République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Abbes Laghrour khenchela
Faculté des Sciences et de la Technologie
département de Mathématiques et Informatique

Mémoire pour obtenir le diplôme de

Master en Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Approximation des Solutions de Certains types d' EDP à Coefficients non réguliers

Presenté par :
Noura Messai
Hanane Tahri

Dirigé par :
Mourad Boussaada

Jury :

Hamedi Nedjoud	Université de khenchela	Président
Ben Hadid Ayache	Université de khenchela	Examinateur

Présenté le : 13/09/2020

Dédicace

Je dédie ce travail :

A mes partants,Vous êtes dépensés pour moi sans compter .En reconnaissance de tous les sacrifices consentis par tous et chacun pour me permettre d'atteindre cette étape de ma vie .Avec toute ma tendresse .

A mon frère et mes sœurs .

A mes oncles ,tantes , cousins et cousines . A tous les membres de ma promotion.

A mes amis .

A tout mes professeurs

.

Remerciements

Nous remercions dieu tout puissant pour la santé, la valeureux, et tout le courage et la patience qu'il nous donné durant la période de réalisation de ce projet. Ce travail est le fruit de la contribution de plusieurs personnes qui ont permis sa naissance, que toutes soient vivement remercies. Notre profond gratitude s'adresse à Boussaada Mourad qui a assuré la direction de ce mémoire. Nous exprimons aussi toutes nos reconnaissances pour les enseignants qui ont participé à notre formation.

Table des matières

Liste des tableaux

Table des figures

Introduction

Les qualités d'une approximation numérique d'une problème à deux points (pour fixer les idées) :

$$(P)\left\{\begin{array}{r} -(a(x)y')'+y=f\ dans\ I=]0.1[\\ y(0)=y(1)=0 \end{array}\right.$$

Dépendent,comme il est bien connu du type de méthode utilisé et de la régularité de la solution y du problème.

La méthode d'élément finis standard donne en général,des résultat satisfaisants des que les donné de problème,c'est à dire a(x) et f sont réguliers,avec a borné par des constant strictement positives .

Cependant lorsque a(x) n'est pas régulière (par exemple discontinu où à très forte variation) ou s'annule en certains points de I ,il s'avère nécessaire de mettre au point des méthodes d'approximation adaptées.

Mais il peut arriver par certains types de problème qu'une modification de la formulation au l'introduction d'une problème annexe même à de bons résultats numérique en utilisant seulement une méthode standard.Ceci présente à priori un avantage en ce sens que les méthodes d'élément finis standard sont simple, disponibles et peu conteuse.

Ainsi pour le problème (p) ci dessus ,si a(x) présent des discontinuités,la solution y est peu régulière même f l'est on introduit alors comme inconnue auxiliaire la fonction $z(x)=a(x)y'(x)$. Elle est solution du problème à deux points :

$$(P')\left\{\begin{array}{r} -z''+\frac{z}{a(x)}=f \\ z'(0)=-f(0),z'(1)=-f(1) \end{array}\right.$$

Si par ailleurs f est régulière,z est plus régulière que y.une méthode d'éléments finis standard donne alors une bonne approximation z_h de z, c'est à dire de y'.

Le passage de z_h à une approximation de y est alors une question d'intégration numérique.

Le but de ce papier est d'analyser cette méthode appliqué à des équation à coefficients discontinus,et à des equation dégénérées.

Nous l'appliquerons par la suite à certaines équation aux dérivées partielle et à des équation de type raide.

Cette méthode rejoint sur certains point celles proposées par [1] et [2].

Chapitre 1

Notion de base

Dans ce chapitre , nous rappelant quelque notion générale sur la méthode des élément finis .

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Définition

$L^p(\Omega)$ est de classe d'équivalence des fonction de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ pour la relation d'équivalance "égalité presque partout". Autrement dit , on confondra deux fonction dés lors qu'elles sont égales presque partout , c'est à dire qu'elles ne différent que sur un ensemble de mesure nulle .

1.1.2 Théorème

La forme L^p est une norme sur $L^p(\Omega)$, et $L^p(\Omega)$ muni de la norme L^p est un espace de Banach (c-a-d est complet).

Un cas particulier trés important est $p = 2$ .On obtient alors l'espace fonctionnel $L^2(\Omega)$, c'est à dire l'espace des fonctions de carré sommable sur Ω (à la relation d'équivalence "égalité presque partout" prés). A la norme L^2 :$\|u\|_{L^2} = (\int_\Omega u^2)^{\frac{1}{2}}$,on peut associer la forme bilinéaire $(u, v)_{L^2} = \int_\Omega uv$. Il s'agit d'un produit scalaire ,dont dérive la norme L^2 . D'ou :

1.1.3 Théorème

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

1.2 Espaces de Sobolev

1.2.1 Les espaces H^m

Définition

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega)/\partial_i u \in L^2(\Omega)\ ,\ 1 \leq i \leq n\}$ où $\partial_i u$ est définie au sens de la dérivée généralisée .

$H^1(\Omega)$ est appelé espace de Sobolev d'ordre 1.

Définition

pour tout entier $m \geq 1$:
$H^m(\Omega) = \{u \in L^2/\partial^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall\alpha = (\alpha_1; ...., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, telle que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_n \leq m\}$.

H^m est appelé espace de Sobolev d'ordre m .

Par extension , on doit aussi que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.
Dans le cas de la dimension 1,on écrit plus simplement pour I ouvert de $\mathbb{R}$:

$$H^m(I) = \{u \in L^2(I)/u', ..., u^{(m)} \in L^2(I)\}.$$

Théorème

$H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u,v)_1 = \textstyle\int_\Omega uv + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \partial_i u \partial_i v = (u,v)_0 + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u, \partial_i v)_0.$$

En notant $(.,.)_0$ le produit scalaire L^2 . On notera $\|.\|_1$ la norme associé $a(.,.)_1$.

On définit de même un produit scalaire et une norme sur $H^m(\Omega)$ par :

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 \text{ et } \|u\|_m = (u,u)_m^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème

$H^m(\Omega)$ muni de produit scalaire $(.,.)_m$ est un espace de Hilbert .

1.2.2 Espace $H_0^1(\Omega)$

Définition

Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'éspace $H_0^1(\Omega)$ est définit comme l'adhérence de $D(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_1$ de $H^1(\Omega)$. (on rappelle que $D(\Omega)$ est l'espace des fonction C^∞ sur Ω à support compact , encore appelé espace des fonctions tests).

Théorème

Par construction $H_0^1(\Omega)$ est un espace complet . C'est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_1$.

Définition

pour toute fonction u de $H^1(\Omega)$ on peut définir :

$$|u|_1 = (\sum_{i=1}^{n} \|\partial_i u\|_0^2)^{\frac{1}{2}} = (\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (\partial_i u)^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

1.2.3 L'espace $W^{m.p}$

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n, P \in [1, +\infty[\ et \ m \in \mathbb{N}$.

On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \ tel \ que \ |\alpha| \leq m, D^\alpha u \in L^p(\Omega)\}$$

ou α est un multi-indice et $D^\alpha u$ est une dérivée partielle de u au sens faible (au sens des distributions).

1.3 Introduction à la méthode des éléments finis

Les éléments finis est basé sur la formulation variationnelle ou faible du problème de valeur aux limites considéré , la solution approximative est obtenue par restriction de la formulation variationnelle aux espaces d'essai et de test de dimensions fini ,la précision de la solution approchée est obtenue par le choix d'un espace d'essai .

Nous utilisons des approximations variationnelles habituelles de l'espace L^p et les espaces de Sobolev H^1 et H_0^1 .

1.3.1 Formulation variationnelle

Exemple

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ .On veut résoudre le problème :

$$(P)\begin{cases} -\Delta u + u = f \; dans & \Omega \\ \partial_i u = 0 \; sur & \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

une solution classique de ce problème est une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant (1,1) en tout point de Ω .Au passage ,on voit que ceci impose que f soit $C^0(\bar{\Omega})$. Toute solution classique vérifie donc :

$$\forall v \in C^1(\bar{\Omega}), \int_\Omega -\Delta uv + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv.$$

Soit par intégration par partie : $\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$ puisque $\partial_n u = 0$ sur $\partial\Omega$,or $\overline{C_1(\Omega)} = H^1(\Omega)$. On peut donc définir le nouveaux problème :

$$(Q)\begin{cases} Trouver \quad u \in H^1(\Omega) \quad tel\ que \\ \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

C'est la formulation variationnelle de (P) .On voit aussi que ce problème est définit des lors que $f \in L^2(\Omega)$.

1.3.2 Formulation générale

L'exemple précédant montre ,d'une façon générale , la formulation variationnelle sera obtenue en faisant le produit scalaire $L^2(\Omega)$ de l'équation avec une fonction v appartenant à un espace V à préciser (c'est -à-dire en multipliant par v et en intégrant sur Ω) ,et en intégrant par parties les termes d'ordre le plus élevés en tenant compte des conditions aux limites du problème .On arrive alors à une formulation du type :

Trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) = \ell(v), \forall v \in V$

où $a(.,.)$ est une forme sur $V \times V$ (bilinéaire si l'EDP de départ est linéaire) et $\ell(.)$ est une forme sur V (linéaire si les conditions aux limites de l'EDP de départ le sont).

1.3.3 Existence et unicité de la solution

Continuité

Soient V et W des espaces de Hilbert .

Définition

une forme linéaire $\ell(u)$ sur V est continue ssi il existe une constante K telle que : $|\ell(u)| \leq K\|u\|_V \ \forall u \in V$.

