

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ ABBES LAGHROUR KHENCHELA



FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT de MATHÉMATIQUES et INFORMATIQUE

N° de série :...

## MÉMOIRE

de Fin d'Études Pour l'Obtention du Diplôme de master (L.M.D)

Spécialité : Mathématiques  
Option : Mathématiques appliqué

### TITRE

Lanalyse de la dualité des équations différentielles  
partielles stochastiques

**Préparé Par :**

ABDELLAOUI OUSSAMA

ATALLAH MOHAMED ANOIR

Sous la direction de : Mme. HAMDI NOUDJOUR

**Membres de jury :**

S.SANDEL

A.GUEMMAZ

Année Universitaire 2020-2021

# Remerciements

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mme \* HAMDI NOUDJOUUD \*, en la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent également à tous nos enseignants de département mathématiques et tous les enseignants de l'université "ABBES LAGHROUR" aussi à tous nos amis sans exception, et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicace

Je loue Dieu tout puissant qui m'a donné la force et le courage pour achever ce travail.

Je dédie ce modeste travail à :

Ceux qui m'ont donné la main d'aide dans mon chemin pour mon éducation et mon bien être : mes très chers parents sans oublier mes frères Mohamed et Brahim Bayoud et ma surmasouada et tout ma famille ABDELLAOUI .

A tous les enseignants de l'université ABBES LAGHROUR aussi à tous mes amis.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

# Dédicace

Je loue Dieu tout puissant qui m'a donné la force et le courage pour achever ce travail.

Je dédie ce modeste travail à :

MA MÈRE.

A tous les enseignants de l'université ABBES LAGHROUR aussi à tous mes amis.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

## Abstact

In this work we have studied the existence and uniqueness of the solution of the dual equation of the stochastic partial differential equation in Sobolev spaces, as well as the analytical and qualitative properties of this solution.

**Key words :** Stochastic partial differential equation, adjoint equation.

## Résumé

Dans ce travail on a étudié l'existence et l'unicité de la solution de l'équation duale de l'équation différentielle partielle stochastique dans les espaces de Sobolev, ainsi que les propriétés analytiques et qualitatives de cette solution.

**Mots clés :**

Equation différentielle partielle stochastique, équation adjointe.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappels et notions de bases</b>	<b>2</b>
1.1 La Tribu . . . . .	2
1.2 Variable aléatoire . . . . .	2
1.3 Espérance mathématique . . . . .	3
1.4 Filtration . . . . .	3
1.5 Les Processus . . . . .	4
1.5.1 Processus aléatoire . . . . .	4
1.5.2 Processus de Itô . . . . .	4
1.5.3 Un processus de weiner . . . . .	5
1.6 Le mouvement brownien . . . . .	5
1.7 L'intégrale stochastique . . . . .	6
1.7.1 Construction de l'intégrale stochastique . . . . .	6
1.8 Formule d'Itô . . . . .	7
1.9 Formule de Gronwall . . . . .	8
<b>2 Lanalyse de la dualité des équations différentielles partielles stochastiques</b>	<b>10</b>
2.1 Preliminaire . . . . .	12
2.2 Equation duale : cas non dégénéré . . . . .	15
2.3 Equation duale : cas dégénérés . . . . .	24

# Introduction

L'analyse de la dualité s'est avérée efficace et puissante dans divers domaines des mathématiques, par exemple, dans le contrôle stochastique, et elle est applicable à certains problèmes financiers. Dans la théorie des équations différentielle, l'argument de la dualité est généralement appliquée par l'équation dite duale. Dans les problèmes stochastiques les équations duales ne peuvent pas être obtenues en inversant simplement le temps mais on doit être prudent avec l'adaptabilité. Bismut [2, 3] a d'abord résolu le problème, pour les équations différentielle stochastique (EDS), en introduisant une équation duale avec un terme martingale supplémentaire. Dans ce mémoire, nous étudierons la dualité des équations différentielle partielles stochastiques (EDPS) de la forme

$$(1.1) \quad \begin{cases} dq(t) = [A(t)q(t) + f(t)]dt + \sum_{K=1}^{d'} [M^K(t)q(t) + g^K(t)]dW_k(t), \\ q(0) = q_0, \end{cases}$$

Ce mémoire est organisé de la manière suivante : Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur les processus aléatoire, l'intégral stochastique .

Dans la première partie du deuxième chapitre, nous rappelons l'essentiel des notions de l'analyse de la dualité et la théorie des équations différentielle. Dans la deuxième partie de ce chapitre nous abordons le problème qui nous intéresse, l'étude de l'équation duale dans les deux cas dégénéré et non dégénéré en utilisant la formule de Gronwall et de Itô.

# Rappels et notions de bases

## 1.1 La Tribu

**Définition 1.** Soit  $\Omega$  un ensemble quelconque de  $\mathbb{R}$ ,  $P(\Omega)$  l'ensemble de toutes les parties de  $\Omega$ , et soit  $\mathcal{F} \subset P(\Omega); \mathcal{F} \neq \emptyset$

on dit que  $\mathcal{F} \subset \Omega$  est une  $\sigma$ -algèbre ssi

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$ .
2.  $\forall A \in \mathcal{F}, \bar{A} \in \mathcal{F}$ .
3.  $\forall A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  une suite infinie d'éléments de  $\mathcal{F}$  alors :  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

## 1.2 Variable aléatoire

**Définition 2.** Soit l'espace  $\Omega$  qui est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience aléatoire,  $\mathcal{F}$  est une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$ ,  $P$  est une probabilité d'un évènement par rapport à l'ensemble des cas possibles. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité, on appelle variable aléatoire sur cet espace, toute application  $X$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  telle que :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \rightarrow X(\omega)$$

## 1.3 Espérance mathématique

### Le cas d'une variable aléatoire discrète

Si  $X$  est une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , on appelle espérance de  $X$ , le réel définie par

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\omega)$$

### Le cas d'une variable aléatoire continue

Si  $X$  est une variable aléatoire absolument continue de densité  $f$  on appelle espérance de  $X$ , le réel définie par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

#### Propriété de l'espérance

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur un même espace  $\Omega$  admettant une espérance, alors

1.  $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$  ;
2.  $E(aX) = aE(X), \forall a \in \mathbb{R}$  ;
3. Si  $X \geq 0$  alors  $E(X) \geq 0$  ;
4. Si  $X$  est un caractère constant tel que :  $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) = k$  alors  $E(X) = k$ .

## 1.4 Filtration

**Définition 3.** La suite  $(\mathcal{F}_n)_n$  est une filtration de l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si pour tout  $n \in \mathbb{N}, \mathcal{F}_n$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}$  et si  $\mathcal{F}_n$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}_{n+1}$ .

On introduit la tribu  $\mathcal{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$ .

La tribu finale  $\mathcal{F}_\infty$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}$ .

On dit que  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est un espace filtré.

**Remarque 4.** On dit que  $\mathcal{F}_s$  est une sous-tribu de  $\mathcal{F}_t$  si

$$\forall t \geq 0, \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, s \leq t.$$

## 1.5 Les Processus

### 1.5.1 Processus aléatoire

#### Définition Générale

Un processus aléatoire est un ensemble de variable aléatoire, toutes définies sur le même espace de probabilité, et indexées par un paramètre réel  $t$ .

On note tel processus  $\{X(t) : t \in C\}$ ,

- $t$  est le paramètre du processus.
- $C$  est l'ensemble des paramètre. Si  $C$  est fini ou infini dénombrable  $C$  est discret (par exemple  $C = \{0, 1, 2, \dots\}$ ), sinon  $C$  est continue (par exemple  $C = [0, +\infty[$ ). Quand  $C$  est un ensemble d'entier, on note les variable aléatoire par  $X_n$ .

Soit  $S$  l'espace des états (i.e : des valeurs possibles) des  $X(t)$ . Si  $S$  est fini ou infinie dénombrable,  $X(t)$  est discret, sinon  $X(t)$  est continue.

**Remarque 5.**  $t$  peut être interprété comme le temps et  $C$  comme les instants à considérer,  $X(t)$  est alors la valeur du processus à l'instant  $t$ .

### 1.5.2 Processus de Itô

**Définition 6.** Un processus de Itô est un processus stochastique de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s.$$

avec

1.  $u, v$  sont deux fonctions aléatoires.
2.  $X_0$   $\mathcal{F}_0$ -mesurable.
3.  $\int_0^t v(s, \omega) dB_s < +\infty$  presque sûrement.
4.  $\int_0^t |u(s, \omega)| ds < +\infty$  presque sûrement.
5.  $u(t)$  et  $v(t)$  sont  $\mathcal{F}_0$ -adaptés.

