H_0^1} v$

$T(u_{\delta(n)}) \to T(u)$ في $H_0^1(\Omega)$

أيّ أنه توجد متتالية $v_{\delta(n)} \in T(c)$ متقاربة

إذا: $\overline{T(c)}$ متراص إي $T(c)$ متراص نسبيا

الخلاصة :يوجد حل تقريبي للمسألة $(u^{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega))$.

2- الخطوى الثانية :التقديرات في Estimation dans $H_0^1(\Omega)$

في هذه المرحلة نبيّن أنّ: $u^{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ أيّ نبرهن أنّ:

$$\exists c > 0 : \|\nabla u^{\varepsilon}\|_{L^{\infty}} < c$$

من أجل ذلك نضرب طرفي المعادلة (3.1) في تابع اِختياري $\varphi(u^{\varepsilon})$.

نلاحظ أنّه إذا كان $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ وَ $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ وَ $\varphi(0) = 0$

فإنّ: $\varphi(v) \in H_0^1 \cap L^{\infty}$ وَ $\nabla\varphi(v) = \varphi^{'}(v).\nabla v$

إذًا:

$$\int_{\Omega} A(u^{\varepsilon})\nabla u^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\varphi^{'}(u^{\varepsilon})dx + \alpha_0 \int_{\Omega} u^{\varepsilon}\varphi(u^{\varepsilon})dx$$
$$\leq \int_{\Omega} (c_0 + c_1|\nabla u^{\varepsilon}|^2)|\varphi(u^{\varepsilon})|dx$$

بأخذ التابع الاِختباري φ متزايد أيّ: $u\varphi(u) \geq 0$ بحيث:

$$\alpha\varphi'(u) - c_1|\varphi(u)| \geq \frac{\alpha}{2},\ \forall u \in H_0^1 \cap L^{\infty}$$

ملاحظة: التابع الذي يحقق الشروط السابقة موجود.

مثال:

$$\varphi(t) = te^{\lambda t^2} \mid \lambda \text{ كبير جدًا}$$

لدينا:

$$T^{'}(u) = (1 + 2\lambda|u|^2)\, e^{\lambda u^2}$$

ومنه من أجل:

$$\alpha T^{'}(u) - c_1|T(u)| \geq \frac{\alpha}{2}$$

معناه:

$$e^{\lambda u^2}(\alpha + 2\lambda\alpha|u|^2 - c_1|u|) \geq \frac{\alpha}{2}$$

إذًا من أجل كبير λ جدًا نجد:

$$\alpha + 2\lambda\alpha|u|^2 - c_1|u| \geq 0$$

أيّ:

$$\frac{\alpha}{2} + 2\lambda\alpha|u|^2 - c_1|u| \geq 0$$

إذًا:

$$\alpha\int_{\Omega}|\nabla u^{\varepsilon}|^2\varphi'(u^{\varepsilon})dx \leq \int_{\Omega}A(u^{\varepsilon})\nabla u^{\varepsilon}\nabla u^{\varepsilon}\varphi'(u^{\varepsilon})dx$$

$$\leq \int_{\Omega}(c_0 + c_1|\nabla u^{\varepsilon}|^2)|\varphi(u^{\varepsilon})|dx$$

معناه:

$$\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega}|\nabla u^{\varepsilon}|^2 \leq \int_{\Omega}|\nabla u^{\varepsilon}|^2(\alpha\varphi'(u^{\varepsilon}) - c_1\varphi(u^{\varepsilon}))dx$$

$$\leq \int_{\Omega}c_0\varphi(u^{\varepsilon})dx$$

وبما أنّ:

$$\|u^{\varepsilon}\|_{L^{\infty}} \leq \frac{c_0}{\alpha_0}$$

(يبرهن في المرحلة 5)

يعني أنّ:

$$\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega}|\nabla u^{\varepsilon}|^{2} \leq c_{0}\int_{\Omega}\varphi(u^{\varepsilon})dx \leq c$$