Définition

Une forme bilinéaire $a(u, w)$ sur $V \times W$ est continue ssi il existe une constante M telle que :

$$|a(u,w)| \leq M\|u\|_V\|w\|_W, \ \forall (u,w) \in V \times W.$$

Théorème de Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert . Soit a une forme bilinéaire continue coercive sur V ,alors il existe une unique $u \in V$ tel que :

$$a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V.$$

Théorème

On prend les mêmes hypothèses que pour le théorème de Lax-Milgram ,et on suppose de plus que a est symétrique c'est à dire que :

$$a(u,v) = a(v,u), \forall u, v.$$

On définit alors la fonctionnelle :

$$J(v) = \tfrac{1}{2}a(v,v) - \ell(v)$$

et on considère le problème de minimisation :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Alors ce problème admet une solution unique ,qui est également la solution de problème variationnelle précédent.

1.4 EDP elliptiques d'ordre 2

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ assez régulière. Soient des fonctions a_{ij} $(1 \leq i,j \leq n)$ dans $C^1(\bar{\Omega})$ et a_0 dans $C^0(\bar{\Omega})$ on considère le problème :

$$(P)\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(\alpha_{ij}\partial_j u) + a_0 u = f \ dans \quad \Omega \\ u = 0 \ sur \quad \Gamma_0 \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u n_i = g \ sur \quad \Gamma_1 \end{cases} \tag{1.2}$$

Où Γ_0 et Γ_1 forment une partition de $\partial\Omega$ $(\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi$ et $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega)$.

Une solution classique de (P) ,sous l'hypothèse que $f \in C^0(\bar{\Omega})$ et $g \in C^0(\Gamma_1)$,sera une fonction de $C^2(\bar{\Omega})$ vérifiant l'équation en chaque point de Ω.

La formulation variationnelle de (P) est obtenue par Intégration par partie. Elle s'écrit :

$$(Q)\begin{cases} Trouvez \ u \ \in V \quad tel \ que : \\ \int_\Omega(\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + a_0 uv) = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_1} gv \quad \forall v \in V \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$. Cette formulation est en fait définie des lors que a_0 et les aij sont dans $L^\infty(\Omega)$, f dans $L^2(\Omega)$ et g dans $L^2(\Gamma_1)$.

Posons $a(u,v) = \int_\Omega(\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_j u \partial_i v + a_0 uv)$. et $\ell(v) = \int_\Omega fv + \int_{\Gamma_1} gv$. Il est immédiat que a est une forme bilinéaire continue et ℓ une forme linéaire continue sur V.

1.5 Interprétation de u_h

On a $a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V$, donc on particulier :

$$a(u, v_h) = \ell(v_h), \forall v_h \in V_h$$

car $V_h \subset V$. Par ailleurs,

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

Par déférence, on en déduit que :

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \ \forall v_h \in V_h. \tag{1.4}$$

1.6 Estimation d'erreur

On a :
$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h), \forall v_h \in V_h.$

$$= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h).$$

Or $v_h - u_h \in V_h$. Donc $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$, d'aprés (1.4) on a donc :

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h), \forall v_h \in V_h. \tag{1.5}$$

a étant coercive ,il existe $\alpha > 0$ tel que :$a(u-u_h, u-u_h) \geq \alpha \|u-u_h\|^2$, où $\|.\|$ est une norme sur V par ailleurs ,a étant continue , il existe $M > 0$ tel que; $a(u - u_h, u - v_h) \leq M\|u - u_h\|\|u - v_h\|$. En réinjectant ces deux intégrales de part et d'autre de (1.1) et en simplifiant par $\|u - u_h\|$ on obtient :

$$\|u - u_h\| \leq \tfrac{M}{\alpha}\|u - v_h\|, \forall v_h \in V_h.$$

C'est-à-dire

$$\|u - u_h\| \leq \tfrac{M}{\alpha} d(u, V_h).$$

où d est la distance induite par $\|.\|$. Cette majoration est appelée lemme de Céa .Elle ramène l'étude de l'erreur d'approximation $u - u_h$ à l'étude de l'erreur d'interpolation $d(u, V_h)$.

1.7 Principe générale de la méthode des éléments finis

La démarche générale de la méthode des éléments finis est la suivante :

$$(Q)\ Trouvez\ u \in V, tel\ que : a(u,v) = \ell(v), \forall v \in V.$$

On va chercher une approximation de u par l'approximation interne pour cela , on définit un maillage du domaine Ω grâce au quel on va définir un espace d'approximation V_h s-e-v de V de dimension fini N_h. Le problème approchée est alors :

$$(Q_h)\ Trouvez\ u_h \in V_h, tel\ que : a(u_h,v_h) = \ell(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_{N_h})$ une base de V_h. En décomposant u_h sur cette base sous la forme :

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i \varphi_i. \tag{1.6}$$

Le problème (Q_h) devient :

$$Trouvez\ \mu_1, ..., \mu_{N_h}\ tel\ que\ \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, v_h) = \ell(v_h), \forall v_h \in V_h.$$

ou encore par linéarité de $a\ et\ \ell$:

$$Trouvez\ \mu_1, ..., \mu_{N_h} tels\ que\ \sum_{i=1}^{N_h} \mu_i a(\varphi_i, \varphi_j) = \ell(\varphi_j)\ \forall j = 1, ..., N_h.$$

C'est-à-dire résoudre le système linéaire :

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1,\varphi_1) & .... & a(\varphi_{N_h},\varphi_1) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ a(\varphi_1,\varphi_{N_h}) & ...... & a(\varphi_{N_h},\varphi_{N_h}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mu_{N_h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(\varphi_1) \\ . \\ . \\ . \\ \ell(\varphi_{N_h}) \end{pmatrix}$$

1.8 Convergence de la méthode des éléments finis

1.8.1 Calcul de majoration d'erreur

Majoration par l'erreur d'interpolation

$$\|u - u_h\|_m \leq \tfrac{M}{\alpha} \|u - v_h\|_m, \forall v_h \in V_h.$$

On peut l'appliquer dans le cas particulier où $v_h = \Pi_h u$,ce qui donne :

$$\|u - u_h\|_m \leq \frac{M}{\alpha}\|u - \Pi_h u\|_m.$$

1.9 Méthode d'approximation variationnelle

Dans cette section ,nous discutions des méthodes d'approximation variationnelle et énonçons une estimation d'erreur de base :

Soit $H_1, \|.\|_{H_1}$ et $H_2, \|.\|_{H_2}$ deux espaces de Hilbert et soit :

$$H_{1,h}, \|.\|_{1,h}, 0 < h \leq 1 \ et \ H_{2,h}, \|.\|_{2,h}$$

être deux familles à un paramètre d'espace de Hilbert satisfaisant :

$$H_1 \subset H_{1,h}, ||u||_{H_{1,h}} = \|u\|_{H_1} \forall h, \forall u \in H_1 \tag{1.7}$$

et

$$H_2 \subset H_{2,h}, ||u||_{H_{2,h}} = ||u||_{H_2} \forall h, et \ \forall u \in H_2 \tag{1.8}$$

Soit $B_h(u, v)$ être une forme bilinéaire dans $H_{1,h} \times H_{2,h}$ satisfaisant :

$$|B_h(u, v)| \leq M\|u\|_{H_{1,h}}\|v\|_{H_{2,h}} \ \forall h, \forall u \in H_{1,h}, \forall v \in H_{2,h} \tag{1.9}$$

Soit f une fonctionnelle linéaire bornée sur H_2 correspondant à f on suppose qu'il existe un unique $u_0 \in H_1$ satisfaisant :

$$B_h(u_0, v) = f(v), \forall u_0, \forall v \in H_2, \forall h \tag{1.10}$$

Peut être considéré U_0 comme la solution exacte à un problème de valeur aux limites considéré et que l'on sait que, nous nous intéressons à l'approximation U_0 et à cette fin, nous supposons que nous avons choisir des espaces finies $S_{1,h} \subset H_{1,h}$ et $S_{2,h} \subset H_{2,h}$ avec : $dimS_{1,h} = dimS_{2,h}$ et :

$$\inf_{u\in S_{1,h}} \sup_{u\in S_{2,h}} |B_h(u,\varphi)| \geq \gamma > 0, \forall h \tag{1.11}$$

$$||u||_{S_{1,h}} = 1 \; ||u||_{S_{2,h}} = 1$$

alors on définit u_h par :

$$\begin{cases} u_h \in S_{1,h} \\ B_h(u_h, v) = B_h(u_0, v), \forall v \in S_{2,h} \end{cases} \tag{1.12}$$

et considère u_h être une approximation de u_0. (1.12) est résolution de manière unique ,nous désignons souvent u_0 être u notez que u_h est définit pour tout $u \in H_{1,h}$ bases donnée pour $S_{1,h}$ et $S_{2,h}$
(1.12) se réduit à un système d'équation linéaire mais (1.12) ne définit pas l'algorithme pour trouver u_h puisque cela dépend de l'inconnu u_0 , on note cependant à partir de (1.10) que :

$$B_h(u_0, v) = f(v), \forall v \in S_{2,h} \tag{1.13}$$

à condition de $S_{2,h} \subset H_2$, $\forall h$,nous supposons maintenant que (1.13) tient (1.12) peut être écrit :

$$\begin{cases} u_h \in S_{1,h} \\ B_h(u_h, v) = f(v), \forall \in S_{2,h} \end{cases} \tag{1.14}$$

(1.14) est appelée une méthode d'approximation variationnelle après avoir défini nous sommes intéressés par un devis pour $||u_0 - u_h||_{H_{1,h}}$, ceci est fourni par la norme .

