وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة عباس لغرور – خنشلة –

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

الاحصاء 02

مطبوعة مقدمة لطلبة السنة اولى LMD

دروس وتطبيقات

اعداد:

د. حرنان نجوى

السنة الجامعية 2017/2016

مقدمة:

تنقسم الاحداث اليومية التي نتعرض لها في حياتنا اليومية الى قسمين وهما:

اولا: الاحداث المؤكدة التي تحكمها قوانين فيزيائية في الطبيعة مثل شروق الشمس غدا او سقوط حجر غلى الارض عند رميه من سطح بناء. هذه الاحداث مؤكدة ومسلم بها للجميع وتحكمها قوانين ثابتة لذلك فإنها تنتمي الى ما يسمى بالنموذج المؤكد.

ثانيا: يخص الاحداث غير المؤكدة التي هي تعتمد على الصدفة مثل ظهور وجه الصورة عند رمي قطعة نقود او ارتفاع مؤشر اقتصادي لأسواق المال، هذا النوع من الاحداث غير مؤكدة وتنتمي الى ما يسمى بالنموذج الاحتمالي، وهكذا فإننا غالبا ما نعبر على وقوع الحدث، واصبح الان حساب الاحتمال واسع وفيه مؤلفات كثيرة، ويستند الاحصاء الرياضي بشكل اساسي على نظرية الاحتمال، ذلك ان الاستدلال الاحصائي الذي هو محور الدراسة الاحصائية يهتم بتعميم النتائج من العينة المأخوذة من المجتمع الى ذلك المجتمع وبما ان العينة جزء من المجتمع فهي عادة لا تمثله تماما، ولهذا فان عملية الاستدلال تتم في اطار عدم التأكد، ولما كانت نظرية الاحتمال تقدم قياسا لعدم التأكد كان لابد للإحصائي من التعرض لها. وهما نتوقف ان شير ان حل مسالة من مسائل الاحتمال يمر غالبا بمرحلتين:

- التعبير عن المسالة بالرموز
- تطبيق قواعد حساب الاحتمال

فاذا كنا معتادين في ذلك الجزء من الرياضيات، التحليل، الجبر...ان نطبق النظريات والقواعد التي نعرفها اي المرحلة الثانية اعلاه فقط اذ مختلفا عندما يتعلق الامر بحساب الاحتمال، فغالبا ما تكون الوضعيات معطاة في صورة نصوص ويطلب من الدارس التعبير عن هذا الحدث او ذاك لذا يكون الدارس مضطرا للتعبير عن الاوضاع في صورة عبارات ورموز ليتمكن بعدها من تطبيق قواعد الحساب، ولذا على الدارس ان يكون متمكنا من اجتياز المرحلة الاولى بنجاح حتى يستطيع حل مسائل الاحتمالات، وهذه المرحلة هي موضوع هذا الفصل حيث يهتم بتوضيح وتقديم المفاهيم الاساسية التي تساعد الدارس في صياغة المسائل في صورة رموز وعبارات، ولهذا فهو يتناول.

- التجربة العشوائية
- المجموعة الاساسية
- الاحداث الابتدائية
- الاحداث المركبة
- العمليات على الحوادث

الفصل الاول: مفاهيم اساسية للاحتمالات

I- مفهوم التجربة العشوائية، الحدث والاحتمال: *Epreuve, événement, probabilité*

I-1- التجربة العشوائية: هي كل عمل او اجراء نعلم مقدما بجميع نتائجه الممكنة ولكن لا نعلم مسبقا اي من هذه النتائج سوف نحصل عليها عند القيام بهذا العمل او الاجراء، فمثلا عند القاء قطعة نقود في الهواء فتركها تستقر على الارض واحد وجهيها الى الاعلى، فنعلم مسبقا ان نتائج هذه العملية هي الحصول على الصورة او الكتابة ولكن لا نعلم على وجه التحديد اي من هاتين النتيجتين سوف نحصل عليها عند القيام بهذا العمل، لذلك فان هذه العملية تعرف بالتجربة العشوائية.

نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لا يمكن توقع نتيجتها رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة، في تجربة عشوائية، تسمى مجموعة النتائج الممكنة بمجموعة الامكانيات او المجموعة الاساسية كما يطلق عليها فضاء العينة ونرمز لها بـ Ω.

الجدول 01: امثلة على التجارب العشوائية وفضاء العينة

التجربة	مجموعة الامكانيات(فضاء العينة)
رمي زهرة نرد في الهواء ومراقبة الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي	$\Omega1=\{1,2,3,4,5,6\}$
رمي قطعة نقود في الهواء	$\Omega_2=\{p,f\}$
عدد الاشخاص الذين يدخلون البريد في مدينة باتنة من الساعة14h-14:30h	$\Omega_3=\{0,1,2,3,\ldots\}=N$
رمي زهرة نرد مرتين في الهواء ومراقبة الارقام التي تظهر على الوجه العلوي	$\Omega_4=\{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots(2,1),\ldots(6,6)\}$
رمي قطعة نقود في الهواء ثلاث مرات متتالية	$\Omega_5=\{(p,p,p),(p,p,f),(p,f,p),(p,f,f),(f,p,p),(f,p,p),(f,p,f),(f,f,p),(f,f,f)\}$
مراقبة فترة حياة جهاز الالكتروني	$\Omega_6=[0,\ldots\ldots,+\infty[$

من الامثلة اعلاه يتبين ان فضاء العينة يمكن ان يكون مجموعة منتهية، او مجموعة غير منتهية قابلة للعد، او مجموعة غير منتهية لها قوة المستمر.

I-2- المجموعة الاساسية(فضاء العينة): اشرنا اعلاه باننا لا يمكن ان نعرف النتيجة التي ستفسر عليها التجربة العشوائية، بكل تأكيد ولكننا بالإمكان التعرف على كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. فقبل اجراء التجربة بالإمكان معرفة المجموعة التي تنتمي اليها نتيجة التجربة، فاذا كانت التجربة تتمثل في ملاحظة والاهتمام بعدد الطلبة الذين سيحصلون على المعدل في مادة الاحصاء في الامتحان القادم، اذا كان عدد الطلبة

الذين سيتقدمون للامتحان هو45، عندها فان عدد الامكانيات او النتائج الممكنة لهذه التجربة هو كل عدد طبيعي محصورين بين 0و45اي $\Omega=\{0,\ldots\ldots,45\}$

اذن فالمجموعة الاساسية هي جميع النتائج الممكن للتجربة العشوائية ويرمز لها في غالب الاحيان بـΩ

ملاحظات:

- يمكن للمجموعة الاساسية ان تكون منفصلة كما هو الحال في تجربة القاء قطعة النقود كما يمكنها ان تكون غير منتهية.
- يمكن للمجموعة الاساسية ان تكون منفصلة كما يمكنها ان تكون مستمرة مثل (معرفة عمر احد المكونات الالكترونية، فترة حياة المكون الالكتروني هي نقطة من المجال$]0,\ldots+\infty[$
- اذا كنا لا نعرف الا جزء من النتائج الممكنة للتجربة العشوائية فبالإمكان تعريف المجموعة الاساسية.

I-3-الحوادث: هي اي مجموعة جزئية من فضاء العينةΩ ورياضيا يقال A حدث من Ω ويكتب $A\Omega$

1- **الحوادث الابتدائية**: تسمى عناصر المجموعة الاساسية بالحوادث الابتدائية مثل:

- في تجربة القاء زهرة نرد فان ظهور اي وجه من الوجوه يعتبر حادث ابتدائي
- ان الحوادث الابتدائية لإلقاء قطعة نقود هي الصورة او الكتابة.

لا تسفر التجربة العشوائية الا على حادث ابتدائي واحد فعند القاء زهرة النرد لا نحصل على وجهين في نفس الوقت على الوجه العلوي. وعندما تتحقق عدة حوادث انيا عند اجراء تجربة عشوائية فان هاته الحوادث لا تعتبر حوادث ابتدائية. ويمكن الاعتماد على الحوادث الابتدائية في تشكيل الحوادث المركبة.

نستخدم في غالب الاحيان الرمز ω للاشارة او التعبير عن الحادث الابتدائي، اي ان ω هو نتيجة التجربة. فعند القاء زهرة النرد ولو افترضنا اننا حصلنا على الوجه2 عندها فان $\omega = 2$.

من اعلاه يتبين لنا اننا عرفنا مايلي:

فضاء الامكانات ← هو مجموعة

الحوادث الابتدائية ← عناصر هذه المجموعة

وهنا نكون قد وقعنا على مفاهيم نظرية المجموعات، وسنرى بعد حين ان مثل هذا الاكتشاف ذي فائدة كبيرة بالنسبة لدراسة نظرية الاحتمالات.

2- الحوادث المركبة: الحادث الذي يحتوي على عنصرين او اكثر من عناصر المجموعة الاساسيةΩ ، نقول عن حادث مركب اذا وجدت مجموعة من الحوادث الابتدائية بحيث يؤدي يحقق اي منها الى تحقيق الحادث المعتبر .

مثال: عند القاء زهرة نرد في الهواء فان التجربة يمكنها ان تسفر على 6 نتائج هي {1,2,3,4,5,6} وهي حوادث ابتدائية من Ω. لكننا بالاهتمام بحوادث اخرى يمكن ان نحصل على عدد فردي بأكثر من طريقة اذ ان الحادث يتحقق بظهور الوجه 1،3،5 يمكن القول بان هذه الحوادث هي حوادث مركبة.

ولنقرن كل حادث من الحوادث المركبة التي سبق وان اشرنا اليها بالحوادث الابتدائية التي تؤدي الى تحقيق الحادث المركب.

الجدول02: المجموعة الاساسية وحوادثها

المجموعة المرفقة	الحادث
A={1,2,3,5}	نتيجة القاء زهرة نرد عدد فردي
B={2,4,6}	نتيجة القاء زهرة نرد عدد زوجي
C={1,2}	نتيجة القاء زهرة مربع عدد
D={1,2,3,4,5,6}	نتيجة القاء زهرة نرد اقل من 7
F=∅	نتيجة القاء زهرة نرد عدد اكبر من 6

من اعلاه يتبين لنا انه بالإمكان ان نقرن بكل حادث مجموعة جزئية وحيدة منΩ، وهذه النتيجة رغم بساطتها فإنها على درجة كبيرة من الاهمية على النحو الذي نبينه لاحقا، وهذه النتيجة لا تصح بالنسبة للمثال المدروس فقط وانما هي صحيحة بالنسبة لحوادث اي تجربة عشوائية.

ان تحقق حادث ابتدائي هو تحقق فيزيائي "فعلي" للتجربة العشوائية فحين تحقق الحادث المركب هو تفسير منطقي لنتيجة التجربة العشوائية. لقد توصلنا الة نتيجة مفادها انه بالإمكان ان نقرن بكل حادث مجموعة جزئية وحيدة من المجموعة الاساسية، والسؤال المطروح : **هل يمكن ان نقرن بكل مجموعة جزئية من Ω حادث من الحوادث الذي يمكن ان تسفر عليه التجربة محل الدراسة؟**

والجواب هو نعم، اذا يكفي ان نعطي معنى للعناصر التي تنتمي الى المجموعة الجزئية ومنه يتبين لنا

ان كل حادث هو مجموعة جزئية Ω وكل مجموعة جزئية من Ω هي حادث

كما قد عرفنا انفا فضاء الامكانات والحادث الابتدائي، وبالإمكان اضافة كائن اخر هو الحادث المركب

فضاء الامكانات $\longrightarrow$ هو مجموعة

الحوادث الابتدائية ← عناصر هذه المجموعة

الحادث المركب ← مجموعة جزئية من هذه المجموعة

لقد انطلقنا في دراسة فضاء جديد هو فضاء الحوادث فوجدنا انفسنا بصدد دراسة فضاء المجموعة، وهذا يعني انه بالإمكان استخدام جبر المجموعات في دراسة جبر الحوادث لتسهيل الدراسة ولإنجاز ذلك، نذكر في الفقرة الموالية ببعض مفاهيم نظرية المجموعات التي سوف نستخدمها في الفقرات الموالية.

II- مبادئ في نظرية المجموعات:

II-1- مفهوم المجموعة: ان الدور الذي يلعبه مفهوم المجموعة في الرياضيات الحديثة دور اساسي، وذلك ليس فحسب لكون نظرية المجموعات اصبحت الان من اختصاصا جدا متطور بل للتأثير الكبير الذي تمارسه هذه النظرية، وليدة اواخر القرن التاسع عشر، على كافة فروع الرياضيات وبخاصة نظرية الاحتمالات، اننا لا ننوي هنا تقييم عرض كامل حول نظرية المجموعات بل همنا الوحيد هو ادخال الرموز الرئيسية وتعريف المفاهيم الاولية جدا التي نستخدمها في عرض نظرية الاحتمالات.

نرمز فيما يلي للمجموعات بالحروف الكبيرة ...A ,B,C, ونرمز للعناصر التي تشكل المجموعة بالحروف الصغيرة... a, b, c, تكتب القضية« العنصر aينتمي الى المجموعةA » بشكل رمزي كالتالي: $a\in A$.

وهناك طريقتين لتمثيل المجموعة:

التمثيل الاول: هي طريقة العد التي تتميز بوضع جميع عناصر المجموعة بين حاضنتين مثل $A=\{a,b,c,d\}$

التمثيل الثاني: هي طريقة الصفة المميزة وذلك بإعطاء صفة مميزة لعناصر المجموعة مثل: {X عدد حقيقي موجب اقل من 30=A }=X ، يحدث احيانا الا معرف مسبقا فيما اذا كانت مجموعة ما (مجموعة جدور معادلة مثلا) تحوي عنصر واحد على الاقل، ولذا من المفيد ان نلتفت الى المجموعة التي لا تحتوي اي عنصر تسمى مجموعة هذا النوع مجموعة خالية ونرمز لها بـ$\emptyset$.

ونلاحظ ان المجموعة الخالية مجموعة جزئية من اي مجموعة اخرى.

وان المجموعة يمكن ان تكون منتهية او غير منتهية وتكون المجموعة منتهية اذا كانت خالية او كان بالإمكان ايجاد تطبيق تقابلي(تطبيق غامر ومتباين) بينها وبين المجموعة$\{1,2,3,\ldots,n\}$

ونقول عندئذ ان عدة (اصلي) المجموعة هو n وسنضع تعريفا$[\emptyset]=0$ اي عدد عناصر المجموعة الخالية يساوي الصفر وبخلاف ذلك نقول انها غير منتهية.

ونقول عن المجموعة غير قابلة للعد او عدودة اذا امكن ايجاد تطبيق تقابلي بينها وبين مجموعة الاعداد الطبيعية في **تطبيق نظرية المجموعات**، نعتبر كل المجموعات المدروسة هي مجموعات جزئية من مجموعة محددة تسمى المجموعة الموجبة ففي الهندسة المستوية فان المجموعة المرجعية هي مجموعة نقاط المستوى

وعليه نعرف جماعة المجموعات على انها مجموعة عناصرها جزئية من مجموعة مرجعية.

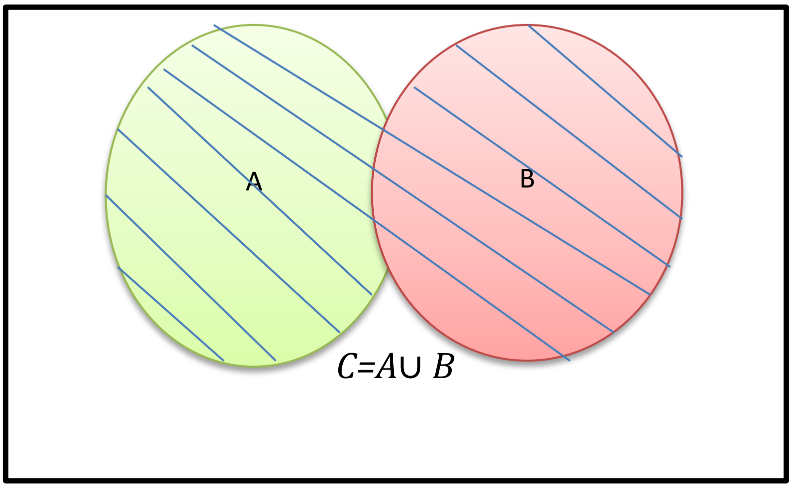
مثال01: ان عناصر الجماعة:{{2,3},{2},{5,6}} المجموعات هي {2,3},{2},{5,6}

مثال02: لتكن A مجموعة ما، ان مجموعة اجزاء المجموعةA والتي يرمز لها بهي جماعة كل المجموعات الجزئية لـA فاذا كانت A={a,b,c} عندها نجد:{ A={A,{a,b),(a,c),(a,b),(b,c),(a),(b),(c),∅ واذا كانت A وعدد عناصرها هو n فان عدد عناصر p(A)هو 2^n

II-2- عمليات على المجموعات:

اولا- الاتحاد: لتكن A وB مجموعتين كيفيتين، نعرف اتحاد A وB على انه المجموعة $A\cup B = C$ المؤلفة من العناصر التي تنتمي الى احدى المجموعتين A و B على الاقل.

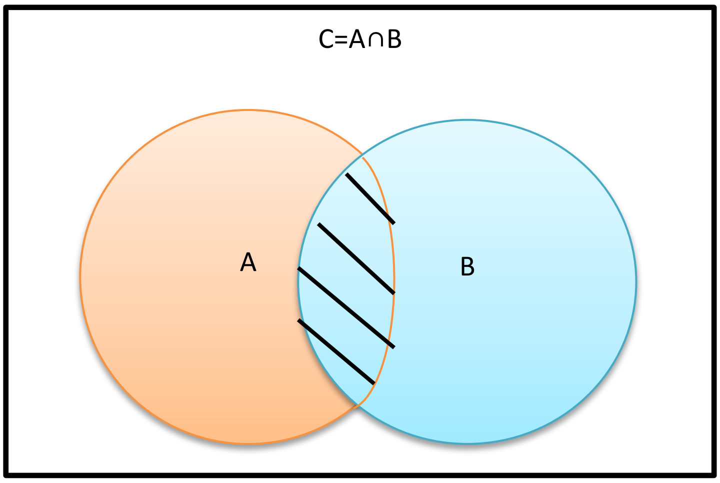
الشكل 01: اتحاد مجموعتين



نعرف بطريقة مماثلة اتحاد عدد كيفي(منته او غير منته) من المجموعات اذا كانت A_n هي المجموعات المعتبرة فان اتحادها هو $U_n A_n$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي الى احد المجموعات A_n على الاقل.

ثانيا- التقاطع: نعرف تقاطع مجموعتين A وB على انه المجموعة $A\cap B = C$ المؤلفة من لعناصر المنتمية في ان واحد الى A والىB.

الشكل 02: تقاطع مجموعتين



اذا اعتبرنا مثلا مجموعة الاعداد الصحيحة الزوجية ومجموعة الاعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على3، وجدنا ان تقاطعهما هو مجموعة الاعداد الصحيحة التي تقبل القسمة على6. اما تعريف تقاطع عدد كيفي(منته او غير منته) من المجموعات A_n فهو تعريفا المجموع $\cap_n A_n$ المؤلفة العناصر المنتمية في ان واحد الى كل المجموعات A_n

تبين التعاريف السابقة ان اتحاد وتقاطع المجموعات عمليتان تبديليتان وتجميعيتان اي ان:

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$$

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}, (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$$

ومن جهة اخرى نشير الى ان كل من العمليتين توزيعيتين بالنسبة للأخرى

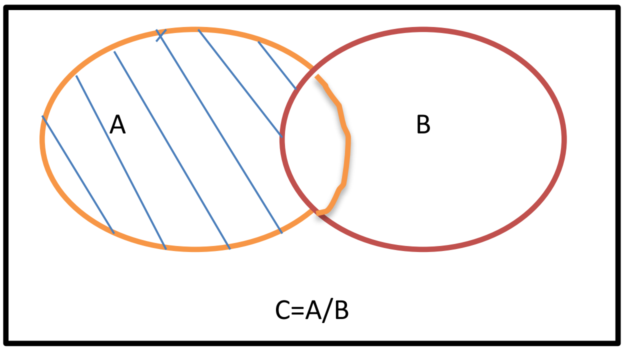
$$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C})$$

$$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$$

ثالثا – الفرق التناظري بين مجموعتين:

نعرف الان عملية الطرح على المجموعات او الفرق بين مجموعتينAوBهو تعريفا المجموعةA/B=C المؤلفة من عناصر A التي لا تنتمي الى B . تكتب احياناA–B بدلا من A/B

الشكل 03:الفرق التناظري بين مجموعتين



والفرق التناظري لمجموعتين Aو Bهو تعريفا اتحاد الفرقين A/B و B/A نرمز للفرق التناظري لمجموعتينAو B بـ $A\Delta B$ وهكذا ياتي تعريفا $A\Delta B = (A/B) \cup (B/A)$

كثيرا ما نلجأ الى اعتبار مجموعات كلها اجزاء من نفس المجموعةS(المرجع). تلك هي الحالة التي نجدها عند اعتبار مجموعات عناصرها نقاط من المستقيم العددي يسمى الفرقS/A في هذه الحالة متمم المجموعة ونرمز له بـ C_A او $\bar{A}$.

نلجأ عادة في نظرية المجموعات وتطبيقاتها الى مبدأ بالغ الاهمية ويسمى مبدأ الثنوية وهو يعتمد على العلاقتين التاليتين:

1− متمم الاتحاد يساوي تقاطع المتممات:

$$S/\bigcup_n A_n = \bigcap_n (\frac{S}{A_n})$$

2− متمم التقاطع يساوي اتحاد المتممات:

$$S/\bigcap_n A_n = \bigcup_n (S/A_n)$$

متمم المجموعةA ويرمز له بـ A^C هو مجموعة عناصر المجموعة المرجعية التي لا تنتمي الى A اي:

$A^C = \{x, x \in R, x \in A\}$

الجداء الديكارتي للمجموعات لتكن Aو B مجموعتين من الجداء الدئكارتي لـAو B ونرمز له بـ BXA هو المجموعة المكونة من جميع الازواج (a,b) حيث $a \in A$,$b \in b$ ، اي

AXB= {(a,b) :a$\in A, b \in B)\}$

يمكن تعميم مفهوم الجداء الديكارتي الى عدد منته كيفي من المجموعات، ويكتب الجداء الديكارتي للمجموعاتA_n…… ,A_1 على الشكل:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \dots \dots \times A_n = \prod_{i=1}^{N} A_i$$

وهو المجموعة التي تتكون من كل العناصر ذات n مركبة حيث: $a_i \in A_i$

II-3- جماعة المجموعات: تعرف جماعة المجموعات على انها مجموعة عناصرها مجموعات، ونعتبر فيما يلي، الا اذا اشرنا الى عكس ذلك، جماعات المجموعات كل مجموعة فيها جزء من مجموعة مرجعية وسنهتم اساس بجماعات المجموعات المغلقة بالنسبة لبعض العمليات التي درسناها اعلاه.

1- **الحلقة والحلقة التامة من اجزاء مجموعةΩ:** نقول عن جماعةτ من اجزاءΩ انها حلقة بوليانية او حلقة من Ω اذا تحقق مايلي:

- $\boldsymbol{\emptyset \in \tau}$
- $\boldsymbol{A, B \in \tau \rightarrow A \cup B \in \tau, A \cap B \in \tau, A - B \in \tau}$

ينتج مباشرة من ذلك انه اذا كان $A, B \in \tau$ فان: $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ مجموعة تنتمي الىτ

مبرهنة: اذا كانت τ جماعة من اجزاءΩ فان الشرط اللازم والكافي كي تكون هذه الجماعة حلقة هو ان يتحقق مايلي:

- ✓ $\emptyset \in \boldsymbol{\tau}$
- ✓ $\boldsymbol{A, B \in \tau \rightarrow A\Delta B \in \tau, A \cap B \in \tau}$

وهكذا تكون الثلاثية$(\tau, \Delta, \cap)$ حلقة بالمعنى الجبري المعروف.

2- **تعريف الحلقة التامة:** نقول عن τ من اجزاءΩ انها حلقة تامة او سيغما حلقة اذا كانت τ حلقة وتحقق الشرط التالي :

$$\boldsymbol{si A_1, A_2, \dots \subset Alors \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \in \tau}$$

وهذا يعني ان اتحاد اي متتالية من عناصر τ هو عنصر من τ

مثال: اذا كانت$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ مجموعة نتائج رمي حجر النرد مرة واحدة وكانت :

$\tau_1 = (\emptyset, (1), (2,3), (1,2,3))$ جماعة من اجزاء Ω

$\tau_2 = (\emptyset, (1,2), (2,3), (1,2,3))$ جماعة ثانية من اجزاء Ω

$\tau_3 = \vartheta(\Omega)$ جماعة اجزاء

فان ${}_1$ حلقة وكذلك τ_3 ولكن τ_2 ليست حلقة.

3− **الجذور البوليانية:** لنفرض ان Ωمجموعة غير خالية و $A \Subset 2^{\Omega}$ جماعة من اجزائها نقول ان $\mathcal{A}$ جبر بولياني او جبر من اجزاء Ω اذا تحقق مايلي:

1. $\emptyset \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
2. A,B$\in \Omega \rightarrow \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}\, , \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
3. $\boldsymbol{\Omega} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$

وينتج من ذلك ان $\boxed{\blacksquare}$ يكون جبرا اذا كانت $\boxed{\blacksquare}$ حلقة مغلقة بالنسبة لعملية التتميم.

