REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR DE KHENCHELA

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques appliquée

Thème

Les équations intégrales

Réalisé par : **BOUMAAZA kaouther**

Dirigé par : **MERAHI Fateh**

Membres de jury :

Mme.NASSRALLAH Ilhem	Univ.de Khenchela	Président de jury
Mr.GUEMMAZ Abderahim	Univ.de Khenchela	Examinateur

Présenté le : 01/07/2019

Remerciements

Avant tout, je remercie **DIEU** *le Tout Puissant de mavoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années de recherche et que grace à Lui ce travail de a pu être réaliser. Je Lui dois tout.*
Je dois beaucoup plus que de simples remerciements au mon encadreur prof **MERAHI Fateh** *qui a accepté d'encadrer ce travail. Je la remercie aussi pour sa guidance, ses conseils durant la préparation de cette mémoire. Merci aussi pour toutes les commentaires qui mont permis d'améliorer la qualité de cette mémoire de Master.*
Mes vifs remerciement s'adressent également à :

Mr.GUEMMAZ Abderahim
Mme.NASSRALLAH Ilhem

pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en participant au jury de ce mémoire, qu'ils veuillent bien agrées l'expression de mes vive reconnaissances.
Je tiens exprimer ma profonde grantitude envers Mr **SAOUDI Khaled** *a leur aide.*
Je ne peux pas manque l'occasion pour adresser un remerciement particulière à toute ma famille : mon père, ma mère et mes frères **(A.Eljalil, Akram, Achref.A.Elraouf, A.Elrafik)**.
Un remerciement spécial à tous mes amis et collègues.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail
a mes trés chers parents
A mes frères chacune a son nom.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 1

1 Notions de base 2
1.1 Continuité et discontinuité[8] . . . 2
1.2 La convergence[9] . . . 3
1.3 Les espaces fonctionnels . . . 3
1.4 Notions sur les opérateurs . . . 4

2 Introduction aux équations intégrales 6
2.1 Préliminaire de l'équation intégrale . . . 7
2.2 Contexte historique de l'équation intégrale . . . 7
2.3 Classification des équations intégrales . . . 8
2.3.1 Classification des équations intégrales d'aprés le type espèce . . . 8
2.3.2 Equations intégrales linéaire et non linéaire . . . 9
2.3.3 Equation intégrale homogènes et non homogènes . . . 12
2.3.4 Equations intégrales mixtes . . . 12
2.3.5 Equation intégrale singulière . . . 13
2.3.6 Equation intégro-différentielle . . . 14
2.4 Types et techniques de la résolution[2] . . . 14

3 Equation intégrale de Volterra 15
3.1 Généralités . . . 16
3.1.1 Equation intégrale de second espèce . . . 16
3.1.2 Equation intégrale de première espèce . . . 16
3.1.3 Equation intégrale de Volterra de première espèce de type convolution . . 16
3.2 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra . . . 16
3.3 Existance et l'unicité de la solution[2] . . . 18
3.4 Quelques méthodes de résolution pour l'équation intégrale de Volterra . . . 20
3.4.1 Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes[6] . . . 20

3.4.2 La méthode des approximations successives[5] 23
3.4.3 La méthode de transformation de Laplace 25

4 Equation intégrale de Fredholm **27**
4.1 Notion fondamentales[6] 28
4.2 Existance et l'unicité de la solution[2] 28
4.2.1 Existance et unicité de la solution pour les équations intégrales non linéaires de Fredholm[6] 30
4.3 Quelques méthodes de résolution pour l'équation intégrale de Fredholm 30
4.3.1 La méthode des substitutions successives[6] 30
4.3.2 La méthode de la décompositions Adomian[5] 31
4.3.3 La méthode des approximations successives de Picard 32

5 Application sur les équations intégrales **34**
5.1 Application sur la physique 34
5.1.1 Problème de répartition de la luminance 34
5.2 Les équations intégrales et problèmes aux limites 35
5.2.1 Problème aux limites dépendant d'un paramètre et leur réduction à des équations intégrales 35
5.3 Résolution analytique et numérique des équations intégrales 38
5.3.1 Equation intégrale de Volterra 38
5.3.2 Equation intégrales de Fredholm 41
5.4 Exemple numérique(La méthode des approximations successsives) 42

Bibliographie **43**

INTRODUCTION

Les premières équations intégrales furent obtenues par Daniel Bernoulli vers 1730 dans l'étude des oscillations d'une corde tendue. Après l'introduction du noyau de Green, il fallut attendre les dernières années du xixe siècle, avec les travaux de H. A. Schwarz, de H. Poincaré, de V. Volterra et surtout ceux de I. Fredholm, pour disposer de résultats généraux en liaison étroite avec les premiers développements de l'analyse fonctionnelle. Quelques années plus tard, l'étude des équations intégrales conduisait D. Hilbert à définir l'espace qui porte son nom et à poser les premières bases de la théorie spectrale, cadre dans lequel F. Riesz développa la théorie des opérateurs compacts (1918). Ainsi, les équations intégrales ont joué un rôle historique important dans l'élaboration des principaux concepts de l'analyse contemporaine.

Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale. Elles sont importantes dans plusieurs domaines physiques. Les équations de Maxwell sont probablement leurs plus célèbres représentantes. Elles apparaissent dans des problèmes des transferts d'énergie radiative et des problèmes d'oscillations d'une corde, d'une membrane ou d'un axe. Les problèmes d'oscillation peuvent aussi être résolus à l'aide d'équations différentielles.

Dans ce travail, nous avons présenté les théories mathématiques nécessaires à la compréhension des équations intégrales puis nous avons présenté aussi la résolution d'équations intégrales, et illustré les techniques numériques de résolution. Dans les chapitres 1 et 2, on introduit les notions de base et une introduction générale sur les équations intégrales. Nous avons discuté sur l'équation intégrale de Volterra et de Fredholm dans les chapitres 3 et 4 respectivement. Le dernier chapitre est consacré à la présentation de quelques applications de ces équations intégrales.

CHAPITRE 1

NOTIONS DE BASE

Définition 1.0.1. ***(Equation différentielle)****Une équation différentielle est une équation dont la où les inconnues sont des fonctions, elle se présente sous la forme d'une relation entre ses fonctions inconnues et leurs dérivées successives. C'est un cas particulière d'équations fonctionnelle. On distingue généralement deux type d'équations différentielles :*
- *Les équations différentielles ordinaires (EDO) où la ou les fonctions inconnues ne dépendent que l'une seule variable.*
- *Les équations différentielles partielles (équation aux dérivées partielles) (EDP), où la ou les fonctions inconnues peuvent dépendre de plusieurs vaariables indépendantes.*

Définition 1.0.2. ***(Une application méromorphe)*** *Une fonction $f(z)$ est* ***méromorphe*** *si on peut la mèttre sous forme de quotient de deux fonction entières*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \;\; h(z) \neq 0.$$

Définition 1.0.3. ***(Une application contractante)*** *Une application contactante ou de contraction, est une application k-Lipschitzienne avec $k < 1$.*

1.1 Continuité et discontinuité[8]

Dans tous qui est suit ; A désigne une partie de $\mathbb{R}$, a un élément de A, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f $: A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.1.1. ***(application continue)****On dit que :*

1. *f est continue en a si pour tout voisinage W de $f(a)$, il existe un voisinage V de a tel que $f(V \cap A) \subset W$.*

2. *f est continue à droite (resp. à gauche) en a si la restriction de f à $A \cap [a, +\infty[$ (resp.A $\cap\ ] - \infty, a]$) est continue en a.*

3. *f est continue sur A si f est continue en tout point de A.*

Définition 1.1.2. *(**application discontinue**) On dit que :*

1. *f possède une **discontinuité de première espèce** en a si f n'est pas continue en a et admet une limite à droite et une limite à gauche en a (si on peut envisager celles-ci).*
2. *f possède une discontinuité de deuxième espèce si f n'est pas continue en a et que la discontinuité n'est pas de première espèce.*

1.2 La convergence[9]

On désigne par X un ensemble quelconque, par (E, d) un espace métrique et par (f_n) une suite d'applications de X dans E.

Définition 1.2.1. *(**Convergence simple**)On dit que la suite (f_n) converge simplement vers l'application f (de X dans E) si, pour chaque x de X, la suite $(f_n(x))$ converge dans E vers $f(x)$. En d'autres termes, la suite (fn) converge simplement vers f si quels que soient $\epsilon > 0$ et $x \in X$, il existe un entier N tel que l'inégalité $n \geq N$ entraîne $d[f_n(x), f(x)] \leq \in \epsilon$, soit*

$$\forall\ x \in X, \forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ n \geq N \Rightarrow d[f_n(x), f(x)] \leq \epsilon.$$

Ce nombre N dépend, en général de ϵ et de x. En exigeant que N soit indépendant de x, on obtient un mode de convergence plus restrictif, appelé convergence uniforme.