1.9.1 Théorème

L'erreur $u_0 - u_h$ satisfaites :

$$\|u_0 - u_h\|_{H_{1,h}} \leq (1 + \gamma^{-1}M) \inf_{x\in S_{1,h}} \|u_0 - x\|_{H_{1,h}} \tag{1.15}$$

où $M \; et \; \gamma$ sont les constantes en (1,9) et (1,11) respectivement pour une discutions complète des méthode d'approximation variationnelle ,les espaces $S_{1,h}$ sont appelés espace d'essai et les fonctions dans $S_{1,h}$ sont appelés fonctions d'essai ou d'approximation.
Les espace $S_{2,h}$ sont appelés espaces d'essai et les fonctions dans $S_{2,h}$ sont appelés fonctions de test.

1.9.2 Remarque

1) Dans nous applications ,il youra une forme bilinéaire $B(u,v)$ définit sur $H_1 \times H_2$ et satisfaisant :

$$B_h(u,v) = B(u,v), \forall u \in H_1, \forall v \in H_2.$$

A partir de (1,10) nous voyons que :

$$B(u_0,v) = f(v), \forall v \in H_2 \tag{1.16}$$

est la formulation variationnelle de notre frontière et H_1, H_2 sont les espaces et B la forme bilinéaire dans cette formulation .

2) (1.15) suggère de choisir $S_{1,h}$ de telle sort que : $\inf\limits_{x \in S_{1,h}} \|u_0 - x\|_{H_{1,h}}$ soit petit (i,e) de sorte que les fonctions d'essai de bonne propriété d'approximation et avec $S_{1,h}$ ainsi choisir $S_{2,h}$ peut être sélectionnée de sorte que (1.11) soit avec une constante γ aussi grand possible.

3) Dans de nombreuses applications nous pouvons choisir $S_{1,h} \subset H_1$, mais des autre l'exigence $\inf\limits_{x \in S_{1,h}} \|u_0 - x\|_{H_{1,h}}$,que être petit conduit à choisir $S_{1,h} \not\subset H_1$, l'espace d'essai est alors non conforme dans l'espace variationnelle ,de base ce fait conduit à une utilisation de la famille des espace $H_{1,h}$, et la forme B_h.

Dans certain situation on a :$H_1 = H_2$ et on suite choisir $S_{2,h} = S_{1,h}$ alors . $S_{1,h}$ est non conforme le sera aussi , et nous somme conduits à l'utilisation de la famille $H_{2,h}$,notons que dans ce circonstance :

$$B_h(u_0,v) = f(v), \forall v \in S_{2,h} \tag{1.17}$$

N'est pas valide ,une approximation u_h peut encore être définie comme dans (1,14) ,l'analyse d'erreur pour tels problèmes ne découle pas directement de (1,15) et les complications supplémentaire de l'analyse sont du fait que (1,17) ne tient pas.
Dans la méthode aura toujours $S_{2,h} \subset H_2$ (i e) les espaces de text seront conformes .

1.10 Le lemme de Aubin-Nitsche [4]

On suppose que $V = W$ et qu'il existe deux espaces de Hilbert Z et L tels que :

$$Z \subset V \subset L \tag{1.18}$$

avec injection continue. On considère une forme bilinéaire ℓ sur $L \times L$ que l'on suppose continue, symétrique et positive. On désigne par $|.|_L = \sqrt{\ell(.,.)}$ la semi-norme $|.|_L$.
Pour simplifier, on se restreint au carder d'une approximation consistante et conforme par la méthode de Galerkin standard ($V_h = W_h$ et $V_h \subset V$), pour un cas plus général. On suppose que :

i) il existe une constante de stabilité C_s tell que pour tout $g \in L$, la solution $s(g)$ du problème adjoint :

$$\begin{cases} \textit{chercher } s(g) \in V \textit{ tel que} \\ a(v, s(g)) = \ell(g, v), \forall v \in V \end{cases} \tag{1.19}$$

satisfait l'estimation a priori :

$$||s(g)||_L \leq C_s |g|_L \tag{1.20}$$

ii) Il existe une constant C_i telle que :

$$\forall h, \forall v \in Z, \inf_{v_h \in V_h} ||v - v_h||_V \leq C_i ||v||_L \tag{1.21}$$

Le résultat ci-dessous est connu sous le nom de lemme de Aubin-Nitsche.

1.11 lemme : (Aubin-Nitsche [4])

Avec les hypothèses ci-dessus, on a :

$$\forall h, |u - u_h|_L \leq Ch ||u - u_h||_V \tag{1.22}$$

avec :

$$C = C_i C_s ||a||_{V,V} \tag{1.23}$$

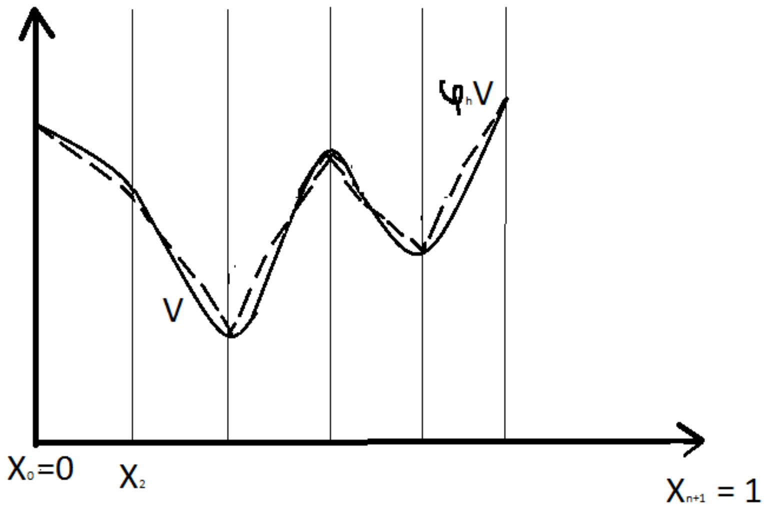

FIGURE 1.1 – Interpolation $\mathbb{P}_1$ d'une fonction de $H^1(0,1)$

1.12 L'opérateur d'interpolation [5]

1.12.1 Définition[5]

On appelle opérateur d'interpolation Π_h l'application linéaire φ_h *de* $H^1(0,1)$ *dans* V_h définir , pour tout $v \in H^1(0,1)$,par :

$$(\varphi_h v)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} v(x_j)\phi_j(x).$$

Cette définition a bien un sens ,les fonctions de $H^1(0,1)$ sont continues et leurs valeurs ponctuelles sont donc bien définies .

L'interpolai $\varphi_h v$ d'une fonction v est simplement la fonction affine par morceaux qui coïncide avec v sur les sommets du x_j (voir la Figure 1.1).Remarquons qu'en une dimension d'espace l'interpolai est définie pour toute fonction de $H^1(0,1)$,et non pas seulement pour les fonctions régulières de $H^1(0,1)$ (ce qui sera le cas en dimension supérieure) (voir la figure 1.1 page 15).

La convergence de la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$.repose sur le lemme suivant.

1.12.2 Lemme (d'interpolation)[5]

Soit φ_h l'opérateur d'interpolation Π_h.pour tout $v \in H^1(0,1)$,il vérifier :

$$\lim_{h\to 0} \|v - \varphi_h v\|_{H^1(0,1)} = 0.$$

De plus, si $v \in H^2(0,1)$, alors il existe une constante C *indpendante de* h telle que :

$$\|v - \varphi_h v\|_{H^1(0,1)} \leq Ch\|v''\|_{L^2(0,1)}.$$

Nous repoussons momentanément la démonstration de ce lemme pour énoncer tout de suite le résultat principal de cette sous-section qui établit la convergence de la méthode des élément finis $\mathbb{P}_1$ pour le problème de Dirichlet.

1.12.3 lemme [5]

Il existe une constante C indépendante de h telle que ,pour tout $v \in H^2(0,1)$.

$$\|v - \varphi_h v\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2\|v''\|_{L^2(0,1)} \tag{1.24}$$

Et

$$\|v' - (\varphi_h v)'\|_{L^2(0,1)} \leq Ch\|v''\|_{L^2(0,1)} \tag{1.25}$$

Démonstration

(voir [5])

1.12.4 lemme [5]

Il existe une constante C indépendante de h telle que ,pour tout $v \in H^1(0,1)$.

$$\|\varphi_h v\|_{H^1(0,1)} \leq C\|v\|_{H^1(0,1)} \tag{1.26}$$

Et :

$$\|v - \varphi_h v\|_{L^2(0,1)} \leq Ch\|v'\|_{L^2(0,1)} \tag{1.27}$$

De plus ,pour tout $v \in H^1(0,1)$, on a :

$$\lim_{h \to 0} \|v' - (\varphi_h v)'\|_{L^2(0,1)} = 0 \tag{1.28}$$

Démonstration

(voir [5])

1.13 L'injection continue

1.13.1 Définition

Soient E *et* F deux espaces de Banach .
On dit que E s'injecte d'une manière continue dans F si l'injection canonique est continue c'est-à dire :

$$i : \underset{U \longmapsto U}{E \longmapsto F}$$

$$\forall\, U \in E, \exists\, C > 0 : \|U\|_F \leq C\|U\|_E$$

(injection canonique) continue est on définit par : $E \hookrightarrow F$ *et* $E \subseteq F$.