4-**تعريف الجبر التام(العشيرة):** نقول عن جبر$\boxed{\blacksquare}$ من اجزاء Ω انه جبر تام او سيغما جبر اذا وفقط اذا كان مغلقا بالنسبة للاتحاد العدود اي اذا كان محقا الشرط:

$$\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_2}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .\boldsymbol{A_n} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \rightarrow \bigcup_{\boldsymbol{n}=\boldsymbol{1}}^{\infty} \boldsymbol{A_n} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

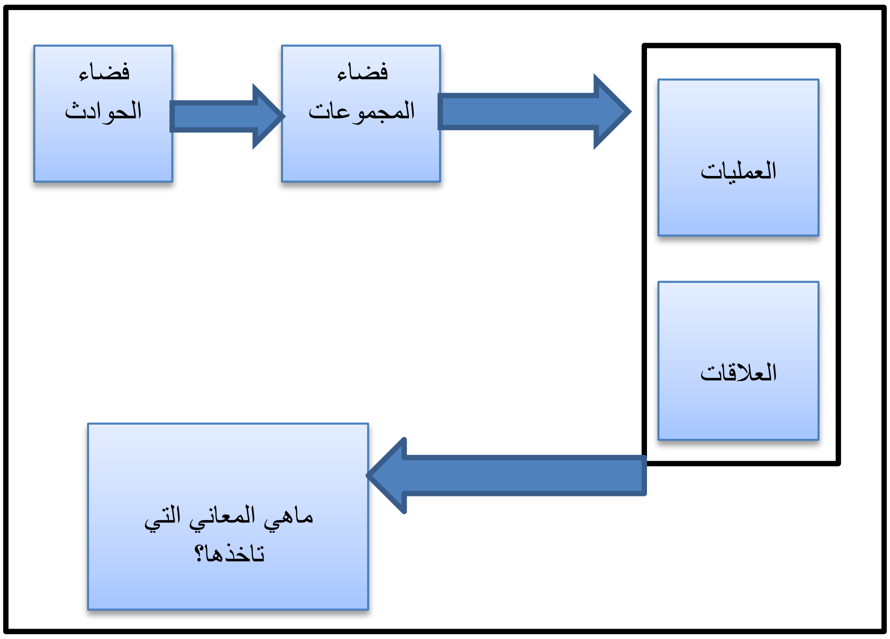
وعندئذ نسمي الثنائية$(\mathcal{A},\Omega)$ فضاءا قيوسا او بلغة الاحتمالات فضاء قابل للاحتمال.

ان 2^n جماعة جميع المجموعات الجزئية Ωهي جبر تام(عشيرة) كذلك الصف$\{\emptyset, \Omega\}$=A .

III- العلاقة بين العمليات على المجموعات والعمليات على الحوادث:

من السابق تبين لنا انه بالإمكان استخدام نظرية المجموعات للتعبير عن الحوادث، كما تبين لنا ان هناك العديد من العمليات التي يمكن اجراؤها على المجموعات والسؤال المطروح، ماهي المعاني التي تأخذها هذه العمليات اذا انتقلنا من جبر المجموعات الى جبر الحوادث؟

الشكل 04: العلاقة بين العمليات على المجموعات والعمليات على الحوادث

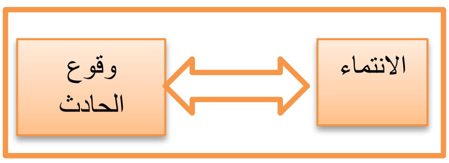


اولا: وقوع الحادث: لقد ميزنا في الفقرات السابقة بين:

- ✓ وقوع الحادث الابتدائي
- ✓ وقوع الحادث المركب

ان وقوع الحداث الابتدائي هو حادث يمكن ملاحظته بشكل مباشر عند القيام بالتجربة العشوائية، فاذا تمثلت التجربة العشوائية في القاء زهرة النرد واذا انصب الاهتمام بحادث الحصول على الرقم4، فعندها نقول ان الحداث قد تحقق اذا كان4 $= \omega$ هو نتيجة التجربة. وبخلاف اذا انصب اهتمامنا بالحادثA حادث الحصول على عدد زوجي، فإننا نقول ان الحادث قد تحقق، اذا كانت نتيجة التجربةω عدد زوجي، ولكن ماهي كل النتائج الممكنة التي تمتلك خاصية هذا الحادث A، ولنتذكر ان قرنا بكل حادث مركب مجموعة جزئية منΩ وعليه فان حادث الحصول على عدد زوجي يقترن بالمجموعة الجزئيةA={2.4.6}، ان كل عناصر المجموعة الجزئيةA تؤدي الى وقوع الحادث، وبما انω هو نتيجة التجربة العشوائية، فاذا قيل لنا ان$\omega \in A$ عندئذ نتيقن ان الحادثA قد تحقق. ومن جهة اخرى اذا قيل لنا ان Aقد تحقق فلننا نكون متأكدين بان$\omega \in A$.

- **الانتماء:** على هذا الاساس فان الانتماء في جبر المجموعات تصبح وقوع الحداث في لغة الحوادث ومنه نستنتج معنى الانتماء في المجموعات



وعليه المقصود بالانتماء هو انتماء نتيجة التجربة ω وعليه يمكن القول بان الحادثX قد وقع.

- **الاحتواء:** لقد اعطينا في الفقرة اعلاه تفسيرا لعلاقة الانتماء عندما انتقلنا من المجموعات الى الحوادث، وهنا يمكن تعريف علاقة اخرى فيما بين المجموعات وهي علاقة الاحتواء، فماذا تعني هذه العلاقة في فضاء الحوادث فاذا كنا ازاء حادثينAو B فماذا تعني علاقة$A \subset B$

مثال: نتيجة رمي زهرة النرد هو رقم اصغر من 3، نتيجة رمي زهرة النرد هو الرقم اصغر من5

- ان المجموعة الجزئية المرفقة بالحادث الاول هي{1.2}=A
- اما المجموعة الجزئية المرفقة بالحادث الثاني هي {1.2.3.4}=B

ان قولنا ان الحادث الاول محتوى في الحادث الثاني يعني ان: المجموعة الجزئية المرفقة بالحادث الاول محتواه في المجموعة الجزئية المرفقة بالحادث الثاني. وبهذا المعني فان وقوع الحادثA يؤدي الى وقوع الحادثB وهذا هو المعنى الذي تأخذه علاقة الاحتواء في فضاء الحوادث اي:

وقوع الحادثA يستلزم وقوع الحادثB يكافئA⊂B

اذا افترضنا انA قد وقع فهذا يعني$\omega \in A$ وبما ان A⊂B فان $\omega \in B$ اي ان B قد وقع.

ملاحظة: عندما درسنا العلاقة بين جبر الحوادث وجبر المجموعات لم نتطرق لبعض الجزئيات، وعليه يمكن توضيح مايلي:

- من بين المجموعات الجزئية للمجموعة الاساسية Ω المجموعة Ωنفسها، كما يتبين لنا ان المجموعة الجزئية المرفقة بالحادث الحصول على رقم اقل من 7 هي نفسها المجموعةΩ ان هذا الحادث يتحقق دوما وذلك مهما كانت نتيجة الرمي، نقول عن هذا الحادث بانه **الحادث الاكيد**.
- اشرنا سابقا بان المجموعة الخالية$\emptyset$ هي مجموعة جزئية من اي مجموعة، ان المجموعة الجزئية المرفقة بحادث الحصول على رقم اكبر من6 هي المجموعة الخالية$\emptyset$. ان هذا الحادث لا يمكنه ان يتحقق وذلك مهما كانت نتيجة التجربة العشوائية. لذا يسمى هذا الحادث **بالحادث المستحيل**.
- من بين المجموعة الجزئية للمجموعةΩ هناك المجموعات وحيد العنصر، وبالنسبة اليها فان العناصر هي حوادث ابتدائية، اما المجموعات الجزئية وحيدة العنصر هي **حوادث مركبة،** فاذا انصب اهتمامنا عند القاء زهرة نرد على حادث الحصول على عدد زوجي مضاعف للعدد3، عندها فان المجموعة الجزئية المرفقة بهذا الحادث هي المجموعة{6}=Y وهو حادث مركب وهو يختلف عن الحادث الابتدائي6 الذي يعتبر احدى نتائج اجراء التجربة.
- ان عدد الحوادث الممكنة للتجربة العشوائية يساوي عدد المجموعات الجزئية التي يمكن تكوينها بالاعتماد على عنصر Ω اي 2^{Ω}.

- عندما يؤدي تحقق الحادثA الى تحقق الحادثB يكون لديناA⊂B
- نقول عن حادثين انهما متنافيان اذا كان وقوع احدهما ينفي وقوع الاخر بمعنى استحالة وقوعهما معا اي $A \cap B = \emptyset$
- نقول عن الحوادث A.B.C حوادث شاملة اذا حققت الشروط التالية:
  1- اذا كانت احداهما واجبة الحدوث ولا تساوي$\emptyset$
  2- اذا كان اتحادهما$A \cup B \cup C = \Omega$
  3- اذا كانت الحوادث متنافية مثنى مثنى

ثانيا- العمليات على الحوادث: انصب اهتمامنا في الفقرة اعلاه على تحديد معني بعض العلاقات عند الانتقال من فضاء المجموعات الى فضاء الحوادث، وهاته الفقرة تكمل ما جاء اعلاه، اذ تهتم بالمعاني التي تأخذها بعض العمليات عند الانتقال من فضاء المجموعات الى فضاء الحوادث.

أ- **التقاطع: تحقق حادثين معا A∩$\boldsymbol{B}$:** ليكنA حادث الحصول على مجموع اكبر او يساوي4

ليكن B حادث الحصول على مجموع اصغر تماما من6

نرمز بـ $A \cap B$ الحادث الذي يحقق Aو B معا. يمكن تعريف هذا الحادث على النحو التالي الحصول على مجموعt بحيث: $4 \leq t < 6$

ومنه: $A \cap B = \{(1.3), (1.4), (2.2), (3.1), (3.2), (4,2)\}$

وبصورة عامة، اذا كانت نتيجة التجربةω تنتمي الى تقاطع المجموعتين الجزئيتين المقرونتين بالحادثين محل الاهتمام، فهذا يعني ان كلا الحادثين قد تحقق. وبهذا نصل الى النتيجة ان التقاطع يعني في اطار المجموعات الجزء المشترك، اما في اطار الحوادث يعني وقوع الحادثين معا(انيا) (ان الحادثين قد تحققا معا).

ملاحظة: اذا كان لدينا $A \cap B = \emptyset$ هذا يعني ان المجموعتينAو B منفصلتان، وهذا يعني في اطار جبر الحوادث ان وقوع الحادثين معا مستحيل. ونسمي الحادثين الذين لا يمكن ان يقعا معا في اطار تجربة عشوائية بالحادثين المتنافين.

ب- **الاتحاد: تحقق حادث على الاقل $\boldsymbol{A \cup B}$** : الحادث $A \cup B$ يمثل تحقق احد الحادثين على الاقل فاذا كانC حادث الحصول على مجموع يساوي3 اي:

C={(1.2),(2.1)} فان $A \cup B$= الحصول على مجموع يساوي او اكبر من3

في الحالة العامة، اذا كانت نتيجة التجربة العشوائية تنتمي الى اتحاد المجموعتين الجزئيتين المقترنين بالحادثين فهذا يعني ان احد الحادثين على الاقل قد تحقق. وعلى هذا الاساس تكون لدينا النتيجة التالية في اطار جبر المجموعات فان الاتحاد يعني العناصر التي تنتمي الى احد المجموعات الجزئية، اما في اطار جبر الحوادث فالاتحاد يعني تحقق احد الحادثين على الاقل تحقق(وقوع) احد الحادثين على الاقل.

ملاحظة: نعلم في دراستنا للمجموعات بان اتحاد مجموعة جزئية مع متممتها يساوي المجموعة المرجعية، وان تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية بمعنى اذا كانتΩ هي المجموعة المرجعية و a مجموعة جزئية منΩ عندها يكون لدينا:

$$\mathbf{1}.\ \boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\Omega}$$
$$\mathbf{2}.\ \boldsymbol{A} \cap \overline{\boldsymbol{A}} = \emptyset$$

وهذا يعني ان كل عنصر من عناصرΩ اما ان ينتمي الى A او $\overline{A}$ وانه لا يمكن ان ينتمي الى المجموعتين معا، ونقول عندها ان الجماعة$(A,\overline{A})$ تشكل تجزئة لـΩ واذا ما انتقلنا الى جبر الحوادث عندها نحصل على:

$$\boldsymbol{A} \cup \overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\Omega}$$

ان وقوع احد الحادثين مؤكد $A \cap \overline{A} = \emptyset$ يستحيل وقوع الحادثين معا.

ج- الفرق التناظري بين حادثين $\boldsymbol{A\Delta B}$او $\boldsymbol{A - B}$:

عرفنا الفرق التناظري بين مجموعتين جزئيتين في الفقرة السابقة عندما ذكرنا بنظرية المجموعات، ولكن ما هو المعنى الذي يأخذه الفرق التناظري عند الانتقال من نظرية المجموعات الى جبر الحوادث؟ مثلا لنفرض انه بعد اجراء رمي زهرة النرد قيل للاعبين نتيجة التجربة كانت$A\Delta B = \omega$ فلم تظهر علامات الفرح على اي من اللاعبين، فما تفسير ذلك؟ عندها اسر لنا احد اللاعبين بان$A\Delta B = \omega$ يعني ان $\omega \in A$ فقط او$\omega \in B$ فقط، وهذا يعني ان احد الحادثين فقط قد تحقق، وبهذه المعلومة لا ندري اي منا قد ربح. ومنه نستنتج انه في الحالة العامة اذا كانت نتيجة التجربة العشوائية$\mathcal{W}$ تنتمي الى الفرق التناظري للمجموعتين الجزئيتين المقترنتين بالحادثين فهذا يعني ان احدهما وفقط احدهما قد تحقق. وعليه فان: $A\Delta B$ تحقق احد الحادثين فقط دون الاخر. لقد تمكنا في الفقرات اعلاه من المطابقة بين فضاء المجموعات وفضاء الحوادث، وسواء اكان ذلك بالنسبة للكائنات او العلاقات او العمليات، وبهذا يصبح بالإمكان الاستفادة من كل نتائج نظرية المجموعات كما يمكننا استخدام البراهين على الحوادث باعتبارها مجموعات لكن السؤال المطروح هو لماذا زودنا الحوادث بهذه العمليات؟

ان لدينا فضاء يتكون من كائنات(حوادث) واذا كانت لدينا معلومات حول بعض الكائنات المكونة لجزء من الفضاء فكيف يمكننا توليد المعلومات حول الجزء المتبقي من الفضاء. العملية هي التقاطع والاتحاد.

وتسمى هذه الاجراءات بقواعد حساب الاحتمال، وهذا ما سنحاول دراسته في المباحث القادمة، واكن قبل ذلك علينا تعرف ما المقصود بالمعلومة "حظ ظهور الحادث" والتي تسمى الاحتمال.

IV- مفاهيم وقواعد حساب الاحتمالات.

IV-1- تعاريف حول الاحتمال

1- التعريف الكلاسيكي او التقليدي للاحتمال(الاحتمال السلفي):

لكل حادثةA يمكن ان تسفر عليها تجربة عشوائية يمكننا ان نحدد رقما معينا نرمز له بـP(A) ويقرا احتمال(A)، ليعبر عن فرصة (A) في الحدوث، فاذا فرضنا اننا نريد احتمال ظهور وجه الصورة عند قذف قطعة معينة من النقود نموذجية في تناظرها وتوازنها فنقول: بما ان النتيجة واحدة من اثنين اما صورة او كتابة وبما ان قطعة النقود متوازنة تماما، فيمكن ان تتوقع ظهور نتيجتين بنفس التكرار" التواتر" اي نتوقع ظهور الصورة بنسبة النصف في المدى الطويل، وبالتالي نقول ان احتمال ظهور وجه الصورة ½ ومثل هذا التحليل يقودنا الى التعريف التقليدي للاحتمال.

مثال: نرمي قطعة نقود ثلاث مرات متتالية الواحدة بعد الاخرى، فان فضاء العينة لهذا المثال هو:

$$\Omega = \{(P.P.P),(P.P.F),(P.F.P),(P.F.F),(F.P.P),(F.P.F),(F.F.P),(F.F.F)\}$$

نلاحظ من خلال هذا المثال ما يلي:

- ✓ ان فضاء العينة هو منته ومعروف مسبقا ويساوي 8 ونتائجه مختلفة الواحدة عن الاخرى
- ✓ ان حظ تحقق اي نتيجة او حاله هو مساو بالنسبة لجميع الحالات ويساوي$1/8$ اي ان لكل عنصر من فضاء العينة نفس احتمال الحدوث المتعلقة بتجربة عشوائية لمجتمع احصائي فضاء عينته غير منته، وان حجم المجتمع كبير او اذا كانت عناصر فضاء العينة غير متساوي احتمال الحدوث ولحساب الاحتمال بحسب التعريف الاحصائي نقوم بإجراء التجربةN من المرات. ولنفرض ان الحادثة المرغوبةA قد وقعتn مرة، فان الاحتمال التجريبي او الإحصائي لحدوث الحادثةA ويعرف بانه عدد المرات حدوث الحادثةA منسوبا الى العدد الكلي من المرات التي اعيدت فيها التجربة اي ان:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\text{عدد الحالات التي تحققت فيها الحادثة المرغوبة}}{\text{عدد مرات اجراء التجربة}} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}}$$

N: هو اصلي المجموعة الاساسية

n: هي الحوادث الابتدائية المحققة للتجربة

ولا يمكن تطبيق التعريف بهذه السهولة والوضوح دائما، فلا بد ان ننتبه الى صفتي "التنافي" و" الافضليات المتساوية". اذا لنفرض اننا قذفنا قطعة من النقود مرتين، واننا نريد احتمال الحصول على وجه صورة في كليهما، فيمكن القول ان هناك ثلاث اشكال ممكنة للنتيجة، فإما ان نحصل على صورتين او كتابتين او نحصل على صورة مرة وكتابة مرة، وواحدة من هذه الاشكال الثلاثة تعطى نتيجة المطلوبة اي الحصول على صورتين، اذن فالاحتمال المطلوب هو $1/3$ وهذا التحليل خطأ بالطبع لان الاشكال الثلاثة التي ذكرناها ليس لها نفس الافضلية، والثالث منها اي الحصول على الصورة مرة والكتابة يمكن ان يحصل بطريقتين، فإما ان نحصل على الصورة في القذفة الاولى والكتابة في القذفة الثانية، او نحصل على الكتابة في القذفة الاولى والصورة في القذفة الثانية، وهكذا نجد اربعة اشكال ممكنة بأفضليات متساوية، بفرض انF ترمز للصورة وP وترمز للكتابة(F,P),(P.P),(P.F),(F.F) والشكل الاول يؤدي الى النتيجة المطلوبة بينما لا تؤدي اي من الاشكال الثلاثة الباقية، وبالتالي فان الاحتمال الصحيح$1/4$ وسنجد نفس التحليل فيما لو كانت التجربة هي قذف قطعتي نقود متماثلتين مرة واحدة.

نلاحظ من هذا التعريف ان الاحتمال هو دائما عدد بين الصفر والواحد بما فيه الصفر والواحد نفسيهما، فبالنسبة$\frac{n}{N}$ لا بد ان تكون كسرا عاديا طالما انN وهو عدد كل النتائج الممكنة لا يمكن ان يكون اصغر من عدد النتائجn وهو عدد النتائج التي تؤدي الى وقوع A فحسب. واذا كانت الحادثة اكيدة الوقوع فاحتمالهما الواحد، اما اذا كان محتما الا تقع فاحتمالهما صفر، وهكذا فاحتمال الحصول على8 عند قذف قطعة نرد هو صفر بينما احتمال الحصول على عدد اقل من10 عند قذف قطعة نرد فهو واحد. وتسمى احتمالات التي يحددها التعريف الكلاسيكي هذا الاحتمال" السلفي" ويمكن ان نطلق عليه اصطلاح "الاحتمال الاستنتاجي" فعندما نقول ان احتمال الحصول على وجه "الصورة" عند قذف قطعة نقود هو$1/2$ فإننا نصل الى هذه النتيجة بمنطق استنتاجي. فالنتيجة هذه ليست بحاجة الى قذف اي قطعة نقود فعلا وقد لا يكون لدينا اي قطعة نقود نقذفها وانما استنتجنا بشكل منطقي انه اذا كانت قطعة النقود صحيحة تماما فان احتمال وجه الصورة هو$1/2$.

ولم نقل شيئا بالطبع عن امكانية تحديد ما اذا كانت قطعة نقود معينة بين ايدنا صحيحة ام لا. ولا يضرنا في بناء الحساب الاحتمالي تصور اشياء نموذجية فهذا امر طبيعي في بناء الرياضيات بشكل عام فالهندسة مثلا تعالج الدائرة التامة التي لا توجد الا في الذهن والخطوط التي لا عرض لها ومع ذلك فهي فروع من فروع المعرفة يعكس في تطبيقاته العملية مسائل لا يمكن انكار اهميتها الفائقة وفوائدها.

- **عيوب التعريف الكلاسيكي:**

1- يشترط تطبيق التعريف الكلاسيكي للاحتمال ان يكون فضاء العينة منتهيا

2- يشترط ان يكون لجميع عناصر فضاء العينة نفس الحظ في الحدوث

وقد يصادف ان لا يتحقق احد هذين الشرطين او كلاهما، فقد يكون فضاء العينة غير منته، كما في قياس عمر جهاز الكتروني، او قد لا يكون لجميع عناصر فضاء العينة نفس الحظ في الظهور.

2- احتمال التواتر(الاحتمال الاستقرائي): قذفت قطعة نقود تبدو متوازنة ومتناظرة مئة مرة وسجلت النتائج في الجدول ادناه:

الجدول 03: نتائج قذف نقود100مرة

التكرار النسبي المتوقع في المدى الطويل	التكرار النسبي	التكرار	النتيجة
0.5	0.56	56	صورة
0.5	0.44	44	كتابة
1	1	100	المجموع

والشيء الذي يستحق الملاحظة هو ان التواتر النسبي لوجه الصورة يميل الى الاستقرار او مقتربا من1/2، وهذا ليس مفاجئا فتناظر قطعة النقود يجعلنا نتوقع سلفا ان وجه الصورة سيظهر حوالي نفس عدد المرات التي يظهر فيها وجه الكتابة.

وفي تجربة اخرى قذفت زهرة النرد 300مرة وسجلت النتائج في الجدول ادناه:

الجدول 04: نتائج قذف زهرة نرد300مرة

التواتر النسبي المتوقع في المدى الطويل لقطعة متوازنة	التواتر النسبي	التواتر	النتيجة
0.16667	0.170	51	01
0.16667	0.180	54	02
0.16667	0.160	58	03
0.16667	0.170	51	04
0.16667	0.163	49	05
0.16667	0.157	47	06
1.000	1.000	300	المجموع

نلاحظ مقدار اقتراب التواتر النسبي لظهور كل من الاوجه1، 2، 3، 4، 5، 6 من القيمة1/6 وهذه النتائج ايضا غير مفاجئة طالما ان قطعة النرد متوازنة ومتناظرة، وهذا يدعو الى اعتبار التواتر النسبي في الجدول04 كتقريب او تقدير اولي لاحتمال ظهور وجه معين من وجهي قطعة النقود عند قذفها، والى اعتبار التواتر النسبي في الجدول04 كتقريب لاحتمال ظهور كل الاوجه الستة عند قذف قطعة النرد.

وفي الحقيقة يبدو منطقيا في تجربة قطعة النقود ان نفرض وجود عندP هو احتمال وجه الكتابة. واذا بدت القطعة المتوازنة تماما ومتناظرة فيمكننا ان نستخدم التعريف في الاحتمال ونقول انP تساوي على وجه التقريب1/2، او يمكننا تقديرP بطريقة اخرى تجريبية فتقذف القطعة عدد كبيرا من المرات ونسجل النتائج كما هي في الجدول04، ثم نعتبر التواتر النسبي لوجه الكتابة كتقريب لقيمةP وفي حالة قطعة النرد يمكننا تقدير احتمالات ظهور كل من الاوجه الستة وهي$P_1 .P_2.P_3.P_4.P_5.P_6$ وان كل منها تساوي تقريبا1/6، مستفدين من التعريف السابق، ومن المظهر المتناظر لقطعة النرد، او نلجأ لتقدير هذه الاحتمالات. من الجدول04 نقول انP_2 تساوي تقريبا التواتر النسبي المقابل للوجه2 في الجدول هكذا.

والمهم هنا اننا يمكن ان نفترض وجود عددP_2 يعبر عن احتمال ظهور وجه الكتابة ووجودP_2 يعبر عن احتمال ظهور الوجه2 عند قذف قطعة نرد، وفي هذين المثالين لا يبدو مهما جدا ايهما نستخدم التعريف السلفي في الجدول03 او التعريف الوارد في هذه الفقرة والذي يعتمد على فكرة التواتر النسبي.

ولكن لنفرض ان قطعة النقود غير متوازنة بحيث يبدو مؤكدا لنا ان وجهي القطعة لا يتمتعان بنفس الافضلية في الظهور عند قذف القطعة، ففي هذه الحالة لا يزال ممكنا ان نفترض وجود العددP الذي يمثل احتمال ظهور وجه الكتابة. الا ان التعريف التقليدي في الجدول03 لا يفيدنا في تقديرP ولا بد لنا ان نلجأ لطريقة التواتر النسبي.