**Remarque 7.** Un processus est dit adapté à la filtration  $\{\mathcal{F}_t, 0 \leq t < +\infty\}$  si pour tout  $t$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

**Théorème 8.** Soit  $X_t$  un processus d'Itô définie par

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s.$$

Soient  $g \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  et  $Y_t = g(t, X_t)$ , Alors  $Y_t$  est également un processus d'Itô si

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial g}{\partial X}(t, X_t) dX_t + \frac{\partial^2 g}{\partial X^2}(t, X_t) (dX_t)^2$$

$(dX_t)^2$  est calculé avec les règles suivantes

$$dt dt = dt dB_t = dB_t dt = 0 \text{ et } dB_t dB_t = dt.$$

**Corollaire 9.** Soient  $X_t$  et  $Y_t$  deux processus d'Itô

$$- X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s.$$

$$- Y_t = Y_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dB_s.$$

$$\text{Alors } X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \int_0^t H_s H'_s ds.$$

$K_s, H_s$  sont des fonctions aléatoires.

### 1.5.3 Un processus de weiner

Un processus stochastique  $\{X(t), t > 0\}$  est un processus de weiner si :

1.  $X(0) = 0$ ;
2.  $\{X(t), t \leq 0\}$  à des événements stationnaires et indépendants;
3. pour tout  $t > 0$ ,  $X(t)$  est normalements distribué avec moyenne  $\mu t$  et variance  $\sigma^2 t$ .

## 1.6 Le mouvement brownien

Le processus  $\{B_t, t > 0\}$  est un mouvement brownien si

1.  $P(B_0 = 0) = 1$ .
2.  $\forall t \leq s, B_t - B_s$  est une variable réelle de loi gaussienne centrée, de variance  $(t-s)$ .
3.  $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_n$  les variables  $(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_0})$  sont indépendantes.
4. pour tout  $(t, s)$  la variable  $B_{t+s} - B_t$  est indépendante de la tribu du passé avant  $t$ .

## 1.7 L'intégrale stochastique

### 1.7.1 Construction de l'intégrale stochastique

On cherche à résoudre des équations de la forme

$$\frac{\partial X}{\partial t} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \text{ "bruit"}$$

**Exemple 10.** modélisation d'un marché financier.

- placement sans risque  $\frac{\partial X_0}{\partial t} = \rho X_0$ .
- placement risqué  $\frac{\partial X_1}{\partial t} = (\mu + \sigma \text{ "bruit"}) X_1$

Pour donner un sens à ce modèle, on suppose que  $0 < \rho < \mu$  et  $\sigma > 0$ .

On note  $\frac{dB}{dt}$  le bruit.

Hypothèse classique

1.  $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \frac{dB}{dt_1}$  et  $\frac{dB}{dt_2}$  sont indépendants.
2.  $\frac{dB}{dt}$  est stationnaire.
3.  $E\left(\frac{dB}{dt}\right) = 0$ .

Problème : il n'existe pas de processus raisonnable ayant ces propriétés. On va donc essayer de remplacer  $\frac{dB}{dt}$  par un processus avec de meilleures propriétés.

**Proposition 11.** Soit  $f$  et  $g \in \nu(0, T)$  alors

1.  $\int_s^t f dB_t = \int_s^u f dB_t + \int_u^t f dB_t, s \leq u \leq t$  pour presque tout  $\Omega$ .
2.  $\int_s^t (cf + g) dB_t = c \int_s^t f dB_t + \int_s^t g dB_t$  pour presque tout  $\Omega$ .
3.  $E\left(\int_s^t f dB_t\right) = 0$ .
4.  $\int_s^t f dB_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

avec  $\nu$  la classe de processus.

**Définition 12.** Un processus  $(M_t)_{t \geq 0}$  est dit une martingale si

1.  $\forall t, M_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -intégrable.
2.  $\forall t, M_t$  est intégrable.
3.  $\forall s < t, E(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s$ .

**Théorème 13.** Soit  $f \in \nu(0, T)$  pour tout  $T > 0$  alors

$$M_t(\omega) = \int_0^t f(s, \omega) dB_s.$$

est une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  et c'est un processus continu.

**Théorème 14.** Soit  $M_t$  une martingale de carré intégrable par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}_t)$ , il existe un processus  $f$  et  $M_0 \in \nu(0, T)$  pour toute  $T > 0$  tel que

$$M_t(\omega) = M_0 + \int_0^t f(s, \omega) dB_s.$$

## 1.8 Formule d'Itô

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t), P)$  un espace de probabilité filtré, et soit  $B = (B_t, t \geq 0)$  un  $(F_t)$ -mouvement brownien standard.

**Définition 15.** On appelle processus d'Itô tout processus  $(X_t, t \geq 0)$  tel que

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds, \quad t \geq 0,$$

où  $X_0$  est  $F_0$ -mesurable,  $H$  un processus adapté tel que  $\forall t, \int_0^t H_s^2 ds < \infty$  p.s., et  $V$  un processus adapté tel que  $\forall t, \int_0^t |V_s| ds < \infty$  p.s.

Étant donné un processus d'Itô  $X$ , on peut définir un processus continu adapté croissant

$$\langle X \rangle := \int_0^t H_s^2 ds, \quad t \geq 0.$$

On peut montrer que si  $\int_0^t H_s dB_s = \int_0^t V_s ds$ , pour un processus  $H$  adapté tel que pour tout  $t > 0, \int_0^t H_s^2 ds < \infty$  p.s., et pour un processus adapté  $V$  tel que  $\forall t, \int_0^t |V_s| ds < \infty$  p.s., alors  $H = V = 0$ . Donc l'écriture  $X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds$  pour un processus d'Itô est unique, que l'on appelle décomposition canonique.

**Remarque 16.** Un processus d'Itô  $X$  est continu adapté. En particulier, si  $H$  est adapté tel que  $\forall t, \int_0^t H_s^2 ds < \infty$  p.s., alors  $\int_0^t X_s H_s dB_s$  est bien défini.

**Théorème 17.** Soit  $X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds$  un processus d'Itô, et soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Alors

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle,$$

$$\int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) H_s dB_s + \int_0^t f'(X_s) V_s ds.$$

Plus généralement, si  $F : (t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow F(t, x) \in \mathbb{R}$  est de classe  $C^{1,2}$  (continument différentiable en  $t$  et deux fois continument différentiable en  $x$ ), alors

$$F(t, X_t) = F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle$$

On présente maintenant la version multidimensionnelle de la formule d'Itô. Un processus  $B = (B_t, t \geq 0)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  (avec  $d \geq 1$ ) est un  $(F_t)$ -mouvement brownien  $d$ -dimensionnel si ses composantes sont des  $(F_t)$ -mouvements browniens indépendants (donc, on particulier,  $B$  est adapté). Un processus réel  $X = (X_t, t \geq 0)$  est un processus d'Itô si

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s^{(k)} dB_s^{(k)} + \int_0^t V_s ds$$

où  $d \geq 1$ ,  $B = (B(1), \dots, B(d))$  est un  $(F_t)$ -mouvement brownien  $d$ -dimensionnel,  $H(k)$  adapté tel que  $\forall t, \int_0^t (H(k)_s)^2 ds < \infty$  p.s., et  $V$  un processus adapté tel que  $\forall t, \int_0^t |V_s| ds < \infty$  p.s.

pour un couple quelconque de processus d'Itô  $X_t = X_0 + \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s(k) dB_s(k) + \int_0^t V_s ds$  et  $Y_t = Y_0 + \sum_{k=1}^d \int_0^t K_s(k) dB_s(k) + \int_0^t W_s ds$ , on définit

$$|X, Y|_t := \sum_{k=1}^d \int_0^t H_s(k) K_s(k) ds, \quad t \geq 0.$$

## 1.9 Formule de Gronwall

### 1. La formule intégrale

Si  $\psi \geq 0$  et  $\phi$  des fonctions continues qui vérifient :

$$\forall t \geq t_0, \quad \phi(t) \leq K + \int_{t_0}^t \phi(s)\psi(s)ds,$$

où  $K$  est une constante alors

$$\forall t \geq t_0 \quad \phi(t) \leq K \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right).$$

En particulier, si  $K = 0$  et  $\phi \geq 0$ , alors  $\phi = 0$ .

## 2. La formule différentielle

Si l'équation différentielle suivante est vérifiée

$$\frac{d\phi}{dt}(t) \leq \psi(t)\phi(t),$$

alors on a l'inégalité

$$\phi(t) \leq \phi(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(s)ds\right),$$

pour  $t \geq t_0$ .

En particulier, si  $\phi(t_0) = 0$ , alors  $\forall t \geq t_0, \quad \phi(t) \leq 0$ .

Il est important de noter que la forme différentielle du lemme de Gronwall reste vraie sans l'hypothèse de positivité sur la fonction  $\psi$ .