Définition 1.2.2. *(**Convergence uniforme**)On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X si, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe un entier N, ne dépendant que de ϵ , tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $x \in X$, on ait $d[f_n(x), f(x)] \leq \in \epsilon$.*

$$\forall\ \epsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ x \in X, \forall\ n \geq N \Rightarrow d[f_n(x), f(x)] \leq \epsilon.$$

Définition 1.2.3. *(**Convergence absolue d'une série numérique**)Une série $\sum U_n$ est **absolument convergente** $\Rightarrow \sum |U_n|$ est convergente.*

1.3 Les espaces fonctionnels

Définition 1.3.1. *(**Espace vectoriel normé**) Soit V un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une norme sur l'espace V est une application définie sur V à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, notée $\|.\|_V$, vérfiant les trois propriétés suivantes*

1. $\forall\ v \in V,\quad \|v\|_V = 0 \Leftrightarrow v = 0,$
2. $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}, \forall\ v \in V,\quad \|\alpha v\|_V = |\alpha|\|v\|_V,$
3. $\forall\ v, u \in V,\quad \|u + v\|_V \leq \|u\|_V + \|v\|_V.$

*donc toute espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**, On dit alors que V est un $\mathbb{K}$-ev normé.*

Définition 1.3.2. *(**Distance et espace métrique**))Soit E un ensemble (non vide). On appelle distance sur E une application d de EE dans $[0, +\infty[$ telle que*

1. $\forall\ x \in E, \forall\ y \in E,\quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

2. $\forall\ x \in E, \forall\ y \in E, \quad d(x,y) = d(y,x)$,*(symétrie),*
3. $\forall\ x \in E, \forall\ y \in E, \forall\ z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.*(inégalité triangulaire)*

L'ensemble E muni d'une distance d est appelée un ***espace métrique*** *noté (E,d), ses éléments sont habituellement appelées des points.*

Définition 1.3.3. ***(Espace métrique complet)*** *On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Définition 1.3.4. ***(Suite de Cauchy)*** *Une suite de Cauchy est une suite qui vérifie :*

$$\forall\epsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall p \geq n_0\ \ \forall q \geq n_0\ \ \|x_p - x_q\| \leq \epsilon.$$

Définition 1.3.5. ***(Espace de Banach)****Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.*

Définition 1.3.6. ***(Espace** $L_2(a,b)$**)*** *On dit que une fonction $f(x)$ est carré intégrable sur $[a,b]$ si l'intégrale*

$$\int_a^b f^2(x)dx,$$

existe (est finie). L'ensemble de toutes les fonctions carré intégrable sur $[a,b]$ sera noté $L_2(a,b)$ ou L_2 tout court.

Définition 1.3.7. ***(Espace** $C^{(l)}(a,b)$**)*** *Les éléments de cet espace sont toutes les fonctions définie sur $[a,b]$ et procédent sur cet intervalle des dérivées continues jusqu'à l'ordre inclus. Les opérations d'addition de fonctions et de multiplication de fonctions par un nombre sont définie de façon usuelle.*

1.4 Notions sur les opérateurs

Définition 1.4.1. ***(Un opérateur)****Soient E et F deux espaces vectoriels topologiques. Un opérateur P est une application de E dans F.*

Définition 1.4.2. *(Opérateur linéaire)Un opérateur P est dite linéaire si et seulement si :*

$$\forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}, \quad \forall\ x,y \in E, \quad P(\alpha x + \beta y) = \alpha P(x) + \beta P(y).$$

où $\mathbb{K}$ est le corps des scalaires de E et F.

Remark 1.4.3. *L'orsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et que $F = \mathbb{K}$, un opérateur est une forme linéaire sur E.*

Définition 1.4.4. ***(Opérateur intégral linéaire)*** *Soit $K : C([a,b][a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire B sur $C[a,b]$ est définie par*

$$\begin{array}{rcl} B : \varphi \in C([a,b]) & \longrightarrow & B\varphi \in C([a,b]) \\ (B\varphi)(x) & = & \displaystyle\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy, \end{array}$$

Où la fonction $K(x,y)$ est appellé le noyau de de l'opérateur intégrale B.

Définition 1.4.5. *(**Opérateur a noyau dégénéré**)Le noyau d'une équation intégrale est dit dégénéré s'il est la somme d'un nombre fini produits de fonctions de x seul par des fonctions de y seul, est de la forme*

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_k(x)\beta_k(y).$$

Les fonctions $\alpha_k(x)$ et $\beta_k(y)$ où $(k = 1, 2, 3, ..., n)$ seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x,\ y \leq b$ et linéairement indépendantes.

Définition 1.4.6. *(**Fonction propre**)En théorie spectrale, une **fonction propre** f d'un opérateur linéaire A sur un espace fonctionnel est un vecteur propre de l'opérateur linéaire.*

CHAPITRE 2

INTRODUCTION AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES

Dans ce chapitre, on parle sur l'historique de l'équation intégrale, puis on donne des définitions générale et des classifications de ce genre d'équations, enfin, numérotant les techniques générales de la résolution(traditionelles et développées).

2.1 Préliminaire de l'équation intégrale

Définition 2.1.1. *Une équation intégrale est définie comme une équation dans laquelle la fonction inconnue $\varphi(x)$ à déterminer apparaissent sous le signe d'intégrale. Une forme typique d'une équation intégrale de $\varphi(x)$ est de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.1}$$

où

1. *$K(x,y)$ est appelé le noyau de l'équation intégrale.*
2. *$\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont les limites de l'intégration.*
3. *λ est une constante paramètre.*
4. *$f(x)$ est une fonction connue.*

on peut facilement constater que la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparait sous le signe intégrale.

L'objictif premier de ce texte est de déterminer la fonction inconnue $\varphi(x)$ qui satisfera l'équation (2.1) en utilisant un certain nombre de résolution.

Remarque 2.1.1. *Les fonctions connues $K(x,y)$ et $f(x)$ peuvent être complexes ou des fonctions réelles de valeurs réelles x et y.*

2.2 Contexte historique de l'équation intégrale

En 1825, un mathématicien italien, Abel produisit une équation intégrale avec le fameux problème de "tautochrone"; le problème est lié à le détermination d'une courbe et long de laquelle glissement, sans frottement, descend jusqu'à sa position la plus basse ou plus généralement tel que le temps de descente est une fonction donnée de sa position initiale. Etre plus spécifique, considérons une courbe lisse située dans un plan vertical. Une particule lourde part du repos à n'importe quelle position P, trouvons sous l'action de la gravité, le temps T de descente au plus bas position O. Choisir O comme origine des coordonnées, l'axe des X varticalement vert le haut, et l'axe y horizontal. Soit les coordonnées de P être (x,y), de Q être(ξ,η) et S l'arc OQ.

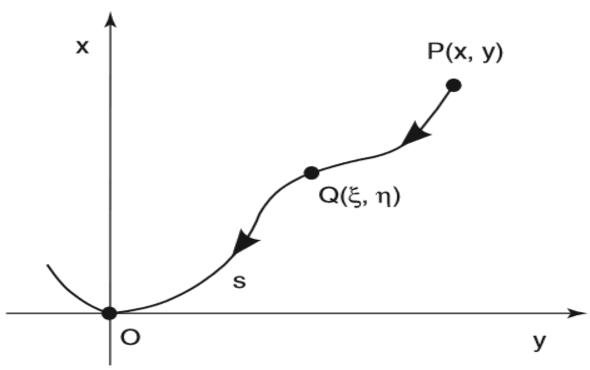


FIGURE 2.1: principe d'une courbe lisse

2.3 Classification des équations intégrales

Une équation intégrale peut être classifiées comme une équation intégrale linéaire ou non linéaire, dans qui est précedent nous avons remarqué que l'équation différentielle peut être représentée de manière équivalente par une équation intégrale. Par conséquent, il existe une bonne relation entre ces deux équations.
Les équations intégrales les plus fréquemment utilisées relèvent de deux grande classes : L'équation intégrale de Fredholm et de Volterra. Bien sûr, nous devons les classer comme homogène ou non homogène, et aussi linéaire et non linéaire. En plus on peut classifier l'équation intégrale d'aprés la position du la fonction inconnue $\varphi(x)$ par rapport au l'intégrale qui s'appelé le type espèce.
Dans certaines pratique problèmes, nous rencontrons des équations singulières aussi. Dans ce texte, nous distinguerons quatre grands types d'équation intégrales ; deux classes principales et deux types d'équations intégrales connexes, en particulier, les quatre types sont donnés ci-dessous

- Equation intégrale de Volterra.
- Equation intégrale de Fredholm.
- Equation intégro-différentielle.
- Equation intégrale singulière.

2.3.1 Classification des équations intégrales d'aprés le type espèce

Définition 2.3.1. *On dit que l'équation intégrale est de premier espèce si et seulement si la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur de signe intégral, par contre pour les équation à second espèce ; la fonction inconnue apparaît en plus à l'extérieur du signe d'intégral. On peut définie aussi la troisième espèce d'équation intégrale. Donc on peut donner une autre forme d'équation intégrale*

$$g(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\varphi(y)dy, \tag{2.2}$$

1. *Si $g(x) = 0$ l'équation (2.2) s'écrit*

$$f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\varphi(y)dy = 0, \tag{2.3}$$

   s'appelle équation intégrale de premier espèce.

2. *Si $g(x) = c = cst \neq 0$ alors l'équation (2.2) s'écrit*

$$f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\varphi(y)dy = c\varphi(x), \tag{2.4}$$

   s'appelle équation intégrale de second espèce.

3. *Si $g(x) \neq 0$ alors l'équation (2.2) s'écrit*

$$g(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.5}$$

   s'appelle équation intégrale de troisième espèce.

2.3.2 Equations intégrales linéaire et non linéaire

Equations intégrales non linéaires

Définition 2.3.2. *Si la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaissant sous le signe d'intégrale est donnée dans la forme fonctionnelle $F(\varphi(x))$ telle que la puissance de $\varphi(x)$ n'est plus unitaire $F(\varphi(x)) = \varphi^n(x)$ avec $n \neq 0$ où $F(\varphi(x)) = \cos(\varphi(x))\dots$; alors les équations intégrales sont classées comme des équations intégrales non linéaires.*

Exemple 2.3.1. *Les équation suivantes*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\varphi^2(y)dy,$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\cos(\varphi(y))dy,$$

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\ln(\varphi(y))dy.$$

sont classées comme des équations intégrales non linéaires.

Les équations intégrales non linéaire sont :

1. **Equation intégrale non linéaire de Fredholm**

   On peut définie trois type d'équation intégrale non linéaire de Fredholm

   (1) Equation intégrale de Fredholm de première espèce qui prendre la forme suivante :

   $$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(\varphi(y))dy = 0, \tag{2.6}$$

   (2) Equation intégrale de Fredholm de second espèce qui prendre la forme suivante

   $$C\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(\varphi(y))dy, C = cst, \tag{2.7}$$

   (3) Equation intégrale de Fredholm de troisième espèce qui prendre la forme suivante

   $$g(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(\varphi(y))dy. \tag{2.8}$$

2. **Equation intégrale non linéaire de Volterra**

   On peut définie trois type d'équation intégrale non linéaire de Volterra

   (1) Equation intégrale de Volterra de première espèce qui prendre la forme suivante

   $$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)F(\varphi(y))dy = 0, \tag{2.9}$$

   (2) Equation intégrale de Volterra de second espèce qui prendre la forme suivante

   $$C\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)F(\varphi(y))dy, C = cst, \tag{2.10}$$

   (3) Equation intégrale de Volterra de troisième espèce qui prendre la forme suivante

   $$g(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)F(\varphi(y))dy. \tag{2.11}$$

3. **Equation intégrale non linéaire d'Abel**

Définition 2.3.3. *On appelle équation intégrale non linéaire **d'Abel** l'équation de la forme*

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x (x-y)^{\gamma-1} h(\varphi(y))dy, \tag{2.12}$$

où $0 < \gamma < 1$ *et* $h : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ *tel que* $h(0) = 0$ *et* $h(x) > 0, \forall\ x > 0$.