وفي كثير من التحريات العلمية نواجه تساؤلات من النوع الذي لا يمكن التنبؤ بنتائجه سلفا، فلنفرض مثلا اننا نريد ان نتنبأ بجنس اول طفل سيولد في مدينة باتنة، وبالطبع لا يمكننا معالجة المسألة في نطاق الحادثة بمفردها وانما في سياق مجموعة الولادات التي تمت في باتنة، ونجد في مثل هذه الحالات ان هناك نوعا من النزوع الى ان يكون مجرى الحوادث المتواترة منتظما وهو شبيه بنزوع التواتر النسبي لظهور وجه الكتابة للاستقرار حول قيمة معينة(1/2 في حالة قطعة نقود متوازنة) فاذا وجدنا، مثلا من سجلات الولادات السابقة ان 51% من الولادات كانت ذكورا فيكون معقولا ان نفترض احتمال كون مولود جديد ذكرا هوP، وان نعتبر0.51 كقيمة تقريبية لـP والاحتمال الذي نحصل عليه بهذه الطريقة يسمى احيانا بالاحتمال الاحصائي.

نلاحظ ان هذا التعريف لا يساعد في اعطاء قيمة او حتى معنى لاحتمال وقوع حادث غير قابل للتكرار، مثلا" هل يسقط الثلج في 25اكتوبر2990" وهذا ما يحد من مجال تطبيق حساب الاحتمالات.

غير ان النقد الاساسي لهذا التعريف يتمثل بان التعريف يستند الى قانون الاعداد الكبيرة، بيد ان هذا القانون هو نظرية الاحتمال والتي تفترض انه تعريف الاحتمال، وبهذا نكون بصدد حلقة دائرية. وعليه يمكن ان نستنتج:

- **عيوب التعريف الاحصائي(التكرار النسبي):** ان قيمة P(A) هي قيمة تقريبية ومتغيرة ومرتبطة بعدد مرات اجراء التجربةN وانه لا توجد قيمة لـN (N_0)بحيث عندما تصلهاN تكون النسبة $\frac{n}{N}$ ثابتة لجميع

قيم N التي هي اكبر من N_0 وتجدر الاشارة الى انه لا يمكننا معرفة قيمة الاحتمال حسب هذا التعريف الا بعد اجراء التعريف.

3- الاحتمال حسب مسلمات كولمجوروف: تعتبر مسلمات كولمجوروف من اكثر تعاريف الاحتمال اضافة وقبل التعرض لهذه المسلمات نعطي بعض التعاريف التي تساعد في استيعاب هاته المسلمات:

- ان هذا النموذج هو نموذج نظري، قد لا يكون له ما يناظره في الحياة الواقعية لكنه يوفر معيارا مفيدا للمقارنة مع تعاريف اخرى للاحتمال.
- اذا عرفنا الحادث*A* بالنسبة لمثالنا اعلاه بانه حادثة حصولنا على وجه الكتابة*F* في الرميات الثلاث(الحالة الملائمة) فان احتمال حدوث او نرمز له*P(A)* حسب التعريف الكلاسيكي يساوي الى النسبة بين عدد الحالات الملائمة الى عدد الحالات الممكنة، او النسبة بين عدد عناصر المجموعة الجزئية الممثلة للحادث*A* وعدد عناصر فضاء العينةΩ بشرط ان يكون 1و2 محققين اي:

$$\boldsymbol{P(A)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$$

4- الاحتمال الموضوعاتي: راينا في الفصل السابق ان المجموعة الاساسية تشمل جميع النتائج الممكنة التي يمكن ان تسفر عليها التجربة العشوائية وكل عنصر من هذه المجموعة يسمى حادثا ابتدائيا او بسيطا، كما بينا ان كل مجموعة جزئية من Ω يمكن اعتبارها حادثا، كما عرفنا العشيرة- سيغما جبر- لجماعة اجزاء Ω.

اولا: الفضاء القابل للاحتمال: نعرف جماعة مجموعات على انها مجموعة عناصرها مجموعات. ونعتبر فيما يلي جماعة مجموعات كل مجموعة فيها جزء من مجموعة مرجعية(مجموعة فضاء العينةΩ) وسنهتم اساسا بجماعات المجموعات المغلقة بالنسبة لبعض العمليات من اجزاء المجموعةΩ والتي يطلق عليها $\boxed{\blacksquare}$ جبر او عشيرة نقول عن جماعة ح من اجزاءΩ انها عشيرة او $\boxed{\blacksquare}$ جبر من Ω اذا تحقق ما يلي:
$\forall A \in$ ح. $\overline{A} \in$ ح

يعرف الفضاء القابل للاحتمال بانه الزوج$(A.\Omega)$ حيث $\boxed{\blacksquare}$ هي عشيرة- سيغما جبر- لجماعة من اجزاء المجموعة الاساسيةΩ.

1. **الفضاء الاحتمالي:** اذا وافق كل حادثة A من العشيرة$\boxed{\blacksquare}$ احتمال نرمز له بـP(A) وهو عبارة عن عدد حقيقي يحقق مجموعة من المسلمات فاننا نكون بصدد الفضاء الاحتمالي اي الثلاثية(P, A, Ω) .
2. **مسلمات التابع(P(A:**

- ✓ P(A) معرف من اجل كل حادثة A اي انه اذا كانتA في■ فانه يوافق Aعدد حقيقيP(A) وهده المسلمة تعني ان P(A) تابع مجموعاتي معرف على■.

ليكن(ح،Ω) فضاء قابل للاحتمال، الاحتمالP على هذا الفضاء هو تطبيق معرف على ح ياخذ قيمة في المجال [0.1] يحقق المسلمات:

- ✓ $\boldsymbol{P(A)=1}$
- ✓ **من اجل الحوادث{A_i ∈ ح ;i∈ N} المتنافية(i≠J)** ← $\boldsymbol{A_i \cap A_J = \emptyset}$
- ✓ $\boldsymbol{P(\bigcup_{i\in N} A_i) = \sum_{i\in N} P(A_i)}$

$$\boldsymbol{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)}$$

نقول عن الثلاثية $(P.ح.\Omega)$ انها فضاء احتمالي، ناشئ عن تجربة عشوائية مجموعتها Ω

من مسلمات كولمجوروف اعلاه يمكننا ان نستنبط الخواص التالية:

1. Si $A \in ح$ $Alors\ P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

لدينا$A \cap \overline{A} = \emptyset$ و $A \cup \overline{A} = \Omega$:هذا يؤدي الى

2. $P(\Omega) = 1 = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

3. $P(\emptyset) = 0$ احتمال الحادث المستحيل

يكفي تطبيق الخاصية الاولى(1) وهذا بوضع $A = \Omega$

4. **اذا كان $\boldsymbol{B}$ ∈ ح, $\boldsymbol{A}$ ∈ ح حيث $\boldsymbol{A \subset B}$ فان: $\boldsymbol{P(A) \le P(B)}$ وذلك ان:**

$$B = A \cup (\overline{A} \cap B);\quad A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$$

ومنه: $P(B) = P(A) + P(\overline{\ } \cap B)$ و$P(\overline{A} \cap B) \ge 0 \Longrightarrow P(B) \ge P(A)$

تنبيه: ان المتراجحة مابين الاحتمالات تؤخذ بمعناها الواسع

5. **اذا كان A وB حادثان من ح فان:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ففي الواقع لدينا:

$$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B) \text{ و } A \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$$

ومنه: $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$

ولدينا ايضا:

$$B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \text{ مع } (A \cap B) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$$

ومنه:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

وبتوليف النتيجتين يكون لدينا: $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$

ويمكن تعميم النظرية اعلاه لأكثر من حادثين فاذا كانت لدينا الحوادث المتنافية $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

التعريف ان قانون الاحتمال هو قياس موجب اي ان نظرية الاحتمالات هو جزء من نظرية الاحتمالات.

ان التعريف الموضوعاتي للاحتمال لا يبين لنا اي قانون احتمال يمكن تعريفه علىΩ من بين كب القوانين الممكنة على كثرتها فوجود التابع P لا يعني وحدانيته على الدوام.

مما تقدم يتبين لنا صعوبة ايجاد تعريف خال من النواقص للاحتمال ومع هذا يمكن الجزم بان النماذج الاحتمالية قد اثبتت فائدتها في العديد من التطبيقات، وهي كغيرها من النماذج عبارة عن تبسيط للواقع مما ان التعريف الانف الذكر هو تعريف الاحتمال وفق مفهوم كولمجوروف او ما يسمى بالتعريف الموضوعاتي للاحتمال. ويتبين لنا من هذا يستدعي مجابهة فروضها دوما بالوقائع.

وعلى اساس ما تقدم يمكن تقديم تعريف الفضاء القابل للاحتمال على النحو التالي:

نسمي فضاء قابل للاحتمال الزوج(ح.Ω) حيث ح تشكل عشيرة من اجزاء Ω.

ثانيا: بعض قوانين الاحتمال: بدانا في الفقرة السابقة بحساب احتمال الحوادث المركبة، في بعض الاوضاع الخاصة حيث توصلنا في حالة كون الحوادث لابتدائية متنافية مثنى مثنى، وكانت هذه الحوادث لها نفس الفرصة في الظهور، واذا كان عدد النتائج" الحوادث" الاولية الذي يؤدي للحادثةA هو n_A فان $P(A) = \frac{n_A}{N}$

وبهذا نكون قد اكتشفنا احدى الطرق لحساب احتمال الحوادث الا هو الاعتماد على الحوادث الابتدائية، غير ان هذه الطريقة تفترض اننا نعرف احتمال ظهور الحوادث الابتدائية او على الاقل احد الفروض التي تسمح لنا بحسابها، والسؤال المطروح هو ما العمل في حالات اخرى اذا لم تكن هذه المعلومات متوفرة لدينا؟ ان الاجابة على هذا التساؤل تقتضي توفر دبيب عمل لحساب احتمال الحوادث المركبة.

واذا كنا بصدد حادث مركب فانه بالإمكان الحصول على طريقتين وهي طريقة الحوادث الابتدائية وطريقة العمليات على الحوادث المركبة.

واذا كنا ازاء الطريقة الاولى، واذ كنا نعلم احتمال الحوادث الابتدائية عندها يمكن حساب احتمال الحادث المركب بكل سهولة.

اما اذا كنا في الحالة الثانية، فهناك عدة بدائل للحصول على الحادث المركب اعتمادا على حوادث مركبة اخرى، اذ يمكن الحصول عليه بإجراء العمليات التالية على الحوادث المركبة. عملية التتميم، عملية الاتحاد والتقاطع.

كما يمكن الحصول على حادث مركب بإجراء كل هذه العمليات مجتمعة وهذا ما يستدعي معرفة حساب احتمال الحوادث المتنافية واحتمال اتحاد الحوادث وتقاطعها، وهذا هو موضوعنا في الفقرات الموالية:

1− حساب احتمال الحادث المتمم: ليكن A حادثا ما، ولنفترض ان احتمالA هو P(A) عندئذ فان احتمال الحادث المتمم لـ Aاي $\overline{A}$ هو: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

البرهان:

$$A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cup \overline{A} = \Omega$$

بالاعتماد على المسلمة نجد : $P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega)$

ولدينا حسب هذه المسلمة $P(\Omega) = 1$ ومنه نجد $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ اي ان: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

مثال: اجتاز احد الطلبة الامتحان اذا علمنا ان احتمال نجاحه هو 0.4 والمطلوب حساب احتمال فشله.

الحل: لنرمز بـA الحادث نجاح الطالب في الامتحان ان $\overline{A}$ احتمال رسوبه في الامتحان وهو الحادث المتمم لـA

ومنه يكون لدينا: $P\left(\overline{}\right) = 1 - P(A) = 1 - 0.4 = 0.6$

2− احتمال اتحاد حادثين(قانون الاحتمال الكلي): لتكن A−B حادثين من الجماعة$\boxed{\blacksquare}$ عندئذ:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

البرهان : لدينا

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$$

$$(A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

$$(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B) = \emptyset$$

$$\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\left(\overline{A}\cap B\right)=\emptyset$$

اي انها متنافية مثنى مثنى ومنه وحسب هذه المسلمة:

$$P(A\cup B)=P\left(\overline{A}\cap B\right)+P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$$

ولدينا:

$$P(A)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P(A\cap B)$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P\left(\overline{A}\cap B\right)$$

ويجمع العلاقتين طرف لطرف نجد

$$\boldsymbol{P(A)+P(B)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P(A\cap B)+P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}$$

نجد:

$$\boldsymbol{P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P\left(A\cap\overline{B}\right)+P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}$$

ومنه:

$$\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

مثال: يتدرب جنديان A.B على اصابة هدف، فاذا علمنا ان كل منهما يطلق طلقة واحدة وان:

- احتمال ان يصيب الجنديA الهدف هو:0.7=P(A)
- احتمال ان يصيب الجنديB الهدف هو: 0.6=P(B)
- احتمال ان يصيب كليهما الهدف معا هو: $P(A\cap B)=0.5$

فما هو :

- احتمال اصابة الهدف؟
- احتمال ان يصيب الجنديA الهدف بمفرده؟
- احتمال ان يصيب الجنديB الهدف بمفرده؟

الحل:

A حادثة اصابة الهدف من طرف الجنديA

Bحادثة اصابة الهدف من طرف الجنديB

C حادثة اصابة الهدف

وعليه يكون لدينا:

P(A)=0.7/ P(B)=0.6 / P$(A \cap B) = 0.5$

1- يمكن ان يصاب الهدف من طرف الجنديA او الجنديB او من كليهما وعليه فان الحادثC يتحقق اذا تحقق على الاقل احدى الحادثين A او B ومنه فان يكتب: $C = A \cup B$

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.5 = 0.8$$

2- لنرمز D لحادث اصابة الهدف من طرف الجنديA فقط حتى يصيب الجنديA الهدف بمفرده يجب ان يتحقق حادثان: ان يصيب الجنديA الهدف وفي نفس الوقت يخطئ الجنديB الهدف وعلى هذا الحادثD هو: $D = A \cap \overline{B}$

ويمكننا كتابة الحادثA على شكل اتحاد حادثين متنافيين:

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$$

$$P(A) = (A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(A) = p(A \cap B) + P(D)$$

$$P(D) = P(A) + P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

لنرمز بـE لحادث اصابة الهدف من طرف الجنديB بمفرده وكما هو في السؤال الثاني:

$$E = \overline{A} \cap B$$

$$B = (A \cap B) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P\left(B \cap \overline{A}\right)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(E)$$

$$P(E) = P(B) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.5 = 0.1$$

3- **احتمال تقاطع حادثين (الاحتمال الشرطي):** بينا في الفقرتين اعلاه كيفية حساب احتمال الحادث المتمم واحتمال اتحاد حادثين، وفي هذه الفقرة سندرس كيفية حساب تقاطع حادثين، ان حساب احتمال التقاطع يقتضي الالمام بالاحتمال الشرطي، الذي يعني حدوث احتمال حادث ما اذ علم حادث اخر، فاذا رمينا زهرة نرد منتظمة فالمجموعة الاساسية كما نعرف هي Ω={$1.2.3.4.5.6$}. فاذا رمزنا لـ A الحادث الحصول على عدد زوجي اي: A={$2.4.6$} وb حادث الحصول على عدد اكبر او يساوي4 اي ان: B={$4.5.6$}.

فاذا قيل لنا ان الوجه العلوي كان عددا زوجيا، فما هو احتمال ان يكون الرقم على الوجه الظاهر اكبر من4، فمن الواضح انه اذا علمنا ان العدد الظاهر على الوجه العلوي هو عدد زوجي فهذا يعني ان الرقم الذي ظهر يجب ان يكون من المجموعة$\{2.4.6\}$ ومنه يكون لدينا: $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

والان ما هو احتمال ان يكون العدد الظاهر اكبر او يساوي4؟

بما ان زهرة النرد منتظمة وعلمنا حدوث$A=\{2.4.6\}$ فاحتمال ظهور عدد يساوي او اكبر من4 ايB هو حادث الحصول على 6 او 4 اي $B\cap$. فيكون احتمال ظهورB علما ان A قد تحقق هو $\frac{2}{3}$.

ونلاحظ: $\frac{2}{3}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

واذا كانC هو حادث الحصول على3.4.5 عندئذ فان: $P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

وعندئذ يتحقق A فان C يتحقق في حالة واحدة، عندما تكون النتيجة4 اي عندما يتحقق الحادث $A\cap C$

وعليه يكون احتمال حدوثC علما ان A قد تحقق هو $1/3$ اي: $\frac{P(A\cap C)}{P(A)}=\frac{1}{3}$

نتيجة: ان الحصول على معلومات اضافية "تحقق الحادثA" يؤدي الى تغيير احتمال الحادث B وc ونكون بالتالي قد ادخلنا مفهوما جديدا هو الاحتمال الشرطي.

تعريف: ليكن P احتمالا معرفا على(ح،Ω) وليكن A حادثا من ح حيث $P(A)\neq 0$ ان الاحتمال علما ان A قد تحقق هو التطبيق P_A الذي يرفق بالحادث B العدد $P_A(B)$:

حيث: $$\mathbf{P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

ويرمز للاحتمال الشرطي بـ $P(B/A)$ ويقرأ احتمال B علما ان A قد تحقق:

لنتحقق ان الاحتمال الشرطي هو احتمال ويحقق مسلمات كولمجروروف الواردة اعلاه:

1. $\boldsymbol{\frac{P(\Omega\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1}$
2. $\boldsymbol{P\left(\frac{\cup_i B_i}{A}\right)=\frac{P((\cup_i B_i\cap A))}{P(A)}=\frac{P(\cup(B_i\cap A)}{P(A)}=\sum\frac{P(B_i\cap A)}{P(A)}=\sum P(B_i/A)}$

ليكن الحادثان A,B من ح حيث $P(B)\neq 0$. $P(A)\neq 0$.

لدينا حسب تعريف الاحتمال الشرطي

$$\boldsymbol{P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}$$

ومنه $$P(A\cap B)=P_A(B).P(A)$$

ومن جهة اخرى:

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(A\cap B)=P_B(A)\ .P(B)$$

وعليه يكون:

$$P(A\cap B)=P_B(A).P(B)=P_A(B).P(A)$$

IV-2-الحوادث المستقلة:

نقول عن حادثين *A* وB انهما مستقلان اذا كان حدوث احدهما مستقلا عن حدوث الاخر، فالنتائج التي نحصل عليها عند رمي زهرتي نرد معا، تمثل حوادث مستقلة عن بعضها البعض، لان حدوث احدهما مستقل عن حدوث الاخر، وكذلك الامر في سحب كرات من صندوق (مع الاعادة) تمثل حوادث مستقلة، وعلى العكس اذا كان السحب بدون اعادة ولمزيد من التوضيح نقول: اذا كان *.A*و *B* حادثين وكان حدوث او عدم حدوث (A) لا يتأثر بحدوث او عدم حدوث(B) نقول عندها A وB مستقلان.

ونقول ان الحادث*A* مستقل عن الحادث*B* اذ تحقق الشرط التالي:

$$P(A/B)=P(A)\text{ و }P(B/A)=P(B)$$

وان قانون الضرب للحوادث المستقلة يعطى بالعلاقة : $P(A\cap B)=P(A).P(B)$

ونشير هنا الى ان الحوادث المستقلة هي ليست حوادث متنافية، وان وقوع *A* لا يمنع من وقوع*B* وان الحوادث غير المتنافية(المتلائمة) قد تكون مستقلة او غير مستقلة وبالنسبة للحوادث المتنافية فان: $P(A/B)=\emptyset$

مثال على الحوادث المستقلة:

1- لنفرض ان لدينا باحثين *A* و*B*يعمل كل منهما على حل مشكلة في الرياضيات بشكل مستقل، ونلاحظ هنا ان الحوادث *A*و*B*مستقلة لان:

$$P(A/B)=P(A)$$

$$P(B/A)=P(B)$$

نلاحظ ان الحوادث غير متنافية، اذ مك الممكن ان يتوصل كلا الباحثين الى حل القضية بالوقت نفسه.

2- ان نجاح محمد في الرياضيات وسفر عبد الله الى الخارج هي حوادث مستقلة وغير متنافية.

مثال: تقدمت مجموعة متكونة من 100طالب لامتحانات السداسي الاول، فاذا علمت ان30طالب قد نجح في امتحان الرياضيات و20منهم قد نجح في امتحان الاحصاء كما نجح 10منهم في الرياضيات والاحصاء

سحبنا بطريقة عشوائية طالبا من بين هذه المجموعة، فما هو احتمال ان يكون الطالب المختار ناجحا في الرياضيات؟

اذ علمت ان الطالب المختار قد نجح في مادة الاحصاء فما هو احتمال ان يكون قد نجح في مادة الرياضيات.

الحل: ان عملية الاختيار قد تمت بصورة عشوائية، لذا فهي حوادث ذات افضليات متساوية ومنه يكون احتمال اي حدث مساوي لعدد الحالات الملائمة على عدد الحالات الممكنة

ليكنA حادث نجاح الطالب في الرياضيات/ ليكن B حادث نجاح الطالب في الاحصاء

حساب$P(A)$

ان عدد الحالات الممكنة يساوي100

ان عدد الحالات الملائمة يساوي20

ومنه $P(A) = \frac{20}{100} = {}^{1}/_{5}$

وبنفس الطريقة نجد ان : $P(B) = \frac{30}{100} = {}^{3}/_{10}$

اذ علمنا ان الحادثB قد وقع فهذا يعني ان عدد الحالات الممكنة هو 30 اما عدد الحالات الملائمة هو10

ومنه: $P(A/B) = \frac{10}{30} = {}^{1}/_{3}$

ومنه يتبين لنا ان المعلومة التي حصلنا عليها بخصوص B قد ادت الى تغيير احتمال الحادثA.

IV-3- نظرية الاحتمال السببي او نظرية بايز: *Théorème ou règle de BAYES*

نفرض ان $A_1 .A_2.....A_n$ احداث متنافية من العشيرة ح وان:

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots . \cup A_n$$

وان B حادث اخر من ح بحيث: $B = B \cap \Omega$

ومنه يكون لدينا:

$$B = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \ldots \cup A_n) \cap B$$

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \ldots \ldots \cup (A_n \cap B)$$

وهي حوادث متنافية مثنى مثنى ومنه يكون لدينا:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots .. + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots .. + P(A_n).P(B/A_n)$$

ولدينا: $P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{p(B_i}$

ومنه يكون :

$$P(A_i/B) = \frac{p(A_i).p(B/A_i)}{P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots .. + P(A_n).P(B/A_n)}$$

وهذا ما يعرف بنظرية بايز.

$$\boldsymbol{P(A_i/B) = \frac{p(A_i).p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i).p(B/A_i)}}$$

مثال: تنتج ثلاث الات M_1,M_2,M_3 بـ 50%.30%.و20% على الترتيب من انتاج مصنع معطى. فاذا كانت نسبة المعيب من انتاج هذه الآلات هي على الترتيب 3%. 4%. 5% فاذا اخترنا وحدة واحدة من انتاج هذا المصنع، فما هو احتمال ان تكون الوحدة المعيبة؟ وما هو احتمال ان تكون الوحدة المختارة هي من انتاج M_2 علما انها كانت معيبة؟

الحل:

لنرمز بـA الحادث "الوحدة المعيبة" ومنه:

$$P(A) = P(A \cap M1) + P(A \cap M2) + P(A \cap M3)$$

$$= P(M1).P(A/M1) + P(M2).P(A/M2) + P(M3).P(A/M3)$$

$$= 0.5 * 0.03 + 0.3 * 0.04 + 0.20 * 0.05 = 0.037$$

$$P(M2/A) = \frac{P(M2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(M2).P(A/M2)}{P(A)} = \frac{0.3 * 0.04}{0.037} = 0.324$$

- **حساب الاحتمالات الشرطية باستعمال الشجرة العنكبوتية:**

نعتبر صندوقين احدهما U_1 يحوي خمس كرات خضراء و3كرات حمراء والاخر U_2 يحوي 3كرات خضراء و6كرات حمراء كل الكرات لا نميز بينهما باللمس.

نرمي زهرة نرد غير مزورة مرقمة من1 الى6، فاذا تحصلنا على احد الرقمين 5او6 نسحب كرة عشوائيا من الصندوقU_1 وفي الحالات الاخرى نسحب كرة من الصندوق U_2

نسمي A الحادثة" الكرة المسحوبة خضراء" ونسمي الحادثة B "تحصل على احد الرقمين 5او6.