# L'analyse de la dualité des équations différentielles partielles stochastiques

Etant donné  $A \in \mathbb{L}^\infty(0, 1; \mathbb{R}^{d \times d})$ ,  $f, F \in \mathbb{L}^2(0, 1; \mathbb{R}^d)$  et  $x_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}^d$ . Considérons les deux équations différentielle ordinaires suivantes (EDO)

$$(1.1) \quad \begin{cases} dx(t)/dt = A(t)x(t) + f(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

$$(1.2) \quad \begin{cases} d\lambda(t)/dt = -A^T(t)\lambda(t) - F(t), \\ \lambda(1) = \lambda_1. \end{cases}$$

En utilisant l'intégration par parties, nous avons

$$(1.3) \quad \int_0^1 (x(t), F(t))dt + (x(1), \lambda_1) = \int_0^1 (\lambda(t), f(t))dt + (\lambda(0), x_0).$$

L'équation (1.2) est appelée équation duale (ou équation adjointe) de (1.1) et (1.3) appelée l'égalité duale (adjointe). En générale l'équation duale (backward equation) avec l'état finale donné. Dans l'état des EDO, (1.2) peut être obtenus de façon facile en inversant le temps. Dans ce chapitre, nous étudierons la dualité des équations différentielle partielles stochastiques suivantes (EDPS) :

$$(1.4) \quad \begin{cases} dq(t) = [A(t)q(t) + f(t)]dt + \sum_{K=1}^{d'} [M^K(t)q(t) + g^K(t)]dW_K(t), \\ q(0) = q_0, \end{cases}$$

où  $W := (W_1, W_2, \dots, W_{d'})$  est un mouvement Brownien de dimension  $d'$  avec  $W(0) = 0$ , et les opérateurs aléatoire  $A(t, \omega), M^K(t, \omega)$  sont donnés par

$$(1.5) \quad A(t, \omega)\phi(x) := \partial_i(a^{ij}(t, x, \omega)\partial_j\phi(x)) + b^i(t, x, \omega)\partial_i\phi(x) + c(x, t, \omega)\phi(x),$$

$$(1.6) \quad M^k(t, \omega)\phi(x) := \sigma^{ik}(t, x, \omega)\partial_i\phi(x) + h^k(t, x, \omega)\phi(x),$$

$$(t, x, \omega) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^d \times \Omega,$$

où  $a^{ij}$ ,  $b^i$ ,  $c$ ,  $\sigma^{ik}$ , et  $h^k$  sont des fonctions à valeurs réelles, pour  $i, j = 1, 2, \dots, d$ ;  $K = 1, 2, \dots, d'$ . Notons  $\partial_i = \partial/\partial x_i$ , et les indices répétés conventionnels pour la somme sont utilisés. Lorsque les opérateurs  $M^k$  sont d'ordre zéro (c-à-d  $\sigma^{ik} = 0$ ), Bensoussan [1] a dérivé l'équation duale de (1.4) par une méthode assez compliquée, et il semble que sa méthode ne fonctionne que si  $\sigma^{ik} \neq 0$  le cas qui est important en l'influence des  $(\sigma^{ik})$  sur le comportement de la solution de (1.4) aussi fort que celui des  $(a^{ij})$ . Utilisons une approche d'approximation en dimension finie l'équation duale de (1.4) pour le cas générale  $\sigma^{ik} \neq 0$  a été dérivé de Zhou [11] par

$$(1.7) \quad \begin{cases} d\lambda(t) = [A^*(t)\lambda(t) + \sum_{k=1}^{d'} M^{k*}(t)r^k(t) + F(t)]dt \\ + \sum_{k=1}^{d'} r^k(t)dr_k(t), \quad t \in [0, 1] \\ \lambda(1) = G, \end{cases}$$

où  $A^*$ ,  $M^{k*}(t)$  sont des adjoints de  $A(t)$ ,  $M^k(t)$ , respectivement étant donné par

$$(1.8) \quad A^*(t)\phi(x) := \partial_i(a^{ij}(t, x)\partial_j\phi(x)) - b^i(t, x)\partial_i\phi(x)$$

$$+[c(t, x) - \partial_i b^i(t, x)]\phi(x),$$

$$(1.9) \quad M^{k*}(t)\phi(x) := -\sigma^{ik}(t, x)\partial_i\phi(x) + [h^k(t, x) - \partial_i\sigma^{ik}(t, x)]\phi(x),$$

$$x \in \mathbb{R}^d.$$

En outre, l'existence et l'unicité de la solution  $(\lambda, r)$  de (1.7) adaptée au  $W(t)$  a été établie dans l'espace  $L^2([0, 1] \times \Omega; H^1) \times L^2([0, 1] \times \Omega; H^0)^{d'}$  [11], où  $H^m :=$  l'espace de Sobolev  $W_2^m(\mathbb{R}^d)$ .

Le but de ce chapitre est d'étudier les propriétés analytiques et qualitatives de la paire de solutions de l'équation duale (1.7); plus précisément, nous espérons résoudre (1.7) dans l'espace de type Sobolev  $L^2([0, 1] \times \Omega; H^{m+1}) \times L^2([0, 1] \times \Omega; H^m)^{d'}$  ( $m \geq 0$ ) et donner les estimations correspondantes des normes de Sobolev. Notre méthode repose en une grande partie sur les résultats délicats de Krylov et Rozoviskii [4-6] concernant la théorie des EDPS ainsi que quelques estimations antérieures des opérateurs différentiels.

## 2.1 Préliminaire

On note par  $H^m$  l'espace de Sobolev

$$H^m := \phi : D^\alpha \phi \in L^2(\mathbb{R}^d), \text{ pour tout } \alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$$

avec

$$|\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_d| \leq m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

avec la norme de Sobolev est

$$\|\phi\|_m := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} \{|D^\alpha \phi(x)|^2 dx\}^{1/2}, \quad \text{pour } \phi \in H^m.$$

Notons par  $H^{-m} := (H^m)^*$ , le dual de  $H^m$  pour  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $H^0$  est identifié avec son dual.

Notons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la dualité entre  $H^{m-1}$  et  $H^{m+1}$  avec  $(H^m)^* = H^m$  et par  $(\cdot, \cdot)_m$  le produit intérieure en  $H^m$ .

Pour tout opérateur différentiel  $L$  de deuxième ordre qui a la même forme que (1.5), lorsque nous écrivons  $\langle L\phi, \psi \rangle_m$  alors  $L$  est compris comme un opérateur de  $H^{m+1}$  vers  $H^{m-1}$  en utilisant formellement la formule de Green. Par exemple, pour l'opérateur  $A(t)$  définie comme dans (1.5), nous avons

$$(2.1) \quad \langle A(t)\phi, \psi \rangle_m := -(a^{ij}(t, \cdot) \partial_j \phi, \partial_i \psi)_m + (b^i(t, \cdot) \partial_i \phi, \psi)_m + (c(t, \cdot) \phi, \psi)_m$$

**Remarque 18.** soient  $A(t), M^k(t)$  donnés par (1.5), (1.6) et la formule de leurs adjoints  $A^*(t), M^{k*}(t)$  donnée par (1.8), (1.9). Nous avons évidemment  $\langle A(t)\phi, \psi \rangle_0 = \langle \phi, A^*(t)\psi \rangle_0$ ,

$(M^k(t)\phi, \psi)_0 = (\phi, M^{k*}(t)\psi)_0$  pour  $\phi, \psi \in H^1$ . Toutefois, ni  $\langle A(t)\phi, \psi \rangle_m = \langle \phi A^*(t), \psi \rangle_m$  ni  $(M^k(t)\phi, \psi)_m = (\phi, M^{k*}(t)\psi)_m$ , détient si  $m \geq 1$ .

Pour  $\alpha, \beta \in (-\infty, +\infty)$  avec  $\alpha \leq \beta$ , on a un espace de probabilité filtrée  $(\Omega, F, P, F_t : \alpha \leq t \leq \beta)$  et un espace de Hilbert  $X$ . Pour  $p \in [1, +\infty]$ , on définit

$L_F^p(\alpha, \beta, X) := \{\phi : \phi \text{ est un processus } F_t - \text{adapté de } [\alpha, \beta] \text{ dans } X, \text{ et } \phi \in L^p([\alpha, \beta] \times \Omega; X)\}$ .

On identifie  $\phi$  et  $\phi'$  dans  $L_F^p(\alpha, \beta, X)$  si  $E \int_\alpha^\beta \|\phi(t) - \phi'(t)\|^p dt = 0$ . En particulier,  $L_F^2(\alpha, \beta, X)$  est un espace de Hilbert comme sous-espace de l'espace de Hilbert  $L^2([\alpha, \beta] \times \Omega; X)$ . Dans ce qui suit, on fixe un espace de probabilité standard  $(\Omega, F, P)$  avec un mouvement Brownien de dimensions  $d'$   $\{W(t) : 0 \leq t \leq 1\}$  et la filtration  $F_t := \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\}$ . Fixons un entier  $m \geq 0$  et des constantes positives  $K, \delta$ . On introduit les conditions suivantes sur les coefficients de  $A(t), M^k(t)$

(A1) $_m$   $a^{ij}, b^i, c, \sigma^{ik}$ , et  $h^k$  sont mesurable en  $(t, \omega)$  pour chaque  $x$  et ils sont adaptés à  $(F_t)$ ; les fonctions  $a^{ij}, b^i, c, \sigma^{ik}, h^k, \partial_j b^i, \partial_j \sigma^{ik}$ , et  $\partial_j h^k$  et leurs dérivés en  $x$  jusqu'à l'ordre  $m$  ne dépassent pas  $K$  en valeur absolue.