4. **Equation intégrale non linéaire de Uryson**

Définition 2.3.4. *On appelle équation intégrale de **Uryson** l'équation sous la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega K(x, y, \varphi(y))dy, \tag{2.13}$$

où K et f sont des fonctions arbitraires. On peut aussi écrire cette équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega K(x, y)F(\varphi(y))dy, \tag{2.14}$$

avec F est une fonction non linéaire.

5. **Equation intégrale non linéaire de Hammerstein**

Définition 2.3.5. *L'équation intégrale de Hammerstein est un cas particulière de l'équation de Uryson, donc est sous la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_\Omega K(x, y)g(y, \varphi(y))dy. \tag{2.15}$$

Pour plus dinformations voir [7]

Equations intégrales linéaires

Définition 2.3.6. *Une équation intégrale est dite linéaire si la fonction inconnue se présente d'une manière linéaire. La forme générale de l'équation intégrale linéaire est*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{\beta(x)} K(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.16}$$

Les équations intégrales linéaires sont :

(1) **Equation intégrale linéaire de Fredholm**

L'équation intégrale linéaire de Fredholm est sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b} K(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.17}$$

(2) **Equation intégrale linéaire de Volterra**

Définition 2.3.7. *C'est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm,il suffit de prendre $\beta(x) = x$ (un variable) dans l'équation (2.16) et que le noyau K vérifie la condition suivante :*

$$K(x,y) = 0 \text{ pour } x < y.$$

(3) **Equation intégrale linéaire de Weiner-Hopf**

Définition 2.3.8. *L'équation intégrale linéaire de* ***Weiner-Hopf*** *set sous la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{+\infty} K(x-y)\varphi(y)dy. \tag{2.18}$$

(4) **Equation intégrale linéaire de Renewel**

Définition 2.3.9. *L'équation intégrale linéaire de* ***Renewel*** *définie comme suit :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{X} K(x-y)\varphi(y)dy. \tag{2.19}$$

(5) **Equation intégrale linéaire d'Abel**

Définition 2.3.10. *L'équation intégrale linéaire **d'Abel** définie comme suit*

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{(x-y)}} dy, \tag{2.20}$$

c'est l'équation intégrale de Volterra de premièer espèce.
On appel également équation d'Abel une équation plus générale

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\gamma} dy, 0 < \gamma < 1. \tag{2.21}$$

*c'est l'équation **d'Abel généralisé**.*

2.3.3 Equation intégrale homogènes et non homogènes

Si on pose $f(x) = 0$ dans (2.1), alors l'équation intégrale est appellée une équation intégrale homogène, sinon elle est appellée équation intégrales non homogène. La forme générale d'une équation intégrale homogène

$$\varphi(x) = \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,y)\varphi(y)dy. \tag{2.22}$$

2.3.4 Equations intégrales mixtes

Les équations intégrales mixtes sont :

(1) **Equation intégrale de Fredholm-Volterra**

L'équation intégrale de Fredholm-Volterra est une équation de la forme

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_0^y F(y,\tau)\varphi(x,\tau)d\tau + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s,y)dy,$$

$x \in [a,b]$ et $y \in [0,T]$, $T < \infty$.

(2) **Equation intégrale de Volterra-Fredholm**

Cette équation est sous la forme

$$\varphi(x,y) = f(x,y) + \lambda \int_0^y \int_a^b F(y,\tau)\varphi(y,s)K(x,s)\varphi(s,\tau)dyd\tau, \tag{2.23}$$

$x \in [a,b]$ et$y \in [0,T]$, $T < \infty$.

2.3.5 Equation intégrale singulière

Une équation intégrale singulière est définie comme une intégrale aux limites infinies ou lorsque le noyau de l'intégrale devient non lié à un certain point de l'intervalle.

Définition 2.3.11. *On dit q'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou si le noyau $K(x, y)$ devient infinien un ou voisinage des limites de l'intégration*

Définition 2.3.12. *Soit l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_T K(x, y)M(x, y)\varphi(y)dy. \tag{2.24}$$

on dit que (2.24) est s'ingulière si $M(x, y)$ admet une singularité ou le domaine T n'est pas bornée.

(1) **S'ingularité de type Volterra et Fredholm**

On considère l'équation intégrale s'ingulière de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y)M(x, y)\varphi(y)dy, a \leq x \leq b, \tag{2.25}$$

où $K(x, y)$ est faiblement singulière, en générale $K(x, y)$ définie par

$$K(x, y) = \begin{cases} |x - y|^{-\gamma} & \text{si } 0 < \gamma < 1 \\ \ln|x - y| & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) L'équation (2.25) est de Volterra.

(2) Si on pose : $x = b$ l'équation (1.29) est de Fredholm.

(3) Si $K(x, y) = |x - y|^{-\gamma}$ pour $0 < \gamma < 1$ alors dans ce cas est appelé singularité algébrique.

(4) Si $K(x, y) = \ln|x - y|$ dans ce cas est appelé singularité logarithmique.

(2) **S'ingularité de type Cauchy**

Définition 2.3.13. *Soit D un domaine bornée convexe dans un plan complexe. L'intégrale de Cauchy donnée par*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\varphi(y)}{y - x} dy. \tag{2.26}$$

Définition 2.3.14. *On appelle équation intégrale de **Cauchy** une équation de la forme*

$$f(x) = a(x)\varphi(x) + b(x) \int_\Gamma \frac{\varphi(y)}{y - x} dy + \int_\Gamma K(x, y)\varphi(y)dy. \tag{2.27}$$

2.3.6 Equation intégro-différentielle

Au d'ébut des années 1900, Vito Volterra a étudié le phénomène de la croissance démographique et de nouveaux types d'équation ont été développés et qualifiés d'intégro-différentielles équations. Dans ce type d'équation, la fonction inconnue $\varphi(x)$ apparaît sous la forme combinaison du dérivé ordinaire et du signe intégrale.

1. L'équation intégro-différentielles de type Volterra de la forme

$$\varphi^{''}(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy, \varphi(0) = 0, \varphi^{'}(y) = 1, \tag{2.28}$$

2. L'équation intégro-différentielles de type Fredholm de la forme

$$\varphi^{'}(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (xy)\varphi(y)dy, \varphi(0) = 0. \tag{2.29}$$

2.4 Types et techniques de la résolution[2]

Il existe une multitude de techniques de solution disponibles pour résoudre les équations intégrales. Deux méthodes **traditionnelles** importantes sont la méthode des *approximations successives* et la méthode *des substitutions succecives.*
En outre, la méthode *de la série* et la méthode *de calcul directe* conviennent également à certains problèmes.

Les méthodes récemment **développées**, à savoir la méthode *de décomposition Adomian* (MDA) et la méthode *de décomposition modifiée* gagnent en popularité parmi les scientifiques et des ingénieurs pour résoudre des équations intégrales hautement non linéaires. Les équations rencontrées par Abel peuvent être facilement résolues en utilisant la transformation de Laplace. Les équations intégrales de Volterra de type convolution peuvent être résolues à l'aide du méthode de transformation de Laplace. Enfin, pour les problèmes non linéaires, les techniques numériques sera extrêmement utile pour résoudre les problèmes très compliqués.

CHAPITRE 3

EQUATION INTÉGRALE DE VOLTERRA

Dans ce chapiter on donne une définition générale de l'équation intégrale de Volterra, après, on parle sur la Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra, et aussi donnons des théorèmes d'existance et d'unicité de la solution, puis les méthodes de la résolution de l'équation intégrale de Volterra.

3.1 Généralités

3.1.1 Equation intégrale de second espèce

Définition 3.1.1. *Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy, \tag{3.1}$$

où $f(x)$ et $K(x,y)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre numérique, et appellée ***équation intégrale linéaire de Volterra de second espèce****. La fonction $K(x,y)$ est le noyau de l'équation de Volterra.*
Si $f(x) = 0$ l'éqation (3.1) s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy, \tag{3.2}$$

et s'appelle équation homogène de ***Volterra de second espèce****.*

3.1.2 Equation intégrale de première espèce

Définition 3.1.2. *Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme*

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy, \tag{3.3}$$

et s'appelle équation de ***Volterra de première espèce****.*

3.1.3 Equation intégrale de Volterra de première espèce de type convolution

Appelons équation intégrale de première espèce de type convolution l'équation

$$\int_0^x K(x-y)\varphi(y)dy = f(x), \tag{3.4}$$

dont le noyau $K(x,y)$ n'est fonction que de la différence $x - y$.
Cette classe d'équations comprend par exemple l'équation d'Abel généralisée.

3.2 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

Généralement la réduction d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de second espèce, dans cette partie on illustrons notre affirmation sur l'équation intégrale de**Volterra de second espèce**.

Définition 3.2.1. ***(problème de Cauchy)*** *On appelle problème de Cauchy au problème à une valeur initiale, le problème qui consiste à trouver une fonction y(x) définie sur l'intervalle [a,b] telle que :*

$$(P)\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in [a, b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Si la fonction f est continue et vérifiée la condition de Lipschitz par rapport à la deuxième variable, alors le problème admet une solution unique, dans ce cas, on dit que le problème est bien posé.