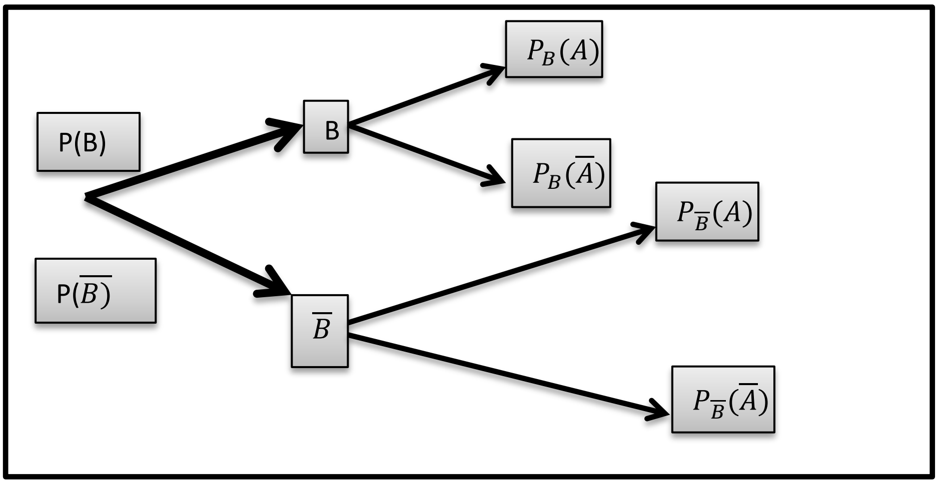
1- احسب $P(B); P(\overline{B})$

2- احسب $P_B(A)$ واستنتج $_B(\overline{A})$

3- اكمل الشجرة بالقيم العددية المحصل عليها

4- استنتج الشجرة P(A)

الحل:



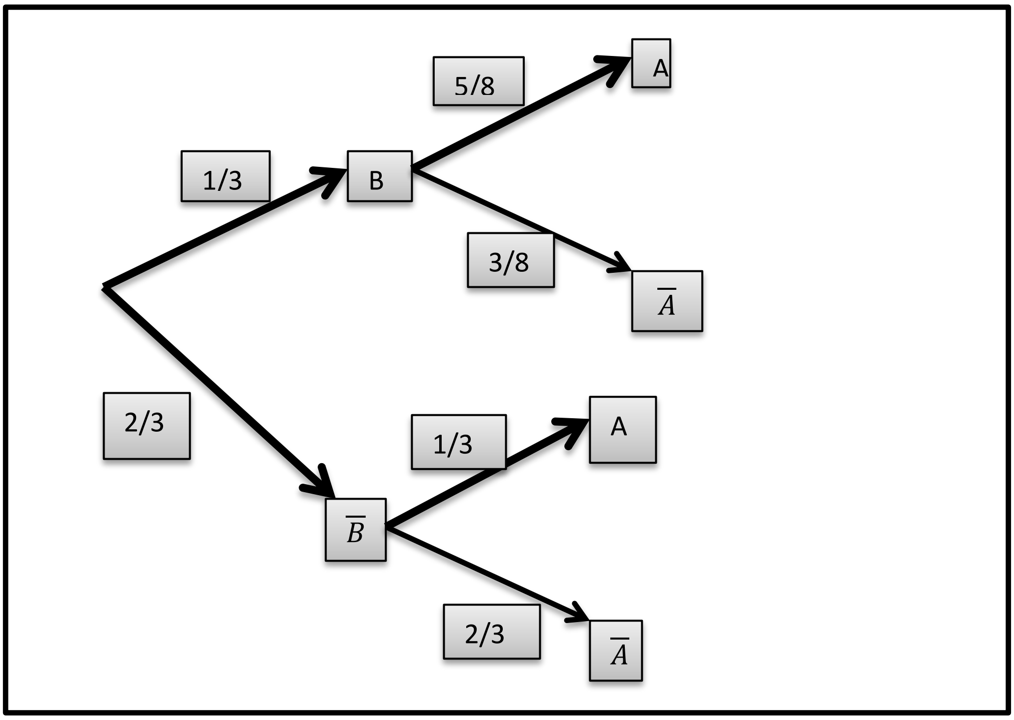
1- النرد غير مزور(حالة تساوي الاحتمال) ومنه $P(B) = {}^1/_3$ و $P(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

2- اذا تحققت B فان السحب يتم من الصندوق U_1 وفي هذه الحالة احتمال الحصول على كرة خضراء هو $\frac{5}{8}$

ومنه $P_B(A) = \frac{5}{8}$ (لأننا في حالة تساوي الاحتمال) وبالتالي $P_B(\overline{A}) = \frac{3}{8}$

3- اذا تحققت $\overline{B}$ يتم السحب من الصندوق U_2 ومنه $P_{\overline{B}}(A) = \frac{1}{3}$ وبالتالي $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \frac{2}{3}$

4- $P\ (A) = P(B).P_B(A) + P(\overline{B}).P_{\overline{B}}(A) = \frac{1}{3}.\frac{5}{8} + \frac{2}{3}.\frac{1}{3} = \frac{31}{72}$



ملحق الفصل الاول: القانون الاساسي للعد

نحتاج عند حساب الاحتمالات في حالة الافضليات المتساوية لحساب عدد الحالات الملائمة والممكنة وقد يتطلب ذلك استخدام القانون الاساسي للعد، لذا خصصنا هذا الملحق لدراسة هذا القانون.

1- العد(القوائم، الترتيبات، التبديلات): :

- ✓ **الترتيبات:**

تعريف: E مجموعة منتهية ذات n عنصر $(n\geq1)$ و P عدد طبيعي $(P\geq1)$ نسمي قائمة ذاتP عنصر من E كل متتالية مرتبة من P عنصرا من عناصر E

اذا اردنا ان تكون هذه العناصر المرتبة متمايزة مثنى مثنى عندئذ لا يمكن للقائمة اكثر n عنصرا وهذا ما يقتضي ان يكون $n\geq p\geq1$

فمن اجل كل عدد طبيعيP$(p\geq1)$ عدد قوائمE ذات P عنصر يساوي n^P بينما يكون عدد قوائمE ذات P عنصرا المتمايزة مثنى مثنى هو $(n-p+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n(n-1)(n-2)$ ويحوي هذا الجداء P عاملا.

التفسير:

- في الحالة الاولى(عدم اشتراط تمايز العناصر) يكون لكل عنصر من عناصر القائمة n امكانية ومنه فان عدد القوائم هو n^P (pمرة) $n \times n \times n \ldots \ldots \ldots . . \times n$
- في الحالة الثانية (قوائم عناصرها متمايزة مثنى مثنى) يكون للعنصر الاولn امكانية ثم($n-1$) امكانية للعنصر الثاني و ($n-2$) للعنصر الثالث.....واخيرا $n-p+1=n-(p-1)$ امكانية للعنصر الاخير الذي رتبتهP وباستعمال مبدأ الضرب يكون عدد القوائم هو:

$$n \times (n-1)(n-2) \ldots \times (n-p+1)$$

ملاحظة: تسمى القائمة التي عناصرها متمايزة مثنى مثنى **ترتيبة** ويرمز لعدد الترتيبات ذات P عنصر من بين n عنصر بالرمز A_n^p وتكتب $A_n^p = n(n-1) \ldots \ldots (n-p+1)$

تعريف : ترتيبة n عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا تسمى بتبديلة ذات n عنصرا، عدد التبديلات هو $n(n-1)(n-2) \times \ldots \ldots \ldots \ldots . \times 2 \times 1$ ويرمز لها بـ $n!$ ويقرأ عاملي n وتعطى بالعلاقة الاتية:

$$\boldsymbol{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

مثال: كم عددا مكونا من 6ارقام يمكن تشكيله باستخدام الاعداد 1.2....9 دون تكرار ارقام هذا العد.

$$A_n^p = A_9^6 = \frac{6!}{(9-6)!} = \frac{6!}{3!} = 60480$$

✓ **التوفيقات:**

تعريف: E مجموعة منتهية ذاتn عنصرا ($n \geq 1$) و P عدد طبيعي حيث $n \geq p \geq 0$ نسمي توفيقة ذاتP عنصرا من عناصر E هو جزء من E ذي P عنصرا من عناصر E نرمز لعدد التوفيقات ذات P عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p او $\binom{p}{n}$

مبرهنة :

من اجل كل عددين طبيعيين nو p حيث $n \geq = p \geq 0$

$$\boldsymbol{C_n^p = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots . .(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}}$$

تفسير:

من كل توفيقة ذات P عنصرا يمكن تشكيله $P!$ ترتيبة ذات P عنصرا لكن عدد الترتيبات ذاتP عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو $\frac{n!}{(n-p)!}$ وبالتالي $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

دستور ثنائي الحد: A وb عددان حقيقيان ، nعدد طبيعي $n \geq 1$ لدينا:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \; a^p \; b^{n-p}$$

البرهان: باستخدام البرهان بالتراجع

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية

يمكن تعريف المتغير العشوائي بانه متغير يأخذ فيها قيما تحددها نتائج التجربة العشوائية، ذلك انه كثيرا من يهمنا عند اجراء التجارب نواحي معينة فيها. فمثلا عند القاء زهري نرد قد ينصب اهتمامنا في حاصل ضرب الرقمين على السطحين العلويين، وعند اختيار شخص عشوائيا قد يهمنا قياس طوله او الدرجة التي حصل عليها في اختبار معين، في كلتا الحالتين هناك كمية رقمية تعتمد على نتيجة التجربة العشوائية لا يمكن التنبؤ بها مسبقا، وبهذا ان الكمية الرقمية تختلف باختلاف نتيجة التجربة العشوائية فهي متغير عشوائي، وبما ان قيمتها تعتمد على النتائج الاولية في فضاء العينة فهي دالة معرفة على النتائج او النقاط في فضاء العينة، ومن هذا المنطلق يمكن تعريف المتغير العشوائي بصورة اكثر تحديدا كدالةX تأخذ قيمتها حقيقية ومعرفة على فضاء العينة. وعليه المتغير العشوائي مقدار يتغير بحسب نتيجة التجربة العشوائية، وسنخصص هذا الفصل لدارسة المتغيرات العشوائية الحقيقية.

I- المتغير العشوائي وتابع التوزيع:

يعرف بانه تابع حقيقي معرف فوق الحوادث الابتدائية لفراغ احتمالي، يوافق كل حادثة ابتدائية عدد حقيقي هو قيمة المتحول العشوائي عند هذه الحادثة الابتدائية. وبالإضافة الى ذلك فانه من اجل اي عدد حقيقيa تكون $[X = a]$ وهي مجموعة الحوادث الابتدائية التي تاخذ X عند كل منها القيمةa عبارة عن حادثة، ومن اجل اي زوج من الاعداد الحقيقيةc,b تكون المجموعات[b≤X<c] , [b<X≤c]، [b<X<c]، [X<c]، [X≤c]، [X>b]، [X≥b] حوادث واذا احتوى الفضاء الاحتماليΩ على عدد محدود نقط من الحوادث الابتدائية فان العبارة الاخيرة من التعريف تكون محققة بصورة الية ذلك لان كل مجموعة من الحوادث الابتدائية هي حكما حادثة.

وهو كذلك تطبيق X معرف على على المجموعة الاساسيةΩ لفضاء احتمالي$(\Omega; \mathcal{A}; \mathcal{P})$ وياخذ قيمة في مجموعة الاعداد الحقيقية

$$X: \quad \Omega \to \mathbb{R}$$
$$\omega \to X(\omega)$$

يرفق التطبيق X بكل حادثة ابتدائية ω قيمة عددية$X(\omega)$ لذا نقول احيانا عن X انه متغير عشوائي حقيقي.

يرمز في غالب الاحيان للمتغير العشوائي بأحرف كبيرة ...,X ,Y,Z تمييزا له عن القيم التي يأخذها المتغير والتي يرمز لها بأحرف صغيرة.

مثال: نرمي في الهواء زهرتي نرد متوازنتين، وعليه فان المجموعة الاساسية المرفقة بهذه التجربة العشوائية تشمل على36حادثة ابتدائية ذات افضليات متساوية:$\Omega = ((1,1); (1,2); \dots ; (6,6))$

اذا انصب اهتمامنا الى مجموع النقاط التي تظهر على الوجهين العلويين لزهرتي النرد، نكون قد عرفنا على هذا الفضاء الاحتمالي متغيرا عشوائياX مساويا للمجموع، وتكون مجموعة القيم الممكنة لهذا المتغير هي:

{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12} وللحصول على احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي قيمة ما يكفي ان نعرف الحوادث الابتدائية من Ω التي تحقق هذه القيمة وعليه نجد: p(X=4)=p((1.3)ou(2.2)ou(3.1))

=p((1.3)+p(2.2)+p(3.1))=$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

1− المتغير العشوائيX نقول انه متغيرا عشوائيا اذا:

- منفصل منتهي اذا كانت المجموعة$X(\omega)$ منتهية
- منفصل غير منتهي اذا كانت المجموعة$X(\omega)$ غير منتهية وعدودة
- مستمر اذا كانت المجموعة$X(\omega)$ عبارة عن مجال من مجموعة الاعداد الحقيقية$\mathbb{R}$ غير مقتصرة على نقطة(او اتحاد مجالات من$\mathbb{R}$)

ومنه يتبين لنا ان تصنيف المتغير العشوائي يشبه تصنيف المتغير الاحصائي، وان مفهوم الاحتمال يعوض مفهوم التواتر، اذ يسمح قانون الاعداد الكبيرة بإقامة الرابطة بين المفهومين.

ملاحظة: في حالة المتغير العشوائي المستمر يجب استكمال التعريف بإضافة ان الصورة العكسية لكل مجال $]-\infty.X[$ يجب ان تنتمي الى العشيرة$\mathcal{A}$ حيث:

$$\forall \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}\ \boldsymbol{X^{-1}}\ (]-\infty,\boldsymbol{x}]) = (\boldsymbol{\omega} \in \boldsymbol{\Omega}/\boldsymbol{X})(\boldsymbol{\omega}) \le \boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

وبما ان الاحتمال المعرف على عائلة من اجزاءΩ التي تؤلف عشيرة، لذا فان هذا الشرط يسمح بحساب احتمال كل مجال من $\mathbb{R}$.

2− تابع التوزيع: من اجل كل عدد حقيقي x نرمز ب$p(X\le x)$ للعدد الحقيقي$P(\{w\epsilon\ \Omega; x(w) \le x\})$

مثال: $P(X\le0)=1/3$

P(X≤1)=P({w∈ $\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{1}$})

P({w∈ $\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{3}$ او $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{w}) = -\boldsymbol{8}$})

P(X= -3)+P(X= -8)

ذلك ان الحادثين X= -3 و X= -8 حادثان متنافيان

P(X≤1)=2/9+1/9=1/3

P(X≤15)=P({w∈ $\boldsymbol{\Omega}; \boldsymbol{X}(\boldsymbol{w}) \le \boldsymbol{15}\}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{\Omega}) = \boldsymbol{1}$

P(X≤-10)=0 car $\{w\in \Omega; x(w) \leq -10\} = \emptyset$

تعريف: ان تابع التوزيع المتغير العشوائي X هو التابع F

$$X \quad \rightarrow \quad F(x) = P(X \leq x)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow [0.1]$$

3- مميزات تابع التوزيع المتغير العشوائي: يكون F تابع توزيع اذا حقق:

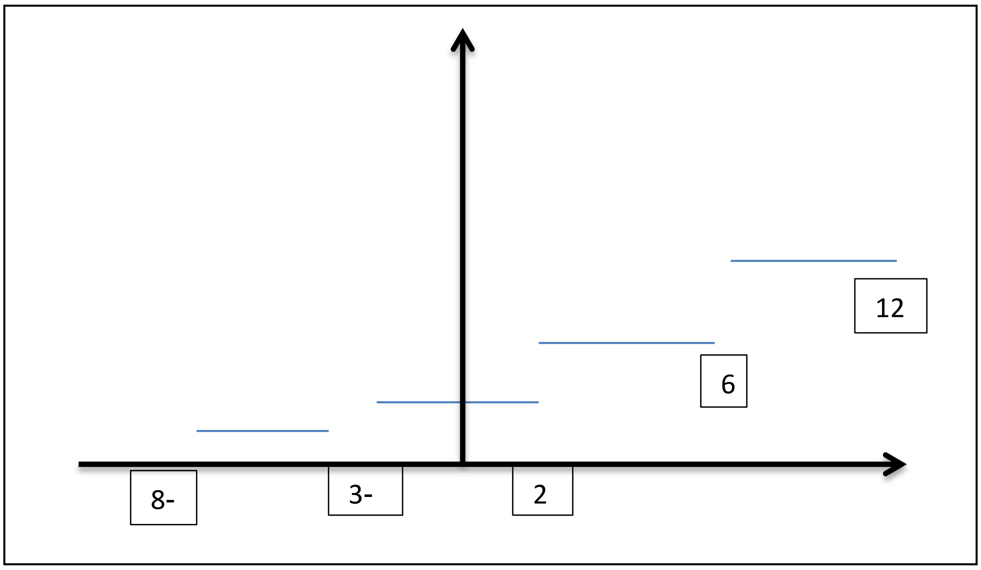
1. F **تابع متزايد**
2. $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$ و $\lim_{n\to+\infty} F(x) = 1$
3. **مستمر من اليمين**

واذا اخذنا بنظر الاعتبار خصائص الاحتمال المدروسة في الفصول السابقة، عندها بالإمكان ان نكتب من اجل كل a.b من $\mathbb{R}$ بحيث $a < b$

$$F(b) = F(a) + p(a < x \leq b) \Rightarrow p(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$$

انه بالإمكان حساب احتمال ان ينتمي x الى مجال من $\mathbb{R}$ بالاعتماد على تابع توزيع x.

الشكل 05: التمثيل البياني لـ F



ملاحظة:

- ✓ يمكن معرفة F للتعريف بالمتغير العشوائي X، فعن طريق الفرق يمكن ايجاد قانون احتمال X فـ F(7)=8/9 و F(6.5)=2/3 وعلى اعتبار ان 7 هو العنصر الوحيد الذي ينتمي الى المجال [6.5 ;7] وعليه فان P(X=7)=F(7)-F(6.5)= P(X=7)=2/9

✓ $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$ ، F دالة غير متناقصة يبدا انه من السهل استخدام قانون الاحتمال بدل استخدام تابع التوزيع في حالة المتغير العشوائي.

II- المتغيرات العشوائية المتقطعة وتوزيعها الاحتمالي :

ليكن المتغير العشوائي Γ الذي يمثل عدد السيارات الجديدة التي تم بيعها خلال يوم من طرف وكيل السيارات والجدول الوالي يبين قانون احتمال Γ:

K	0	1	2	3	4	5
$P(\Gamma = k)$	0.02	0.08	0.1	0.3	0.4	0.1

على الرغم من اننا لم نحدد الفضاء Ω الذي ينتمي اليه المتغير العشوائي اليه، الا انه بالإمكان القيام بحسابات على المتغير Γ كما يمكن تمثيل كل من قانون الاحتمال وتابع التوزيع بيانيا.

ان تابع توزيع المتغير العشوائي هو تابع درجي مستمر على اليمين، ونقاط تقطع التابع توافق قيما ممكنة لـ X ، سمي بيان التابع ببيان التوزيع البيان المتجمع. ونلاحظ ان هذا التابع يتشابه مع تابع توزيع متغير احصائي منفصل.

II-1- شروط دالة الكثافة لمتغير عشوائي متقطع: نعبر عن احتمال قيمة معينة كما يلي $p(X = x)$ ونكتب ايضا $F(x)$ تسمى بدالة الكثافة الاحتمالية. لكي يمكن اعتبار دالة ما، ايا كانت، دالة كثافة احتمالية يجب ان يتحقق شرطان:

1. $\boldsymbol{F(x) \geq 0}$
2. $\sum_x \boldsymbol{F(x) = 1}$

مثال : تأخذ دالة الكثافة الاحتمالية لـ x نتيجة القاء حجر نرد:

$$F(1) = F(2) = F(3) = \cdots \ldots \ldots . = F(6) = \frac{1}{6} \geq 0$$

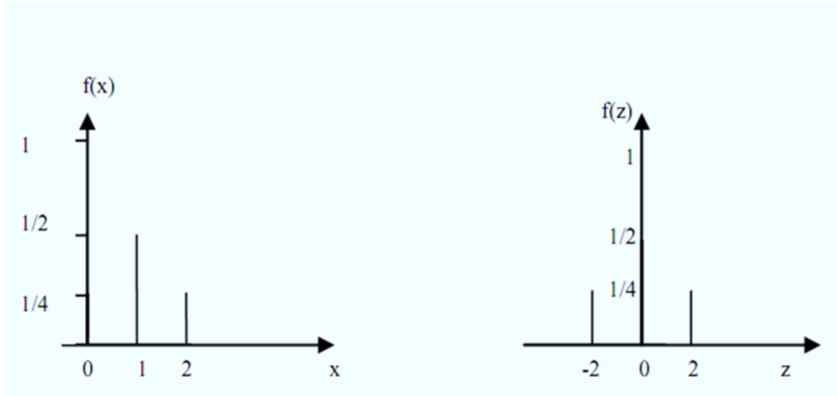
الشرط الاول محقق، والشرط الثاني ايضا لان

$$\sum F(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \cdots . + \frac{1}{6} = 6\left(\frac{1}{6}\right) = 1$$

II-2- التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متقطع: يمثل المتغير العشوائي المتقطع ليس من خلال منحنى لكن من خلال اعمدة متوازية على محور x

مثال: نمثل بيانيا منحنيات دوال الكثافة لـ X, Z المعرفة على القاء قطعة نقدية مرتين.

الشكل 06: التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متقطع



II-3- دالة $F(x)$ لمتغير عشوائي متقطع: تعرف دالة التوزيع وتسمى ايضا بدالة التجميعية كما يلي: $F(x) = p(X = x)$ ، ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكثافة الاحتمالية $F(x)$ كما يلي:

$$\boldsymbol{F(x) = p(X \leq x) = \sum_{u \leq x} f(u)}$$

اذا كانت(X) تاخذ عددا منتهيا من القيم فان $F(x)$ يمكن تعريفها كما يلي:

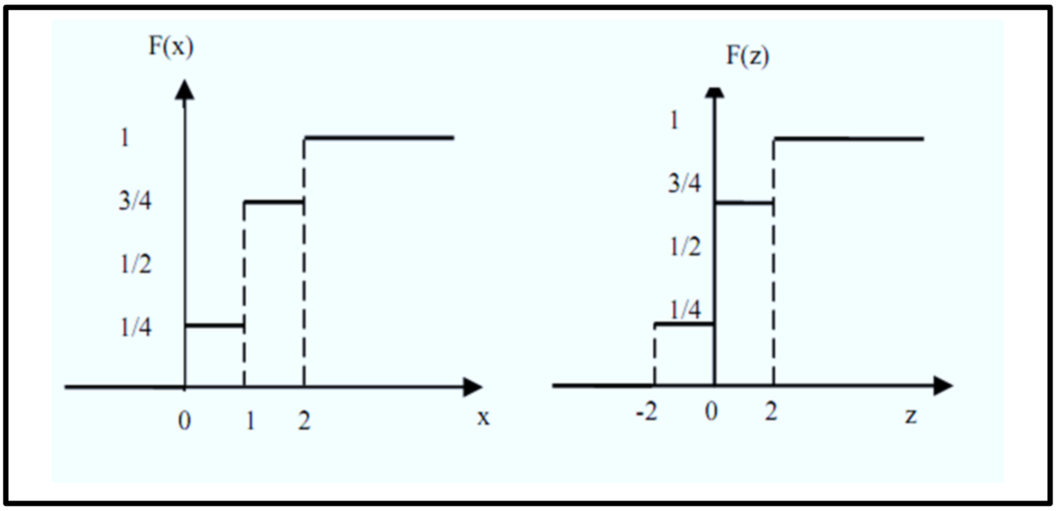
$$\boldsymbol{F(x) = p(X = x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\infty \leq x \leq +\infty \\ f(x_1) & ; \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & ; \quad x_2 \leq x \leq x_3 \\ f(x_1) + f(x_2) + \cdots \ldots + f(x_n) & ; \quad x_n \leq x \leq +\infty \end{cases}}$$

مثال: اوجد قيم $\boldsymbol{F(z)}$ و $\boldsymbol{F(x)}$ للأمثلة التالية ومثلهما بيانيا.

$\boldsymbol{x}$	*0*	*1*	*2*
$\boldsymbol{f(x)}$	¼	*1/2*	*1/4*
$\boldsymbol{F(x) = p(X = x)}$	¼	*3/4*	*1*

$\boldsymbol{z}$	*-2*	*0*	*2*
$\boldsymbol{f(x)}$	¼	*1/2*	*1/4*
$\boldsymbol{F(x) = p(X = x)}$	¼	*3/4*	*1*

الشكل07: التمثيل البياني لدالة التوزيع لمتغير عشوائي متقطع



عندما يكون المتغير العشوائي منفصل وغير منتهي فان المجموعة $x(\omega)$ تكون غير منتهية عدودة ويمكننا كما هو الشأن في حالة المتغير العشوائي المنفصل والمنتهي حساب احتمال كل قيمة ممكنة بالاعتماد على تابع التوزيع، وعكسيا يمكننا استنتاج تابع التوزيع المتغير متى ما عرفنا القيم التي يأخذها التابع واحتمالاتها المرفقة.

عليه تأخذ دالة التوزيع شكلا سليما، وهي لا تكون متناقصة في اي مجال، واكبر قيمة ممكنة لها هي 1.

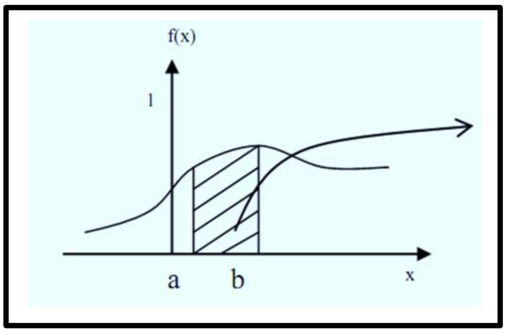
III-المتغيرات العشوائية المستمرة وتوزيعها الاحتمالي:

على خلاف المتغيرات العشوائية المتقطعة الى ان تكون مجموعة قيمها منتهية او غير منتهية قابل للعد، هناك المتغيرات العشوائية المستمرة التي تتميز مجموعة قيمها بانها غير قابلة للعد، فهي تعطى دون انقطاع كل محور الاعداد الحقيقية او بعض مجالات هذا المحور، وكمثال على المتغيرات العشوائية وزن حبة قمح مأخوذة عشوائيا من كومة قمح، تأخر القطار او الطائرة.

فالتوزيع الاحتمالي المستمر هو مجموعة القيم التي يمكن ان يأخذها المتغير العشوائي المستمر والاحتمالات الملحقة بها. نسمي توزيعا كهذا دالة الكثافة الاحتمالية او دالة الاحتمال، وهي ممثلة بمنحنى متصل.