(A2)  $a^{ij} = a^{ji}, i, j = 1, 2, \dots, d$ ; la matrice  $(A^{ij}) := (a^{ij} - 1/2 \sum_{k=1}^d \sigma^{ik} \sigma^{jk}) \geq 0$  pour tout  $(t, x, \omega)$ .

(A2)'  $a^{ij} = a^{ji}, i, j = 1, 2, \dots, d$ ; la matrice  $(A^{ij})$  est défini positive uniformément  $A^{ij} \xi_i \xi_j \geq \sigma |\xi|^2$ , pour tout  $(t, x, \omega)$  et tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

La théorie des EDPS a été étudiée en profondeur par Krylov et Rozovskii [4-6], avec les estimations de la norme de  $H^m$  des solution des EDPS pour  $m$  non négative. Premièrement, on a les estimation suivantes.

**Lemme 19.** (a) *On suppose (A1) $_m$ , (A2)' pour certains  $m \geq 0$ . Alors il existe une constante  $N_1$  dépendant seulement de  $K, m, \delta$  de telle sorte que :*

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & 2[\langle A(t)\phi, \phi \rangle_{\tilde{m}} + \langle f, \phi \rangle_{\tilde{m}}] + \sum_{k=1}^{d'} \|M^k(t)\phi + g^k\|_{\tilde{m}}^2 \\ & \leq -\delta \|\phi\|_{\tilde{m}}^2 + N_1 (\|\phi\|_{\tilde{m}}^2 + \|f\|_{\tilde{m}-1}^2 + \sum_{k=1}^{d'} \|g^k\|_{\tilde{m}}^2) \end{aligned}$$

pour tout  $\phi \in H^{\tilde{m}+1}, f \in H^{\tilde{m}-1}, g \in H^{\tilde{m}}; \tilde{m} = 0, 1, \dots, m$ .

(b) *On suppose (A1) $_m$ , (A2) avec  $\sigma^{ik} = 0$  pour certain  $m \geq 0$ . Puis il existe une constante  $N_2$ , dépend seulement de  $K, m$  de telle sorte que*

$$(2.3) \quad 2[\langle A(t)\phi, \phi \rangle_{\tilde{m}} + \langle f, \phi \rangle_{\tilde{m}}] + \sum_{k=1}^{d'} \|M^k(t)\phi + g^k\|_{\tilde{m}}^2$$

$$\leq N_1(\|\phi\|_{\tilde{m}}^2 + \|f\|_{\tilde{m}-1}^2 + \sum_{k=1}^{d'} \|g^k\|_{\tilde{m}}^2)$$

pour tout  $\phi \in H^{\tilde{m}+1}$ ,  $f, g \in H^{\tilde{m}}$ ;  $\tilde{m} = 0, 1, \dots, m$ .

**Remarque 20.** L'estimation (2.2) (resp. (2.3)) est vérifiée pour tout opérateurs différentielles du premier et deuxième ordre qui ont les formes (1.5) et (1.6) dont les coefficients satisfont  $(A1)_m$  et  $(A2)'$  (resp.  $(A2)$ ).

**Proposition 21.** (Kyrlov et Rozviskii [4-6]) (a) On suppose  $(A1)_m, (A2)'$  pour certain  $m \geq 0$ , et on suppose que  $f \in L_F^2(0, 1; H^{m+1})$ ,  $g^k \in L_F^2(0, 1; H^m)$ ,  $q_0 \in L^2(\Omega, F_0; H^m)$ . Puis (1.4) a une solution unique  $q \in L_F^2(0, 1; H^{m+1}) \cap L^2(\Omega; C(0, 1, H^m))$  et il existe  $N_3$ , dépendant uniquement de  $K, m, \delta$  de telle sorte que

$$(2.4) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} E\|q(t)\|_{\tilde{m}}^2 + E \int_0^1 |q(t)|_{\tilde{m}+1}^2 dt$$

$$\leq N_3 E\{\|q_0\|_{\tilde{m}}^2 + \int_0^1 [\|f(t)\|_{\tilde{m}-1}^2 + \sum_{k=1}^{d'} \|g^k(t)\|_{\tilde{m}}^2] dt\},$$

$\tilde{m} = 0, 1, \dots, m$ .

(b) On suppose  $(A1)_m, (A2)$  avec  $\sigma^{ik} = 0$  pour quelque  $m \geq 1$ , et on suppose que  $f, g^k, \in L_F^2(0, 1; H^m)$ ,  $q_0 \in L^2(\Omega, F_0; H^m)$ . Puis (1.4) a une solution unique  $q \in L_F^2(0, 1; H^m) \cap L^2(\Omega; C(0, 1, H^{m-1}))$  et il existe une constante  $N_4$ , qui dépend seulement de  $K, m$  de telle sorte que

$$(2.5) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} E\|q(t)\|_{\tilde{m}}^2 \leq N_4 E\{\|q_0\|_{\tilde{m}}^2 + \int_0^1 [\|f(t)\|_{\tilde{m}}^2 + \sum_{k=1}^{d'} \|g^k(t)\|_{\tilde{m}}^2] dt\},$$

$\tilde{m} = 0, 1, \dots, m$ .

On conclut cette section par la remarque utile suivante .

**Remarque 22.** On définit  $A = 1 - \Delta$  où  $\Delta$  est le Laplacien sur  $\mathbb{R}$ . L'opérateur  $A$  relie  $H^1$  avec  $H^{-1}$  et admet un inverse  $A^{-1}$ . Il est facile de vérifier que  $A^{-1}H^m = H^{m+2}$ . En outre, si  $m$  est un entier non négative, alors

$$(2.6) \quad (\phi, A^{-m}\psi)_m = (\phi, \psi)_0,$$

pour tout  $\phi \in H^m, \psi \in H^0$ . (voir, par exemple [4]).

## 2.2 Équation duale : cas non dégénéré

Tout au long de cette section, nous supposons  $(A1)_m$  et  $(A2)'$  pour certain  $m \geq 0$ .

**Lemme 23.** *Soient  $M^k(t)$ ,  $M^{k*}(t)$  les opérateurs définies par (1.6), (1.9), respectivement. Alors, il existe une constante  $N_5$ , qui ne dépend que de  $k$  et  $m$ , telle que*

$$(3.1) \quad |(M^k(t)\phi, \psi)_{\tilde{m}} - (\phi, M^{k*}(t)\psi)_{\tilde{m}}| \leq N_5 \|\phi\|_{\tilde{m}} \|\psi\|_{\tilde{m}},$$

Pour tout  $\phi, \psi \in H^{m+1}$ ;  $\tilde{m} = 1, 2, \dots, m$ ,  $k = 1, 2, \dots, d'$ .

Preuve

Fixons  $\tilde{m}$ , on note par  $I_i(\phi, \psi)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) quelques sommes finies dont les termes sont de la forme  $\sum_{|\beta| \leq \tilde{m}, |\gamma| \leq \tilde{m}} (f^\beta D^\beta, g^\gamma D^\gamma \psi)_0$ , où  $f^\beta, g^\gamma$  sont des fonctions mesurables bornées.

Ensuite, il est facile de calculer que

$$\begin{aligned} & (M^k(t)\phi, \psi)_{\tilde{m}} - (\phi, M^{k*}(t)\psi)_{\tilde{m}} \\ &= \sum_{|\alpha|=\tilde{m}} \{(D^\alpha(\sigma^{ik}\partial_i\phi), D^\alpha\psi)_0 + (D^\alpha\phi, D^\alpha(-\sigma^{ik}\partial_i\psi))_0\} + I_1(\phi, \psi) \\ &= \sum_{|\alpha|=\tilde{m}} \{(\sigma^{ik}D^\alpha(\partial_i\phi), D^\alpha\psi)_0 + (D^\alpha\phi, \sigma^{ik}D^\alpha(\partial_i\psi))_0\} + I_2(\phi, \psi) \\ &= \sum_{|\alpha|=\tilde{m}} \{-(D^\alpha\phi, \partial_i(\sigma^{ik}D^\alpha\psi))_0 + (D^\alpha\phi, \sigma^{ik}D^\alpha(\partial_i\phi))_0\} + I_1(\phi, \psi) \\ &= - \sum_{|\alpha|=\tilde{m}} (D^\alpha\phi, (\partial_i\sigma^{ik}) \cdot D^\alpha\psi)_0 + I_2(\phi, \psi) = I_3(\phi, \psi) \end{aligned}$$

Cela donne le résultat souhaité .