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + b_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + b_n y = G(x), \tag{3.5}$$

à coefficients continus $b_i(i = 1, 2, ..., n)$ avec les conditions initiales

$$y(0) = C_0, y^{'}(0) = C_1, ..., y^{n-1}(0) = C_{n-1}, \tag{3.6}$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce. Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle de second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + b_1(x)\frac{dy}{dx} + b_2(x)y = G(x), \tag{3.7}$$

$$y(0) = C_0, y^{'}(0) = C_1, \tag{3.8}$$

Posons :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x), \tag{3.9}$$

D'où, vu les conditions initiales (3.8), on obtient successivement

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(y)dy + C_1, y = \int_0^x (x - y)\varphi(y)dy + C_1 x + C_0, \tag{3.10}$$

Utilisant la formule

$$\underbrace{\int_a^x dx \int_a^x dx ... \int_a^x}_{n} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x - z)^{(n-1)} f(z)dz, \tag{3.11}$$

Substituant (3.9) et (3.10) dans l'équation (3.7) on obtient

$$\varphi(x) + b_1(x)\int_0^x \varphi(y)dy + b_1(x)C_1 + b_2(x)\int_0^x (x-y)\varphi(y)dy + b_2(x)C_1 x + b_2(x)C_0 = G(x), \tag{3.12}$$

On peut écrire aussi

$$\varphi(x) + \int_0^x b_1(x)\varphi(y)dy + b_1(x)C_1 + \int_0^x b_2(x)(x-y)\varphi(y)dy + b_2(x)C_1 x + b_2(x)C_0 = G(x), \tag{3.13}$$

donc

$$\varphi(x) + \int_0^x [b_1(x) + b_2(x)(x - y)]\varphi(y)dy = G(x) - b_1(x)C_1 - b_2(x)C_1 x - b_2(x)C_0, \tag{3.14}$$

Posant

$$K(x,y) = -[b_1(x) + b_2(x)(x-y)], \tag{3.15}$$

$$f(x) = G(x) - C_1 b_1(x) - b_2(x) C_1 x - b_2(x) C_0, \tag{3.16}$$

Ramenant l'équation (3.14) à la forme suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy. \tag{3.17}$$

c'est l'équation de Volterra de second espèce.(Pour plus d'information voir[5]).

Remarque 3.2.1. *L'unicité de la solution de (3.17) résulte de l'existance et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy (3.7) (3.8) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point $x = 0$.*

3.3 Existance et l'unicité de la solution[2]

Le théorème de point fixe de Banach est un théorème simple à prouver et possède de nombreuses application, qui inclunent les théorèmes d'existances pour les équations différentielles, les équations intégrales et la convergence d'un certain méthodes numériques comme celle de Newton pour la résolution d'équation non linéaires.

Théorème 3.3.1. ***(point fixe de Banach)*** *Soint (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ une application contractante. Alors f admet un point fixe unique $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$ la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ quelconque et $x_{p+1} = f(x_p)$ converge vers a.*

On considère un réel $\lambda \in \mathbb{R}$, une fonction numérique f réelle continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ et une fonction réelle K de deux variables sur le pavé $[a, b][a, b]$ le problème de Volterra s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver la fonction } \varphi \text{ definie sur } [a,b] \text{ telle que} \\ \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy \end{cases}$$

On se place dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues muni de la norme du max $\|\varphi\|_\infty = \sup\limits_{(x)\in[a,b]} |\varphi(x)|$ On pose :

1. K continue sur $[a, b][a, b]$.
2. $M = \sup\limits_{(x,y)\in[a,b][a,b]} |K(x, y)|$.

   On obtient aisément par application du théorème de point fixe de Banach le résultat (le théorème) d'éxistance et de l'unicité de la solution suivante :

   Théorème 3.3.2. *L'équation de Volterra admet une solution unique dans $C([a, b], \mathbb{R})$ à la condition suffisante*

   $$|\lambda| M(b-a) < 1.$$

Prouve

$\boxed{1}$ L'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ muni da la norme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.

$\boxed{2}$ L'application T définie par :

$$T\varphi(x) \quad = \quad f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy, \forall x \in [a,b]$$

est une application de $C([a,b])$ dans lui même. En effet la fonction $T\varphi$ est continue sur $[a,b]$.

$$T\varphi(x_0+h) - T\varphi(x_0) = f(x_0+h) - f(x_0) + \lambda \int_a^x [K(x_0+h,y) - K(x_0,y)]\varphi(y)dy,$$

d'où

$$|T\varphi(x_0+h) - T\varphi(x_0)| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x_0+h,y) - K(x_0,y)|\varphi(y)|dy + |f(x_0+h) - f(x_0)|.$$

Pour obtenir le résultat utilisant la continuité de la fonction K et celle de f.

$\boxed{3}$ On a :

$$T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x) = \lambda \int_a^x K(x,y)[\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]dy$$

donc comme K est bornée par M dans $[a,b][a,b]$ on obtient :

$$|T\varphi_1(x) - T\varphi_2(x)| \leq |\lambda| M(b-a)\|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty, \forall x \in [a,b].$$

Pour $T^{\ 2}$, on a :

$$\begin{aligned}
|T^2\varphi_1(x) - T^2\varphi_2(x)| &= |\lambda \int_a^x k(x,y)T\varphi_1(y)dy - \lambda \int_a^x k(x,y)T\varphi_2(y)dy| \\
&= |\lambda \int_a^x k(x,y)[T\varphi_1(y) - T\varphi_2(y)]dy| \\
&= |\lambda \int_a^x k(x,y)[\lambda \int_a^y k(y,t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))dt]dy| \\
&= |\lambda^2 \,|| \int_a^x k(x,y) \int_a^y k(y,t)(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))dtdy| \\
&\leq |\lambda^2 \,| \int_a^x M \int_a^y M|\ \varphi_1(t) - \varphi_2(t)|dtdy \\
&\leq |\lambda^2| M^2 \int_a^x \int_a^y dtdy \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty, \forall x,y \in [a,b] \\
&\leq |\lambda^2|\ M^2 \int_a^x (y-a)\,dy \ \parallel \varphi_1 - \varphi_2 \parallel_\infty, \forall x,y \in [a,b] \\
&\leq |\lambda^2|\ M^2\ \frac{(x-a)^2}{2!} \parallel \varphi_1 - \varphi_2 \parallel_\infty, \forall x,y \in [a,b]\,.
\end{aligned}$$

et par réccurence sur p on obtient que :

$$|T^p\varphi_1(x) - T^p\varphi_2(x)| \leq |\lambda^p| \ M^p \ \frac{(x-a)^p}{p!} \ \| \ \varphi_1 - \varphi_2 \ \|_\infty, \forall x \in [a, b] \, ,$$

et puisque

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!} = \exp(|\lambda| M(b-a)) < \infty,$$

donc, $\dfrac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!} \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$. D'où il existe un p qui vérifiée :

$$|\lambda^p| \ M^p \ \frac{(x-a)^p}{p!} < 1,$$

L'application T^p est donc une contraction, alors d'après le théorème de point fixe de Banach l'application T admet un point fixe unique $T\varphi = \varphi$. Il résulte de ce dernier que l'équation de Volterra admet unique solution dans $C([a, b], \mathbb{R})$ qui vérifiée l'équation :

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy, \forall x \in [a, b].$$

$\blacksquare$

Remarque 3.3.1. *On pourrait remplacer la condition ci-dessus par la suivante :*

$$\sup_{x \in [a,b]} |\lambda| \int_a^x |K(x, y)|dy \leq k < 1.$$

3.4 Quelques méthodes de résolution pour l'équation intégrale de Volterra

3.4.1 Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes[6]

Soit l'équation intégrale de Volterra de second espèce définie par

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y)\varphi(y)dy, \tag{3.18}$$

où $K(x, y)$ est une fonction continue pour $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq x$, et $f(x)$ est continue lorsque $0 \leq x \leq a$.
Cherchons la solution de cette équation sous la forme d'une série entière ilimitée suivant les puissances de λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ..., \tag{3.19}$$

Portons formellement cette série dans (3.18), il vient

$$\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, y)[\varphi_0(y) + \lambda\varphi_1(y) + ... + \lambda^n\varphi_n(y) + ...]dy,$$

En procédant par identification nous obtenant

$$\varphi_0(x) = f(x). \tag{3.20}$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x K(x,y)\varphi_0(y)dy = \int_0^x K(x,y)f(y)dy. \tag{3.21}$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x K(x,y)\varphi_1(y)dy = \int_0^x K(x,y)\int_0^y K(y,y_1)f(y_1)dy_1dy. \tag{3.22}$$

$$\vdots \tag{3.23}$$

Moyennant les relations précédentes, on peut définir successivement les fonctions $\varphi_n(x)$.On montre que sous les hypothèses faites sur $f(x)$ et $K(x,y)$ la série (3.19) ainsi obtenue converge uniformément en x et λ pour tout λ et $x \in [0,a]$ et que sa somme est le solution de l'équation (3.18). Ensuite (3.22) entraine

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \int_0^x K(x,y)[\int_0^y K(y,y_1)f(y_1)dy_1]dy \\
&= \int_0^x f(y_1)dy_1 \int_{t_1}^x K(x,y)K(y,y_1)dy_1dy \\
&= \int_0^x K_2(x,y_1)f(y_1))dy_1
\end{aligned}$$

où

$$k_2(x,y_1) = \int_{y_1}^x K(x,y)K(y,y_1)dy.$$

On établit de façon analogue qu'en général

$$\varphi_n(x) = \int_0^x K_n(x,y)f(y)dy, (n = 1,2,...), \tag{3.24}$$

Les fonctions $K_n(x,y)$ s'appellent **noyeaux itérés** et sont définies,on le montre aisément par les formules de récurrence

$$K_1(x,y) = K(x,y)$$

$$K_{n+1}(x,y) = \int_y^x K(x,z)K_n(z,y)dz, , n = (1,2,...), \tag{3.25}$$

On substituant des équations (3.24) et (3.25) dans (3.19) on obtient :

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_0^x K(x,y)_m f(y)dy.$$

Une fonction $R(x,y;\lambda)$ définie par le série

$$R(x,y;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x,y), \tag{3.26}$$

est la *résolvante* (ou le *noyau résolvant*) de l'équation intégrale (3.18).
Si le noyau $K(x,y)$ est continu, la série (3.26) converge absolument et uniformément.

Les noyaux itérés et la résolvante sont indépendants de la limite inférieure de l'intégrale dans l'équation intégrale.