بما ان x يأخذ عددا لا منتناهيا من القيم داخل اي مجال، فان احتمال قيمة بعينها هو احتمال يؤول الى الصفر. لذلك فان دالة الكثافة تستعمل لحساب احتمال مجال. ويكون ذلك بحساب المساحة تحت منحنى$f(x)$ بين حدود المجال.

الشكل 08: يوضح التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية



$$p(\alpha < x < \beta) = \int_a^b f(x)dx$$

اشارة التكامل تقابل اشارة المجموع في المتغير العشوائي المتقطع

III-1- كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي مستمر:

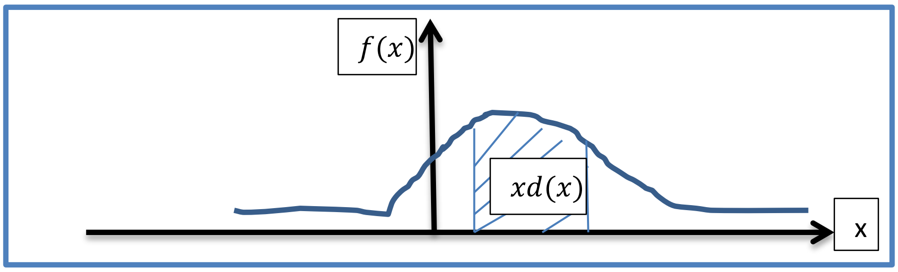
نسمي تابع كثافة المتغير العشوائي المستمر الدالة المشتقة لتابع التوزيع$f(x)$وعند النقاط التي لا يقبل فيها تابع التوزيع مشتقا فانه لا يمكن ايجاد تابع الكثافة نقول ان المتغير X له تابع كثافة $f(x)$ وان المتغير العشوائي X يتوزع بتابع كثافة $f(x)$ يدعى احتمال عنصري عند النقطةx للمتغير العشوائي x المقدر $f(x)dx$ ويساوي احتمال ان يقع المتغير في المجال المجاور لـ x

$$f(x)dx = \sim p(x < \times < x + dx)$$

ويتمتع **تابع كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المستمر بالخواص التالية:**

1. $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
3. مستمرا

ان التمثيل الهندسي لتابع التوزيع يعطى بالمساحة المحصورة ما بين تابع الكثافة من الاعلى ومحور الفواصل والموجودة على يسار النقطة**x** والمساحة الكلية المحصورة بين تابع الكثافة ومحور الفواصل تساوي الواحد الصحيح 1. يسمى بيان كثافة الاحتمال منحنى كثافة الاحتمال ويمكن تفسير الاحتمال العنصري $f(x)dx$ على انه مساحة المستطيل ذي القاعدة dx والارتفاع $f(x)$.



III-2- دالة التوزيع $F(x)$ للمتغير العشوائي المستمر: تعرف دالة التوزيع المستمرة بواسطة الدستور كما يلي:

$$F(x) = p(X = x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

- ✓ ان احتمال كل نقطة منعزلة لمتغير عشوائي مستمرا يساوي الصفر اي ان: مهما تكن α χ

$$p(x = \alpha) = 0$$

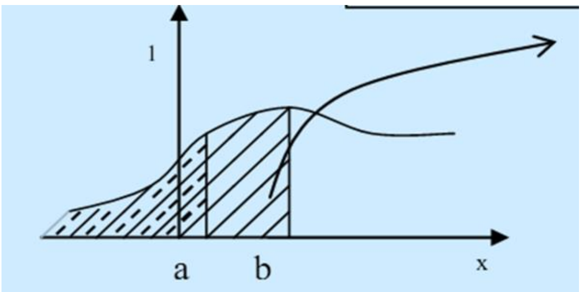
- ✓ ان احتمال ان يأخذ المتغير العشوائي قيمة تسمى الى المجال من α الى β تساوي كما الشان بالنسبة لمتغير عشوائي ما تزيد دالة التوزيع في هذا المجال: $p(\alpha \leq x < \beta) = \mathrm{F}(\beta) - \mathrm{F}(\alpha)$
- ✓ ولكن وباعتبار ان $p(x = \alpha)$ لذا يمكننا كتابة المساواة اعلاه على الشكل:

1. $p(\alpha \leq x \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

2. $p\big(x \in (\alpha.\beta)\big) = F(\beta) - F(\alpha)$

الشكل 09: يوضح كيفية حساب الاحتمال من خلال دالة التوزيع

$$P(a < x \leq b) = P(x \leq b) - P(x \leq a = F(b) - F(a)$$



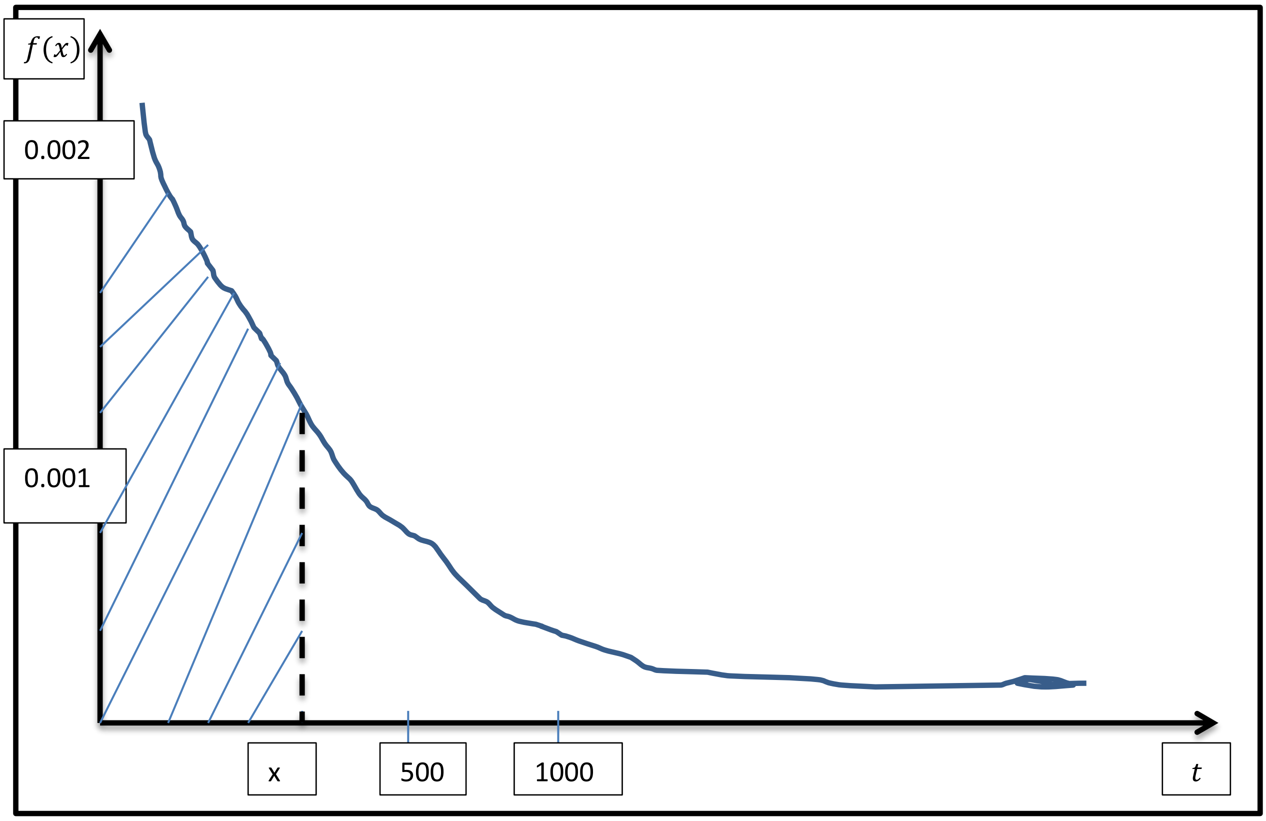
مثال01: لنفرض ان لدينا تابع توزيع متغير عشوائي معرف على النحو التالي:

$$F(x) = 0 \quad si\ x \leq 0$$

$$F(x) = \int_{0}^{x} f(r)dr \qquad x \geq 0$$

حيث: $r \geq 0 \quad , \ f(r) = 0.002e^{-0.002r}$

الحل: من اجل x موجب فان تابع التوزيع$F(x)$ ينطبق على المساحة المطلقة في الشكل التالي:



ونستنتج ان $p(x \leq 400) = F(400) = 0.55$

وباستخدام الحادث المتمم نجد:

$$p(x > 1000) = 1 - p(x \leq 1000) = 1 - F(1000) = 0.14$$

ولحساب $p(400 < x \leq 1200)$

لدينا: $F(x) = \int_0^{+\infty} f(r)dr = 1 - e^{-0.002x}$

لدينا: $\int_0^{+\infty} f(r)dr = 0$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

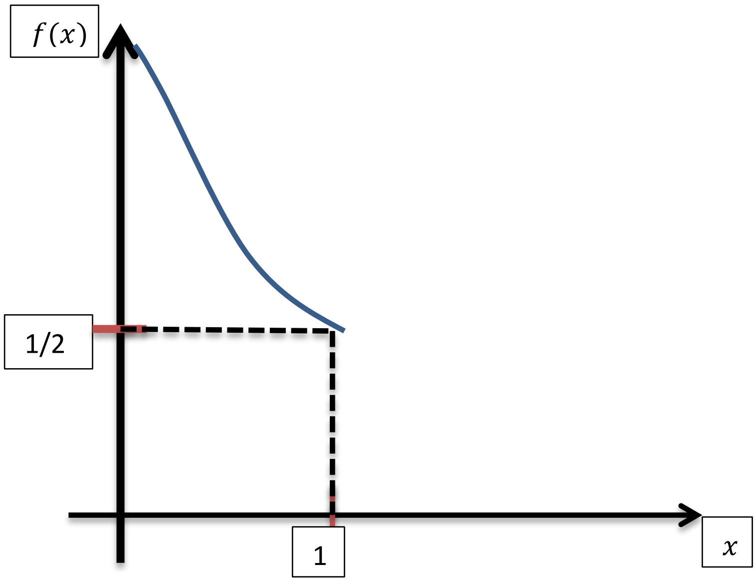
وبما ان: $f(r) = 0$ على المجال $]-\infty, 0]$

ومنه: $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(r)dr \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(r)dr = 1;$

مثال 02: ليكن التابع f معرف بـ:

$$f(x)=\begin{cases}0 \quad pour\ x\leq 0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad pour\ 0<x\leq 1\\ 0 \quad pour\ x>1\end{cases}$$

الشكل10: تابع كثافة الاحتمال



لنبين ان هذا التابع يمكن اعتباره تابع كثافة احتمال متغير عشوائي مستمر:

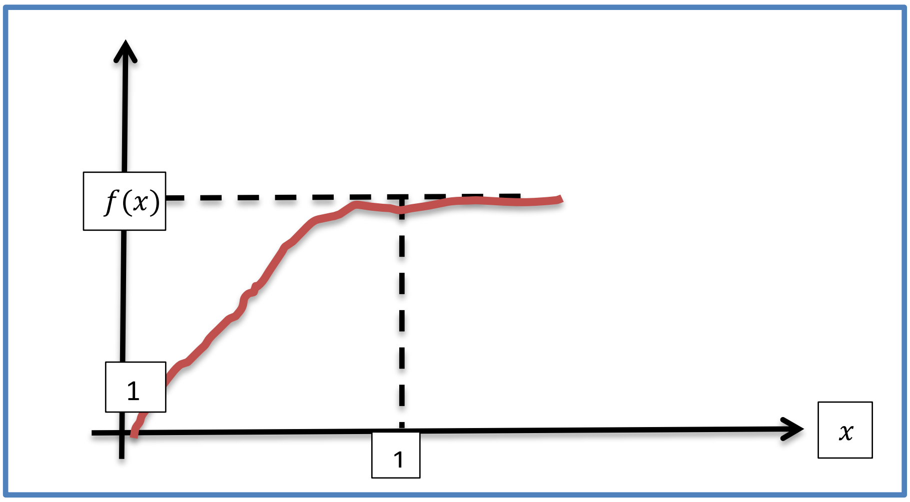
1. $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
2. f مستمر عدا عند النقطتين $x=0$ و $x=1$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{-1/2}\,dx=\left[x^{1/2}\right]_0^1=1$

لنحسب تابع توزيع هذا المتغير

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0 \quad pour\ x\leq 0$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=\left[t^{1/2}\right]_0^x=\sqrt{x} \qquad pour\ 0<x\leq 1$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0dt+\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt+\int_0^x 0dt=1 \qquad pour\ x>1$$

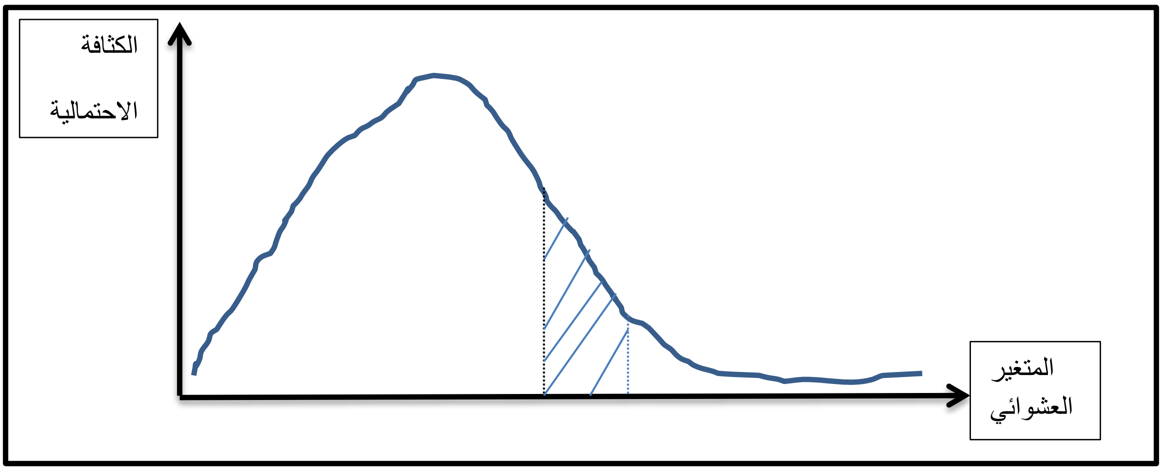


ونتحقق بسهولة ان التابع F يحقق خواص تابع التوزيع المذكورة انفا للمتغير العشوائي المستمر ويمكن حساب احتمال اي مجال او اتحاد مجالات مثل ذلك:

$$p(0.16 < x < 0.25) = F(0.25) - F(0.16) = 0.5 - 0.4 = 0.1$$

لقد بينا عند دراستنا للإحصاء الوصفي كيف يمكن تمثيل التوزيع التكراري لعينة من المشاهدات بمدرج تكراري وقد بينا فيه عدد القيم الواقعة في كل فئة، واحدى الطرق المتبعة في هذا التمثيل هي طريقة الكثافة التكرارية النسبية، وهي نسبة المشاهدات للمتغير x الواقعة في وحدة الطول. فاذا كان طول المجال 5 فالكثافة التكرارية النسبية هي قيمة التكرار النسبي مقسوما على 5. وتكون قيمة التكرار النسبي في مجال ما تساوي طول المجال مضروبا بالكثافة وهذا يساوي مساحة المستطيل. فالتكرار النسبي بين نقطتين مفروضتين يساوي الى المساحة التي يحددها المدرج التكراري بين هاتين النقطتين.

واذا اخذنا عينة اكبر حجما، يمكننا ان نتخذ مجالات اصغر ونحصل على مدرج تكراري اكثر نعومة، وهكذا اذا اخذنا عينات اكبر فاكبر، واتخذنا مجالات اصغر فاصغر نحصل على شكل قريب جدا من منحنى كما في الشكل (الموالي). وعندما يقترب حجم العينة من المجتمع الاحصائي الذي نفرضه كبيرا جدا، يصبح هذا المنحنى ممثلا لكثافة التكرار النسبي للمجتمع الاحصائي.



ويمكننا من حساب نسبة المشاهدات الواقعة بين قيمتين مفروضتين، وذلك بحساب المساحة تحت هذا المنحنى كما في الشكل. فاذا عرفنا معادلة هذا المنحنى يمكننا حساب هذه المساحة بالتكامل، فاذا اخترنا قيمة للمتغير فاحتمال وقوعها في مجال معطى يساوي نسبة القياسات الوقعة داخل هذا المجال، وبهذا فالتوزيع التكراري النسبي للمجتمع الاحصائي يعطينا التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير ونسمي هذا المنحنى بتابع الكثافة.

الفصل الثالث : مقاييس(مؤشرات) المتغيرات العشوائية:

يكمن الفرق بين الاحصاء الوصفي ونظرية الاحتمالات، في كون لن الاولى تحاول تمثيل المعطيات والبيانات بصورة مقروءة ومفهومة، في حين تستهدف الثانية تقديم نماذج تلائم المعالجة الرياضية، وتعطي صورة مثالية وقريبة من المعطيات.

ان استخدام كلتا الطريقتين، يمكن من اظهار القوانين التي تحكم الظاهرات التي تأتي منها البيانات والمعطيات، والتعبير عنها بصورة دقيقة مع امكانية معالجتها عن طريق الصياغة الرياضية ومن ثم استخراج خواصها الاساسية.

وعلى هذا الاساس يكون من الطبيعي، كما هو الشأن في الاحصاء الوصفي، تعريف ودراسة مؤشرات (خصائص) المتغيرات العشوائية، فالدافع هو نفسه: فقانون الاحتمال يعبر عن كمية كبيرة من المعلومات، ويكون من المفيد تلخيص بعض الجوانب الظواهر باستخدام قيم عددية يتم اختيارها بعناية. ان المؤشرات (مقاييس) التي تعبر عن الجوانب الثلاث لقوانين الاحتمال هي: النزعة المركزية- التشتت- مقاييس الشكل. تختلف الادوات الرياضية المستخدمة في حساب هذه المقاييس من قانون احتمالي الى اخر. وتستخدم قوانين احتمال المتغيرات العشوائية المنفصلة والمنتهية نفس الادوات المستخدمة في تعريف مقاييس المتغيرات الاحصائية، اما بالنسبة لقوانين احتمال المتغيرات العشوائية المنفصلة غير المنتهية فان حسابها يتطلب معرفة السلاسل الحقيقية وبالنسبة للمتغيرات المستمرة مطلقا فانه يتم استخدام بعض مفاهيم التكامل. بيد ان ما تجدر ملاحظته هو ان معنى هذه المؤشرات لا يتعلق بقانون الاحتمال المدروس وبالتقنيات الرياضية المستخدمة.

المنوال: منوال متغير عشوائي هو القيمة التي تبلغ عندها مخطط الاعمدة او تابع كثافة الاحتمال قيمته العظمى، نسمي منوالا نسبيا قيمة المتغير التي توافق قيمة عظمى محلية لمخطط الاعمدة او تابع كثافة الاحتمال، والمنوال مقياس من مقاييس النزعة المركزية وغالبا ما يتميز بالواحدانية.

I- التوقع الرياضي: *Espérance mathématique*

يسمى التوقع الرياضي لمتغير عشوائي x ايضا بالقيمة المتوسطة لـx ويرمو له في الغالب بـ $\overline{x}$ او $E(x)$

1- في حالة المتغير العشوائي المنفصل(المتقطع): ليكن x متغير عشوائي منفصل ومنتهي:

قيم x	$x_1 \ldots\ldots x_i \ldots\ldots\ldots x_k$	$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$
الاحتمال	$p_1 \ldots\ldots p_i \ldots\ldots p_k$	

نسمي التوقع الرياضي والقيمة المتوسطة لـx المقدار :

$$\overline{x} = E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

من الصيغة اعلاه تبين لنا التشابه بين تعريف التوقع الرياضي والوسط الحسابي لمتغير احصائي متقطع حيث تم تعويض التكرار النسبي بالاحتمال. ان التوقع الرياضي هو عدد حقيقي، ويمكن ان تختلف قيمة التوقع الرياضي عن القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي المنفصل والمنتهي. ومنه فان التوقع الرياضي هو مقياس من مقاييس النزعة المركزية.

وفي حالة المتغير العشوائي المنفصل والغير المنتهي فان التوقع يعطى بالعلاقة:

$$\overline{x} = E(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$

شرط ان تكون السلسة ذات الحد $x_i p_i$ متقاربة مطلقا، والا قيل انه ليس للمتغير توقع رياضي.

نسمي التوقع الرياضي للمتغير العشوائي الشرطي$\{Y|X = x_i\}$ وبالتوقع الرياضي الشرطي علما ان $X = x_i$ ويحسب وفق الصيغة:

$$E(Y|X = x_i) = \sum_{j=1}^{i} y_i p_{j/i}$$

وكذلك:

$$E(X|Y = y_j) = \sum_{i=1}^{k} x_i p_{i/j}$$

- **خواص التوقع الرياضي:** يمكننا استنباط خواص التوقع الرياضي من خواص التكامل الخطية حيث:

اذا كان a,b عددان حقيقيان فان:

$$E(ax + b) = aE(x) + b$$

- ✓ اذا كان للمتغير العشوائي x توقع رياضي $E(x)$ فان المتغير $X - E(x)$ هو المتغير المتمركز المرفق بـ X.

$$E(x + a) = E(x) + a$$

- ✓ لتكن φ تابع معرف على $\mathbb{R}$ ويأخذ قيمة من $\mathbb{R}$، فاذا كان x متغير عشوائي، فان:

$\boldsymbol{\varphi(x)}$**هو** ايضا متغير عشوائي، ويمكننا عندئذ حساب التوقع الرياضي لهذا المتغير دون حاجة لمعرفة قانون احتماله.

أ- عند المتغير المنفصل:

$$\boldsymbol{E\big(\varphi(x)\big) = \sum_{i}^{n} \varphi(x_i)\, p_i}$$

هذا على افتراض ان سلسلة الطرف الثاني متقاربة مطلقا ولدينا كحالة خاصة:

$$\boldsymbol{E(x^2) = \sum_{i} x_i^2\, p_i}$$

ب- حالة المتغير المستمر:

$$\boldsymbol{E\big(\varphi(x)\big) = \int \varphi(x) f(x) dx}$$

وهذا على افتراض ان التكامل الموجود في الطرف الثاني متقارب مطلقا، ولدينا بالخصوص:

$$\boldsymbol{E(x^2) = \int x^2 f(x) dx}$$

- ✓ توقع مجموع متغيرين عشوائيين يساوي مجموع التوقعين اي:

$$\boldsymbol{E(x+y) = E(x) + E(y)}$$

$$\boldsymbol{E(x-y) = E(x) + E(-y) = E(x) - E(y)}$$

- ✓ اذا كان $x_1, .. x_2, x_3, \dots \dots x_n$ متغيرات عشوائية لها نفس التوقعm عندها يكون:

$$\boldsymbol{E(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} E(x_i) = n\,.\,m}$$

واذا رمزنا بـ $\overline{x}$ لوسط هذه المتغيرات اي: $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$عندها يكون لدينا: $E(\overline{x}) = m$

II-العزوم:*les moments* : يعتبر العزم من تطبيقات توقع الدالة، تستخدم العزوم في حساب عدد من المقاييس مثل معامل التماثل α_3 (coefficient d'asymétrie) ومعامل التفلطح α_4 (Kurtosis ou coefficient d'aplatissement)،

أ- **العزم من الرتبة r(r عدد طبيعي):** يعرف العزم ذو الرتبة r حول الصفر للمتغير x توقع ^{r} ويرمز له بالرمز بـ $m_r(x)$ ويعطى بالعلاقة :

$$\boldsymbol{m_r(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^n\, p_i}$$

ملاحظات:

- العزم ذو الرتبة 1 حول الصفر يساوي الوسط الحسابي او التوقع الرياضي $m_1(x) = \overline{x} = E(x)$
- العزم ذي الرتبة r حول الصفر يساوي توقع المتغير r ويعطى بالعلاقة

$$m_r(x) = E(x^r)$$

ب- العزوم الممركزة(حول الوسط الحسابي): العزم ذي الرتبة r حول الوسط الحسابي للمتغير العشوائي x هو توقع$(x - \overline{x})^r$ ويرمز له عادة بالرمز $\mu_r(x)$ ويعطى بالعلاقة:

$$\mu_r(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^r$$

نلاحظ ان : $\mu_1(x) = 0$ هذا مهما يكن x

عندما يكون المتغير العشوائي مستمر: اذا كان x متغيرا عشوائيا مستمرا تابع كثافته f فان توقعه الرياضي $E(x)$ يعطى بالعلاقة:

$$\overline{x} = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} xf(x)dx$$

يقتضي هذا التعريف ان يكون التكامل الموجود في الطرف الايمن متقارب مطلقا، والا قيل ان توقع المتغير غير موجود.