On définit l'opérateur linéaire  $M^{k\delta}(t)$  de  $H^{m+1}$  vers  $H^m$ , par la méthode suivante. Pour  $\phi \in H^{m+1}$ .

$$(3.2) \quad (M^{k\delta}(t)\phi, \psi)_m := \lim_{\substack{\psi_n \in H^{m+1} \\ \psi_n \rightarrow \psi \text{ dans } H^m}} H(\phi, M^{k*}(t)\psi)_n, \quad \text{pour tout } \psi \in H^m.$$

**Lemme 24.**  *$M^{k\delta}(t)$  est bien définie. De plus, on a*

$$(3.3) \quad \|M^{k\delta}(t)\phi - M^k(t)\phi\|_m \leq N_5 \|\phi\|_m, \quad \text{pour tout } \psi \in H^{m+1}.$$

Preuve

Soit  $\phi \in H^{m+1}$  et  $\{\psi_n\} \subset H^{m+1}$  de Cauchy dans  $H^m$  . Alors lemme 23 donne

$$|(\phi, M^{k*}(t)(\psi_n - \psi_{n'}))_m|$$

$$\leq N_5 \|\phi\|_m \|\psi_n - \psi_{n'}\|_m + |(M^k(t)\phi, \psi_n - \psi_{n'})_m| \rightarrow 0, \quad \text{quand } n, n' \rightarrow \infty$$

par conséquent  $(\phi, M^{k*}(t)\psi_n)$  converge quand  $n \rightarrow \infty$ , et la limite est indépendante du choix de la suite  $\{\psi_n\}$  qui converge vers  $\psi \in H^m$  dans la topologie de  $H^m$ . Donc (3.2) est bien définie, en outre, pour tout  $\phi \in H^{m+1}$  et  $\psi \in H^m$ .

$$\begin{aligned} (3.4) \quad & |(M^{k\delta}(t)\phi, \psi)_m - M^k(t)\phi, \psi)_m| \\ &= \lim_{\substack{\psi_n \in H^{m+1} \\ \psi_n \rightarrow \psi \text{ dans } H^m}} |(\phi, M^{k*}(t)\psi_n) - (M^k(t)\phi, \psi_n)| \\ &\leq \lim_n N_5 \|\phi\|_m \|\psi\|_m = N_5 \|\phi\|_m \|\psi\|_m \end{aligned}$$

ainsi (3.3) est vérifiée.

Avant d'étudier l'équation duale (1.7), on donne la définition de la solution.

**Définition 25.** Une paire  $(\lambda, r) \in L_F^2(0, 1; H^1) \times (L_F^2(0, 1; H^0)^{d'})$ , est dite solution de l'équation (1.7), si pour tout  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , fonction sur  $\mathbb{R}^d$  avec support compact, et presque tout  $(t, \omega) \in [0, 1] \times \Omega$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda(t), \eta)_0 &= (G, \eta)_0 + \int_t^1 [\langle \lambda s, A(s)\eta_0 + \sum_{k=1}^{d'} (r^k(s), M^k(s)\eta)_0 + \langle F s, \eta \rangle_0] ds \\ &\quad - \sum_{k=1}^{d'} \int_t^1 (r^k(s), \eta)_0 dW_k(s). \end{aligned}$$

**Théorème 26.** Supposons que  $F \in L_F^2(0, 1; H^{m-1})$ ,  $G \in L^2(\Omega, F_1; H^m)$ .

Alors (1.7) admet une solution unique  $(\lambda, r) \in L_F^2(0, 1; H^1) \times (L_F^2(0, 1; H^0)^{d'})$ , où  $r := (r^1, r^2, \dots, r^{d'})$ . En plus, il existe  $N_6$  dépendant uniquement de  $k, m$ , et  $\delta$  telle que

$$\begin{aligned} (3.6) \quad & \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\lambda(t)\|_{\tilde{m}+1}^2 + E \int_0^1 [\|\lambda(t)\|_{\tilde{m}+1}^2 + \sum_{k=1}^{d'} \|r^k(t)\|_{\tilde{m}}^2] \\ & \leq N_6 E \left[ \int_0^1 \|F(t)\|_{\tilde{m}-1}^2 dt + \|G\|_{\tilde{m}}^2 \right], \quad \tilde{m} = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Preuve

Pour éviter la complexité des notations, on démontre le théorème pour  $d' = 1$  (il n'y a pas de difficulté quand  $d' < 1$ ). Ainsi l'indice  $k$  n'apparaîtra pas tout au long de la preuve.

Unicité : supposons  $(\lambda, r) \in L_F^2(0, 1; H^1) \times (L_F^2(0, 1; H^0))^{d'}$  satisfait

$$\begin{cases} d\lambda(t) = -[A^*(t)\lambda(t) + M^*(t)r(t)]dt + r(t)dW(t), & t \in [0, 1], \\ \lambda(1) = 0, \end{cases}$$

Puis la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} E\|\lambda(t)\|_0^2 &= 2E \int_t^1 [\langle \lambda(s), A(s)\lambda(s) \rangle_0 + (r(s), M(s)\lambda_1(s))_0] ds - E \int_t^1 \|r(s)\|_0^2 ds \\ &\leq 2E \int_t^1 [\langle \lambda(s), A(s)\lambda(s) \rangle_0 + 1/2\|M(s)\lambda(s)\|_0^2] \\ &\leq 2N_1 E \int_t^1 \|\lambda(s)\|_0^2 ds. \end{aligned}$$

D'où  $\lambda(t) \equiv 0$ , d'après l'inégalité de Gronwall. D'après la définition 25, pour tout  $\phi \in H^1$ ,

$$\int_0^t (r(s), M(s)\phi)_0 ds - \int_0^t (r(s), M(s)\phi)_0 dW(s) \equiv 0.$$

L'unicité des décompositions du semi-martingale conduit à  $(r(t), \phi)_0 \equiv 0$ , d'où  $r(t) \equiv 0$  cela prouve l'unicité.

Existence : considérons le triple  $(H^{m-1}, H^m, H^{m+1})$ , avec  $(H^m)^* = H^m$ . Soit  $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$  une base Hilbertienne de  $H^{m+1}$ , qui est orthonormal comme base de  $H^m$ .

Fixons  $n$ , par Bismut [3], il existe uniquement  $\tilde{\lambda}_n := (\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nn})^T \in L_F^2(0, 1; \mathbb{R}^n)$  et

$$(3.7) \quad \begin{cases} \tilde{r}_n := (r_{n1}, r_{n2}, \dots, r_{nn})^T \in L_F^2(0, 1; \mathbb{R}^n) \text{ tels que} \\ \begin{cases} d\lambda_{ni}(t) = -[\sum_{j=1}^n \langle A^*(t)e_j, e_i \rangle_m \lambda_{nj}(t) + \sum_{j=1}^n (e_i, M^\Delta(t)e_j)_m m_{nj}(t) \\ + \langle F(t), e_i \rangle_m] dt + r_{ni}(t) dW(t), & t \in [0, 1] \\ \lambda_{ni}(1) = G_{ni}, & i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \end{cases}$$

où  $M^\Delta(t)$  est défini par (3.2),  $G_{ni} \in L^2(\Omega, F_1, \mathbb{R}^1)$ , et  $\sum_{i=1}^n G_{ni}e_i \equiv G_n \rightarrow G$ , dans  $L^2(\Omega, H^m)$  quand  $n \rightarrow \infty$ . On définit  $\lambda_n := \sum_{i=1}^n \lambda_{ni}e_i \in L^2_F(0, 1; H^{m+1})$ ,  $r_n = \sum_{i=1}^n r_{ni}e_i \in L^2_F(0, 1; H^{m+1})$ . Puis la formule d'Itô implique