La résolvante $R(x, y; \lambda)$ satisfait à l'équation fonctionnelle suivante :

$$R(x, y; \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_y^x K(x, s)R(s, t; \lambda)ds,$$

La solution de l'équation intégrale (3.18) en fonction de la résolvante s'écrit comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, y; \lambda)f(y)dy. \tag{3.27}$$

Maintenant supposons que le noyau $K(x, y)$ est un polynôme de degré $n - 1$ en y et qui peut donc s'écrire

$$K(x, y) = a_0(x) + a_1(x)(x - y) + ... + \frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}. \tag{3.28}$$

les coefficients $a_k(x)$ étant continus dans [0,a]. En définissant une fonction $g(x, y; \lambda)$ comme solution de l'équation différentielle

$$\frac{d^n g}{dx^n} - \lambda \left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}} + ... + a_{n-1}(x)g \right] = 0, \tag{3.29}$$

qui vérifie les conditions

$$g|_{x=y} = \frac{dg}{dx}|_{x=y} = ... = \frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}|_{x=y} = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}} = 1. \tag{3.31}$$

la résolvante $R(x, y; \lambda)$ sera définie par l'égalité

$$R(x, y; \lambda) = \frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(x, y; \lambda)}{dx^n}. \tag{3.32}$$

De même, si

$$K(x, y) = b_0(y) + b_1(y)(y - x) + ... + \frac{b_{n-1}(y)}{(n-1)!}(y - x)^{n-1}, \tag{3.33}$$

la résolvante est définie par

$$R(x, y; \lambda) = -\frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(y, x; \lambda)}{dy^n}, \tag{3.34}$$

oú $g(y, x; \lambda)$ est la solution de l'équation

$$\frac{d^n g}{dx^n} + \lambda \left[b_0(y)\frac{d^{n-1}g}{dy^{n-1}} + ... + b_{n-1}(y)g \right] = 0,$$

qui vérifie les conditions (3.30) et (3.31).

Remark 3.4.1. *L'unicité de la solution des équations intégrales de Volterra de second espèce*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)\varphi(y)dy, \tag{3.35}$$

est assurée dans les hypothèses sensiblement plus large sur la fonction $f(x)$ et $K(x, y)$ que leur continuité.

Théorème 3.4.2. *L'équation intégrale de* ***Volterra de second espèce*** (3.35)*dont les noyaux* $K(x, y)$ *et la fonction* $f(x)$ *appartiennent respectivement à* $L_2(\Omega_0)$ $(\Omega_0 = 0 \leq x, y \leq a)$ *et à* $L_2(0, a)$*, admet une solution et une seule dans* $L_2(0, a)$*. Cette solution est donnée par la formule*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x, y; \lambda) f(y) dy,$$

où la résolvante $R(x, y; \lambda)$ *est définie par la série*

$$R(x, y; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}(x, y),$$

de noyaux itérés qui converge presque partout.

3.4.2 La méthode des approximations successives[5]

Dans cette méthode, on remplacant la fonction inconnue $\varphi(x)$ sous le signe intégrale de l'équation de Volterra suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y) \varphi(y) dy, \tag{3.36}$$

par toute fonction continue sélective à valeur réelles $\varphi_0(x)$, appelée *l'approximation zéro*. Cette substitution donnera la *première approximation* $\varphi_1(x)$ par

$$\varphi_1(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y) \varphi_0(y) dy, \tag{3.37}$$

il est evident que $\varphi_1(x)$ est continu si $f(x)$, $K(x, y)$, $\varphi_0(x)$ sont continus.

La seconde approximation $\varphi_2(x)$ peut être obtenue de la même manière en remplaçant $\varphi_0(x)$ dans l'équation (3.37) par $\varphi_1(x)$ obtenue ci-dessus. Et nous trouvons

$$\varphi_2(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y) \varphi_1(y) dy, \tag{3.38}$$

En continuant ainsi, on obtient une suite infinie de fonctions

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...,$$

qui satisfait la relation de récurrence

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x K(x, y) \varphi_{n-1}(y) dy. \tag{3.39}$$

pour $n = 1, 2, 3, ...,$ et $\varphi_0(x)$ est équivalent à toute fonction à valeur réelle sélectionnée. les fonctions les plus couramment sélectionnées pour $\varphi_0(x)$ sont $0, 1$, et x. Ainsi la solution de l'équation (3.36) est obtenue comme

$$\varphi(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(x), \tag{3.40}$$

de sorte que la solution obtenue $\varphi(x)$ soit indépendante du choix de la valeur approximative de $\varphi_0(x)$. Ce processus d'approximation est extrêmement simple. Cependant, si on choisisant la méthode de l'approximation succesive de *Picard*, il faut prendre $\varphi_0(x) = f(x)$ et déterminant $\varphi_1(x)$ et d'autres approximation successives comme suit

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= f(x) + \int_0^x K(x,y)f(y)dy \\
\varphi_2(x) &= f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi_1(y)dy \\
\varphi_{n-1}(x) &= f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi_{n-2}(y)dy \\
\varphi_n(x) &= f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy,
\end{aligned}$$

La dernière équation c'est la relation de réccurence. par soustraction des équations $\varphi_2(x)$ et $\varphi_1(x)$ on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) - \varphi_1(x) &= \lambda \int_0^x K(x,y)[f(y) + \lambda \int_0^y K(y,z)f(z)dz]dy - \lambda \int_0^x K(x,y)f(y)dy \\
&= \lambda^2 \int_0^x K(x,y) \int_0^y K(y,z)f(z)dzdy \\
&= \lambda^2 \psi_2(x),
\end{aligned}$$

où

$$\psi_2(x) = \lambda^2 \int_0^x K(x,y) \int_0^y K(y,z)f(z)dzdy, \tag{3.41}$$

Ainsi, on peut facilement remarquant à partir de l'équation (3.41) que

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \lambda^m \psi_m(x). \tag{3.42}$$

avec $m = 1, 2, 3, ...$ et donc $\psi_1(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)dy$. par changement d'ordre d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned}
\psi_2(x) &= \lambda^2 \int_0^x f(z)dz \int_z^x K(x,y)K(y,z)dy \qquad (3.43)\\
&= \int_0^x K_2(x,z)f(z)dz, \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

où $K_2(x,z) = \int_z^x K(x,y)K(y,z)dy$, de même, on trouve en général

$$\psi_m(x) = \int_0^x K_m(x,z)f(z)dz, m = 1, 2, 3, ..., \tag{3.45}$$

où les noyaux itératifs sont définis par la formule de récurrence

$$K_{m+1}(x,y) = \int_y^x K(x,z)K_m(z,y)dz, m = 1, 2, 3, ... \tag{3.46}$$

Ainsi, la solution pour $\varphi_n(x)$ peut s'écrire

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \psi_m(x). \tag{3.47}$$

Il est également raisonnable que nous soyons conduits à la solution de l'équation (3.24) au moyen de la somme si elle est existe, de la série infinie définie par l'équation (3.42). Ainsi nous avoir l'aide de l'équation (3.45)

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= f(x) + \sum_{m=1}^{n} \lambda^m \int_0^x K(x,z) f(z) dz & (3.48)\\ &= f(x) + \int_0^x \left\{ \sum_{m=1}^{n} \lambda^m K_m(x,z) \right\} f(z) dz. & (3.49) \end{aligned}$$

Il est donc clairement que la solution de l'équation soit donnée par (3.24), comme

$$\begin{aligned} \lim_{n \longrightarrow \infty} \varphi_n(x) &= \varphi(x) \\ &= f(x) + \int_0^x \left\{ \sum_{m=1}^{n} \lambda^m K_m(x,z) \right\} f(z) dz \\ &= f(x) + \lambda \int_0^x H(x,z;\lambda) f(z) dz, \end{aligned}$$

avec

$$H(x,z;\lambda) = \sum_{m=1}^{n} \lambda^m K_m(x,z).$$

c'est appelé le noyau résolvant.

3.4.3 La méthode de transformation de Laplace

Soit l'équation intégrale de Volterra de type covolution

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-y)\varphi(y), \tag{3.50}$$

où le noyau $K(x-y)$ est de type convolution, peut être très facilement résolu en utilisant la méthode de transformation de Laplace. Pour commencer le processus de la solution, nous définissons d'abord la transformation de Laplace de $\varphi(x)$

$$L\{\varphi(x)\} = \int_0^\infty e^{-\xi x} \varphi(x) dx, \tag{3.51}$$

En utilisant la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution, on obtient

$$L\left\{ \int_0^x K(x-y)\varphi(y) dy \right\} = L\{K(x)\} L\{\varphi(x)\}, \tag{3.52}$$

Ainsi, on prenant la transformation de Laplace de l'équation (3.50), on obtient

$$L\varphi(x) = L\{f(x)\} + \lambda L\{K(x)\} L\{\varphi(x)\},$$

et la solution pour $L\varphi(x)$ est donnée par

$$L\varphi(x) = \frac{L\{f(x)\}}{1 - \lambda L\{K(x)\}},$$

en inversant cette transformation, on trouve

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(x-y) f(y) dy, \tag{3.53}$$

où

$$\psi(x) = L^{-1} \left\{ \frac{L\{f(x)\}}{1 - \lambda L\{K(x)\}} \right\}.$$

et l'expression (3.53) c'est la solution de l'équation intégrale de Volterra de second espèce de type convolution.

CHAPITRE 4

EQUATION INTÉGRALE DE FREDHOLM

Dans ce chapiter on donne une définition générale de l'équation intégrale de Fredholm, après, on parle sur le théorème d'existance et d'unicité de la solution avec démenstration, puis quelque méthodes de la résolution.

4.1 Notion fondamentales[6]

Définition 4.1.1. ***(Equation intégrale de premier espèce de Fredholm)*** *On appelle L'équations intégrales linéaire de Fredholm de premier espèce une équation de la forme :*

$$f(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy, \tag{4.1}$$

Contenant la fonction inconnue $\varphi(x)$ seulement sous le signe $\int$.