ج- العزم من الرتبةr : نسمي عزما من الدرجة r للمتغير العشوائيx ونرمز له بالرمز بـ $_r(x)$ ويعطى بالعبارة التالية:

$$m_r(x) = \int_a^b x^r f(x)dx$$

وينتج عن ذلك ان:

$$m_1(x) = \overline{x} = \int_{a}^{b} xf(x)dx = E(x)$$

ولدينا كذلك:

$$m_r(\quad) = E(x^r)$$

ح- العزم حول الوسط الحسابي من الدرجة r: نسمي عزما حول الوسط الحسابي من الدرجة r للمتغير العشوائي بالعبارة:

$$\mu_r(x) = \int_{a}^{b} (x - \overline{x})^r f(x)dx$$

ونلاحظ ان : $\mu_1(x) = 0$

III- متراجحة شيبيشيف : *Inégalité de Bienayamé CHEBYCHEV*

هي نظرية تخص المتغيرات العشوائية المتقطعة والمستمرة على السواء، التي يكون لها متوسط وتباين محدود تستخدم هذه النظرية في قياس التشتت حول التوقع $E(x) = \bar{x}$، وذلك عن طريق احتمال (او نسبة) المفردات التي المسافة (الفرق) بينها وبين $\bar{x}$ تزيد عن مقدار ما: $P(-\varepsilon \geq (x - \bar{x}) \geq \varepsilon)$ او بعبارة اكثر اختصارا:

$P(|x - \bar{x}| \geq \varepsilon$ حسب نظرية شيبشيف فان هذه النسبة لا تزيد عن σ^2/ε^2 ، وذلك مهما كانت طبيعة التوزيع. ونعبر عن هذه النظرية كما يلي:

اذا كانت x متغير عشوائي متصل او متقطع، لها متوسط $\bar{x}$ وتباين محدود σ^2، فانه مهما يكن ε عدد موجب تماما:

$$\boldsymbol{P(|x - \bar{x}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

- ومن اجل صياغة اكثر دلالة نضع: $\varepsilon = k\sigma$ نجد : $P(|x - \bar{x}| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$
- انطلاقا من نفس النتيجة، لدينا ايضا:

$$\boldsymbol{P(-\varepsilon < (x - \bar{x}) < \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

مثال: ليكن x متغير عشوائي يتبع توزيعا ايا كان، لها متوسط $\bar{x}$ وتباين محدود σ^2، و ε عدد موجب تماما:

1- احسب الحد الاقصى للاحتمال $P(-\varepsilon \geq (x - \bar{x}) \geq \varepsilon)$ من اجل= ε و $\varepsilon = 3\sigma$ و $\varepsilon = 2\sigma$ 4σ

2- احسب الحد الادنى للاحتمال $P(-\varepsilon < (x - \bar{x}) < \varepsilon)$ من اجل $\varepsilon = 4\sigma$ و $\varepsilon = 3\sigma$ و $\varepsilon = 2\sigma$

الحل:

$$\mathit{1}-\ \boldsymbol{P(-\varepsilon \geq (x - \bar{x}) \geq \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 2\sigma \rightarrow P(-\varepsilon \geq (x - \bar{x}) \geq \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| \geq 2\varepsilon) \leq \frac{1}{4}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 3\sigma \rightarrow P(-\varepsilon \geq (x - \bar{x}) \geq \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| \geq 3\varepsilon) \leq \frac{1}{9}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 4\sigma \rightarrow P(-\varepsilon \geq (x - \bar{x}) \geq \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| \geq 4\varepsilon) \leq \frac{1}{16}$$

$$2 - P(-\varepsilon < (x - \bar{x}) < \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = 2\sigma \rightarrow P(-\varepsilon < (x - \bar{x}) < \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| < 2\varepsilon) > 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\varepsilon = 3\sigma \rightarrow P(-\varepsilon < (x - \bar{x}) < \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| < 3\varepsilon) > 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\varepsilon = 4\sigma \rightarrow P(-\varepsilon < (x - \bar{x}) < \varepsilon) = P(|x - \bar{x}| < 4\varepsilon) > 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

IV- نظرية الاعداد الكبيرة: *Théorème des grands nombres*

تعتبر نظرية الاعداد الكبيرة من نتائج نظرية شيبشيف ويستفاد منها بشكل خاص في نظرية المعاينة، تصاغ هذه النظرية بالشكل الاتي: لتكن المتغيرات .... $x_1;\ x_2;$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع الاحتمالي ولكل منها نفس المتوسط $\bar{x}$ والتباين σ^2 اذا كانت:

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad (n = 1,2,3, \ldots\ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \bar{x}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

بما ان $\bar{x} = E(S_n/n)$ فان مضمون هذه النظرية هو ان احتمال ان تبتعد المتغيرة (S_n/n) عن قيمتها المتوقعة بأكثر من ε هو 0 عندما $n \rightarrow \infty$ تسمى هذه الصياغة ايضا بقانون الاعداد الكبيرة الضعيف. حيث ان قانون الاعداد الكبيرة القوي هو:

$$P\left[\lim_{n\to\infty}(S_n/n) = \bar{x}\right] = 1$$

وعليه يمكن ان نستخلص بان نظرية شيبيشيف ونظرية الاعداد الكبيرة من النظريات التي تقيس تشتت المتغيرة وهي من تطبيقات توقع الدالة:

- اذا كانت x متغير عشوائي مستمر او متقطع، لها نفس متوسط $\bar{x}$ وتباين محدود σ^2، فانه مهما يكن ε عدد موجب تماما: $P(|x - \bar{x}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$
- لتكن المتغيرات .... $_1;\ x_2;$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع الاحتمالي ولكل منها نفس المتوسط$\bar{x}$ والتباين σ^2 اذا كانت

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \bar{x}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

V- التباين والانحراف المعياري: *Variance et écart type*

يعرف التباين للمتغير العشوائي x بانه التوقع الرياضي لمربع المتغير العشوائي الممركز المرفق بـx ويرمز له بالرمز σ^2 او $v(x)$ ، وهو العزم المركزي من الدرجة الثانية ويقيس تشتت القيم حول الوسط الحسابي $E(x)$

$$\boldsymbol{\mu_2 = v(x) = m_2(x) - m_1^2(x)}$$

$$\boldsymbol{v(x) = E(x^2) - [E(x)]^2}$$

ويسمى الجذر التربيعي الموجب لـ $v(x)$ بالانحراف المعياري (σ) وهو ايضا من مقاييس التشتت.

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{v(x)}}$$

- **خواص التباين:**

$$\boldsymbol{v(x) = E(x^2) - [E(x)]^2}$$

$$\boldsymbol{v(x-a) = v(x)}$$

$$\boldsymbol{v(ax) = a^2 v(x)}$$

$$\boldsymbol{v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0}$$

- **المتغيرة المعيارية:** يمكن ان نلحق باي متغيرة عشوائية $\boldsymbol{x}$ متغيرة معيارية (تسمى ايضا بالمتعيرة المركزية) ويرمز لها بالرمز $\boldsymbol{x^*}$، تلحق المتغيرة المعيارية بالمتغيرة الحقيقية من اجل المقارنة لان المتغيرة المعيارية ليس لها وحدة كالمتر او الساعة... انما هي تعبر عن كل قيمة لـ $\boldsymbol{x}$ من خلال المسافة بين $\boldsymbol{x}$ والتوقع $\boldsymbol{\overline{x}}$ محسوبة ليس بالوحدة الاصلية وانما بالانحرافات المعيارية.

$$\boldsymbol{x^* = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}}$$

من خلال خصائص التوقع والتباين نستخرج التوقع والتباين للمتغيرة المعيارية.

$$\boldsymbol{E(x^*) = E\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\,E(x-\overline{x}) = \frac{1}{\sigma}[E(x) - E(\overline{x})] = 0}$$

$$\boldsymbol{V(x^*) = E[(x^* - E(x^*))^2] = E[(x^* - 0)^2] = E\left(x^{*2}\right) = E\left(\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma^2}\right)}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{\sigma^2}E(x-\overline{x})^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1}$$

مثال: احسب * من اجل متوسط70، انحراف معياري5، و $\boldsymbol{x}$ يساوي 70،80،75،50،60،55

الحل: $\boldsymbol{x^* = \frac{x-\overline{x}}{\sigma} = \frac{55-70}{5} = -3}$

اذن القيم x^* هي: −3، −2، −4، 0،2،1.

VI- مقاييس الشكل: تعطي هذه المقاييس معلومات على شكل قانون احتمال المتغير العشوائي x، حيث يتم مقارنتها بالتوزيع الطبيعي، وقد تم استيحاؤها من مقاييس الالتواء والتفلطح المستخدمة في الاحصاء الوصفي. وقد عرف فيشر كل من معامل الالتواء والتفلطح لمتغير عشوائي x يملك عزوما الاولى معامل الالتواء.

معامل الالتواء $$y_1 = \alpha_3 = \frac{3}{\mu_2^{3/2}}$$

معامل التفلطح $$y_2 = \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

ان العزوم المركزية ذات الدرجات الفردية معدومة من اجل توزيعات متناظرة، ومنه y_1 معدوم اذا كان توزيع المتغير العشوائي متناظر بالنسبة للوسط m، بيد ان عكس القضية غير صحيح، اذ يمكن ان يكون y_1 معدوما دون ان يكون متناظرا. واذا كان التوزيع وحيد المنوال وممتدا نحو اليمين فان y_1 يكون موجبا، وفي الحالة المعاكسة يكون y_1 سالبا.

اما معامل التفلطح y_2 فيكون معدوما في حالة المتغير عشوائي يتوزع توزيعا طبيعيا، وهنا ايضا نجد عكس القضية غير صحيح، اذ يتعلق الامر بدرجة تفلطح التوزيع مقارنة بالتوزيع الطبيعي، لذا فان y_2 يمكن ان يكون موجبا او سالبا، وتجدر الملاحظة ان كلا من $y_2; y_1$ يتأثران بتغيير سلم القياس (الوحدة) والمبدأ.

الفصل الرابع: التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية

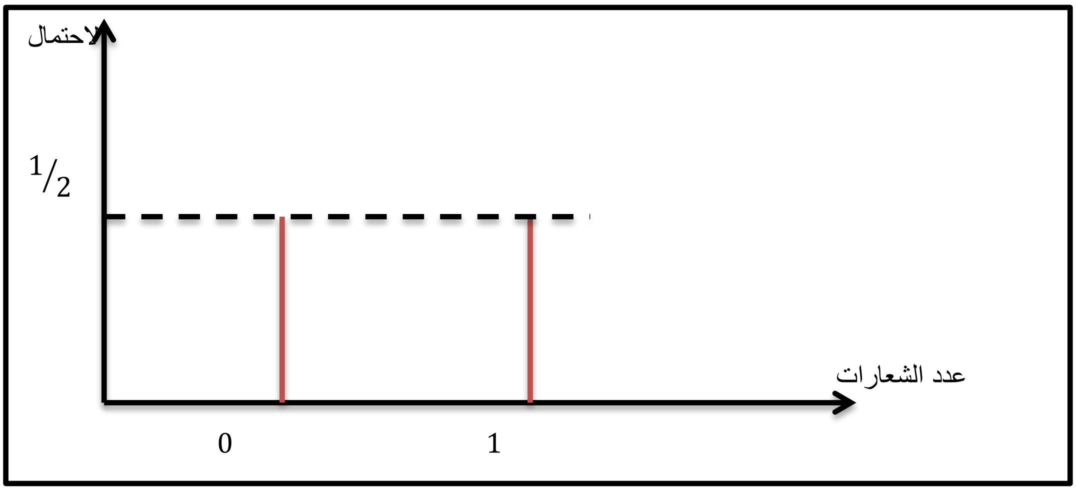
تعرفنا فيما سبق على المفاهيم الاساسية المتعلقة بدالة الاحتمال ودالة كثافة الاحتمال وتابع التوزيع، وفي هذا الفصل نعرض بإيجاز بعض التوزيعات الاحتمالية، وسنركز بالنسبة للمتغير العشوائي المتقطع على التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون، اما بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر فسنركز على التوزيع الطبيعي لما له اهمية بالغة في الاحصاء.

I- التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

I−1−التوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين) $\mathfrak{B}\sim(n,P)$ *Distribution Binomiale* :

- ✓ **توزيع برنولي** ***Distribution de Bernoulli de paramètre P***: اذا القينا قطعة من النقود مثلا لدينا حالتان ممكنتان هما "شعار" و " الكتابة" وهما الحادثان الوحيدان الممكن وقوعهما ويكون التوزيع الاحتمالي الموافق : احتمال الشعار= $^1/_2$ و احتمال الكتابة =$^1/_2$ونستطيع ان نمثل هذا التوزيع بيانيا كما هو في الشكل الموالي:

الشكل 11: التمثيل البياني لتوزيع برنولي



الان نعرف متغيرا له بـx بحيث ياخذ القيمة $x=0$ ، اذا هر الوجه" الكتابة" و $x=1$ اذا ظهر الوجه "شعار". اذن x هو عدد الشعارات التي تظهر في رمية واحدة لقطعة نقود. وعلى هذا تكون قيم x اما: 0 او 1، ومع اننا لا نعرف مسبقا ماذا ستكون قيمةx قبل رمي قطعة النقود ولكن نعلم جيدا احتمال كل حالة x هو المتغير العشوائي ونسمي التوزيع الاحتمالي الموافق له **توزيع برلوني (حالة خاصة من توزيع ثنائي الحدين في حالة تجربة لها مخرجين وp حالة نجاح التجربة (1)و q حالة فشلها (0))**

$$E(x)=p.1+0.(1-p)=p$$

$$v(x) = p(1-p)^2 + (1-p)(0-p) = p(1-p)$$

لنتساؤل الان ماذا يحدث لو القينا قطعتي نقود معا؟ سيكون لدينا اربعة حالات ممكنة، "شعار– شعار، كتابة– كتابة، شعار–كتابة، كتابة–شعار " ومن الواضح ان هذه الحالات ذات احتمالات متساوية واحتمال كل منهما يساوي $1/4$. نفرض Y عدد الشعارات اذن $Y = 0.1.2$ ويمكن ان نكتب التوزيع الاحتمالي الموافق:

احتمال $(Y = 0) = \frac{1}{4}$

احتمال $(Y = 1) = \frac{1}{2}$

احتمال $(Y = 2) = \frac{1}{4}$

لقد نظرنا في التوزيعات الاحتمالية لمتغيرين عشوائين x عدد الشعارات في رمية واحدة لقطعة نقود حيث تاخذ القيمتين 0.1. Y عدد الشعرات في رميتين لقطعة نقود حيث ياخذ القيم $0.1.2$ ويمكننا ان نزيد عدد القطع بقدر ما نريد. وبصورة عامة يمكن ان ننظر الى قطعة النقود كتجارب ناجحة اذا كانت النواتج "شعار" وفاشلة اذا كانت غير ذلك. ان توزيعي $x.Y$ هي امثلة على التوزيع الثنائي الذي نصادفه في كثير من التطبيقات.

فالتوزيع الثنائي هو التوزيع الناشئ عن عدد مرات النجاح في n تجربة مستقلة اذا كان احتمال النجاح في التجربة الواحدة هو P ، ويمثل التوزيع الثنائي في الحقيقة اسرة من التوزيعات كل عضو فيها معرف بقيمتي $n; P$ التي ندعوها وسيطي التوزيع.

ان الادوات البسيطة التي نجري عليها التجارب العشوائية مثل قطعة النقود او حجر النرد لها اهمية في ذاتها. لنفرض اننا اخذنا عينة عشوائية لتقدير نسبة مرض ما، ولتكن النسبة P، ونظرا لكون هذه العينة قد اختيرت بشكل عشوائي ومستقل من المجتمع، فاحتمال اصابة اي واحدة منها هو P. ان عدد مرات النجاح، اي عدد عن من العينة المصابين بالمرض يتبع التوزيع الثنائي. ان خواص التوزيع الثنائي تمكننا من دقة انتشار المرض. ويمكننا حساب الاحتمالات في التوزيع الثنائي يحد له جميع الحالات. ولكن هذا ليس مقبولا من الوجهة العملية وعوضا عن ذلك فان لدينا قانونا يعطينا بدلالة عدد الرميات واحتمال ظهور الشعار. ويمكننا هذا القانون من حساب هذه الاحتمالات من اجل اي قيمة لـ P ومن اجل عدد من التجاربn . وبصورة عامة اذا كان لدينا n تجربة مستقلة، احتمال نجاح الواحدة منها P، فما هو احتمال نجاح k تجربة منها؟ في متتالية من التجارب ذاتk نجاح و $(n-k)$ فشلا حيث احتمال النجاح في كل منها P واحتمال الفشل $(1-P)$، يكون احتمال وقوع هذه الحوادث $P^k(1-P)^{n-k}$ وذلك بتطبيق قاعدة الجداء نظرا لان التجارب مستقلة. ولكن عدد الطرق لاختيار k عنصرا هو $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ فان واحد فقط من هذه التوفيقات يمكن لن يقع في المرة الواحدة. وهكذا نجد ان $P^k(1-P)^{n-k}$ طريقة متنافية مثنى للحصول على k نجاح كل منها باحتمال قدره $n!\,(k!)(n-k)!$

احتمال حصولنا على k نجاح هو مجموع $n!\,(k!)(n-k)!$ احتمالا يساوي كل منها $P^k(1-P)^{n-k}$ ويكون :

$$\text{احتمال نجاح } \boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}.\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{k}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{P})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{k}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{P})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$$

ان الذين يتذكرون نشر ثنائي الحد سيكتشفون بسهولة ان هذا الاحتمال يمثل الحد العام لهذا النشر ولهذا سمي بالتوزيع الثنائي.

تعريف: نقول عن المتغير العشوائي x انه يتوزع حسب القانون الثنائي $\mathfrak{B}\sim(\boldsymbol{n},\boldsymbol{P})$ بالوسيطين n,P حيث n عدد طبيعي و P عدد حقيقي محصور بين 0.1 عندما يكون قانون احتماله معطى على النحو التالي:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{k}}(\mathbf{1}-\boldsymbol{P})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$$

ملاحظة: حسب دستور نشر ثنائي الحد لنيوتن لدينا:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ a^{n-k}\,b^k$$

حيث a.b عددان حقيقيان وبوضع $a = 1-P\ ;\ b = P$

$$[(1-P)+P]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ (1-P)^{n-k}\ P^k$$

ومنه:

$$\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}) = \mathbf{1}$$

وبهذا نكون بجدير هنا انه مهما يكن العدد الطبيعيn والعدد الحقيقي P المحصور بين 0.1 فان مجموع الاحتمالات يساوي الواحد الصحيح .

ويمكن استخدام هذا القانون حينما كلن لدينا متتالية من التجارب ذات نتيجتين ممكنتين فقط فإذا كانت التجربة معالجة مجموعة من المرضى فان عدد من يشفى منهم يتبع التوزيع الثنائي. واذا قسنا ضغط الدم لمجموعة من الاشخاص فعدد ذوى الضغط المرتفع منهم يتبع التوزيع الثنائي. كلما زادت قيمة n فان هذا التوزيع يصبح اكثر تناظرا ويقترب من التوزيع الطبيعي الذي سندرسه لاحقا.

- ✓ **خواص (التوقع الرياضي والتباين) التوزيع الثنائي:**

$$\overline{x} = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k\, P^k\, (1-P)^{n-k} = (1-P)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{P}{(1-P)}\right)^k\, k$$

لدينا العبارة الاولى:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k$$

باشتقاق العبارة الاخيرة والضرب بـx نجد العبارة الثانية:

$$n\, x\, (1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k\, x^k$$

بوضع $x = \frac{P}{(1-p)}$ نجد:

$$\overline{x} = E(x) = nP$$

باشتقاق العبارة الثانية وضربها في x نحصل على عبارة بسيطة لـ $\sum_{k=0}^{n} \quad {}^2 c_n^k x^k$

نستنتج عندئذ قيمة

$$E(x^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2\, C_k^n\, \left(\frac{P}{1-P}\right)^k\, (1-P)^n$$

نحصل على:

$$E(x^2) = n\, P\, (1-p) + n^2 P^2$$

وعليه:

$$\sigma = \sqrt{E(x^2) - [E(x)]^2} = \sqrt{n\, P(1-P)}$$

ويمكن اثبات ان **الدالة المولدة للعزوم حول الصفر لتوزيع ذي الحدين** هي:

$$m_x(t) = [1 + p(e^t - 1)]^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x\, P^x (1-P)^{n-x} e^{tx}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} C_n^x\, (P.e^t)^x (1-P)^{n-x} = [P\, e^t + (1-P)]^n = [Pe^t + 1 - P]^n$$

$$[1 + P(e^t - 1)]^n$$

ومن هذه الدالة يمكن الحصول على العزوم حول الصفر وحول الوسط الحسابي وحساب المعاملات المختلفة، فمثلا العزم الاول حول الصفر اي الوسط الحسابي هو (nP) (نقوم باشتقاق الدالة $m_x(t)$ ونضع $t = 0$

$$B_1 = \frac{\mu_1^2}{\mu_2^3} = \frac{(1-2P)^2}{nP(1-P)}$$

$$B_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 3 + \frac{1-6P(1-P)}{nP(1-P)}$$

هما معاملا الالتواء والتفلطح للتوزيع الطبيعي مما يعني ان التوزيع الثنائي يؤول الى التوزيع الطبيعي ذاتn .

I−2−التوزيع الهندسي الزائد Distribution hypergémoétrique $\mathcal{H}(N, n, p)$

هو من احد التوزيعات الاحتمالية المتقطعة المستخدمة في الاحصاء ، بفرض ان مجتمع يتكون من عدد محدود من الوحدات وليكنN وان هناك من الوحدات تحتمل النجاح p وهناك من الوحدات تحتمل الفشل $1 - p = q$ بفرض عينة عشوائية من الحجم n اختيرت من هذا المجتمع بدون ارجاع، وX يمثل عدد الوحدات التي تحتمل النجاح التي تظهر في العينة.

نقول عن المتغير العشوائي يتوزع توزيع الهندسي الزائد ذلك لان عدد حالات النجاح X تعتمد على p الموجودة في عينة المجتمع N ،ويعطى بـ:

$$P(X = x) = \frac{C_{Np}^{x}\, C_{N-Np}^{n-x}}{C_N^n}$$

حيث ان:

$$\frac{Np!}{(Np-x)x!}\,\frac{\big(N(1-p)\big)!}{(n-x)!\,(N-Np-n+x)!}\,\frac{n!\,(N-n)!}{N!}$$

$$= C_n^x\,\frac{Np!}{(Np-x)!}\,\frac{Nq!}{(Nq-n+x)!}\,\frac{(N-n)!}{N!}$$

بوضع $q = 1 - p$

$$\frac{Np!}{(Np-x)!} = \frac{1.2.3\ \ldots.\ Np}{1.2.3\ \ldots\ (Np-x)} = Np(Np-1)\ \ldots.\ (Np-x+1)$$

بما ان $Np - 1 \sim Np - 2\ \ldots\ldots \sim (Np - x + 1) \sim Np. \quad / \, x \sim \sum Np$

وعليه: $(Np)^x \sim \frac{Np!}{(Np-x)!}$

$$\frac{Nq!}{(Nq-n+x)!}\sim(Nq)^{n-x} \quad ; \quad \frac{N!}{(N-n)!}\sim N^{n}$$

اذن:

$$\frac{\boldsymbol{C_{Np}^{x}\, C_{N-Np}^{n-x}}}{\boldsymbol{C_{N}^{n}}}\sim \boldsymbol{C_{n}^{x}}\ \frac{\boldsymbol{(Np)^{x}(Nq)^{n-x}}}{\boldsymbol{N^{n}}} = \boldsymbol{C_{n}^{x}p^{x}q^{n-x}}$$

وعليه عمليا هذه النتائج تطبق لما $\frac{}{N} < 10\%$ بمعنى لما يكون المجتمع يكون اكبر بعشر (10) مرات من حجم العينة العشوائية المختارة.

- ✓ **خواص التوزيع الهندسي الزائد:**

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = E(X_i) = \sum E(X_i) = np}$$

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{N-n}{N-1}\, np(1-p)}$$

I-3–التوزيع الهندسي Distribution Géométrique:

نقول عن المتغير العشوائيX يتوزع التوزيع الهندسي اذا كان تكرار التجربة حصل فيها النجاح ونرمز لاحتمال النجاح p واحتمال الفشل q وعليه يعطى بالعلاقة الاتية:

$$P(X=x) = p(1-q)^{x-1}; \quad x = 1,2,\ldots\infty$$

هذا بوضع $q = 1-p$ نجد:

$$\boldsymbol{\mu = E(X) = \frac{1}{p}\ ;\ \sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2}\ ;\ \ y_1 = \frac{2-p}{q}\ ;\ y_2 = 9 + \frac{p^2}{q}}$$

I–4–التوزيع الثنائي السالب: La Distribution Binomiale négative

نعلم ان: $y = X - n$

$$P(Y=y) = C_{n+y-1}^{n-1}\ p^{n}\, q^{y}$$

نضع $P = \frac{1-p}{p}\ ; Q = \frac{1}{p}$

$$P(Y=y) = C_{n+y-1}^{n-1}\, P^{y}\, Q^{-n-y}$$

بمصطلح عام : $(Q-P)^{-n}$

$$\boldsymbol{E(x) = np \;\; ; \;\; V(Y) = nPQ \; ; \; y_1 = \frac{p+Q}{\sqrt{nPQ}} \; ; \; y_2 = 3 + \frac{1+6PQ}{nPQ}}$$

5-I-توزيع باسكال: Distribution de Pascal : نفرض ان هناك تجربة او محاولة لها نتيجتين هما (النجاح والفشل) ان احتمال النجاح p ، واحتمال الفشل $1-p$ نفرض ان هذه التجربة تتكرر حتى الحصول على n نجاح باحتمال قدره p^{n-1}، اذا كانتx عدد مرات الفشل باحتمال قدره $q^{(x-n)}$ ويعطى بالشكل العام:

$$P(X=x) = p\, C_{x-1}^{n-1}\, p^{n-1}\, q^{(x-1)-(n-1)} = \boldsymbol{C_{x-1}^{n-1}\, p^n q^{x-n}} \quad ; \; x = n, n+1, \ldots .\infty$$

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{n}{p} \;\; ; \;\; V(X) = \frac{nq}{p^2} \;\; ; y_1 = \frac{2-p}{\sqrt{nq}} \; ; \; y_2 = 3 + \frac{p^2+6q}{nq}}$$

6-I-توزيع بواسون $\boldsymbol{\mathcal{P}(\lambda)}$ Distribution de poisson: ان التوزيع الثنائي هو واحد من التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في الاحصاء، وهو توزيع منقطع اي يأخذ مجموعة منتهية من القيم الممكنة، ولعله التوزيع المنقطع الاكثر مصادفة في التطبيقات الطبية. ثمة توزيع متقطع اخر يستحق الدراسة من هذه الوجهة هو توزيع بواسون.