1.13.2 Théorème

Soit Ω un ouvert régulier de $\mathbb{R}^N$, Soit $m \geq 1$ *et* $p \in [1, +\infty[$.

Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ donc : $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ donc : $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Pour $q \in [p, +\infty[$ et soit $q \notin L^\infty$ *si* $p > 1$.

Si $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ donc : $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Chapitre 2

Approximation de la solution d'une équation différentielle dégénérée, à coefficients discontinus

On suppose donnée une fonction numérique $a(x)$ continue par morceaux sur $I =]0, 1[$ et pour laquelle il existe deux constantes m et M telles que $0 < m \leq a(x) \leq M\ p, p$ sur I on considère le problème à deux points :

$$(P) \begin{cases} -(a(x)y')' + y = f \ dans\ I =]0.1[\\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

avec f une fonction donnée que nous supposons dans $W^{1,\infty}(I)$.

Nous avons alors la

2.1 proposition

a) $\forall f, f \in w^{1,\infty}(I)$,le problème (p) admet une solution faible (ou variationnelle) dans $H_0^1(I)$ et une seule.

b) Cette solution, y est dans $W^{1,\infty}(I)$.

c)La fonction $z = a(x)y'$ est dans $w^{2,\infty}(I)$

2.1.1 preuve

a) L'existence et l'unicité d'une solution variationnelle y de(p) dans$H_0^1(I)$ s'obtient de manière classique.

b) et **c)** $y' \in L^2$ et $a(x) \in L^\infty(I)$ donne $a(x)y' \in L^2(I)$

comme $[a(x)y']' = y - f \in H^1(I)$ dans $a(x)y' \in H^2(I)$

par suite $a(x)y' \in L^\infty(I)$ et grâce aux hypothèse sur la fonction a y' est dans $L^\infty(I)$ d'où $y \in w^{1,\infty}(I)$

$z = a(x)y'$ étant dans $L^\infty(I)$ et $z' = y - f$ dans $w^{1,\infty}(I)$ il s'ensuit que z est dans $w^{2,\infty}(I)$.

2.2 Remarque

Si a présente des discontinuités, y' en présentera nécessairement quelle que soit régularité du second membre f par contre la fonction $z = a(x)y'$ est plus régulière puis quelle puisqu'elle continûment dérivable et même à dérivée seconde bornée.

2.3 Le problème dérivé

En dérivant l'équation initiale et compte tenu des condition aux limites il est aisé d'établir que $z = a(x)y'$ est solution du problème à deux points :

$$(P')\left\{\begin{array}{r} -z'' + \frac{z}{a(x)} = f \\ z'(0) = -f(0), z'(1) = -f(1) \end{array}\right.$$

Ce dernier problème est bien et admet une formulation variationnelle qui est la suivante :

$$(P'_v)\left\{\begin{array}{r} \textit{trouver } z \in H^1(I) \textit{ solution de} \\ (z', v')_0 + (\frac{z}{a}, v)_0 = -(f, v')_0 \ \forall v \ v \in H^1(I) \end{array}\right.$$

Où (,) désigne le produit scalaire de $L^2(I)$.

On vérifier facilement que (p'_v) admet une solution z et une seule et que l'on a bien $z = a(x)y'$ où y est le solution de (p).

2.4 Discrétisation du problème (p'_V)

On se donne un entier positif N et on pose $h = \frac{1}{N}$.

On subdivise I est sous-intervalle $I_j =](j-1)h, jh[$, $1 \leq j \leq N$ et l'on définit l'espace d'approximation V_h par :

$$V_h = \{v_h \in H^1(I)\ ; v_h/I_j \in P_1\ (Ij)\ j = 1, ..., N\}$$

Il s'agit donc d'une méthode d'élément finis standard de degré un.

En notant alors z_h,l'unique élément de V_h telle que :

$$(z'_h, v'_h)_0 + (\tfrac{z}{a}, v_h)_0 = -(f, v'_h)_0 \quad \forall v_h,\ v_h \in V_h$$

nous obtenons ,comme il est bien connu [3], la.

2.5 Proposition

Il existe une constante C indépendante de f et de h telle que :

$$||z - z_h||_{H^1} \leq Ch||f||_{H^1}$$

$$||z - z_h||_{L^2} \leq Ch^2||f||_{H^1}$$

2.5.1 preuve

a) d'après (lemme cia) : $\exists C > 0$

$$\|z - z_h\|_{H^1(0,1)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|z - v_h\|_{H^1(0,1)}$$

En choisissant $v_h = \Pi_h z,\ ou\ \Pi_h$ est l'opérateur d'interpolation de $H^1(0,1)\ dans\ V_h$. De la définition Π_h,il vient :

$$\|z - z_h\|_{H^1(0,1)} \leq C\|z - \Pi_h z\|_{H^1(0,1)}$$

D'après le lemme (1.12.2) on a :

$$\lim_{h \to 0} \|z - \Pi_h z\| = 0$$

Et comme $z \in H^2(0,1)$: alors $\exists\, C$ indépondant de h tq :

$$\begin{aligned}\|z-\Pi_h z\|_{H^1(0,1)} &\leq Ch\|z'\|_{L^2(0,1)}\\ &= Ch\|f'-\frac{z}{a}\|_{L^2(0,1)}\\ &\leq C'h(\|f'\|_{L^2(0,1)}+\|z\|_{L^2(0,1)})\\ &\leq C'h\|f\|_{H^1}\end{aligned}$$

b) d'aprée le lemme (1.12.3) on a :

$$\|z-\Pi_h z\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2\|z''\|_{L^2(0,1)}$$

Donc :

$$\|z-z_h\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2\|z''\|_{L^2(0,1)} \leq C'h^2\|f\|_{H^1}$$

2.6 Remarque

Remarquons à ce point qui à partir de l'estimation d'erreur en norme H^1 on peut voir que :

$$||y'-\tfrac{z_h}{a}||_{L^\infty} \leq \tfrac{1}{m}||z-z_h||_{L^\infty} \leq C||z-z_h||_{H^1} = 0(h)$$

A partir de z_h on construit une approximation Y_h de y en posant :

$$Y_h(x) = \int_0^x \tfrac{z_h(t)}{a(t)}dt$$

Comme par ailleurs on a :

$$y(x) = \int_0^x \tfrac{z(t)}{a(t)}dt$$

On a alors de manière immédiate :

$$||y-Y_h||_{L^\infty} \leq \tfrac{1}{m}||z-z_h||_{L^2} \leq Ch^2||f||_{H^1}$$

Il vient en définitive la.

2.7 Proposition

Il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$||y-Y_h||_{w^{1,\infty}} \leq Ch$$

$$||y-Y_h||_{L^\infty} \leq Ch^2$$

2.8 Équation faiblement dégénérée

α étant un réel donné tel que $0 < \alpha < 1$, on considère toujours dans $I =]0,1[$ le problème à deux points :

$$(P) \begin{cases} -(x^\alpha y')' + y = f \ dans \ I \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

De manière classique l'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution pour (P) nécessite l'introduction de l'espace :

$$V_1 = \{y \in L^2(I); x^{\alpha/2} y' \in L^2(I)\}$$

On vérifie sans peine que V_1 s'injecte continument dans $C^0(\bar{I})$ ce qui justifie l'introduction de l'espace :

$$V = \{y \in V_1; y(0) = y(1) = 0\}$$

qui tient compte des conditions aux limites de (P).

2.8.1 Remarque

$H_0^1(I)$ est strictement contenu dans V- Il est clair en effet que H_0^1 est contenu dans V cependant une fonction du type $x^\beta(1-x)$ est dans V mais pas dans $H_0^1(I)$ lorsque β vérifie $\frac{1-\alpha}{2} < \beta \leq \frac{1}{2}$.

Toute fois V est contenu dans $w_0^{1,p}(I)$ pour $p < \frac{2}{1+\alpha}$

2.8.2 Existence et unicité d'une solution de (P)

On suppose f donnée dans $L^2(I)$ (pour fixer les idées).

L'existence et l'unicité d'une solution $y \in V$ du problème P s'obtient aisément à travers une formulation variationnelle utilisant la forme bilinéaire définie sur $V \times V$ par :

$$a(y, \varphi) = \int_0^1 (x^\alpha y' \varphi' + y\varphi) dx.$$

et la forme linéaire définie sur V par :

$$\ell(\varphi) = \int_0^1 f\varphi dx.$$

avec bien entendu V muni de sa norme naturelle

$$||y||_V^2 = ||x^{\frac{\alpha}{2}} y'||_{L^2(I)}^2 + ||y||_{L^2(I)}^2$$

la recherche d'une solution approchée de (p), vue la remarque II.1 passe par l'introduction d'un espace d'approximation adapté au problème faute de quoi on perd en precision.

2.8.3 Le problème dérivé

Nous nous proposons dans ce cas de changer d'un connue en posant $z = x^\alpha y'$, et l'on supposera dans toute la suite que f est dans $H^1(I)$.

En dérivant l'équation en y dans (P) et en utilisant cette même equation et les conditions aux limites on obtient que z est solution du problème à deux points :

$$(P') \left\{ \begin{array}{r} -z'' + \frac{z}{x^\alpha} = f' \\ z'(0) = -f(0), z'(1) = -f(1) \end{array} \right.$$

C'est un problème de Neumann qui admet une formulation variationnelle. En effet on considère $H^1(I)^2$ la forme bilinéaire

$$a(z, \varphi) = \int_0^1 (z'\varphi' + \frac{z\varphi}{x^\alpha}) dx$$

et sur $H^1(I)$ la forme linéaire

$$\ell(\varphi) = -\int_0^1 f\varphi' dx$$

Nous avons alors la :

2.8.4 Proposition

1). La forme $a(z, \varphi)$ est bilinéaire, continue et coercive sur $H^1(I)$ et la forme $\ell(\varphi)$ est linéaire continue.