Définition 4.1.2. ***(Equation intégrale de second espèce de Fredholm)*** *On appelle L'équations intégrales linéaire de Fredholm de second espèce une équation de la forme :*

$$f(x) = \varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy, \tag{4.2}$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue,$K(x,y)$ et $f(x)$ des fonctions données , x et y deux variables réelles parcourant dans l'intervalle $[a,b]$ et λ un facteur numérique. La fonction $K(x,t)$ est le noyau de l'équation intégrale (3.1) *; on suppose que le noyeau $K(x,y)$ est défini dans le carré $\Omega = \{a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$ du plan (x,y) et continu dans Ω ,ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale*

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy,$$

soit finie.

1. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (4.1) est dite *non homogène*, dans le cas contraire,l'équation intégrale (4.1) s'écrit

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = 0 \tag{4.3}$$

   et on dit qu'elle est *homogène*.

4.2 Existance et l'unicité de la solution[2]

On considère un réel $\lambda \in \mathbb{R}$,une fonction numérique réelle continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ et une fonction réelle K de deux variables sur le pavé $[a,b][a,b]$ le problème de Volterra s'écrit :

$$\begin{cases} \text{trouver la fonction } \varphi \text{ definie sur } [a,b] \text{ telle que} \\ \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy \end{cases}$$

On se place dans l'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues muni de la norme du max $\|\varphi\|_\infty = \sup_{(x)\in[a,b]} |\varphi(x)|$ On pose :

1. K continue sur $[a,b][a,b]$.
2. $M = \sup_{(x,y)\in[a,b][a,b]} |K(x,y)|$.

   On obtient aisément par application du théorème de point fixe de Banach le résultat (le théorème) d'éxistance et de l'unicité de la solution suivante :

Théorème 4.2.1. *L'équation de Fredholm admet une solution unique dans $C([a,b],\mathbb{R})$ à la condition suffisante*

$$|\lambda|M(b-a)<1$$

preuve

$\boxed{1}$ L'espace $C([a,b],\mathbb{R})$ muni da la norme $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.

$\boxed{2}$ L'application T définie par :

$$T\varphi(x) \quad = \quad f(x)+\lambda\textstyle\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy, \forall x\in[a,b]$$

est une application de $C([a,b])$ dans lui même.En effet la fonction $T\varphi$ est continue sur$[a,b]$.

$$T\varphi(x_0+h)-T\varphi(x_0)=f(x_0+h)-f(x_0)+\lambda\int_a^b[K(x_0+h,y)-K(x_0,y)]\varphi(y)dy$$

d'où

$$|T\varphi(x_0+h)-T\varphi(x_0)|\leq|\lambda|\int_a^b|K(x_0+h,y)-K(x_0,y)||\varphi(y)|dy+|f(x_0+h)-f(x_0)|$$

Pour obtenir le résultat utilisant la continuité de la fonction K et celle de f.

$\boxed{3}$ L'application T est une contraction,en effet,on a :

$$T\varphi_1(x)-T\varphi_2(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)[\varphi_1(y)-\varphi_2(y)]dy$$

Donc comme K est bornée par M dans $[a,b][a,b]$ on obtient :

$$|T\varphi_1(x)-T\varphi_2(x)|\leq|\lambda|M(b-a)\|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty, \forall x\in[a,b].$$

et le résultat

$$\|T\varphi_1-T\varphi_2\|=|\lambda|M(b-a)\|\varphi_1-\varphi_2\|_\infty$$

avec

$$|\lambda|M(b-a)<1$$

Donc d'aprés le théorème de point fixe de Banach que T admet un point fixe de unique dans $C[a,b]$,$T\varphi=\varphi$.Dans ce cas on deduit que l'équation intégrale de Fredholm admet une solution unique dans $C[a,b]$ qui vérifiée l'équation intégrale de Fredholm (3.1) avec la condition :

$$|\lambda|M(b-a)<1.$$

■

Remarque 4.2.1. *On pourrait remplacer la condition ci-dessus par la suivante :*

$$\sup_{x\in[a,b]}|\lambda|\int_a^b|K(x,y)|dy\leq k<1.$$

4.2.1 Existance et unicité de la solution pour les équations intégrales non linéaires de Fredholm[6]

On peut définie l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de second espèce par la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)G(x,y\varphi(y))dy \tag{4.4}$$

Si

1. f une fonction borné sur $[a,b] \Leftrightarrow \exists R > 0, \forall x \in [a,b] : |f(x)| < R$.
2. G est une fonction intégrable et borné $\forall a \leq x,y \leq b \Leftrightarrow \exists k > 0, \forall (x,y) \in [a,b] : |G(x,y,\varphi(y))| < k$
3. G est M-Lipschizien $\Leftrightarrow |G(x,y,\varphi(z_1)) - G(x,y,\varphi(z_2))| < M|z_1 - z_2|$

Donc l'équation (4.4) admet au moins une solution φ dans $[a,b]$.
preuve Voir [6]

4.3 Quelques méthodes de résolution pour l'équation intégrale de Fredholm

4.3.1 La méthode des substitutions successives[6]

Cette méthode est presque analogue à la méthode des approximations successives sauf qu'il concerne la solution de l'équation intégrale sous forme de série à travers évaluer des intégrales simple et multiples.La solution par la procédure numérique dans cette méthode est énorme par rapport à d'autres techniques.

Dans l'équation (4.2) ; comme d'abitude $K(x,y) \neq 0$ c'est une fonction de deux variable réelle, continu dans le rectangle $\mathbb{R}$, pour laquel $a \leq x \leq b$ et $a \leq y \leq b$, et aussi $f(x) \neq 0$ est une fonction réelle continue dans l'intervalle I pour laquel $a \leq x \leq b$, et λ un paramètre constant.

En substituant dans le second membre de l'équation (4.2), à la place de $\varphi(y)$,sa valeur comme donné par l'équation elle-même, donne

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy + \lambda^2 \int_a^b K(x,y) \int_a^b K(y,y_1)\varphi(y_1)dy_1dy \tag{4.5}$$

On substituant à $\varphi(y_1)$ sa valeur donnée dans l'équation (4.2), on obtient

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) &+ \lambda \int_a^b K(x,y)f(y)dy \\ &+ \lambda^2 \int_a^b K(x,y) \int_a^b K(y,y_1)f(y_1)dy_1dy \\ &+ \lambda^3 \int_a^b K(x,y) \int_a^b K(y,y_1) \int_a^b K(y_1,y_2)\varphi(y_2)dy_2dy_1dy \\ &+ \ldots \end{aligned} \tag{4.6}$$

En procédant de cette manière, on obtient

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) = f(x) &+ \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy \\
&+ \lambda^2 \int_a^b K(x,y) \int_a^b K(y,y_1) f(y_1) dy_1 dy \\
&+ \lambda^3 \int_a^b K(x,y) \int_a^b K(y,y_1) \int_a^b K(y_1,y_2) f(y_2) dy_2 dy_1 dy \\
&+ \ldots
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

En note que la solution en série donnée dans l'équation (4.7) converge uniformément dans l'intervalle $[a,b]$ si $\lambda M(a,b) < 1$ où $|K(x,y)| < M$. La peuve est trés simple et peut être trouvé dans[1] .
A partir de l'équation (4.7), il est absolument clair que dans cette méthode, la fonction inconnue $\varphi(x)$ est remplacée par la fonction donnée $f(x)$ qui red l'évaluation des intégrales multiples simple et possible.La technique de cette méthode sera illustré ci-dessous dans le chapitre qui suit.

4.3.2 La méthode de la décompositions Adomian[5]

La méthode de décomposition a été récemment introduite par Adomian dans les livres écrit par lui [5] et [6]. La méthode à beaucoup de similitude avec la série de Neumann, et a été prouvée, être fiable et efficace pour une large classe d'équation différentielles et intégrales de modèle linéaire et non linéaire.

Dans la méthode de décomposition, on exprime généralement la solution du équation intégrale linéaire

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,y)\varphi(y) dy \tag{4.8}$$

sous forme d'une série comme une série de perturbation régulière , définie par

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{4.9}$$

Par substitution de l'équation (4.9) dans les deux cotés de l'équation (4.8), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(y) \right\} dy \tag{4.10}$$

Les composantes $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ de la fonction inconnue $\varphi(x)$ sont complètement déteminé de manière récurrente si on fixons

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= f(x) \\
\varphi_1(x) &= f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi_0(y)dy \\
\varphi_2(x) &= f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi_1(y)dy \\
\varphi_3(x) &= f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi_2(y)dy \\
&\vdots \\
\varphi_n(x) &= f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy.
\end{aligned}$$

L'idée principale comme technique de perturbation, est de déterminer décomposition zéro $\varphi_0(x)$ par la fonction connue $f(x)$. Une fois que $\varphi_0(x)$ est connu, alors déterminer successivement $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., etc.$. Un schéma de récurrence est alors donnée par

$$\varphi_0(x) = f(x), \tag{4.11}$$

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy, n \geq 1. \tag{4.12}$$

Par observation aux équations (4.11) et (4.12), les composantes $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ...$ si elles sont déterminée sucessivement, donc la solution $\varphi(x)$ peut être obtenu en utilisant la série (4.9).

4.3.3 La méthode des approximations successives de Picard

Parfois, les équations intégrales non linéaires ne peuvent pas être résolues par les méthodes précédentes, dans ce cas nous pouvons recourir à une méthode itérative donnez-nous la solution φ s'il existe.