$$\begin{aligned}
E\|\lambda_n(t)\|_m^2 &= E\|G_n\|_m^2 + 2E \int_t^1 [\langle A^*(s)\lambda_n(s), \lambda_n(s) \rangle_m \\
&+ \langle r_n(s), M^\Delta(s)\lambda_n(s) \rangle_m + \langle F(s), \lambda_n(s) \rangle_m - 1/2\|r_n(s)\|_m^2] ds \\
&\leq E\|G_n\|_m^2 + 2E \int_t^1 [\|A^*(s)\lambda_n(s), \lambda_n(s)\|_m] \\
&+ \langle M(s)\lambda_n(s), r_n(s) \rangle_m + N_5\|\lambda_n(s)\|_m\|r_n(s)\|_m \\
&+ \langle F(s), \lambda_n(s) \rangle_m - 1/2\|r_n(s)\|_m^2] ds, \quad (d'après lemme 24) \\
&\leq E\|G_n\|_m^2 + E \int_t^1 [2\langle A^*(s)\lambda_n(s), \lambda_n(s) \rangle_m \\
&+ \|M(s)\lambda_n(s)\|_m^2 + N_5\|\lambda_n(s)\|_m^2 + N_5\|r_n(s)\|_m^2 \\
&+ 2/\delta \cdot \|F(s)\|_{m-1}^2 + \delta/2 \cdot \|\lambda_n(s)\|_{m+1}^2] ds, \\
&\leq E\|G_n\|_m^2 + E \int_t^1 [-\delta\|\lambda_n(s)\|_{m+1}^2 + (N_1 + N_5)\|\lambda_n\|_m^2 \\
&+ N_5\|r_n(s)\|_m^2 + 2/\delta \cdot \|F(s)\|_{m-1}^2 + \delta/2 \cdot \|\lambda_n(s)\|_{m+1}^2] ds.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Gronwall, on a

$$(3.8) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} E \|\lambda_n(t)\|_m^2 + \delta/2 \cdot E \int_0^1 \|\lambda_n(t)\|_{m+1}^2 dt \\ \leq N_\gamma E \left[ \int_0^1 (\|F(t)\|_{m-1}^2 + \|r_n(t)\|_m^2) dt + \|G_n\|_m^2 \right],$$

où  $N_\gamma$  ne dépend que de  $K, m, \delta$ . Maintenant soit  $\tilde{\rho}_n := (\rho_{n1}, \rho_{n2}, \dots, \rho_{nn})^T \in L_F^2(0, 1; \mathbb{R}^n)$ , la solution de EDS suivante dans  $\mathbb{R}^n$

$$(3.7) \quad \begin{cases} d\rho_{ni}(t) = \sum_{j=1}^n \langle e_j, A^*(t)e_i \rangle_m \rho_{nj}(t) dt \\ \quad + [\sum_{j=1}^n (M^\Delta(t)e_j, e_i)_m \rho_{nj}(t) + r_{ni}(t)] dW(t), \\ \rho_{ni}(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

On définit  $\rho_n := \sum_{i=1}^n \rho_{ni} e_i \in L_F^2(0, 1; H^{m+1})$ . Choisissons  $\epsilon > 0$ , tel que

$$2\epsilon \|M(s)\rho_n(s)\|_m^2 \leq \delta/2 \|\rho_n(s)\|_{m+1}^2.$$

En utilisant l'inégalité  $(a+b)^2 \leq (1+\epsilon)a^2 + (1+1/\epsilon)b^2$ , on a d'après le lemme 24

$$(3.10) \quad 2\langle A^*(s)\rho_n(s), \rho_n(s) \rangle_m + (1+\epsilon) \|M^\Delta(s)\rho_n(s) + r_n(s)\|_m^2 \\ \leq 2\langle A^*(s)\rho_n(s), \rho_n(s) \rangle_m + (1+\epsilon) \|M(s)\rho_n(s) + r_n(s)\|_m^2 \\ + (1+1/\epsilon) N_5^2 \|\rho_n(s)\|_m^2 \\ \leq 2\langle A^*(s)\rho_n(s), \rho_n(s) \rangle_m + \|M(s)\rho_n(s) + r_n(s)\|_m^2 \\ + 2\epsilon \|M(s)\rho_n(s)\|_m^2 + 2\epsilon \|r_n(s)\|_m^2 (1+1/\epsilon) N_5^2 \|\rho_n(s)\|_m^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq -\delta \|\rho_n(s)\|_{m+1}^2 + N_1 \|r_n(s)\|_m^2 + \delta/2 \|\rho_n(s)\|_{m+1}^2 \\
&\quad + 2\epsilon \|r_n(s)\|_m^2 + (1 + 1/\epsilon) N_5^2 \|\rho_n(s)\|_m^2 \\
&\leq -\delta/2 \|\rho_n(s)\|_{m+1}^2 + N_8 (\|\rho_n(s)\|_m^2 + \|r_n(s)\|_m^2).
\end{aligned}$$

De (3.9), on trouve

$$\begin{aligned}
E \|\rho_n(t)\|_m^2 &= E \int_0^t [2 \langle A^*(s) \rho_n(s), \rho_n(s) \rangle_m + \|M^\Delta(s) \rho_n(s) + r_n(s)\|_m^2] ds \\
&\leq -\delta/2 E \int_0^t \|\rho_n(s)\|_{m+1}^2 ds + N_8 E \int_0^t [\|\rho_n(s)\|_m^2 + \|r_n(s)\|_m^2] ds.
\end{aligned}$$

Appliquant l'inégalité de Gronwall pour obtenir

$$\begin{aligned}
&\sup_{0 \leq t \leq 1} E \|\rho_n(t)\|_m^2 + \delta/2 E \int_0^t \|\rho_n(s)\|_{m+1}^2 ds \\
&\leq N_8 \exp(N_8) E \int_0^t \|r_n(s)\|_m^2 ds.
\end{aligned}$$

On appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned}
&d \sum_{i=1}^n \lambda_{ni}(t) \rho_{ni}(t) \\
&= \sum_{i=1}^n \{ -[\langle A^*(t) \lambda_n(t), e_i \rangle_m + (r_n(t), M^\Delta(t) e_i)_m \\
&\quad + \langle F(t), e_i \rangle_m] \rho_{ni}(t) + \lambda_n(t) \langle \rho_n(t), A^*(t) e_i \rangle_m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +r_{ni}(t)[(M^\Delta(t)\rho_n(t), e_i)_m + r_{ni}(t)]dt + \{\dots\}dW(t) \\
& = [ \|r_n(t)\|_m^2 - \langle F(t), \rho_n(t) \rangle_m ] dt + \{\dots\}dW(t)
\end{aligned}$$

On intégrant de 0 à 1 et en prenant l'espérance, on trouve

$$\begin{aligned}
E \int_0^1 \|r_n(t)\|_m^2 dt &= E \left[ \int_0^1 \langle F(t), \rho_n(t) \rangle_m dt + (G_n, \rho_n(1))_m \right] \\
&\leq \left( E \int_0^1 \|F(t)\|_{m-1}^2 dt \right)^{1/2} \left( E \int_0^1 \|\rho_n(t)\|_{m+1}^2 dt \right)^{1/2} \\
&\quad + (E \|G_n\|_m^2)^{1/2} (E \|\rho_n(1)\|_m^2)^{1/2} \\
&\leq \left( N_9 E \int_0^1 \|r_n(t)\|_m^2 dt \right)^{1/2} \\
&\quad \times \left\{ \left( E \int_0^1 \|F(t)\|_{m-1}^2 dt \right)^{1/2} + (E \|G_n\|_m^2)^{1/2} \right\},
\end{aligned}$$

où  $N_9 := \max\{N_8 \exp(N_8), 2/\delta \cdot N_8 \exp(N_8)\}$ , donc

$$(3.12) \quad E \int_0^1 \|r_n(t)\|_m^2 dt \leq 2N_9 E \left[ \int_0^1 \|F(t)\|_{m-1}^2 dt + \|G_n\|_m^2 \right].$$

Combinant (3.8) et (3.12), on sait qu'ils existent une sous suite  $\{n'\}$  de  $\{n\}$  et  $(\lambda, r) \in L_F^2(0, 1; H^{m+1}) \times L_F^2(0, 1; H^m)$  tels que

$$(3.13) \quad \lambda_{n'} \rightarrow \lambda \quad \text{faiblement dans } L^2([0, 1] \times \Omega; H^{m+1})$$

$$(3.14) \quad r_{n'} \rightarrow r \quad \text{faiblement dans } L^2([0, 1] \times \Omega; H^m), \quad \text{quand } n' \rightarrow \infty.$$

On montre maintenant que  $(\lambda, r)$  satisfait (1.7). Soit  $\gamma$  une fonction absolument continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^1$  avec  $\dot{\gamma} := d\gamma/dt \in L^2[0, 1]$  et  $\gamma(0) = 0$ . On définit  $\gamma_i(t) := \gamma_i(t)e_i$ , multipliant (3.6) par  $\gamma_i(t)$  et en utilisant la formule de Itô, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (\lambda_n(t), \dot{\gamma}_i(t))_m dt + \int_0^1 (r_n(t), \gamma_i(t))_m dW(t) \\ &= (G_n, \gamma_i(1))_m + \int_0^1 [\langle A^*(t)\lambda_n(t), \gamma_i(t) \rangle_m \\ &+ (r_n(t), M^\Delta(t)\gamma_i(t))_m + \langle F(t), \gamma_i \rangle_m] dt. \end{aligned}$$