2). Le problème (P') admet une solution z et pour f dans $H^1(I)$ cette dernière est dans $W^{2,q}$ pour $q < \min(2, \frac{1}{\alpha})$.

preuve

1) Il est clair que a est bilinéaire et vérifie $a(\varphi, \varphi) \geq ||\varphi||_{H^1}^2$ donc coercitive. Par ailleurs un calcul élémentaire montre qu'il existe une constante positive C telle que :

$$|a(u,v)| \leq \frac{C}{1-\alpha}||u||_{H^1}||v||_{H^1}, \forall u, \forall v : u \in H^1(I), v \in H^1(I)$$

D'où la continuité de a.

ℓ est clairement linéaire continue.

2) l'existence et l'unicité d'une solution z de (P') vient de l'application de lax-Milgram .

Enfin z étant dans $H^1(I)$ (donc dans $L^\infty(I)$). $\frac{z}{x^\alpha}$ est dans $L^p(I)$ pour $p < \frac{1}{\alpha}$. f' est par hypothèse dans $L^q(I)$. Ainsi $z'' = \frac{z}{x^\alpha} - f'$ est dans $L^q(I)$ pour $q < min(2, \frac{1}{\alpha})$. d'où la proposition.

On montre ensuite facilement que $x^\alpha y'$ est dans $H^1(I)$ et vérifie $a(x^\alpha y', \varphi) = \ell(\varphi)$ pour tout φ dans $H^1(I)$ et par conséquent on a $z = x^\alpha y'$.

2.8.5 Discrétisation du problème (P')

Soit V_h l'espace introduit précédemment, c'est à dire :

$$V_h = \{v_h \in H^1(I); v_h|_{I_j} \in P_1(I_j),\ j = 1, ..., N\}.$$

Il est bien connu qu'il existe une unique z_h dans V_h telle que :

$$a(z_h, v_h) = \ell(v_h)\ \forall v_h, v_h \in V_h.$$

cette approximation z_h vérifie.

2.8.6 proposition

i)$||z - z_h||_{H^1} \leq C_\beta h^\beta ||f||_{H^1}$ pour $\beta < \min(1, \frac{3}{2} - \alpha)$.

ii) $||z - z_h||_{L^2} \leq C_\beta h^{2\beta} ||f||_{H^1}$ pour $\beta < \min(1, \frac{3}{2} - \alpha)$.

preuve

i) On distinguera deux cas :

1) $\alpha < \frac{1}{2}$.Dans ce cas z est dans $H^2(I)$.Le résultat est alors bien connu on prenant $\beta = 1$.

2) $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Dans ce cas z étant dans $W^{2,q}(I)$ pour $q < \frac{1}{\alpha}$, elle est dans $H^s(I)$ pour $s < \frac{5}{2} - \alpha$ et le résultat s'obtient alors interpolation .

ii) cette estimation s'obtient par le lemme d'Aubin-Nitsche une fois z_h déterminée on pose naturellement :

$$y_h(x) = \int_0^x \frac{z_h(t)}{t^\alpha} dt.$$

y_h est alors une approximation de y qui vérifie la :

2.8.7 proposition

$\forall \delta, 0 < \delta < \min(\frac{3}{2}, \frac{9-6\alpha}{4})$,il existe $C_J > 0$ t.q :

$$|y(x) - y_h(x)| \leq C_J x^{1-\alpha} h^\delta.$$

preuve

soit $\epsilon > 0$ fixe assez petit .On écrit
$|y(x) - y_h(x)| \leq \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} ||z - z_h||_{L^\infty} \leq C_\epsilon \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} ||z - z_h||_{H^{\frac{1}{2}}} + \epsilon.$

La proposition s'obtient ensuite en utilisent les inégalités d'interpolation pour ma parer la norme de $(z - z_h)$ dans $H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(I)$ à l'aide de ses norme dans $H^1(I)$ et $L^2(I)$ des estimées grâce à la proposition précédente.

Remarque

Les constantes C_β *et* C_J des majoration d'erreurs des deux proposition précédentes dépendant nom seulement de $||f||_{H^1}$ mais aussi de β *et* δ respectivement et par conséquent de α.

En particulier quand α tend vers 1 ,C_J tend l'infini.

2.9 Équation fortement dégénérée

On étudiera ici le problème à deux points suivant :

$$(P) \begin{cases} -(xy')' + y = f \ dans \ I \\ y(1) = 0, \lim\limits_{x \to 0^+} xy' = 0 \end{cases}$$

Nous supposerons ici que f est donnée dans $H^1(I)$ comme dans le paragraphe précédent on introduit l'espace

$$V = \{y \in L^2(I); \sqrt{x}y' \in L^2(I); y(1) = 0\}$$

que l'on munit de sa norme naturelle.
On considère la forme bilinéaire a définie sur $V \times V$ par :

$$a(y, \varphi) = \int_0^1 (xy'\varphi' + y\varphi)dx.$$

et la forme linéaire ℓ définie sur V par :

$$\ell(\varphi) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$$

a est continue et coercive sur $V \times V$ et l est continue sur V.

Nous avons alors la proposition suivante :

2.9.1 Proposition

a) Il existe une unique y dans V telle que :

$$a(y, \varphi) = \ell(\varphi) \ \forall\varphi, \varphi \in V$$

b) $xy' \in H^2(I)$ et $\lim\limits_{x \to 0_+} xy'(x) = 0$

c) y est solution de (P).

preuve

a- est obtenue par l'application du théorème de Lax-Milgram.

b-y étant dans V, xy' est dans $L^2(I)$. Au sens des distributions on a :

$$-(xy')' = f - y \in L^2(I)$$

Il s'ensuit que xy' est dans $H^1(I)$. et donc dans $c^0(\bar{I})$ donc $\lim\limits_{x \to 0_+} xy'(x)$ existe. Soit α cette limite .Il s'agit de voir que α est nul.

Soit φ *dans* V .On a pour $\delta > 0$ assez petit

$\int_\delta^1 f\varphi = \int_\delta^1 [(-xy')' + y]\varphi = \delta y'(\delta)\varphi(\delta) + \int_\delta^1 xy'\varphi' + y\varphi.$

En faisant tendre δ vers 0 on obtient $\alpha\varphi(0) + a(y, \varphi) = \ell(\varphi)$ c.a.d

$\alpha\varphi(0) = 0$ d'après **a)**. Comme $\varphi(0)$ peut être quelconque $\alpha = 0$.

A ce point **c)** est prouvé.

Reste à voir que $z = xy'$ est dans $H^2(I)$.

En fait z vérifie au sens des distributions la relation :

$$z'' = \frac{z}{x} - f'$$

$z \in H^1(I)$ et $z(0) = 0$ donne (grâce à l'inégalité de Hardy) $\frac{z}{x}$ dans $L^2(I)$. Comme $f \in H^1(I)$ par hypothèse on a z'' dans $L^2(I)$ c'est à dire z dans $H^2(I)$.

2.9.2 Le problème dérivée et sa discrétisation

La fonction $z = xy'$ que nous prendrons comme inconnue est solution de :

$$(P') \begin{cases} -z'' + \frac{z}{x} = f' \\ z(0) = 0, z'(1) = -f(1) \end{cases}$$

C'est un problème bien posé qui admet une formulation variationnelle .

En effet soit $V = \{v \in H^1(I) \ z(0) = 0\}$.

On définit sur $V \times V$ *et* V respectivement les forme bilinéaire a' et linéaire ℓ' par :

$$a'(z, \varphi) = \int_0^1 (z'\varphi' + \frac{z\varphi}{x})dx \quad \text{et} \quad \ell'(\varphi) = -\int_0^1 f\varphi' dx.$$

2.9.3 proposition

$z = -xy'$ est l'unique élément de V solution de

$$(*) \ a'(z, \varphi) = \ell'(\varphi) \ \forall\varphi, \varphi \in V.$$

2.9.4 Remaque

i) De l'inégalité de Hardy ,il vient que pour z dans V on a $\frac{z}{x}$ dans $L^2(I)$ et $||\frac{z}{x}||_{L^2(I)} \leq 2||z'||_{L^2(I)}$ ce qui donne la continuité de a'. Comme par ailleurs $a'(\varphi, \varphi) \geq ||\varphi||^2_{H^1(I)}$ $(*)$ a une solution z dans V et une seule .

ii) $z = xy'$ est dans V de manière évidente et vérifie bien $(*)$. On a donc le résultat.

Pour la discrétisation on introduit l'espace d'approximation classique $V_h = \left\{v_h \in H^1(I); v_h|_{I_j} \in P_1(I_j), j = 1..., N, z_h(0) = 0\right\}$

Ou les I_j sont définit comme en I.