أيّ:

$$\|\nabla u^{\varepsilon}\|_{L^{2}} \leq c$$

معناه:

$$\|u^{\varepsilon}\|_{H_{0}^{1}} \leq c$$

الخطوة الثالثة : التقارب القوي في Convergence forte dans $H_0^1(\Omega)$

نبرهن في هذه المرحلة أنّ :

$$u^{\varepsilon} \xrightarrow{\text{في } H_{0}^{1}(\Omega)} u$$

لدينا:

$$(4.3)\ \ldots \begin{cases} -div(A(u^{\varepsilon})\nabla(u^{\varepsilon}-u)+a_{0}(u^{\varepsilon}-u)=f^{\varepsilon}(x,u^{\varepsilon},\nabla u^{\varepsilon}) \\ +div(A(u^{\varepsilon})\nabla u-a_{0}u \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (4.3) في التابع الإختباري $\varphi(u^{\varepsilon}-u)$:

ملاحظة: $u^{\varepsilon}-u \in H_{0}^{1}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)$

فنجد:

$$\int_{\Omega}A(u^{\varepsilon})\nabla(u^{\varepsilon}-u)\nabla(u^{\varepsilon}-u)\varphi'(u^{\varepsilon}-u)dx+\int_{\Omega}a_{0}(u^{\varepsilon}-u)\varphi(u^{\varepsilon}-u)dx$$

$$=\int_{\Omega}f^{\varepsilon}(x,u^{\varepsilon},\nabla u^{\varepsilon})\varphi(u^{\varepsilon}-u)dx-\int_{\Omega}A(u^{\varepsilon})\nabla u\nabla(u^{\varepsilon}-u)\varphi'(u^{\varepsilon}-u)dx$$

$$-\int_{\Omega}a_{0}u\varphi(u^{\varepsilon}-u)dx$$

وبما أنّ:

$$|f^{\varepsilon}(x,u^{\varepsilon},\nabla u^{\varepsilon})| \leq c_{0}+c_{1}|\nabla u^{\varepsilon}|^{2} \leq c_{0}+2c_{1}|\nabla(u^{\varepsilon}-u)|^{2}+2c_{1}|\nabla u|^{2}$$

ومنه إذا كان:

$$\alpha\varphi' - 2c_1\varphi \geq \frac{\alpha}{2}$$

لدينا من المرحلة السابقة:

$$\frac{\alpha}{2}\int_{\Omega} |\nabla(u^{\varepsilon}-u)|^2 \leq \int_{\Omega} (c_0 + 2c_1|\nabla u|^2)\varphi(u^{\varepsilon}-u)dx$$

$$-\int_{\Omega} A(u^{\varepsilon})\nabla u(u^{\varepsilon}-u)dx - \int_{\Omega} a_0(u^{\varepsilon}-u)dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

إذًا:

$$\nabla u^{\varepsilon} \xrightarrow{L^2(\Omega)} \nabla u$$

معناه:

$$u^{\varepsilon} \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} u$$

المرحلة الرابعة : المرور الى النهاية Passage à la limite

البرهان بسيط، لدينا:

$$-div(A(u^{\varepsilon})\nabla u^{\epsilon}) + a_0u^{\varepsilon} = f^{\varepsilon}(x,u^{\varepsilon},\nabla u^{\varepsilon})$$

وَ

$$|f^{\varepsilon}| \leq c_0 + c_1|\nabla u^{\varepsilon}|^2$$

إذًا:

(حسب المرحلة السابقة) $c_0 + c_1|\nabla u^{\varepsilon}|^2 \xrightarrow{L^1(\Omega)} c_0 + c_1|\nabla u^{\varepsilon}|^2$

ومنه:

$$c_0 + c_1|\nabla u^{\varepsilon}|^2 \xrightarrow{\text{شك في } \Omega} c_0 + c_1|\nabla u^{\varepsilon}|^2$$

إذًا حسب مبرهنة الهيمنة لـ لوبيغ:

$$f^{\varepsilon}(x,u^{\varepsilon},\nabla u^{\varepsilon}) \xrightarrow{\text{بقوة في } L^1(\Omega)} f(x,u,\nabla u)$$

إذًا: يوجد $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ حل للمعادلة:

$$-div(A(x,u)\nabla u) + \alpha_0 u = f(x,u,\nabla u)$$

المرحلة الخامسة: التقديرات في Estimation dans $L^\infty(\Omega)$

الهدف من هذه المرحلة هو إثبات أن حل المعادلة (3.1) محدود في $L^\infty(\Omega)$.