Principe de la méthode

Considérons l'équation intégrale non linéaire de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(\varphi(y))dy. \tag{4.13}$$

On choisisant une valeur initiale approximative $\varphi_0(x)$,on obtient par substitution dans l'équation (4.13)

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(\varphi_0(y))dy?$$

$\varphi_1(x)$ appelé la première approximation de φ, pour trouver une meilleur approximation en substituant $\varphi_1(x)$ dans le second membre de l'équation (4.13), on trouve

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,y)F(\varphi_1(y))dy,$$

Et ainsi de suite jusqu'à le n ème approximation

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) F(\varphi_n(y)) dy, \tag{4.14}$$

Dans ce cas on trouve une solution de l'équation non linéaire (4.13) sous la forme d'une série d'approximation $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

CHAPITRE 5

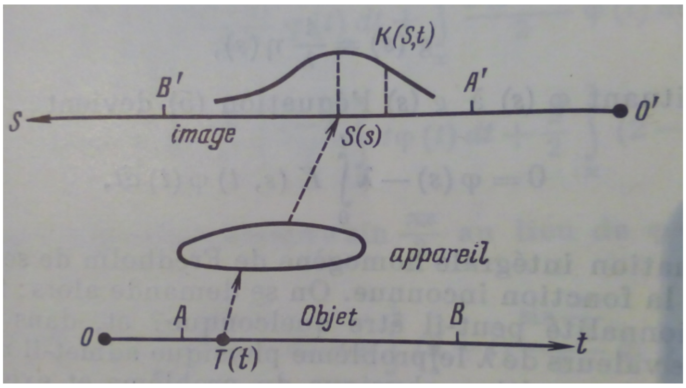
APPLICATION SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

5.1 Application sur la physique

5.1.1 Problème de répartition de la luminance

Selon la loi de l'optique géométrique, l'image d'un segment est un segement, leurs longueurs étant en général différentes.

Etant donné le système optique d'un dispositif P, choisisons les unités de mesure sur les axes Ot et $O^{'}s$ de façon que pour deux points $T(t)$ et $S(s)$ qui se correspondent, on ait $s = t$.



Le point lumineux $T(t)$ de l'objet AB influe sur l'éclairement de tous les points de l'image $A^{'}B^{'}$, mais celui de point $S(s)$ est le plus grand. Ainsi, l'éclairement K est une fonction de s et t, i.e $K = K(s, t)$.

Désignons par $\eta(t)$ la luminance de l'objet en t. La quantité $\eta(t)K(s, t)\Delta t$ donne alors une valeur approximative de la luminance de l'image au point $S(s)$ engendrée par l'élément Δt de l'objet luminaux. Ici $K(s, t)$ est défini par les propriétés optiques du dispositif.
En vertu du principe de superposition, la luminance de l'image au point $S(s)$ est

approximativement donnée par la somme

$$\sum_k \eta(t_k)K(s,t_k)\Delta t_k, \tag{5.1}$$

où la somme s'étend sur tout l'objet (le segment AB). Soit l la longueur de ce segment.
Passant à la limite dans (5.1) pour max $\Delta t_k \longrightarrow 0$, on obtient une répartition de la luminance de l'image de la forme

$$g(x) = \int_0^l K(x,t)\eta(t)dt. \tag{5.2}$$

Selon la façon dont on pose le problème, on obtient à partie de (5.2) des équations intégrales de divers types. La fonction connue $K(s,t)$ est définie par le choix du dispositif. Si on s'est donné la luminance de l'image $g(s)$ et qu'on cherche une répartition de la luminance de l'image $g(s)$ et qu'on cherche une répartition de la luminance de l'objet telle qu'elle fournisse la luminance donnée de l'image, alors $g(s)$ est une fonction donnée et $\eta(s)$ la fonction inconnue, et l'équation (5.2) est donc une équation de fredholm de première espèce.

La question suivante est trés importanye en physique : dans queles conditions, l'image est telle qu'on ait, à part la similitude géométrique de l'objet et de l'image, la similitude de leurs luminances ?.
Dans ce cas $g(s)$ et $\eta(s)$ sont proportionnels, i.e.

$$g(s) = \frac{1}{\lambda}\eta(s),$$

et on substituant (s) à $g(s)$ l'équation (5.2) devient

$$\varphi(s) - \lambda\int_0^l K(s,t)\eta(t)dt = 0,$$

i.e. une équation intégrale homogène de Fredholm de second espèce où $\varphi(s)$ est le fonction inconnue. On se demande alors : le coeficient de proportionnalité peut-il être quelconque ? et, dans la négative pour quelles valeurs de λ le problème physique admet-il une solution ?
Modifions la position physique du problème et exigeons que la différence entre la luminance d'une point de l'objet et celle du point correspondant de l'image ait partout une valeur $f(s)$ donnée à l'avance, i.e.

$$\eta(s) - g(s) = f(s), \tag{5.3}$$

on porte $g(s)$ défini par (5.3) dans l'équation (5.2), on obtient

$$f(s) = \eta(s) - \int_0^l K(s,t)\eta(t)dt$$

c'est-à-dire une équation non homogène de Fredholm de second espèce, où la fonction inconnue est $\eta(s)$.

5.2 Les équations intégrales et problèmes aux limites

5.2.1 Problème aux limites dépendant d'un paramètre et leur réduction à des équations intégrales

On est souvent conduit à un problème aux limites du type

$$\begin{cases} L[y] = \lambda y + h(x), \\ V_k(y) = 0, \quad k = (1, 2, 3, ..., n). \end{cases} \tag{5.4}$$

où $L[y] = p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + ... + p_n(x)y(x)$,
$V_k(y) = \alpha_k y(a) + \alpha_k^{(1)} y'(a) + ... + \alpha_k^{(n-1)} y^{n-1}(a) + \beta_k y(b) + \beta_k^{(1)} y'(b) + ... + \beta_k^{(n-1)} y^{n-1}(b)$,
k=(1,2,3,...,n).
les formes linéaires $V_1, V_2, ..., V_n$ sont linéairement indépendantes ;$h(x)$ est une fonction continue de x donnée, λ un paramètre numérique.

Pour $h(x) = 0$, on obtient le problème aux limites suivante :

$$\begin{cases} L[y] = \lambda y, \\ V_k(y) = 0, \quad k = (1, 2, 3, ..., n). \end{cases} \tag{5.5}$$

les valeurs de λ pour lesquelles le problème au limites (5.4) admet des solutions $y(x)$ non triviales s'appellent **valeurs propres** de ce problème et ses solutions non triviales **fonctions propres** correspondantes.

Théorème 5.2.1 ([6]). *Si le problème aux limites*

$$\begin{cases} L[y] = \lambda y, \\ V_k(y) = 0, \quad k = (1, 2, 3, ..., n). \end{cases}$$

possède la fonction de Green $G(x, \xi)$, le problème aux limites est équivalent à l'équation intégrale de Fredholm

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi, \tag{5.6}$$

où

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi) h(\xi) d\xi. \tag{5.7}$$

En particulier, le problème homogène (5.5) est équivalent à l'équation intégrale homogène

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi. \tag{5.8}$$

Remark 5.2.2. *Du moment que $G(x, \xi)$ est un noyau continu, on a pour l'équation intégrale (5.8) les théorèmes de Fredholm. Aussi cette équation admet-elle un nombre au plus dénombrable de valeurs caractéristiques $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ qui ne peuvent converger qu'à l'infini. Pour toutes valeurs λ autres que caractéristiques, l'équation non homogène (5.6) a une solution quel que soit son second membre $f(x)$ continu. Cette solution est sous la forme*

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi,$$

*où $R(x, \xi; \lambda)$ est la résolvante relative au noyau $G(x, \xi)$. Quelque soit x et ξ fixes dans $[a, b]$, la fonction $R(x, \xi; \lambda)$ est une fonction **méromorphe** de λ.*

Définition 5.2.3. *[6] (**fonction de Green**)On appelle fonction de Green (ou fonction d'influence) du problème aux limites (5.4) la fonction $G(x, \xi)$ construite pour tout point ξ, $a < \xi < b$, et jouissant les 4 propriétés suivantes :*

1. $G(x,\xi)$ *est continue et possède des dérivées continues par rapport à* x *jusqu'à l'ordre* $(n-2)$ *inclus pour* $a \leq \xi \leq b$.
2. *Sa* $(n-1)$*-ième dérivée par rapport à* x *présente au point* $x = \xi$ *une discontinuité de première espèce, le saut ayant la valeur* $\frac{1}{p_0(\xi)}$*,i.e.*

$$\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}|_{x=\xi+0} - \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}. \tag{5.9}$$

3. *Dans chacun des intevalles* $[a,\xi)et(\xi,b]$*, la fonction* $G(x,\xi)$ *considérée comme une fonction de* x *est solution de la 1 er équation de problème de Cauchy :*

$$L[G] = 0.$$

4. $G(x,\xi)$ *vérifie les conditions aux limites de problème de Cauchy :*

$$V_k(G) = 0, (k = 1, 2, ..., n)$$

Exemple 5.2.1. *Ramenant le problème aux limites*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = x, \\ y(0) + y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

à une équation intégrale. Cherchons d'abord la fonction de Green $G(x,\xi)$ *du problème homogène correspondant(pour plus d'information Voir [5] page 92).*

$$\begin{cases} y''(x) = 0, \\ y(0) = y(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

Puisque les solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) = 0$ *vérifiant les conditions* $y(0) = 0$ *et* $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ *sont respectivement les fonctions* $y_1(x) = x$ *et* $y_2(x) = x - \frac{\pi}{2}$*, cherchons la fonction de Green sous la forme*

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)y_2(\xi)}{W(\xi)}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \dfrac{y_1(\xi)y_2(x)}{W(\xi)}, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

avec

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & \xi - \frac{\pi}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$G(x,\xi) = \begin{cases} (\frac{2}{\pi}\xi - 1)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ (\frac{2}{\pi}x - 1)\xi, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{5.11}$$

Premant comme noyau, nous obtenons pour $y(x)$ *l'équation intégrale*

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)y(\xi)d\xi,$$

où

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)y(\xi)d\xi, \\ &= \int_0^x (\frac{2}{\pi}x-1)\xi^2 d\xi + \int_x^{\frac{2}{\pi}} (\frac{2}{\pi}\xi-1)x\xi. \\ &= \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{24}x. \end{aligned}$$

Ainsi, le problème aux limites (5.10) s'est réduit à l'équation intégrale

$$y(x) + \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x,\xi)y(\xi)d\xi = \frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi^2}{24}x.$$

5.3 Résolution analytique et numérique des équations intégrales

Pour plus de compréhension, dans cet partie on donne des exemples sur tous qui est précédent , on commence par

5.3.1 Equation intégrale de Volterra

Transformation des équations différentielles aux équations intégrale de second espèce