Il est alors bien connu qu'il existe un z_h dans V_h et un seul tel que :

$$a'(z_h, \varphi_h) = \ell'(\varphi_h) \ \ \forall\varphi_h,\, \varphi_h \in V_h.$$

Par ailleurs on a :

$$a'(z - z_h, z - z_h) = a'(z - z_h, z - \varphi_h) \ \ \forall\varphi_h,\, \varphi_h \in V_h.$$

ce qui donne :

$$\int_0^1 [(z' - z_h')^2 + \frac{(z - z_h)^2}{x}]dx \leq \int_0^1 [(z' - \varphi_h')^2 + \frac{(z - \varphi_h)^2}{x}]dx \ \forall\varphi_h \in V_h. \quad (2.1)$$

De la relation $y' = \frac{z}{x}$ il vient que :

$$y(x) = \int_0^x \frac{z(t)}{t}dt - \int_0^1 \frac{z(t)}{t}dt.$$

En négligeant la constante $\int_0^1 \frac{z(t)}{t}dt$ on est amené a poser :

$$y_h(x) = \int_0^x \frac{z(t)}{t}dt.$$

y_h est ainsi une approximation de y qui vérifie :

2.9.5 proposition

Il existe une constante C indépendante de h telle que :

i) $|y(x) - y_h(x)| \leq C\sqrt{x}h.\ \forall x, x \in [0, 1]$.

ii) $||xy' - z_h||_{H^1(I)} \leq Ch.$

2.9.6 Remarque

On utilise les éléments suivants :

a) la relation (2.1) avec $\varphi_h = \prod_h v$, $\prod_h$ désignant l'opérateur d'interpolation de V sur V_h et l'inégalité de Hardy .

b) les relations élémentaire suivantes :

Pour $v \in H^2(I)$:

$||v' - (\prod_h v)'||_{L^2}^2 \leq \frac{h^2}{2}||v''||_{L^2}^2.$

$||v - (\prod_h)v||_{L^2}^2 \leq \frac{h^4}{8}||v''||_{L^2}^2.$

$||\frac{v-(\prod_h)v}{x}||_{L^2}^2 \leq 4||v' - (\prod_h v)'||_{L^2}^2 \leq 2h^2||v''||_{L^2}^2.$

Chapitre 3

Étude d'un problème modèle à coefficients discontinus en dimension 2

3.1 Notations

Ω désignera dans ce paragraphe l'ouvert plan défini par $\Omega =]-1,1[\times]0,1[$.

On a notera :

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \Omega, x < 0\}$$
$$\Omega_2 = \{(x,y) \in \Omega, x > 0\}$$
$$\Sigma = \{0\}\times]0,1[\ ,\Gamma_1 = \partial\Omega_1|_\Sigma\ ,\Gamma_2 = \partial\Omega_2|_\Sigma$$

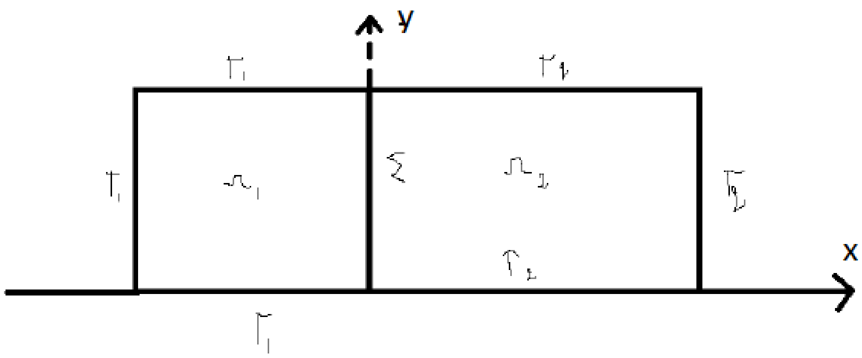

FIGURE 3.1 –

On notera par ailleurs $\Gamma_H =]-1,1[\times \{0,1\}$

et $\Gamma_v = \{-1,1\} \times]0,1[$ qui sont respectivement les parties horizontale et verticale de $\Gamma = \partial\Omega$ dans le système de coordonnées de la figure ci dessus .

On considère dans Ω le problème de Dirichlet

$$(P_1)\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(a(x)\frac{\partial u}{\partial y}) = f \ dans \ \Omega. \\ \hfill u = 0 \ sur \ \Gamma. \end{cases}$$

avec f une fonction donnée sur Ω qui sera précisée intérieurement et $a(x)$ une fonction (ne dépendant que de x) définie sur $[-1,1]$ vérifiant :

i) $a(x) \in L^\infty(]-1,1[)$ et il existe deux constantes α et M telles que :

$$0 < \alpha \leq a(x) \leq M \text{ P.P sur }]0,1[$$

ii) $a_1(x) = a(x)|_{]-1,0[} \in C^2([-1,0])$, $a_2(x) = a(x)|_{]0,1[} \in C^2([0,1])$.

On supposera dans toute la suite que :

$$\lim_{x\to 0_+} a(x) \neq \lim_{x\to 0_-} a(x).$$

Sous ces hypothèses il est alors bien connu que pour toute f donnée dans $H^{-1}(\Omega)$ il existe une solution faible unique$u$ dans $H_0^1(\Omega)$ pour le problème (P_1).

Dans la suite nous supposerons que f est dans $H_0^1(\Omega)$.

Remarquons tout de suite que si $a(x)$ présente une discontinuité globale de la solution de (P_1). Cette dernière ne peut être par exemple dans $H^2(\Omega)$.

Nous avons cependant une régularité locale. En effet en notant U_1 et U_2 les restrictions de u à Ω_1 et Ω_2 respectivement on a le :

3.2 Théorème

On suppose f donnée dans $H_0^1(\Omega)$. Alors la solution U du problème (P_1) vérifie :

i) $U_i \in H^3(\Omega_i)$ $i = 1,2$.
ii) $a(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont dans $H^1(\Omega)$.

3.3 Remarque

1). La régularité a l'intérieur des Ω_i et au voisinage des points réguliers de Γ_i est une résultat bien connu.

2). La régularité au voisinage des sommets de Ω s'obtient par une procédé de réflexion.

3). la régularité au voisinage d'une point régulier de Σ s'obtient les quotients différentiels dans la direction de y.

4). La régularité au voisinage des extrémités de Σ s'obtient comme en **3).** après une réflexion par rapport à Γ_H.

3.4 Remarque

Si $f \in H^1(\Omega)$ mais non à $H_0^1(\Omega)$ les résultats précédents ne sont en générale plus valables.

Il faudrait en fait un poser en plus à f des conditions (naturelles) de compatibilité aux sommets de Ω et aux extrémités de $\sum$. Ces conditions sont de type intégral.

5). A partir du **1)** et du problème fort vérifié par u on obtient aisément que $a_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x}$ est dans $H^1(\Omega_i)$ et $a_1(0)\frac{\partial u_1}{\partial x} = a_2(0)\frac{\partial u_2}{\partial x}$ sur $\sum$ et par conséquent $a(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ est dans $H^1(\Omega)$.

6). De l'équation vérifiée par u il vient que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{f}{a}$$

D'après les hypothèses et les résultats précédent on a $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ dans $L^2(\Omega)$ par $\frac{\partial}{\partial y}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x})$ est dans $L^2(\Omega)$ d'après **5)** et par suite $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ est aussi dans $L^2(\Omega)$. donc $\frac{\partial u}{\partial y}$ est dans $H^1(\Omega)$.

En définit on obtient $\frac{\partial u}{\partial y}$ dans $H^1(\Omega)$ mais $\frac{\partial u}{\partial y}|_{\Omega_i}$ est dans $H^2(\Omega)$ pour $i = 1, 2, ..$.

3.5 Remarque

On obtient un résultat de régularité identique si la fonction a dépend régulièrement de y.

3.6 Problème vérifié par $v = \dfrac{\partial u}{\partial y}$

En dérivant l'équation du problème (P_1) par rapport à y et compte tenu des conditions aux limites et de f on obtient que $v = \frac{\partial u}{\partial y}$ est solution de :

$$(P_1')\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(a\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(a\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{\partial f}{\partial y} \\ v|_{\Gamma_v} = 0, \frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_H} = 0 \end{cases}$$

En introduisant alors l'espace

$$V = \left\{ \ \varphi \in H_0^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma_e} = 0 \ \right\}$$

on montre que (P_1') est équivalent à :

$$(P_1'V)\begin{cases} Trouver \ v \in V telle \ que : \\ \int_\Omega a(x)\nabla v \nabla \varphi dxdy = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial y}.\forall \varphi, \varphi \in V. \end{cases}$$

La méthode consiste à présent à discrétiser le problème $(P_1'v)$.

Soit τ_h une triangulation de Ω par des triangles K,que nous supposerons régulière et telle que pour tout $K \in \tau_h$ on ait $K^0 \cap \Sigma = \phi$ (c).

A ce point,on notera que cette condition (c) n'est pas très restrictives si $a(x)$ n'a pas de sauts en des points trop voisins,dans le cas général où a auront plusieurs sauts comme il est classique on supposera que les les triangles K de τ_h ont tous un diamètre inférieur à h,h étant un paramètre positif destiné à tendre vers zéro.

Pour $K \in \tau_h$,$P_j(K)$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à j.

On définit alors l'espace d'approximation V_h par :

$$V_h = \left\{ \ v_h \in V; v_h|_K \in P_1(K) \ \forall K, K \in \tau_h \ \right\}$$

Nous obtenons alors la

3.7 Proposition

1.) Il existe une unique $v_h \in V_h$ telle que :

$$\int_\Omega a(x)\nabla v_h \nabla \varphi_h = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi_h}{\partial y}\ \forall \varphi_h, \varphi_h \in V_h$$

.

2.)$||\nabla v - \nabla v_h||_{0,\Omega} \leq \frac{M}{\alpha}\inf_{V_h}||\nabla_v - \nabla \varphi_h|| \leq C_1\ h||f||_1$.
où C_1 est indépendante de f et de h.