يعتبر هذا التوزيع توزيع الحوادث النادرة مثل عدد الاخطاء المطبعية في فحة من صفحات عشوائيا من كتاب، او عدد الحوادث المرورية في فترة محدودة...الخ. ويمثل توزيع بواسون النهاية التي ينتهي اليها توزيع ثنائي لما $n \to +\infty;$ و$p \to 0$ والحالات التي تكون فيهاn كبيرة و p صغيرة جدا كثيرة الوقوع وهامة، مثل تأكل مادة مشعة، حوادث المرور...الخ.

سنفترض هنا الحالة الحدية حيث تنتهي $p \to 0$ و $n \to +\infty;$ حيث يكون الجداء nP عددا منتهيا نرمز له بـ λ . لدينا :

$$\boldsymbol{f(x) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} = C_{n\,p^x q^{n-x}}^{x}}$$

نضع $\boldsymbol{\lambda}$ ثابت حيث: $p = \frac{\lambda}{n}$

$$f(x) = \frac{n(n-1)\ldots\ldots..(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\frac{n}{n}\;\frac{(n-1)}{n}\;\frac{(n-2)}{n}\ldots\ldots\ldots\frac{(n-x+1)}{n}}{x!}\;\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{1\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\ldots..(1-\frac{x-1}{n})}{x!}\lambda^x\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^x}$$

فاذا تركنا$n \to \infty$ نجد من اجل:

$$\frac{1}{n}=\frac{2}{n}=\cdots.=0 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{x!}\lambda^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}=\frac{\lambda^x}{x!}(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}$$

لكن:

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{-x}=(1-0)^{-x}=1 \text{ بما ان } \lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n=e^{-\lambda}$$

قيمة مثبتة لـ x ان:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{x!}\lambda^x e^{-\lambda} \qquad\qquad x=0,1,2,\ldots.}$$

هذا هو توزيع بواسون ونكتبه عادة بالشكل الاتي:

$$\boldsymbol{p(X=x)=f(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}}$$

- ✓ **خواص (التوقع الرياضي والتباين) التوزيع بواسون:**

وعليه :

$$E(x)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}=\sum_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

$$\boldsymbol{= e^{-\lambda}\lambda\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}= e^{-\lambda}\lambda\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}\ldots\ldots.parceque\ e^{-\lambda}e^{\lambda}=1}$$

$$\boldsymbol{E(x)= \lambda}$$

اما بالنسبة للتباين في التوزيع الثنائي $\mathfrak{B}\sim(n,P)$ نجده $\mathrm{V(x)=nP(1-P)}$ ،

لما $nP\to\lambda/\ P\to 0$ نجد ان التباين في التوزيع بواسون $\mathcal{P}\sim(nP)$ كما يلي:

$$\boldsymbol{v(x)=\lambda}$$

اما الانحراف المعياري هو: $\boldsymbol{\sigma=\sqrt{\lambda}}$

حيث $\lambda = 2.718$ الثابت الرياضي المعروف. ومع اننا نادرا ما نحتاج الى الثوابت الاحتمالية لهذا التوزيع كالمتوسط الحسابي والتباين، فان متوسط توزيع بواسون من اجل عدد الحوادث في وحدة الزمن هو ببساطة المعدل $\boldsymbol{\lambda}$. كما **ان** تباين هذا التوزيع يساوي λ ايضا وهكذا فثمة اسرة من التوزيعات تماثل التوزيع الثنائي ولكن بوسيط واحد λ تحمل اسم بواسون.

معامل الالتواء : $\propto_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$

معامل التفلطح: $\propto_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$

مثال: نأخذ عينة عشوائيا 10 وحدات من انتاج الة نسبة انتاجها التالف 10%

- احسب احتمال ان يكون هناك وحدتان تالفتان؟

الحل:

أ- **الطريقة الاولى باستخدام التوزيع الثنائي** $\mathfrak{B}\sim(\boldsymbol{n},\boldsymbol{P})$:

$$P(x=2) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\ (1-P)^{n-k}\ P^k = \binom{2}{10}\ (0.1)^{\ 2}\ (1-0.1)^{\ 10-2} = 0.1937$$

ب- **الطريقة الثانية باستخدام توزيع بواسون** $\boldsymbol{\mathcal{P}}\sim(\boldsymbol{nP})$:

$$P(x=2) = \frac{\lambda^x\ e^{-\lambda}}{x!} = \frac{1^2\ e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2.1} = \frac{1}{2e} = 1.1839$$

✓ **حساب احتمال عدد من الاحداث $\boldsymbol{t}$ وحدة زمن :**

من اجل عدد او مقدار t من وحدات الزمن نعوض λ بـ λt نجد:

$$P(X=x) = \frac{\lambda t^x\ \ e^{-\lambda t}}{x!}$$

مثال: بفرض ان عدد المكالمات الهاتفية التي تصل الى مركز هاتفي معين تتبع توزيع بواسون بمعدل $\lambda = 5$ في الثانية . احسب احتمال وصول الى 7مكالمات في ثانية ونصف؟

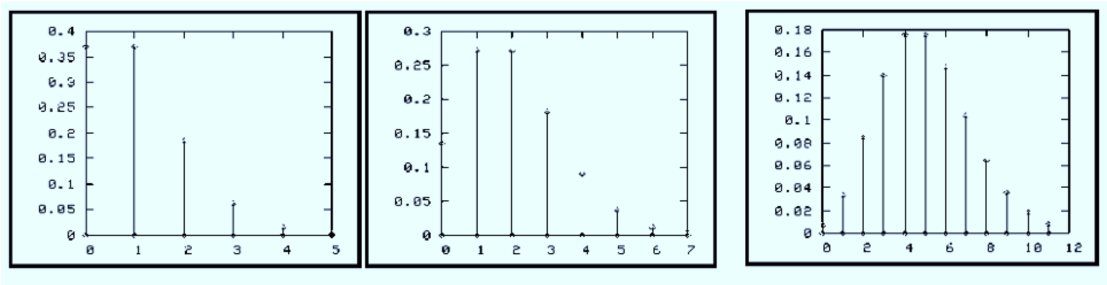
الحل:

$$\lambda t = 5(1.5)$$

$$P(X=7) = \frac{1.5(5)^7\ \ e^{-1.5(7)}}{7!} =$$

✓ **التمثيل البياني لتوزيع بواسون:** دالة توزيع بواسون هي دالة متناقصة لكون قوه e سالبة، لكونه توزيع متقطع يرسم تويع بواسون من خلال مدرج الاعمدة، وهذا يصعب ملاحظة سلوك التوزيع الا من خلال استخدام عدة امثلة بمعالم متصاعدة بالتدرج، حيث يقترب التوزيع شيئا فشيئا من التوزيع الطبيعي لما λ كبيرة بما فيه الكفاية. والرسوم البيانية تمثل ذلك:

الشكل 12: سلوك توزيع بواسون عند زيادة المعلمة من 1 الى 2 الى 5 (من اليسار الى اليمين)



✓ **الاستخدام توزيع بواسون بدلا من التوزيع الثنائي:**

يمكن استخدام توزيع بواسون بدلا من التوزيع الثنائي لما $n \to \infty$ والمتوسط ثابت يؤول الى التوزيع الثنائي الى التوزيع بواسون، عمليا يعطى توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي لما:

$$n \geq 30 \quad \text{و} \quad np < 5 \ \text{او} \ nq < 5$$

ويستخدم بعض الاحصائيين ايضا كشرط لاستعمال قانون بواسون بدلا من القانون الثنائي القاعدة التالية:

$$n \geq 25 \ \text{و} \ p \leq 0.1$$

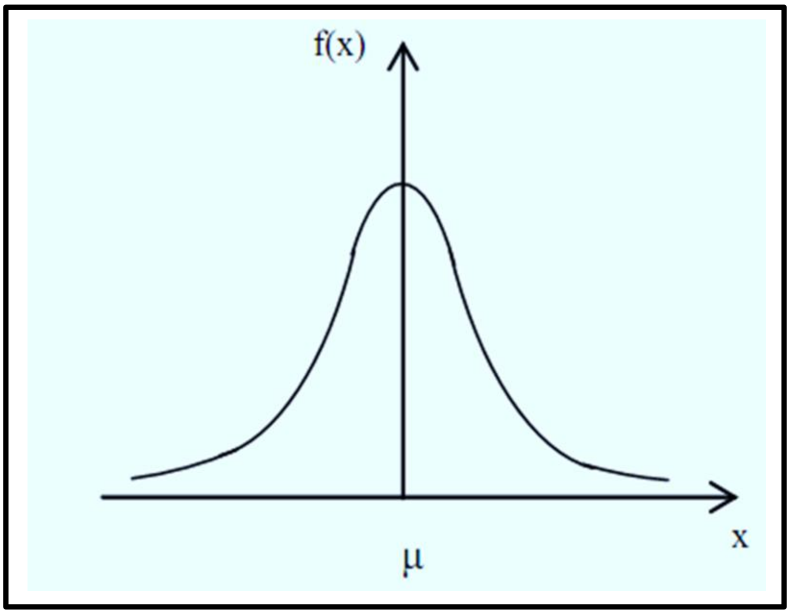
✓ **الاستخدام العملي لتوزيع بواسون:** لهذا التوزيع له اهمية خاصة. ان واحد من اهم التطبيقات لتوزيع بواسون في الدراسات الصناعية هو تكوين فكرة عن كمية الوحدات المعيبة الناشئة عن وضع حدود لعدد المخالفات قبل اجراء عملية الاتلاف او اعادة المعالجة. كما يستخدم في الطب اذ ان الوفيات في امراض كثيرة يمكن النظر اليها على انها حوادث عشوائية ومستقلة في المجتمع فمثلا عدد الوفيات الناتجة عن سرطان الرئة في السنة لمجموعة مهنية واحدة، مثل عمال المناجم كمثل متغير يخضع لتوزيع بواسون. كما يستخدم ايضا في الفيزياء النووية لدراسة عدد الجزئيات المنبعثة من مادة مشعة وفي البيولوجيا الدقيقة(Microbiologie) لمراقبة تكاثر البكتيريا في حقل تجارب، كما يستخدم في البيولوجيا وحتى في علم الاحوال الجوي. اما في مجال التسيير، يستخدم توزيع بواسون بشكل خاص عند دراسة مسائل متعلقة "بظواهر الانتظار" ، ففي هذا النوع من المسائل كثيرا ما يفترض ان وصول الزبائن الى مكان الخدمة يتبع توزيع بواسون. مثل عدد الطائرات التي تصل الى المطار في وحدة زمن، عدد البواخر التي تصل الى الميناء في وحدة زمن، عدد الحالات الاستعجالية التي تصل الى المستشفى، تسمى هذه الظواهر في نظرية صفوف الانتظار" بظواهر الوصول".

II-التوزيعات الاحتمالية المستمرة الاكثر استخداما:

II-1- التوزيع الطبيعي (توزيع لابلاس قوس D.Noemal. D.de laplace-Gausse):

يعد التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات الاحتمالية الشائعة الاكثر استخداما في الاحصاء، فهناك الكثير من التجارب حيث يشكل التوزيع الطبيعي تقريبا جيدا للتوزيع الاحتمالي الناشئ عن تكرار تجربة عددا كبيرا من المرات. بالإضافة لما له من خصائص تنطبق نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية الاجتماعية والاقتصادية. هناك العديد من المجتمعات الاحصائية التي يتطرق اليها الاحصاء النظري هي مجتمعات طبيعية وقد اتخذ الاحصاء الرياضي اوسع مدى من التطور مستندا الى دراسة عينات احصائية مأخوذة من مجتمعات نفترض انها مجتمعات طبيعية. وهو يأخذ شكل جرسي متماثل حول المتوسط وهي صفات التوزيع الطبيعي كما هي في الشكل الاتي:

الشكل13: الشكل العام للتوزيع الطبيعي



نكتب دالة كثافة لمنحنى التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

حيث μ ;σ هما التوقع الرياضي والانحراف المعياري على التوالي ونكتب $X\sim N(,\sigma)$

- ✓ **خواص التوزيع الطبيعي:**

1. ان معادلة تابع كثافة التوزيع الطبيعي هي من الشكل: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

ونلاحظ ان لهذا التوزيع وسيطين هما الوسط الحسابي (التوقع الرياضي) μ والانحراف المعياري σ ، وهو يشكل منحنى متناظرا حول الوسط الحسابي.

2. ان المساحة التي يحددها تابع الكثافة $f(x)$ مع المحور (OX) تساوي الواحد الصحيح

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

لنضع $\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma} = t \quad , \quad dx = \sqrt{2}\ dt$

ومنه يمكننا كتابة :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\ e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\ dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ .\sqrt{\pi} = 1$$

وذلك ان : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\ dt = \sqrt{\pi}$

3. ان منحنى هذا التابع متناظر حول $x = \mu$ وهي النقطة التي يتمركز عندها التوزيع او يبلغ نهايته العظمى، ثم ينتشر على جانبيها بصورة متناظرة وله نقطتا انعطاف في الموضعين

$x = \mu - \sigma$ والنقطة $x = \mu + \sigma$ ، ونلاحظ انه من اجل قيم صغيرة لـ σ يكون انتشار المنحنى على جانبي μ ضئيلا، فيما يمتد الى مسافات ابعد ويأخذ شكلا اكثر انبساطا كلما ازدادت σ.

4. مقاييس النزعة المركزية الثلاثة: المتوسط والمنوال والوسيط تموضع كلها في النقطة نفسها
5. تتجمع المعطيات حول المتوسط مع قيم قليلة تقع خارج المجال الذي يحوي ثلاث انحرافات معيارية.
6. لكل متوسط حسابي وانحراف معياري يوجد توزيع طبيعي واحد.
7. لنحدد التوقع الرياضي لمتغير عشوائي يتوزع توزيعا طبيعيا

$$E(x) = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}\ dx$$

عندها نحصل على:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}$$

وهو عبارة عن تابع كثافة المتغير العشوائي $\bar{}$ حيث $E(x) = 0$. نحدد تباين هذا المتغير وفق الدستور:

$$V(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\ e^{-\frac{x^2}{2\,\sigma^2}}\, dx$$

لنجري تبديل المتغير $= \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ عندئذ يكون لدينا:

$$v(\bar{x}) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \ e^{-t^2} \, dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \ 2t \ e^{-t^2} \, dt$$

لنحسب التكامل بالتجزئة فنجد:

$$v(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left[-t \ e^{-t^2}\right] + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt$$

وبما ان :

$$\lim_{t \to \infty} t \ e^{-t^2} = 0 \quad ; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \sqrt{\pi}$$

ومنه يكون لدينا: $v(\bar{\ }) = \sigma^2$ ومنه فان الانحراف المعياري هو σ.

ان احتمال ان يقع x في المجال $[a, b]$ هو عبارة عن المساحة المحدودة بهذا المنحنى $f(x)$ والمحور (OX) والمستقيمين $x = b; x = a$ حيث $a < b$ ؛ ولحساب الاحتمال

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma}} \, dx$$

وفي كل مرة نحتاج فيها الى حساب المساحة او الاحتمال لا بد من اجراء هذه التكاملات الشاقة. والسبب يعود الى اختلاف الاوساط الحسابية للمنحنيات وانحرافاتها المعيارية، من هنا جاءت فكرة البحث عن منحنى طبيعي له شكل واحد مهما اختلفت قيم المتغير العشوائي x وهو ما يعرف بالتوزيع الطبيعي القياسي. وقبل البحث في مفهوم هذا التوزيع، لابد من التعرض لمفهوم الدرجة المعيارية والتي هي عبارة عن قيم المتغيرات العشوائية المستمرة x غير المقاسة بوحدات القياس المعروفة، وانها مقاسة بالدرجات المعيارية، وتعرف بالدرجة المعيارية Z بانها وحدة قياس مستقلة تماما عن وحدة القياس الاساسية، ويتم ذلك بتحويل المتغير العشوائي x الى متغير عشوائي z بالعلاقة التالية:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

8. معامل الالتواء يساوي الصفر ومعامل التفرطح =3

- ✓ **العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الثنائي:** عندما يزداد n لقد بينا سابقا ان شكل التوزيع يتغير عندما يزداد n والقيم الاكثر تطرفا تصبح اقل احتمالا، ويغدو التطبيق اكثر تناظرا وهذا يحدث مهما كانت قيمة

p، ان وضع التوزيع على طول المحور الافقي وانتشاره عليه يبقى تابعا لـ p. بينما يكون شكل هذا المنحنى مستقلا عنها. ان المنحنى الذي يمكن رسمه قريبا جدا من هاته النقاط هو منحنى التوزيع الطبيعي. وهو المنحنى الذي يسعى اليه التوزيع الثنائي عندما تزداد n، ويمكن لاي توزيع ثنائي ان يقترب الى التوزيع الطبيعي له متوسط التوزيع الثنائي ذاته وتباينه. وذلك عندما تصبح n كبيرة بشكل كاف. ويسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون p قريب من 0.5. وفي الحالة العامة ان التوزيعين متقاربين اذا تحقق الشرطان $n\,p\ \geq 5\ \ ;\ \ n(1-p) \geq 5$ معا فان تقريب التوزيع الثنائي يؤول الى التوزيع الطبيعي وهو حالة خاصة من نظرية النهاية المركزية.

- ✓ **العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون:** عندما $\lambda \to \infty$ فان التوزيع الطبيعي وتوزيع بواسون يعطيان نتائج متطابقة. فالأمر بالنسبة لتوزيع بواسون اذا اخذنا مجموعة من المتغيرات البواسونية لها المتوسط نفسه وجمعناها معا نحصل على متغير يمثل عدد الحوادث العشوائية في مجال زمني كبير لمجموع المجالات الموافقة للمتغيرات المختلفة) وهو يحقق توزيع بواسون بمتوسط متزايد. وكما ان مجموع عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة لها التوزيع نفسه يسعى الى التوزيع الطبيعي عندما يزداد المتوسط، فان توزيع بواسون يؤول الى التوزيع الطبيعي عندما يزداد المتوسط. وفي معظم التطبيقات العلمية يتحقق هذا عندما يتجاوز المتوسط 10 $(\lambda \geq 10)$. ان التماثل بين توزيع بواسون والتوزيع الثنائي هو جزء من التقارب الاهم الملاحظ في كثير من التوزيعات الاخرى.

II -2–التوزيع الطبيعي المعياري (القياسي): ان عملية تحويل المتغير العشوائي x الى متغير z تقودنا الى توزيع طبيعي قياسي متغيره العشوائي الدرجات المعيارية z ووسطه الحسابي $\mu = 0$ وانحرافه المعياري $\sigma = 1$ وترمز له بالرمز $N\sim(0{,}1)$ ويمكن برهانه ذلك رياضيا.

- ✓ نعلم ان $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ بمعنى

$$E(Z) = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\,E(x-\mu) = \frac{1}{\sigma}\,[E(x)-\mu]$$

$$E(x) = \mu$$

ومنه

$$E(z) = 0$$

اي ان μ بالنسبة لمتغير عشوائي يتوزع توزيع طبيعي قياسي مساويا للصفر.

$$var(z) = \sigma^2 = E(z^2) - \mu^2 \ \ ;\ \ \mu = 0$$

$$E(z^2) = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = E\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2}\ x\,\sigma^2 = 1$$

ويصبح تابع التوزيع

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}\ z^2}\ dz$$

حيث عوضنا $dx = \frac{1}{\pi} dz$ و $Z = \frac{x-}{\sigma}$

ومنه يكون تابع كثافة احتمال المتغير Z هو: $\boldsymbol{f(z) = \frac{1}{\sqrt{}} e^{-\frac{1}{2}z^2}}$

نسمي المتغير العشوائي $\boldsymbol{Z}$ بالمتغير المعياري او الدرجة المعيارية، لحساب قيمة هذه الاحتمال او المساحة

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

نحول المتغير العشوائي x الى متغير معياري Z في تابع الكثافة الاحتمالية $N\sim(\mu,\sigma)$ الى $N\sim(0,1)$

ولإيجاد التكامل السابق لا بد من تحويل حدود التكامل الى الدرجات المعيارية او المتغير المعياري

عندما $x = a$ يصبح الحد الادنى للتكامل $z = \frac{a-\mu}{\sigma}$

عندما $x = b$ يصبح الحد الاعلى للتكامل $z = \frac{b-\mu}{\sigma}$

وان $dz = \frac{dx}{\sigma} \Longrightarrow dx = dz\,\sigma$

وبالتعويض في علاقة منحنى الطبيعي نجد $N\sim(\mu,\sigma^2)$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}z^2}\sigma \; dz$$

بما ان $\sigma = 1$ تصبح العلاقة :

$$\boldsymbol{P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \; dz}$$

مثال: في مزرعة يتم انتقاء الفاكهة عبر الة تبعا لقطر الفاكهة، ليكن x المتغير العشوائي قطر المشمش، فاذا علمت ان متوسط القطر هو 4.25 وانحرافه المعياري 0.5، احسب احتمال ان يكون للمشمشة قطر محصور بين $x_2 = 5.5;\ 5 = x_1$

الحل: بغرض اجراء هذا الحساب نبحث عن القيم المعبرة $z_2;\ z_1$ الموافقة لـ x_1, x_2

$$z_1 = \frac{5 - 4.25}{0.5} = 1.5$$

$$z_2 = \frac{5.5 - 4.25}{0.5} = 2.5$$

ان احتمال ان يكون x محصور بين 5.5 و 5 يساوي احتمال ان يكون z محصور بين 1.5 و 2.5

$$\boldsymbol{P(5 \leq x \leq 5.5) = P(1.5 \leq z \leq 2.5) = 0.9938 - 0.9332 = 0.06 = 6\%}$$

II –3–التوزيع الاسي *Distribution exponentielle de paramètre λ*:

يستخدم التوزيع الاسي عادة في مسائل متعلقة بقياس الزمن، منها مدة خدمة شباك البريد، مدة المكالمة الهاتفية، مدة تفريغ باخرة من الشحن، ...وغيرها، يستخدم هذا التوزيع الاسي لتمثيل مدة حياة الذرات المشعة قبل ان تتفكك، حيث يعتبر الوسيط عن اللحظة التي يبقى فيها نصف المجتمع الاصلي.

فمن الضروري فهم القاعدة العامة لاستخدام التوزيع الاسي لتمثيل مدة حياة ظاهرة ما اذا كانت لها متوسط ثابت $1/\lambda$ وكانت هذا الظاهرة لا تخضع للتقادم اي ان مدة حياة الظاهرة بعد لحظة ما T لا تتبع اللحظة T، اي لا تتاثر بالمدة التي دامتها الظاهرة قبل، مثلا قد نستبعد استخدام التوزيع الاسي لتمثيل مدة حياة الة عاملة قبل تعطلها لان احتمال تعطلها في لحظة ليس مستقلا عن المدة التي عملتها الالة من قبل، كذلك الامر بالنسبة لمدة حياة الانسان. اما عمليا تتحقق دقة تمثيل التوزيع الاسي (او اي توزيع اخر) لظاهرة ما من خلال تقنيات اختبار الفروض، وبالتحديد اختبار التجانس والتعديل.

يمكن ان نشير في الاخير الى انه هناك علاقة بين التوزيع الاسي وتوزيع بواسون، فاذا كان وقوع احداث ما تتبع هذا التوزيع، فان مدة وقوع الحدثين تتبع التوزيع الاسي، مثال اذا كان وصول الزبائن الى مركز الخدمة ما يتبع توزيع بواسون فان المدة الزمنية بين الوصول زبون A والزبون الموالي تتبع التوزيع الاسي. وعليه يمكن استنتاج صيغة القانون الاسي:

$$P(x \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - \left[\lambda^{0t} * \frac{e^{-\lambda t}}{0!}\right] \Longrightarrow P(x \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t}$$

لنرمز بـ T للزمن باليوم بين حادثين اذن سيكون لدينا $F(t)$ دالة الكثافة بين حادثين و $F(t) = P(T \leq t)$ ودالة التوزيع لـ T.

لنحسب احتمال p ان يكون الزمن بين حادثين يوم او اقل: لدينا $P = P(T \leq t = 1)$ اذن:

$$P = F(t = 1) \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

لاحظ من ناحية اخرى ان P هو معادل لاحتمال ان يسجل على الاقل حادث في يوم معين:

$$P = P(x \geq 1) = 1 - e^{-\lambda t} \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

من (1) و(2) نستنتج ان $\mathbf{F(t) = 1 - e^{-\lambda t}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$

$$f(t) = F(\grave{t}) = (1 - \acute{} e^{-\lambda t})$$

اذن: $F(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

ملاحظة: اذا كان حدث عشوائي ما يتكرر في الزمن وفق توزيع بواسون:

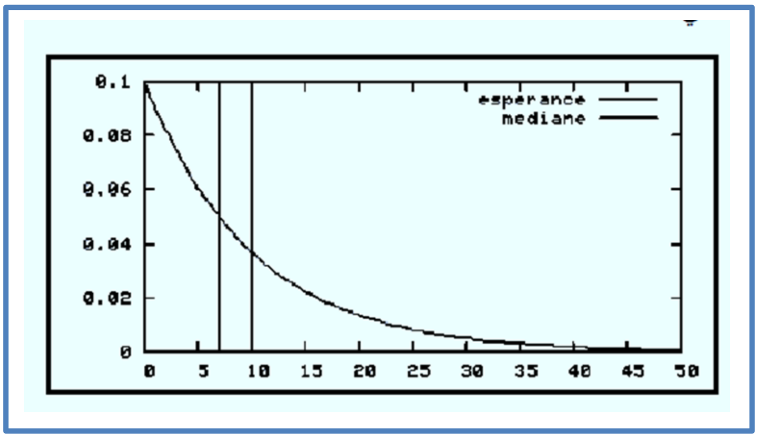
$$P_r(x) = \frac{(\lambda\tau)^x e^{-\lambda t}}{x!}$$

فان الزمن T بين حادثين يتبع التوزيع التالي:

$$f(\tau) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda t} & ; \quad \tau > 0 \\ 0 & , \tau > 0 \end{cases}$$

حيث λ عدد حقيقي موجب. ويسمى هذا التوزيع بالتوزيع الاسي ويسمى ايضا بالتوزيع الاسي السالب لعلاقته بتوزيع بواسون.