En vertu de (3.13) et (3.14), quand  $n' \rightarrow +\infty$ , on a, pour tout  $\phi \in H^{m+1}$

$$\begin{aligned} (3.15) \quad & \int_0^1 (\lambda(t), \phi)_m \dot{\gamma}(t) dt + \int_0^1 (r(t), \phi)_m \gamma(t) dW(t) \\ &= (G, \phi)_m \gamma(1) + \int_0^1 [\langle A^*(t)\lambda(t), \phi \rangle_m \\ &+ (r(t), M^\Delta(t)\phi)_m + \langle F(t), \phi \rangle_m] \gamma(t) dt. \end{aligned}$$

Appliquant la remarque 22, pour  $\psi \in H^1$ , on prend  $\phi := A^{-m}\psi$  dans (3.15) et noter que

$$\begin{aligned} (r(t), M^\Delta(t)A^{-m}\psi)_m &= \lim_{c_n \in H_{c_n \rightarrow r(t) \text{ dans } H^m}^{m+1}} (M^*(t)c_n, A^{-m}\psi)_m = \lim_n (M^*(t)c_n, \psi)_0 \\ &= \lim_n (c_n, M(t)\psi)_0 = (r(t), M(t)\psi)_0. \end{aligned}$$

Puis (3.15) est réduit, pour tout  $\phi \in H^1$

$$\begin{aligned} (3.16) \quad & \int_0^1 (\lambda(t), \psi)_0 \dot{\gamma}(t) dt + \int_0^1 (r(t), \psi)_0 \gamma(t) dW(t) \\ &= (G, \psi)_0 \gamma(1) + \int_0^1 [\langle \lambda(t), A(t)\psi \rangle_0 \end{aligned}$$

$$+(r(t), M(t)\psi)_0 + \langle F(t), \psi \rangle_0] \gamma(t) dt.$$

Pour tout  $t \in (0, 1)$ , on prend  $\gamma_\epsilon$  définie par

$$\gamma_\epsilon(s) := \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq t - \epsilon/2, \\ 1/\epsilon \cdot (s - t + \epsilon/2), & \text{si } t - \epsilon/2 < s < t + \epsilon/2, \\ 1, & \text{si } s \geq t + \epsilon/2. \end{cases}$$

Substituons (3.16) avec  $\gamma_\epsilon$ , et  $\epsilon \rightarrow 0$  on obtient

$$(3.17) \quad (\lambda(t), \psi)_0 + \int_t^1 (r(s), \psi)_0 dW(s)$$

$$= (G, \psi)_0 + \int_t^1 [\langle \lambda(s), A(s)\psi \rangle_0 + (r(s), M(s)\psi)_0$$

$$+ \langle F(s), \psi \rangle_0] ds,$$

pour tout  $\psi \in H^1$ , a.e.t  $\in [0, 1]$ .

Cela signifie que  $(\lambda, r)$  satisfait (3.5).

Maintenant, montrons (3.6). En vertu de (3.8), on sait que pour chaque  $t$  fixé, ils existent une sous suite  $\{n''\}$  de  $\{n\}$  et  $\tilde{\lambda} \in L^2(\Omega, H^m)$  tels que  $\lambda_{n''}(t) \rightarrow \tilde{\lambda}(t)$  faiblement dans  $L^2(\Omega, H^m)$ .

Mais

$$(\lambda_n(t), e_i)_m + \int_t^1 (r_n(s), e_i)_m dW(s)$$

$$= (G_n, e_i)_m + \int_t^1 [\langle A^*(s)\lambda_n(s), e_i \rangle_m + (r_n(s), M^\Delta(s)e_i)_m + \langle F(s), e_i \rangle_m] ds.$$

Quand  $n'' \rightarrow \infty$ , on a  $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t)$  pour presque tout  $[0, 1] \times \Omega$ , observant (3.17). Combinant (3.8), (3.12), (3.13) et (3.14), on obtient (3.6) pour  $\tilde{m} = m$ . Pour  $\tilde{m} = 0, 1, \dots, m-1$ , l'argument est totalement le même si on note l'unicité de la solution. La preuve est maintenant

terminée.

Donnons maintenant l'égalité de la dualité.

**Corollaire 27.** *On suppose que les hypothèses du théorème 3.1 sont vérifiées avec  $m = 0$ . Soient  $f \in L^2_F(o, 1; H^{-1})$ ,  $g^k \in (0, 1; H^0)$ ,  $k = 0, 1, \dots, d'$ , et  $q_0 \in L^2(\Omega, F_0; H^0)$ . Supposons que  $q \in L^2_F(0, 1; H^1) \cap L^2(\Omega, C(0, 1; H^0))$  est la solution de (1.4) et  $(\lambda, r)$  est la solution de (1.7), alors pour tout  $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ ,*

$$\begin{aligned} & E \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \langle F(t, q(t)) \rangle_0 dt + (\lambda_{\beta}, q(\beta))_0 \right] \\ &= E \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \langle \lambda(t), f(t) \rangle_0 + \sum_{k=1}^{d'} (r^k(t), g^k(t))_0 \right] dt + (\lambda(\alpha), q(\alpha))_0 \right\}. \end{aligned}$$

Preuve Appliquons la formule d'Ito  $(\lambda(t), q(t))_0$ , on obtient facilement le résultat.

**Remarque 28.** *Si on vérifie la preuve du théorème 26, on trouvera que quand  $m = 0$ , théorème 26 (et ainsi que corollaire 27) reste valide si tout les coefficients  $a^{ij}$ , etc. sont mesurables et bornés.*

## 2.3 Équation duale : cas dégénérés

L'argument de la section précédente ne fonctionne pas en général si EDPS (1.4) est dégénéré. Dans cette section, on traite un cas particulier des équations dégénérées, c'est à dire les dérivés de premier ordre dans le terme de diffusion de (1.4) disparaissent.

Tout au long de cette section, on suppose  $(A1)_m, (A2)$  pour certains  $m \geq 1$  et  $\sigma^{ik} = 0$ .

**Théorème 29.** *Supposons que  $F \in L^2_F(0, 1; H^m)$ ,  $G \in L^2(\Omega, F_1; H^m)$ . Alors l'équation duale (1.7) admet une solution unique  $(\lambda, r) \in L^2_f(0, 1; H^m) \times L^2_F(0, 1; H^m)^{d'}$ . En plus, il existe une constante  $N_{10}$  qui ne dépend que de  $K$  et  $m$ , telle que*

$$\begin{aligned} (4.1) \quad & \sup_{0 \leq t \leq 1} E \|\lambda(t)\|_{\tilde{m}}^2 + \int_0^1 \sum_{k=1}^{d'} \|r^k(t)\|_{\tilde{m}}^2 dt \\ & \leq N_{10} E \left[ \int_0^1 \|F(t)\|_{\tilde{m}}^2 dt + \|G\|_{\tilde{m}}^2 \right], \quad \tilde{m} = 0, 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Preuve Nous supposons  $d' = 1$  et on n'écrira pas l'indice k. L'unicité peut être prouvé exactement de la même manière que dans la preuve du théorème 26. Nous allons montrer

l'existence.

On définit  $A_\epsilon(t)$  et  $A_\epsilon^*(t)$  par (1.5) et (1.8), respectivement avec  $a^{ij}$  remplacé par  $a^{ij} + \epsilon\delta^{ij}$ , ou  $\delta^{ij} = 1$  quand  $i = j$ ;  $\delta^{ij} = 0$  quand  $i \neq j$  et  $\epsilon \in (0, 1)$ .

D'après le théorème 26, il existe uniquement  $(\lambda_\epsilon, r_\epsilon) \in L_F^2(0, 1; H^{m+1}) \times L_F^2(0, 1; H^m)$  tel que

$$(4.2) \quad \begin{cases} d\lambda_\epsilon(t) = -[A^{*\epsilon}(t)\lambda_\epsilon(t) + M^*(t)r_\epsilon(t) + F(t)]dt + r_\epsilon dW(t), \\ \lambda_\epsilon(1) = G \end{cases}$$

Comme  $|\langle \phi, A^{*\epsilon}\psi \rangle_m| \leq \text{const} \cdot \|\phi\|_{m+1} \|\psi\|_{m+1}$ , pour tout  $\phi, \psi \in H^{m+1}$ , donc la formule

$$\langle A_\epsilon^\Delta(t)\phi, \psi \rangle_m := \langle \phi, A_\epsilon^*(t)\psi \rangle_m, \quad \phi, \psi \in H^{m+1},$$

définit un opérateur linéaire  $A_\epsilon^\Delta$  de  $H^{m+1}$  vers  $H^{m+1}$ . De la même façon

$$(M^\Delta(t)\phi, \psi)_m := (\phi, M^*(t)\psi)_m, \quad \phi, \psi \in H^m,$$

définit un opérateur linéaire  $H^m$  vers lui même. Notez que comme  $\sigma^{ik} = 0$ ,  $M^\Delta(t)$  est un opérateur borné avec une borne indépendante de  $t$ .