قضية 1.3: إذا كان $u \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ يحقق:

$$(4.3) \quad -div(A(x,u)\nabla u) + a_0 u = f(x,u,\nabla u)$$

إذًا: $$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{c_0}{\alpha_0}$$

ملاحظة: توجد حالات $u \in H_0^1(\Omega)$ مع $u \in L^\infty(\Omega)$ وَ u حل للمعادلة (3.1)، إذًا $u \in L^\infty$ شرط أساسي لإثبات القضية.

برهان الفرضية:

$$-div(A(x,u)\nabla u) + a_0 u = f(x,u,\nabla u) \ldots (5.3)$$

نفرض أن $f \in L^\infty(\Omega)$ لتكن $k \in R^+$ نحن نعلم ان $(u-k)_+ \in H_0^1(\Omega)$

$$\int A(x,u)\nabla u.\nabla(u-k)_+ dx + \int a_0 u(u-k)_+ dx = \int f(x,u,\nabla u)\,(u-k)_+ dx$$

أو

$$\int A(x,u)\nabla u.\nabla(u-k)_+ dx = \int A(x,u)\nabla(u-k).\nabla(u-k)_+ d\,x$$

$$= \int A(x,u)\nabla(u-k)_+.\nabla(u-k)_+ dx \geq 0$$

في الواقع $\nabla(u-k)_+ = 1_{u>k}\nabla(u-k)$ وَ $1_{u>k} = 1_{u>k}^2$

استبدال هذه المتباينة بالمساواة التي تسبقها :

$$\int a_0 u(u-k)_+ dx \leq \int f(x,u,\nabla u)(u-k)_+ dx$$

وبما أنّ Ω محدودة كما يمكننا طرح $\int ka_0(u-k)_+dx$ لكلا طرفين المتباينة المعطاة:

$$\int a_0(u-k)(u-k)_+dx \leq \int (f-a_0k)(u-k)_+\,dx$$

أَو

$$\int a_0(u-k)(u-k)_+dx = \int a_0[\psi-k]_+\,dx \geq$$

$$\Omega\|u-k\|_+$$

لكن إذا كان $k = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}/_{\Omega}$ إذًا: $-ck \leq \theta$ (شك p.p).

إذا كان: $(u-k)_+ \geq 0$ (شك) نستنتج أنّ:

$$\int (f-a_0k)\,(u-k)_+ \leq 0$$

نأخذ $(u-k)_+ \equiv 0$

يعني أنّ $u \leq k$ (شك)

نتبع نفس الخطوات (المنطق) مع $v = (u-k)_-$ وَ $k = \|f\|_{L^\infty(\Omega)}/_{\Omega}$.

الملخص

الملخص:

حاولنا في هذه المذكرة تسليط الضوء على موضوع دراسة رياضية لبعض المعادلات التفاضلية ذات مشتقات جزئية ناقصية إهتممنا بوجود الحل ووحدانيته وفي طريقنا لإنجاز هذه الدراسة تطرقنا إلى ثلاثة فصول و هي كالآتي:

الفصل الاول قدمنا بعض المفاهيم الاولية و تعاريف الضرورية لدراستنا.

الفصل الثاني تطرقنا إلى المسائل الناقصية و الطرق التغايرية وبعض الاستعمالات التطبيقية.

أما في الفصل الاخير نهتم بحل المسالة التناقصية المتعلقة بالتدرج .

قائمة المراجع العلمية

قائمة المراجع العلمية

[1]: A. Ambrosetti, H. Brezis, G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems. J.funct. Anal.122(1994), no. 519-543.

[2]: Le dret.

[3]: R ,A. Adams , Sobolev spaces, pure and applied mathematics, Vol. 65.Academic press, New York - London, 1975.

[4]: J.leray,J.-L.lions, Quelque résultats de physique sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder ,Bull. Soc.Math.France 93,(1965),97Ö107.

[5] : مذكرة تخرج بعنوان حل بعض المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية الناقصية المتعلقة بالتدرج – جامعة القبة الجزائر – 2015.