3.) Il existe $C_1 > 0$ indépendante de h et de f telle que :

$$||v - v_h||_{0,\Omega} \leq Ch^2||f||_1$$

.

3.7.1 preuve

C'est un résultat qu'on obtient de manière classique en utilisant la régularité H^3 de u dans chacun des Ω_i et la condition (c) sur la triangulation .

3.8 Problème vérifie par $w = a\dfrac{\partial u}{\partial x}$

De manière tout à fait similaire au cas précédent on montre qu'en posant $W = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma_h} = 0\}$ on a :

$$(P_2'v)\left\{\begin{array}{r} w \in V\ et\ a(w,\varphi) = \ell(\varphi).\forall \varphi, \varphi \in W avec \\ a(w,\varphi) = \int_\Omega \nabla w \nabla \varphi\ dxdy. \\ \ell(\varphi) = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x}dxdy + \int_\Omega a(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y}dxdy. \\ ou\ v = \frac{\partial u}{\partial y}. \end{array}\right.$$

En utilisant une méthode d'élément finis de degré 1, comme celle définit précédemment on considère le problème :

$$(P_2', h)\left\{\begin{array}{r} Trouver\ w_h \in W_h, W_h = \{\varphi_h \in W; \varphi_h|_k \in P_1(K)\}\ tq : \\ a(w_h, \varphi_h) = \ell_h(\varphi_h).\forall \varphi_h, \varphi_h \in W_h. \end{array}\right.$$

où ℓ_h est la forme linéaire obtenue à partir de ℓ en remplaçant de la fonction v par son approximation v_h obtenue au paragraphe précédent .

Ce problème admet une unique solution w_h et on a :

3.9 Proposition

Il existe C indépendant de h et de f telle que :

$$||a\frac{\partial u}{\partial x} - w_h||_1 \leq Ch||f||_1$$

.

$$||a\frac{\partial u}{\partial x} - w_h||_0 \leq Ch^2||f||_1$$

3.9.1 preuve

On obtient aisément ce résultat compte tenu L'estimation d'erreur de la proposition 3.6.

Nous pouvons à présent reconstituer une approximation u_h de u à partir de v_h et w_h.

3.10 1^{ere} méthode utilisant v_h

On commence par définir une fonction g_h sur Σ en posant :

$$g_h(y) = \int_0^y v_h(0,t)dt \; 0 < y < 1.$$

$v_h(0,y)$ étant continue sur Σ polynomiale (de degré 1) par morceaux , g_h sera C^1 sur Σ polynomiale (de degré 2) par morceaux .De plus nous avons le :

3.10.1 Lemme

a) $g_h \in H^{\frac{3}{2}}(\Sigma)$.

b) $||g_h - u(0,y)||_{\frac{1}{2},\Sigma} \leq Ch^{\frac{3}{2}}$.

C'est une conséquence immédiate de la définition de g_h et de la proposition 3.6 .

On discrétise alors dans $\Omega_i \;\; i = 1,2$ le problème :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(a_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_i}) - \frac{\partial}{\partial y}(a_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial y}) = f_i = f|_{\Omega_i} \; dans \; \Omega_i. \\ \hfill u|_{\Gamma_i} = 0, u|_\Sigma = g_h. \end{cases}$$

Soit par des élément fini (P_1) sert (P_2). On obtient alors $u_{i,h}$ i=1,2 et on pose :

$$u_h = \begin{cases} u_{1,h} \; dans \; \Omega_1 \\ u_{2,h} \; dans \; \Omega_2 \end{cases}$$

et l' on à :

3.11 Proposition

$\exists C > 0$,indépendant de h et f telle que :

1) $||u - u_h||_1 \leq Ch||f||_1$.

2)$||u - u_h||_0 \leq Ch^2||f||_1$.

3.12 2^{eme} méthode utilisant w_h :

Dans ce cas on discrétise directement les problèmes :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(a_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(a_i(x)\frac{\partial u_i}{\partial y}) = f_i, \; dans \; \Omega_i. \\ u_i|_{\Gamma_i} = 0, \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{w_h}{a_i(0)} \; sur \; \Sigma, i = 1, 2. \end{cases}$$

On construit alors à partir des approximations $u_{i,h}$ de ces deux problèmes une approximation u_h de u comme précédemment et l'on à :

3.13 Proposition

Il existe C>0 indépendant de h et f telle que :

1) $||u - u_h||_1 \leq Ch||f||_1$.

2) $||u - u_h||_0 \leq Ch^2||f||_1$.

En regroupant les résultats précédents on a dans les deux cas.

3.14 Théorème

Il existe C $>$ 0 ,indépendant de h et de f telle que :

$||u-u_h||_0+||\frac{\partial u}{\partial y}-v_h||_0+||a\frac{\partial u}{\partial x}-w_h||_0 \leq Ch^2||f||_1$

La troisième méthode moins conteuse et que nous avons utilisée numériquement est la suivante .On suppose que les nœuds de la triangulation τ_h sont sur des droites parallèles à l'axe des y pour fixer les idées .On pose alors au nœud (x_i, y_i) de τ_h

$$u_h(x_i, y_i) = \int_0^{y_i} v_h(x_i, t)dt.$$

Les résultats obtenus ainsi numériquement sont tout a fait satisfaisants.

Chapitre 4

Étude d'un second problème en dimension deux

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à une problème analogue à celui traité précédemment . Il s'agit de la discrétisation du problème aux limites :

$$(P)\left\{\begin{array}{r} -\frac{\partial}{\partial x}(a(x)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}(b(y)\frac{\partial u}{\partial y})=f\ dans\ \Omega=]0,1[^2 \\ u|_\Gamma=0,\Gamma=\partial\Omega \end{array}\right.$$

Ce problème est traité dans [ ] où les auteurs proposent une méthode qui consiste à prendre comme espace d'approximation ,celui qui est localement engendré par les constantes et les primitive des fonction $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$.

Ici nous nous proposons d'adapter la méthode du paragraphe précédent pour traiter ce problème .

4.1 Notations et hypothèses.

On supposera dans toute la suite que :

1) a et b sont dans $L^\infty(]0,1[)$ de classe C^2 par morceaux.

2) $\exists\alpha>0,\exists M>0$ telles que $\alpha\le a(x),b(y)\le M$ p.p.

3)$f\in H_0^1(\Omega)$.

Les lignes de discontinuité de a et b ,considérées comme fonctions définies sur Ω ,déterminent un découpage de Ω en un nombre fini N de rectangles Ω_i

ouvert.

On notera enfin par Γ_H et Γ_v les parties horizontale et verticale de la frontière de Ω.

Nous commençons par donner un résultat de régularité qui sera utilisé par la suite et dont la démonstration sera optimise .

4.2 Théorème

Sous l'hypothèse (H) ,et le problème (P) admet une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$ avec :

1) $a(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ et $b(y)\frac{\partial u}{\partial y}$ dans $H^1(\Omega)$.

2) $u_i = u|_{\Omega_i}$ dans $H^3(\Omega_i)$ i=1,2,.....N.

Nous considérons alors les fonctions $v = a(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ et $w = b(y)\frac{\partial u}{\partial y}$.

4.3 Problème en $v = a(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ et $w = b(y)\frac{\partial u}{\partial y}$

v est solution de problème :

$$(P_1)\begin{cases} -\frac{\partial^2}{\partial x^2}v - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}) = \frac{\partial f}{\partial x}.\ dans\ \Omega. \\ v|_{\Gamma_H} = 0, \frac{\partial v}{\partial x}|_{\Gamma_v} = 0. \end{cases}$$

En introduisant l'espace

$V = \{\ \varphi \in H^1(\Omega); \varphi|_{\Gamma_H} = 0\ \}$

il vient une formulation variationnelle du problème (P_1).

$$(P_1')\begin{cases} trouver\ v \in V\ telle\ que : \\ \int_\Omega(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y})dxdy = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial x}.\ \forall\varphi, \varphi \in V. \end{cases}$$

De même w est solution de :

$$(P_2)\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(\frac{a}{b}\frac{\partial w}{\partial x}) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial f}{\partial y}. \\ w|_{\Gamma_V} = 0, \frac{\partial w}{\partial y}|_{\Gamma_H} = 0. \end{cases}$$

Et en posant

$W = \{\ \varphi \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_v} = 0\ \}$,alors w est solution de :

$$(P_2')\begin{cases} trouver\ w \in W\ telle\ que : \\ \int_\Omega(\frac{a}{b}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y})dxdy = -\int_\Omega f\frac{\partial \varphi}{\partial y}\ \forall\varphi, \varphi \in W. \end{cases}$$

4.4 Remarque

Si on suppose f dans $H^1(\Omega)$ (et non dans H_0^1) les résultats précédents sont modifiés ainsi

le **2)** du Théorème 4.2 devient :

$u_i = u|_{\Omega_i}$ est dans $W^{3,p}(\Omega_i)$ i=1........,N.$\forall p, p < 2$.

Les problème (P_1) et (P_2) deviennent nom homogènes au sens où $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial w}{\partial y}$ sur Γ_v et Γ_H respectivement sont données en fonction de $f|_\Gamma$.

Les problèmes (P_1') (P_2') sont inchangés .

Il s'agit alors de discrétiser les problèmes (P_1') et (P_2') et de construire à partir de leurs solutions approchées une approximation de u .