D'après le lemme 23 (b), il existe une constante  $N_{11}$  qui est indépendante de  $\epsilon$ , telle que

$$(4.3) \quad \begin{aligned} & 2[\langle A_\epsilon^\Delta(t)\phi, \phi \rangle_m + (f, \phi)_m] + \|M^\Delta(t)\phi + g\|_m^2 \\ & \leq -2\epsilon\|\phi\|_{m+1}^2 + N_{11}(\|\phi\|_m^2 + \|f\|_m^2 + \|g\|_m^2), \end{aligned}$$

pour tout

$$\phi \in H^{m+1}, f \in H^m, g \in H^m.$$

L'estimation ci-dessus ainsi que l'approche de l'approximation en dimension finie (voir [9]) donne l'existence de  $\rho_\epsilon \in L_F^2(0, 1; H^{m+1})$  unique qui satisfait EDPS

$$(4.4) \quad \begin{cases} d\rho_\epsilon = [A_\epsilon^\Delta(t)\rho_\epsilon(t) + \lambda_\epsilon(t)]dt + [M^\Delta(t)\rho_\epsilon(t) + r_\epsilon(t)]dW(t), \\ \rho_\epsilon(0) = 0 \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned}
E\|\rho_\epsilon(t)\|_m^2 &= E \int_0^t \{2[\langle A^\Delta(s)\rho_\epsilon(s), \rho_\epsilon(s) \rangle_m + (\lambda_\epsilon(s), \rho_\epsilon(s))_m] \\
&\quad + \|M^\Delta(s)\rho_\epsilon(s) + r_\epsilon(s)\|_m^2\} ds \\
&\leq N_{11} E \int_0^t [\|\rho_\epsilon(s)\|_m^2 + \|\lambda_\epsilon(s)\|_m^2 + \|r_\epsilon(s)\|_m^2] ds,
\end{aligned}$$

donc

$$(4.5) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} E\|\rho_\epsilon(t)\|_m^2 \leq N_{11} \exp(N_{11}) E \int_0^1 [\|\lambda_\epsilon(t)\|_m^2 + \|r_\epsilon(t)\|_m^2] dt.$$

En appliquant la formule de Itô pour  $(\lambda_\epsilon(t), \rho_\epsilon(t))_m$  on obtient facilement

$$\begin{aligned}
&E \int_0^1 [\|\lambda_\epsilon(t)\|_m^2 + \|r_\epsilon(t)\|_m^2] dt \\
&= E \left[ \int_0^1 (F(t), \rho_\epsilon(t))_m dt + (G, \rho_\epsilon(1))_m \right] \\
&\leq \{N_{11} \exp(N_{11}) E \int_0^1 [\|\lambda_\epsilon(t)\|_m^2 + \|r_\epsilon(t)\|_m^2] dt\}^{1/2} \\
&\quad \times \left\{ \left( E \int_0^1 \|F(t)\|_m^2 dt \right)^{1/2} + (E\|G\|_m^2)^{1/2} \right\},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&E \int_0^1 [\|\lambda_\epsilon(t)\|_m^2 + \|r_\epsilon(t)\|_m^2] dt \\
&\leq 2N_{11} \exp(N_{11}) E \left[ \int_0^1 \|F(t)\|_m^2 dt + \|G\|_m^2 \right].
\end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une sous-suite  $\{\epsilon_n\}$  et  $(\lambda, r) \in L_F^2(0, 1; H^m) \times L_F^2(0, 1; H^m)$  telles que

$\lambda_n \rightarrow \lambda$  faiblement dans  $L^2([0, 1] \times \Omega; H^m)$ ,

$r_n \rightarrow r$  faiblement dans  $L^2([0, 1] \times \Omega; H^m)$ , quand  $\epsilon_n \rightarrow 0$ .

De (4.2), pour toute fonction absolument continue  $\gamma$  avec  $\dot{\gamma} \in L^2[0, 1]$ , et  $\gamma(0) = 0$ ,

$$\int_0^1 (\lambda_\epsilon(t), \phi)_0 \dot{\gamma}(t) dt + \int_0^1 (r_\epsilon(t), \phi)_0 \gamma(t) dW(t)$$

$$\begin{aligned}
&= (G, \phi)_0(t)\gamma(1) + [\langle \lambda_\epsilon(t), A(t)\phi \rangle_0 + (r_\epsilon(t), M(t)\phi)_0 \\
&\quad + (F(t), \phi)_0]\gamma(t)dt,
\end{aligned}$$

pour tout  $\phi \in H^1$ .

Il s'ensuit que  $(\lambda, r)$  satisfait (3.5), en laissant  $\epsilon_n \rightarrow 0$ .

Enfin, on donne l'estimation de  $\sup_{0 \leq t \leq 1} E\|\lambda(t)\|_m^2$ . En effet, notant que  $M^*(t)$  est un opérateur borné de  $H^m$  dans lui-même, de (4.2), on a

$$\begin{aligned}
E\|\lambda_\epsilon(t)\|_m^2 &= E\|G\|_m^2 + 2E \int_0^1 [\langle A^*(s)\lambda_\epsilon(s), \lambda_\epsilon(s) \rangle_m + (M^*(s)r_\epsilon(s), \lambda_\epsilon(s))_m \\
&\quad + (F(s), \lambda_\epsilon(s))_m - 1/2 \cdot \|r_\epsilon(s)\|_m^2] ds \\
&\leq E\|G\|_m^2 + 2E \int_0^1 [1/2 \cdot N_2 \lambda_\epsilon(s)\|_m^2 + N_{12}\|r_\epsilon\|_m \|\lambda_\epsilon(s)\|_m \\
&\quad + \|F(s)\|_m \|\lambda_\epsilon(s)\|_m - 1/2 \cdot \|r_\epsilon(s)\|_m^2] ds,
\end{aligned}$$

ainsi

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} E\|\lambda_\epsilon(t)\|_m^2 \leq N_{13}E \left[ \int_0^1 \|F(t)\|_m^2 dt + \|G\|_m^2 \right],$$

où la constante  $N_{13}$  est indépendante de  $\epsilon$ . Maintenant par le même argument que dans la preuve du théorème 26,  $(\lambda, r)$  satisfait (4.1).

**Remarque 30.** *Par le théorème d'inclusion bien connu de Sobolev [7], si  $m - n > d/2$  pour  $n$  non négatif, alors les solutions  $(\lambda, r)$  obtenus dans les théorèmes 26 et 29 appartiennent à  $C^n(\mathbb{R}^d)$  pour presque tous  $(t, \omega)$ , et les normes de  $H^m$  dans le coté gauche de (3.6) et (4.1) peuvent être remplacées par les normes de  $C^n(\mathbb{R}^d)$  (c-à-d la sommation des normes sup est jusqu'à l'ordre  $n$ ).*

*En particulier, si  $m > d/2 + 1$  dans le théorème 26, (resp  $m > d/2 + 2$  dans le théorème 29), alors les solutions respectives de (1.7) sont classiques.*

# Bibliographie

- [1] A. Bensoussan, Maximum principle and dynamic programming approaches of the optimal control of partially observed diffusions, *Stochastics* 9(1983), 169-222.
- [2] J. M. Bismut, Analyse convexe et probabilités, *Thèse, Faculté des Sciences de Paris, 1973*.
- [3] J. M. Bismut, An introductory approach to duality in stochastic control. *SIAM Rev.* 20 (1978), 62-78.
- [4] N. V. Krylov and B. L. Rozovskii, On the Cauchy problem for linear stochastic partial differential equations. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 41(1977), 1329-1347; *Math. USSR-Izv.* 11 (1977), 1267-1284.
- [5] N. V. Kyrlov and B. L. Rozovskii, On characteristics of the degenerate parabolic Ito equations of the second ordre, *Proc. Petrovskii Sem.* 8 (1982), 153-168. [In Russian].
- [6] N. V. Kyrlov and B. L. Rozovskii, Stochastic partial differential equations and diffusion processes, *Uspekhi Mat. Nauk* 37, No. 6 (1982), 75-95; *Russian Math. Surveys* 37, No. 6 (1982). 81-105.
- [7] J. L. Lions and E. Magenes, "Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, I," *Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972*.
- [8] P. L. Lions, Viscosity solutions of fully nonlinear second ordre equations and optimal stochastic control in infinite dimensions. II. Optimal control of Zakai's equation, in "Stochastic Partial Differential Equations and Applications, II"(G. Da Prato and L. Tubaro. Eds.), pp. 147-170, *Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1390, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1989*.

- 
- [9] E. Pardoux, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastic 3 (1979)*, 127-167.
- [10] K. Yosida, Functional Analysis, 6th ed., Springer-Verlag , *Berlin/Heidelberg/New York*, 1980.
- [11] X. Y. Zhou, On the necessary conditions of optimal controls for stochastic partial differential equations , *SIAM, Vol. 31, No. 6 (1993)*, 1462-1478.