Example 5.3.1. *formant l'équation intégrale de l'équations différentielles*

$$y^{''} + xy^{'} + y = 0$$

et aux conditions initiales

$$y(0) = 1, \;\; y^{'}(0) = 1.$$

posons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x). \tag{5.12}$$

Alors

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + y^{'}(0) = \int_0^x \varphi(t)dt, \;\; y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1. \tag{5.13}$$

Portant (5.12) et (5.13) dans l'équation différentielle donnée, il vient

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0.$$

où

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t)dt + 1.$$

Résolution de l'équations intégrale de Volterra à l'aide de la résolvante

Example 5.3.2. *Trouvons la résolvante de l'équation intégrale de Volterra à noyau $K(x,t) = 1$: On a $K_1(x,t) = K(x,t) = 1$. Conformément au formule (3.25),*

$$\begin{aligned}
K_2(x,y) &= \int_y^x K(x,z)K(z,y)dz = \int_y^x = x-y \\
&= K_3(x,y) = \int_y^x 1.(z-y)dz = \frac{(x-y)^2}{2!} \\
&= K_4(x,y) = \int_y^x 1.\frac{(x-y)^2}{2!}dz = \frac{(x-y)^3}{3!} \\
&\vdots \\
&= K_n(x,y) = \int_y^x 1.K_{n-1}(z,y)dz = \int_y^x 1.\frac{(x-y)^{n-2}}{(n-2)!}dz = \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

Ainsi par définition

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,t) = \sum \frac{\lambda^n (x-y)^n}{n!} = e^{\lambda(x-t)}.$$

Example 5.3.3. *Trouvons la résolvante de l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x (x-y)\varphi(y)dy. \tag{5.14}$$

Dans ce cas $K(x,y) = x-y, \lambda = 1$; par conséquent, selon (3.28) , $a_1(x) = 1$, les $a_k(x)$ restants étant nuls.
L'équation (3.29) est alors de la forme

$$\frac{d^2g(x,y;\lambda)}{dx^2} - g(x,y;1) = 0,$$

d'où

$$g(x,y;1) = g(x,t) = C_1(y)\exp(x) + C_2(y)\exp(-x).$$

Les conditions (3.30) et (3.31) donnent

$$\begin{cases} C_1(y)\exp(x) + C_2(y)\exp(-x) = 0, \\ C_1(y)\exp(x) + C_2(y)\exp(-x) = 1. \end{cases} \tag{5.15}$$

En résolvant le système (5.15) nous obtenons

$$C_1(y) = \frac{1}{2}\exp(-y), \;\; C_2(y) = \frac{1}{2}\exp(y),$$

et donc

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{(x-y)} - e^{-(x-y)}\right) = sh(x-y).$$

Conféremement à (3.32)

$$R(x,y;1) = [sh(x-y)]''_x = sh(x-y).$$

Example 5.3.4. *Trouvons à l'aide de la résolvante la solution de l'équation intégrale de Volterra*

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-y^2}\varphi(y)dy$$

Pour $\lambda = 1$, *la résolvante relative au noyau* $K(x,y) = e^{x^2-y^2}$ *est* $R(x,y;1) = e^{x-y}e^{x^2-y^2}$. *D'après la formule* (3.27), *l'équation intégrale donnée a pour solution la fonction*

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-y^2}e^{x-y}e^{t^2}dy = e^{x^2+x}.$$

La méthode des approximations successives et le La méthode de la transformation de Laplace

Example 5.3.5. *Résoudrons l'équation intégrale de Volterra de second espèce par les deux méthodes (approximations successives et transformation de Laplace)*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x e^{x-y}\varphi(y)dy. \tag{5.16}$$

1. ***La méthode de la transformation de Laplace***
   Utilisant la transformation de Laplace de l'équation (5.16), *on obtient*

$$L\{\varphi(x)\} = L\{f(x)\} + \lambda L\{e^{x-y}\}L\{\varphi(x)\}, \tag{5.17}$$

par simplification on obtient

$$L\{\varphi(x)\} = \left(1 + \frac{\lambda}{s-1-\lambda}\right)L\{f(x)\} \tag{5.18}$$

utilisant maintenat la transformation inverse de Laplace, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \int_0^x \{\delta(x-y) + \lambda e^{(1-\lambda)(x-y)}\}f(y)dy \\ &= f(x) + \lambda\int_0^x e^{(1-\lambda)(x-y)}f(y)dy.\end{aligned} \tag{5.19}$$

où δ *c'est la fonction delta de Dirac.*

2. ***La méthode des approximations successives*** *Soit l'approximation zéro*

$$\varphi_0(x) = 0, \tag{5.20}$$

et la première approximation donnée par

$$\varphi_1(x) = f(x), \tag{5.21}$$

Substituant cette relations pour obtension de la seconde approximation

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda\int_0^x e^{x-y}f(y)dy, \tag{5.22}$$

En procédant de cette manière, la troisième approximation peut être obtenue comme suit :

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y}\varphi_2(y)dy \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y}\{f(y) + \lambda \int_0^y e^{y-t} f(t)dt\}dy \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y} f(y)dy + \lambda^2 \int_0^x \int_0^y e^{y-t} f(t)dtdy \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y} f(y)dy + \lambda^2 \int_0^x (x-y)e^{x-y} f(y)dy.
\end{aligned}$$

De la même manière, la quatrième approximation $\varphi_4(x)$ peut être écrite en une fois :

$$\varphi_4(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y} f(y)dy + \lambda^2 \int_0^x (x-y)e^{x-y} f(y)dy + \lambda^3 \int_0^x \frac{(x-y)^2}{2!} e^{x-y} f(y)dy.$$

Ainsi, en continuant, on obtient pour $n \longrightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \varphi_n(x) \\
&= f(x) + \lambda \left\{ \int_0^x e^{x-y} \left(1 + \lambda(x-y) + \frac{1}{2!}\lambda^2(x-y)^2 + ...\right) f(y)dy \right\} \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y} e^{\lambda(x-y)} f(y)dy \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{(1+\lambda)(x-y)} f(y)dy.
\end{aligned}$$

qui est identique à l'équation (5.19). Ici, le noyau qui résout est $H(x, y; \lambda) = e^{(1+\lambda)(x-y)}$.

5.3.2 Equation intégrales de Fredholm

La méthode des substitutions successives

Example 5.3.6. *Utilisant la méthode des substitutions successives pour résoudre l'équation intégrale suivante*

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \varphi(y)dy.$$

On remarque que, $\lambda = \frac{1}{2}$, $f(x) = \cos x$ et $K(x, y) = \sin x$, et en substituant ces valeurs dans l'équation (4.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \cos x + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos y dy \\
&+ \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \cos y_1 dy_1 dy \\
&+ \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y_1 \cos y_2 dy_2 dy_1 dy + ... \\
&= \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{4} \sin x + \frac{1}{8} \sin x + ... \\
&= \cos x + \sin x.
\end{aligned}$$

La méthode de la décomposition Adomian

Example 5.3.7. *Résolution l'équation intégrale de Fredholm suivante*

$$\varphi(x) = e^x - 1 + \int_0^1 y\varphi(y)dy$$

La méthode de décomposition Adomian nous donne :

$$\begin{aligned}
\varphi_0(x) &= e^x - 1, \\
\varphi_1(x) &= \int_0^1 y\varphi_0(y)dyy = \int_0^1 y(e^y - 1)dy = \frac{1}{2}, \\
\varphi_2(x) &= \int_0^1 y\varphi_1(y)dy = \int_0^1 \frac{y}{2}dy = \frac{1}{4}, \\
\varphi_3(x) &= \int_0^1 y\varphi_2(y)dy = \int_0^1 \frac{y}{4}dy = \frac{1}{8}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

etc. Par conséquent, la solution peut être écrite à la fois

$$\varphi(x) = e^x - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = e^x.$$

5.4 Exemple numérique(La méthode des approximations successsives)

On considr̀e l'équation

$$\varphi(x) = e^x + e^{-x} - \int_0^1 e^{-x-t}\varphi(t)dt,\ 0 \leq x \leq 1.$$

La solution exacte est $\varphi(x) = e^x$. Les résultats numériques sont donnés dans le tableau suivant :

x	solution exacte	solution approchée	erreur absolue
0	1.0000	1.7938	0.7938
0.25	1.2840	1.8501	0.5661
0.50	1.6487	2.0227	0.3740
0.75	2.1170	2.3224	0.2054
1	2.7183	2.7680	0.0497

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Jerri ,Introduction to Integral Equations with Applications ,Wiley ,New York , 1999.

[2] F. Ronga. Analyse réelle post-élémentaire.

[3] G.Emmanuele, Anexistence theorem for Hammerstein integral equations, Portu-galiae Mathematica,Vol. 51 Fasc. 4, 1994.

[4] Jean-Etienne ROMBALDI. Suites de fonctions.

[5] M. Rahman. Integral Equations and their Applications. Dalhousie University, Canada, 2007.

[6] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko, les équations intégrales, Edition Mir, Moscou 1976.

[7] N, Ambraseys. On the shear response of two-dimensional truncated wedge subjected to an arbitrary disturbance Bulletin of the Seismological Society of America, 50(1), pp. 45–56, 1960a.

[8] N, Ambraseys. The seismic stability of earth dams, 2nd WCEE, Tokyo, pp.1345–1363, 1960b.

[9] Romain Giuge. Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.

Résumé

Les équations intégrales jouent un rôle trés important dans la résolution de nombreux problèmes physiques.
Le but de ce travail est de faire une étude large sur ce genre d'équations, en le présentant à travers ces classifications et des théorèmes d'existances et d'unicités de la solution, et aussi quelque méthodes de la résolution. Enfin, certaines applications.

Abstract

Integral equations play a very important role in solving many physical problems.
The purpose of this work is to make a broad study of this kind of equations, presenting it through these classifications and theorems of existances and uniqueness of the solution, and also some methods of the resolution. Finally some applications.

ملخص

تلعب المعادلات التكاملية دورا بارزا في حل كثير من المشاكل الفيزيائية.
الهدف من هذا العمل هو اجراء دراسة واسعة لهذا النوع من المعادلات نظرا لاهميته، وذلك عن طريق ذكر عدد من انواعها، وبعض طرق حلها ، ونظريات وجود الحل ووحدانيته.