Il y'a essentiellement deux manière de construire les triangulations de Ω pour ce faire .La première consiste à tenir compte des lignes de discontinuité de $a(x)$ et $b(y)$. Dans ce cas on construit une triangulation sur chaque Ω_i et on a une triangulation de Ω en les réunissant .

La seconde consiste à ne pas tenir compte de a et b et de trianguler Ω de manière standard.

La première méthode donne à priori une meilleure approximation grâce à l'utilisation de la régularité de la solution dans chacun des $\Omega_i, i = 1, ..., N$. Elle peut cependant s'avérer contraignante si les fonctions a et b ont beaucoup de points de discontinuité ,ces points pouvant de plus être disposés de manière quelconque .

Nous analysons ci-dessous la seconde méthode .

Nous avons tout d'abord un résultat de régularité globale de v et w qui est donné par la :

4.5 Proposition

on suppose f donnée dans $H_0^1(\Omega)$.
Pour tout $s < \frac{1}{2}$, on a $a(x)\frac{\partial u}{\partial x}$ et $b(y)\frac{\partial u}{\partial y}$ sont dans $H^{s+1}(\Omega)$ et il existe C_s

telle que :

$$||a(x)\frac{\partial u}{\partial x}||_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C_s||f||_1.$$

$$||b(y)\frac{\partial u}{\partial y}||_{H^{1+s}(\Omega)} \leq C_s||f||_1.$$

4.5.1 preuve

Ce résultat repose essentiellement sur deux points :

Le premier est la régularité de u ,a et b dans chacun des Ω_i i=1,....,N.

Le second est que le prolongement par zéro des fonctions de $H^1(\theta)$ à $\mathbb{R}^2$, où θ est un ouvert a frontière lipschitzienne est continu de $H^1(\theta)$ dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ pour $s < \frac{1}{2}$.

On supposera dans la suite s fixé $0 < s < \frac{1}{2}$. On considère une triangulation de Ω par des triangles de diamètres inférieur à un paramètre $h > 0$, régulière .

La discrétisation par la méthode d'élément finis $\mathbb{P}_1$ standard des problème P_1' et P_2' fournit des approximations v_h et w_h de v et w respectivement .

Et l'on à via le lemme d'Aubin-Nitsche et par interpolation le théorème suivant.

4.6 Théorème

Il existe $C_s > 0$ indépendante de f et de h telle que :

$$||v - v_h||_1 = ||a\frac{\partial u}{\partial x} - v_h||_1 \leq C_s h^s||f||_1.$$

$$||v - v_h||_0 = ||a\frac{\partial u}{\partial x} - v_h||_0 \leq C_s h^{2s}||f||_1.$$

$$||w - w_h||_1 = ||b\frac{\partial u}{\partial y} - w_h||_1 \leq C_s h^{2s}||f||_1.$$

$$||w - w_h||_0 = ||b\frac{\partial u}{\partial y} - w_h||_0 \leq C_s h^{2s}||f||_1$$

Pour obtenir une approximation de u , de manière analogue à la 3^{me} méthode proposée au paragraphe 3 , on suppose par exemple que les nœud de la triangulation utilisée sont situés sur des droites parallèles à l'un des axes de cordonnées , Oy , par exemple pour fixer les idées .
On pose alors au nœud $(x_i, y_i) \in \Omega$

$$\tilde{u_h}(x_i, y_i) = \int_0^{y_j} \frac{w_h}{b(t)}(x_i, t)dt.$$

On appelle alors u_h la fonction de $H_0^1(\Omega)$, affine sur chaque triangle et égale a $\tilde{u}_h$ aux nœuds de τ_h. On peut montrer alors que :

$$\textbf{1)}\ ||u - u_h||_0 \leq Ch^{\frac{3}{2}s}.$$

$$\textbf{2)}\ ||\Pi_h u - u_h||_{L^\infty} \leq Ch^{\frac{3}{2}s}.$$

ou Π_h est l'opérateur d'interpolation sur l'espace d'approximation .

الملخص

سنتطرق في هذه المذكرة إلى تقدير الخطأ لبعض المعادلات التفاضلية ذات المشكلات الجزئية المتعلقة بمعاملات غير منتظمة باستخدام طريقة العناصر المنتهية بحيث:

تناولنا في الفصل الأول بعض المفاهيم التي درسناها في السنوات السابقة

وتناولنا في الفصل الثاني المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية المتعلقة بمعاملات غير منتظمة والمعدلات التفاضلية المنحلة في اليد الأول طبقنا فيه طريقة العناصر المنتهية لإيجاد تقدير للخطأ وذلك بتقسيم المجال إلى قطع مستقيمة وفي التمثيل البياني نحصل على محلى بياني لكثيرات حدود من الدرجة الأولى تسير ببطئ نقترب من الخطأ.

أما في الفصل الثالث قمنا بدراسة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية المتعلقة بمعاملات غير منتظمة في البعد الثاني واتبعنا في ذلك طريقة العناصر المنهية بعمل تجزئة المفتوح عبارة عن شبكة من المثلثات الهدف من ذلك تقريب الخطأ يتوصيل عقد الشبكة من ثم إعطاء تقدير للخطأ.

وبالنسية للفصل الرابع قمنا بدراسة مشكلة ثانية في البعد الثاني للمعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية المتعلقة بمعاملات غير منتظمة باستخدام طريقة العناصر المنتهية يعمل تجزئة للمفتوح على شكل شبكة من المستطيلات و توصيل عقد الشبكة لأجل تقريب الخطأ ومن ثم إعطاء تقدير له طريقة العناصر المنتهية في مذكرتنا تبحث عن تقريب للخطأ و تقديره ببطيء.

الكلمات المفتاحية العناصر المنتهية – المشكلة – إشتقاق المشكلة – تقدير المشكلة– تقريب الخطأ– المعاملات غير منتظمة المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية– الفضاءات التقريبية.

Résumé

Nous allons regarder cette note estimer l'erreur de certaines équations différentielles avec des drivées partielles liées à des coefficients irréguliers en utilisant la méthode des éléments finis a fin que :

Dans le premier chapitre ,nous avons couvert certains des concepts que nous avons étudies les années précédentes .

Et dans le deuxième chapitre ,nous avons traité des équations différentielles avec des dérivées partielles liée à des coefficients irréguliers et des équations différentielles dissoutes dans la première dimension dans laquelle nous avons appliqué la méthode des éléments finis pour trouvez une estimation de l'erreur , en divis le champs en segments droits et dans la représentation graphique de polynômes du premier degré allant approche lentement de l'erreur .

Dans la troisième chapitre nous avons étudié les équations différentielles avec dérivées partielles liées aux transactions irréguliers dans la deuxième dimension , et en cela nous avons suivi la méthode des éléments finis en faisant une segmentation de l'ouverture qui est un réseau de triangles , le but de cela est d'approcher l'erreur en connectant les nœuds du maillage et en donnant en suite une estimation de l'erreur .

Pour la quatrième chapitre , nous étudions un deuxième problème dans la deuxième dimension des équations différentielles à dérivées partielles liées aux transactions irrégulières en utilisent la méthode des éléments finis en faisant une segmentation de l'ouverture sous la forme d'un réseau de rectangles et en reliant les nœuds du réseau afin d'approximer l'erreur puis en donner une estimation .

La méthode des éléments finis dans notre recherche une approximation de l'erreur et une estimation lente .

Les mots clés : les éléments finis ,le problème ,le problème dérivée ,estimer le problème ,approximation d'erreur ,estimation d'erreur ,les coefficients nom réguliers ,equations différentielles avec dérivées partielles,espaces approximatifs .

Abstract

In this not ,we will deal with the error estimation of some differential equation with the error estimation of some differential equation with partial derivatives related to irregular transaction using the finite element method so that :

In the first chapter, we covered some of the concepts that we studied in previous years.

In the second chapter we dealt with differential equation with partial derivatives related to irregular coefficients, and dissolved differential equations in the first dimension, in which we applied the finite element method to find an estimate of the error by dividing the field into straight segments and in the graphical representation we obtain a graphical curve for polynomials of the first degree moving slowly towards it's wrong.

In the third chapter ,we study differential equations with partial derivatives related to irregular coefficients in the second dimension, using the finite element method, by making a segmentation of the open which is a network of triangles, the aim of this is to approximate the error by connecting the network nodes ,and then giving an estimate of the error.

For the fourth chapter, we study a second problem in the second dimension of differential equations with partial derivatives related to irregular transactions, using the finite element method, by making a segmentation of the open in the form of a network of rectangles and connecting the network nodes in order to approximate the error and then give an estimate for it.

The finite element method in our note seeks to approximate and slowly estimate the error.

Keywords :finite element ,the problem ,derivation of the problem ,problem estimation ,irregular coefficients , differential equations with partial derivatives ,approximate spaces.

Bibliographie

[1] CIAVALDINI, J.F.C-CROUZEIX. M, "A finite élément méthod schema for one dimensiona elliptic équations with high superconvergence at the nodes," Num-Math (45), 1985.

[2] BABUSKA, I.-OSBORN.J.E,"Finite élément méthodes for the solutions of problems with rough input data" *Technical note BN 1017 I.P.S.T.University of Maryland -USA* ,(1984).

[3] CIARLET, P.E, "The finite élément méthod for elliptic problems North Holland ,"*IEEE Multimedia*, New York, 1978.

[4] https ://online.Fliphtml5.com, /fxibh, / , goiz , /, p = 52.

[5] ALLAIRE,GRÉGOIRE,"Analyse numérique et optimisation" *Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*,DEUXIÈME ÉDITION.