الشكل14: التمثيل البياني للتوزيع الاسي



✓ **خصائص التوزيع الاسي:**

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \quad ; \quad V(x) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad ; \quad M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad ; \quad \gamma_1 = 2 \; ; \quad \gamma_2 = 9$$

علما ان هذا التوزيع يستخدم مدة حياة الالكترون والتوقع الرياضي $\frac{1}{\lambda}$ يدعى عادة بـ: ***MTBF. Mean Time Between Failure)*** و معامل λ معامل الفشل لما:

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \lambda \; ; \qquad \lambda \; et \; est \; constant$$

توزيعي قاما وبيتا يمثلان مجموعة واسعة من التوزيعات ذات معلمتين تتميز بمرونة وقدرة على توليد توزيعات متعددة حسب قيم المعلمتين، ندرس هذين التوزيعين ايضا لعلاقتهما بالتوزيعات ***F***، و ***t*** و $\mathbf{x^2}$.

II-4-قاما Γ *Distribution Gamma*: يستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة.

نعرف التابع $\Gamma(\alpha)$ بصورة عامة من اجل α عقدية جزؤها الحقيقي موجب بالتكامل المعرف بالشكل التالي:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\propto-1}\ e^{-x}\,dx \ldots\ldots\ldots(1)$$

وتهمنا هنا الحالة التي تكون فيها α حقيقية موجبة واذا كاملنا بالتجزئة نجد:

$$\Gamma(\alpha) = (\propto -1)\Gamma(\alpha-1)$$

ويؤدي تطبيق هذه العلاقة بشكل متكرر من اجل ∝ عدد صحيح موجب: $\Gamma(\alpha) = (\propto -1)! \ldots\ldots(2)$

اذا كانت $\propto > 0$ لكنها ليس صحيحة نجد:

$$\Gamma(\alpha) = (\propto -1)(\propto -2)\ldots\ldots..\delta\,.\Gamma(\delta)$$

حيث $0 < \delta < 1$ وبصورة خاصة فان $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ويتضح هذا من خلال التكامل التالي:

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = 2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

وبفرض $\frac{1}{2}\,y^2 = z \quad ; \ dy = \frac{dz}{\sqrt{2}\,\sqrt{z}}$

نجد:

$$\sqrt{2\pi} = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-z}\,z^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

$$\boldsymbol{\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

وفي الاحصاء النظري تكون اهم قيم α عادة موجبة ومن مضاعفات ½ ، ومن التابع المعطى في العلاقة (1) اعلاه، يمكننا ان نعرف تابع كثافة احتمالي تبرز فوائده في مسائل تتعلق بأشكال تربيعية لمتحولات عشوائية طبيعية وتسمى بالتوزيع قاما(جاما)، ويعطى كما يلي:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}\ e^{-x} \quad ; x > 0\ ;\ \propto > 0}$$

لدينا حسب التعريف $\int_{0}^{\infty} \boldsymbol{f(x)dx = 1}$

- ✓ **خصائص توزيع قاما:** من خصائص توزيع قاما ان المتوسط الحسابي و التباين متساويان

$$\mathrm{E(x)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} x^{\propto}\ e^{-x} dx = \frac{\Gamma(\propto +1)}{\Gamma(\propto)} = \propto$$

$$\boldsymbol{E(x)} = \propto$$

اما بالنسبة **للتباين** $\boldsymbol{V(x)}$

$$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} x^{\propto+1}\ e^{-x} dx - \propto^2$$

$$V(x) = \frac{\Gamma(\propto +2)}{\Gamma(\propto)} - \propto^2 = (\propto +1)\ \frac{\Gamma(\propto +1)}{\Gamma(\propto)} - \propto^2 = \propto (\propto +1) - \propto^2 = \propto$$

$$\boldsymbol{V(x)} = \propto$$

II-5- توزيع بيتا Distribution Béta: يتميز توزيع بيتا بمرونته الكبيرة تبعا لقيم معلمته حيث يستخدم في التوزيع الثنائي وتوزيع فيشر، التوزيع الثنائي السالب وغيرها، ويستخدم لتمثيل بعض المتغيرات التي تتراوح بين 0 و 1 مثل نسبة التالف او نسبة المبيعات،...الخ.

نقول عن متغيرة عشوائية انها تتبع توزيع بيتا بالوسيطين $n; p$ ، سنرمز لهذا التابع بـ$B\sim(n, p)$ اذا كانت دالة كثافتها الاحتمالية كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{B(n,p)}\ x^{n-1}\ (1-x)^{p-1}\ ;\ \ n\ ; p > 0$$

او : $B(n,p) = \frac{\Gamma(n)\ \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}$

وللتحقق من ان تكامل هذا التابع $f(x)$ فوق المجال$(0,1)$ يساوي الواحد ، وبالاستفادة من العلاقة

نكتب: $\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{\infty} x^{\propto-1}\ e^{-x}\ dx$

$$\Gamma(n).\Gamma(p) = \iint_{0}^{\infty} {x_n}^{n-1}\ {x_p}^{p-1}\ e^{-x_n}\ e^{-x_p}\ dx_n\ dx_p$$

وبأجراء التحويل

$$x_n = r^2 \cos^2 \vartheta \qquad ; \qquad x_p = r^2 \sin^2 \vartheta$$

نجد المعين التفاضلي:

$$J = \left|\frac{\vartheta(n\,,p)}{\vartheta(r\,,\vartheta)}\right| = \left(\begin{vmatrix} 2\,r\ \cos^2\vartheta & , & -2\,r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \\ 2r \sin^2\vartheta & , & 2r^2\ \sin\vartheta\cos\vartheta \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 4\,r^3\ \sin\vartheta\cos^3\vartheta + 4\,r^3\ \cos\vartheta\sin^3\vartheta = 4\,r^3 \sin\vartheta\ \cos\vartheta$$

وبالتالي:

$$\Gamma(n).\Gamma(p) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty}(\cos\vartheta)^{2\,n-1}\,(\sin\vartheta)^{2\,p-1}\ r^{2n+2p-1}\,e^{-r^2}\ dr\,d\vartheta$$

وبوضع $r = \sqrt{y}$ في التكامل $2\int_0^\infty r^{2n+2p-1}\,e^{-r^2}\,dr$

يصبح على الشكل:

$$2\int_0^{\infty} y^{n+p}\ \frac{1}{y}\ e^{-y}\frac{dy}{2} = \int_0^{\infty} y^{n+p-1}\,e^{-y}\ dy = \Gamma(n+p)$$

وبالتالي:

$$\Gamma(n).\Gamma(p) = 2\Gamma(n+p)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\vartheta)^{2\,n-1}\,(\sin\vartheta)^{2\,p-1}\ \ d\vartheta$$

واخيرا بوضع $\cos\vartheta = \sqrt{x}$ نجد باعتبار $0 \le x \le 1$ ، $\sin\vartheta = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$

$$d\vartheta = \frac{dx}{-2\sqrt{x(1-x)}} \text{ او } -\sin\vartheta\ d\vartheta = \frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

اي ان :

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = 2\int_1^0 x^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{p-\frac{1}{2}}\ \frac{dx}{-2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$\boldsymbol{\frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{p-1}\ dx}$$

وبالتالي فان: $\int_0^1 f(x)dx = 1$

ويسمى تابع التوزيع المتجمع $\int_0^x f(x)dx = F(x)$ بتابع $B\sim(n,p)$ غير التام اي ان:

$$\boldsymbol{B\sim(n,p) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}}$$

- ✓ **خواص توزيع بيتا:** باستخدام هاته العلاقة نجد مباشرة:

$$\frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \int_0^1 x^{n+r-1}(1-x)^{p-1}\ dx$$

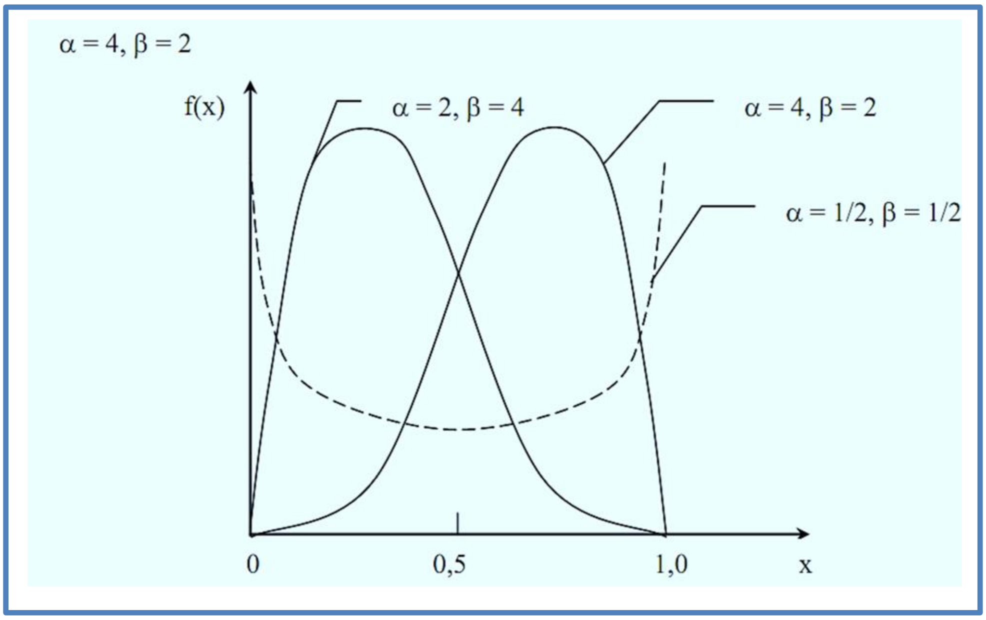
$$\frac{\Gamma(n+p)\ \Gamma(n+p)}{\Gamma(n+p+r)\ \Gamma(n)} = \acute{\mu}_r$$

ومنه نجد:

$$\boldsymbol{\mu = E(x) = \frac{n}{n+p}} \quad ; \qquad \boldsymbol{\mu_2 = V(x) = \frac{n\,p}{(n+p+1)(n+p)^2}}$$

ويمكن تمثيل دالة الكثافة للتوزيع بيتا لما $p = \beta = 2$; $n = \alpha = 4$ كما يلي:

الشكل15: التمثيل البياني لدالة كثافة لتوزيع بيتا من اجل قيم مختلفة



فالتوزيع قاما وبيتا علاقة من التوزيعات المهمة كالتوزيع الاسي وتوزيع كاي مربع/ مثلا ان التوزيع الاسي هو حالة خاصة من توزيع قاما لما $\boldsymbol{n = 1\,; p = \frac{1}{\lambda}}$

مثال: احسب النسبة المتوقعة للإنتاج التالف والتباين، ادا كانت نسبة الانتاج التالف تتبع التوزيع التالي:

$$f(x) = \begin{cases} 6(1-x)^5 & ; \ 0 < x < 1 \\ 0 & \end{cases}$$

لدينا $n = 1 \,; p = 6$ وعليه نجد:

$$\boldsymbol{\mu = E(x) = \frac{n}{n+p} = \frac{1}{2}} \;; \qquad \boldsymbol{\mu_2 = V(x) = \frac{n\,p}{(n+p+1)(n+p)^2} = \frac{4}{16(5)} = \frac{1}{20}}$$

III-السلوك التقاربي لبعض التوزيعات الاحتمالية:

نتناول في هذا الجانب بعض حالات التقارب الذي يحصل بين عدد من التوزيعات الاحتمالية، ونقصد بالتقارب بين التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون مثلا، ان يعطي التوزيعان نتائج متقاربة بخصوص احتمال معين، مما يعني امكانية استخدام توزيعين احتماليين(احيانا كثيرا) لحساب احتمال معين.

III−1−التقارب بين التوزيع الثنائي والتوزيع الطبيعي: لدراسة السلوك التقاربي لمتغيرة تتوزع توزيع ثنائي $x \sim B(n,p)$ عندما تؤول n الى اعداد كبيرة.

ليكن x يمثل عدد مرات الحصول على صورة عند رمي قطعة نقدية: مرتين، 4مرات، 8مرات، 16مرة

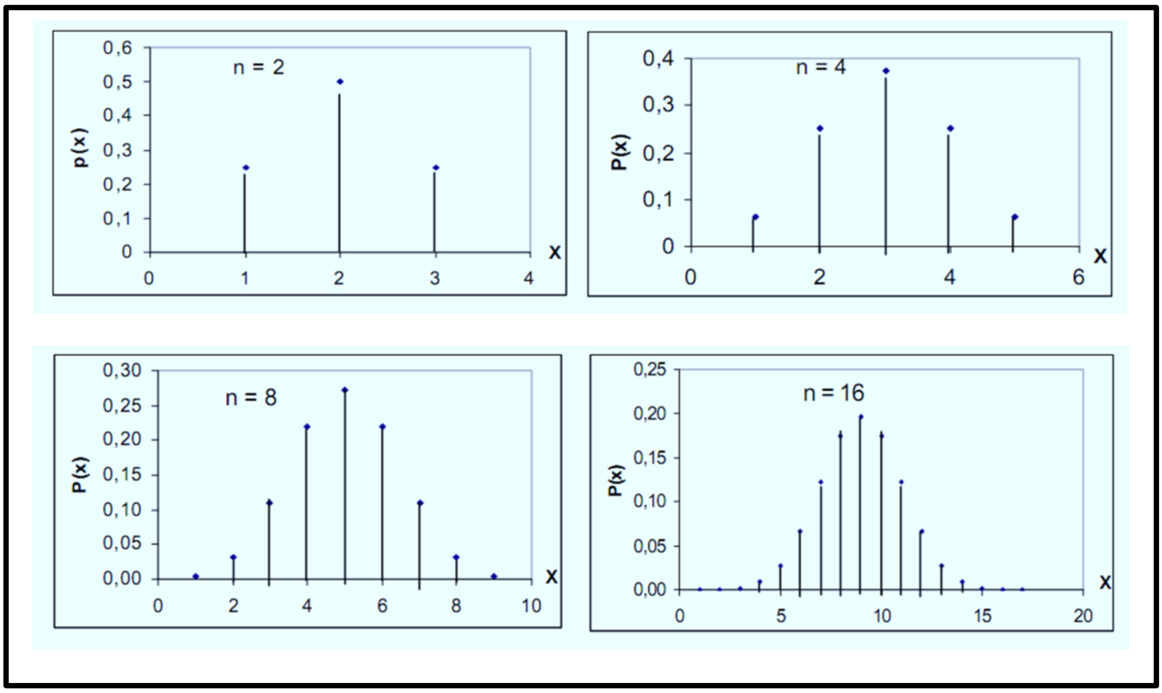
$\boldsymbol{x_i}$	0	1	2
$\boldsymbol{p_i}$	¼	½	¼

$\boldsymbol{x_i}$	0	1	2	3	4	
$\boldsymbol{p_i}$	1/16	4/16	6/4	4/16	1/16	

$\boldsymbol{x_i}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\boldsymbol{p_i}$	0.004	0.031	0.109	0.219	0.273	0.219	0.109	0.031	0.004

ويمكننا رسم منحنيات P_i في جميع الحالات ومنها يظهر السلوك التقاربي للمتغيرة x.

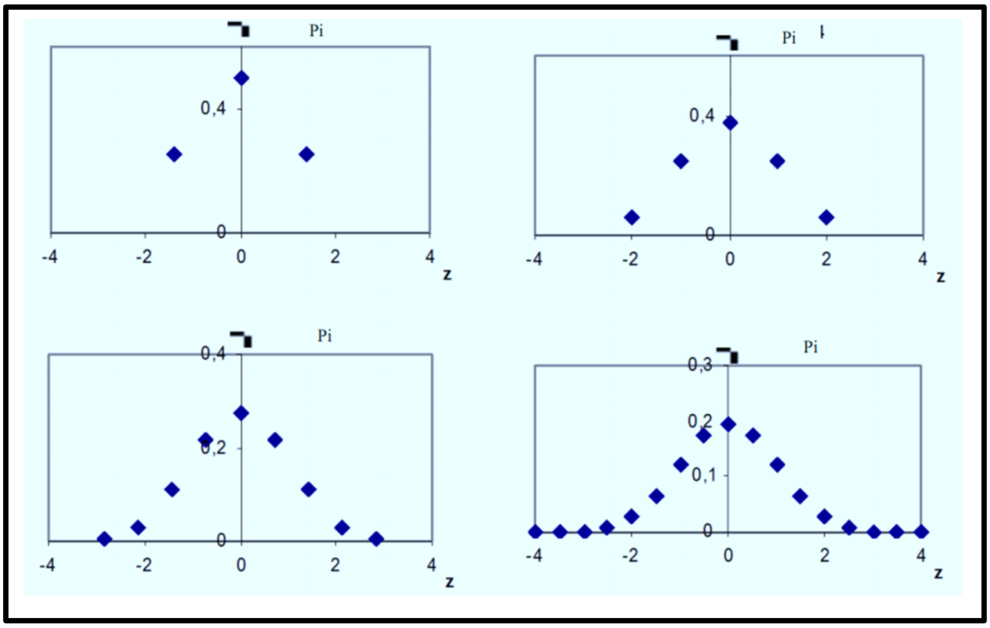
الشكل 16: السلوك التقاربي للتوزيع الثنائي عند $P = 0.5$



من خلال هذه المنحنيات ان زيادة قيمة n تؤدي الى الحصول على منحنى في شكل جرسي متماثل حول التوقع الرياضي μ.

فمن اجل تعميم نعتبر المتغيرة المعيارية $Z = (x - \mu)/\sigma$ الملحقة بذات المتغيرة ذات التوزيع الثنائي x. فالسلوك التقاربي Z الملاحظ في الشكل التالي.

الشكل17: السلوك التقاربي للتوزيع الثنائي للمتغيرة Z



وعليه يمكن كتابة:

$$soit\ X \sim B(n,p)\ :\qquad Y = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$$

في حالة n كبيرة و p غير قريب من 0 يمكن اعتبار التوزيع الثنائي كتقريب جيد للتوزيع الطبيعي، ويعطي التوزيعان نتائج اكثر تقاربا كلما كانت n كبيرة اكثر. ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{\mu^2}{2}}\,du$$

مما يسرع تقارب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي كون قريب من 0.5 كقاعدة:

- ✓ عموما نعتبر ان التقريب ملائم عندما np و nq كلاهما اكبر من5
- ✓ $npq \geq 9\ ;\ nq \geq 10\ ; np \geq 10\ ; n \geq 20$

III-2-التقارب بين التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون: يعطي توزيع بواسون نتائج قريبة من التوزيع الثنائي لما $n \geq 30$ و $nq < 5\ ; np < 5$ والبعض يستخدم لاستعمال توزيع بواسون بدلا من توزيع الثنائي لما $n \geq 25$ و $p \leq 0.1$

مثال: 10% من انتاج الة ما بعد تالفا، نأخذ 30 وحدة من انتاج هذه الالة عشوائيا -* احسب احتمال ان يكون هناك وحدتان.

$$\mathrm{P(X=2)} = C_{30}^2(0.1^2)(0.9^{28}) = 0.22$$

لدينا $n \geq 25$ و $p \leq 0.1$ لاستعمال توزيع بواسون نحسب اولا قيمة المعلمة

$$\lambda = \mu = np = 30 * 0.1 = 3$$

$$P(2) = \lambda^x * \frac{e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^2 *\ e^{-3}}{2!}) = 0.22$$

III-3-نظرية النهاية المركزية: لتكن المتغيرات ..... $x_1; x_2;$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع الاحتمالي بتباين ومتوسط محددين، اذا كانت:

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots.. + x_n$$

فان S_n تتبع التوزيع الطبيعي لما $n \to \infty$ بما ان $E(S_n)$ و $\sigma_{S_n} = \sigma\sqrt{n}$ فإننا نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\mu\sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

في الحقيقة فان النظرية محققة عندما تكون المتغيرات المستقلة X_i لها نفس المتوسط والتباين حتى ولو لم يكن لها بالضرورة نفس التوزيع، مع العلم انه توجد صيغ اخرى لهذه النظرية حيث لا يشترط ان يكون للمتغيرات نفس التوزيع الاحتمالي ولا حتى ان تكون مستقلة .

وتعرض **نظرية النهاية المركزية وتحت شروط عامة** جدا أن كلا من المجموع ومتوسط عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع ما، يمتلك عند تكرار هذه العينات عدد كبير من المرات توزيعا، له تقريبا شكل الجرس ولتوضيح الفكرة الأساسية التي تتضمنها النهاية المركزية نعرضها في العبارة المبسطة التالية : إذا سحبنا عينات عشوائية حجم كل منها nمن مجتمع متوسطه μ وانحرافه المعياري محدودان، فان توزيع متوسط العينة$\bar{x}$ ، يتطابق مع التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي μ وانحراف معياري $\frac{\delta}{\sqrt{n}}$ وتزداد قيمة التقريب كلما ازدادتn.

ويمكن إعادة صياغة النظرية لتتفق مع $\sum_{i=1}^{n} \quad i$ بدلا من $\bar{x}$ فنقول أن توزيع $\sum_{i=1}^{n} X_i$ يسعى إلى أن يصبح طبيعيا بمتوسط $N\mu$ وانحراف معياري $\delta\sqrt{n}$

وتبدو **أهمية نظرية النهاية المركزية** من زاويتين فهي توضح أولا نزوع العديد من المتغيرات العشوائية إلى أن يكون توزيعها، بصورة تقريبية هو التوزيع الطبيعي إذ يمكن مثلا أن نتصور طول الإنسان حصيلة عدد كبير من المؤثرات العشوائية مثل طول الأب وطول الأم والمورثات(عددها كبير) ونشاط الغدد ذات العلاقة بالطول والبيئة والمحيط بأنواعه والتغذية الخ.... إذا كانت أثار هذه العوامل تضاف بعضها إلى بعض ، لتنتج واقعا معينا بالنسبة لطول الإنسان فعندئذ يمكن اعتبار الطول كحصيلة لعدد كبير من المتغيرات العشوائية. وهكذا تنطبق نظرية النهاية المركزية ويكون الطول هو على درجة التقريب التوزيع الطبيعي وذلك بصرف النظر عن توزيع أي من المتغيرات التي تؤثر في تحديد الطول . وهذا بالطبع محاولة لتعليل ليس أكثر إذ ما يجري في الواقع غير معروف لنا بصورة دقيقة ، ولكن ما يمكن قوله على كل حال هو أن نظرية النهاية المركزية توضح سبب وجود العديد من المتغيرات العشوائية التي نصادفها في حياتنا والتي تعتبر أن توزيعها الاحتمالي هو التوزيع الطبيعي.

كما يمكن بالاعتماد على نظرية النهاية المركزية تقريب التوزيع الثنائي الذي نصادفه في مختلف التطبيقات وخصوصا الطبية منها من التوزيع الطبيعي. فإذا اصطلحنا على أن يوافق النتيجة (S)أو النجاح العدد 1 ويوافق النتيجة) Eأو الفشل) العدد صفر، فعندئذ تكون نتائج التكرارات المستقلة لـ nعبارة عن متتالية من المتغيرات المستقلة X1 , X2,X3, ...Xn حيث يأخذ Xi إما القيمة 1 آو القيمة صفر ويكون عدد النجاحات X هو بالضبط عدد مرات ورود 1 في تلك المتتالية أو مجموعها

وبما أن Xi يتوزع وفق توزيع برلوني، عندئذ تصبح نتائج التكرارات المستقلة n هي .. X1 , X2,X3, ...Xnعبارة عن عينة عشوائية من مجتمع برلوني ويصبح X مجموع العينة وفقا لنظرية النهاية المركزية

أعلاه يكون التوزيع التقريبي لـX في حالة nكبير بكفاية هو التوزيع الطبيعي بمتوسط npوتباين يساوي npq وبالتالي يمكن استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي لحساب احتمالات تتعلق بالمتغير Xبصورة تقريبية.

أما من اجل توزيع بواسون فالأمر يختلف فإذا أخذنا مجموعة من متغيرات بواسون لها المتوسط نفسه وجمعناها معا فنحصل على متغير يمثل عدد الحوادث العشوائية في مجال زمني كبير (مجموع المجالات المرافقة للمتغيرات المختلفة)، وهو يحقق توزيع بواسون بمتوسط متزايد، وبما أن مجموع عدد من المتغيرات العشوائية المستقلة التي لها نفس التوزيع نفسه يسعى إلى التوزيع الطبيعي، عندما يزداد المتوسط فان توزيع بواسون يؤول إلى التوزيع الطبيعي عندما يزداد المتوسط

ومن زاوية أخرى نجد أن العطاء الأكثر أهمية لنظرية النهاية المركزية يتعلق بمسألة الاستدلال الإحصائي، فالعديد من الإحصاءات تستخدم للقيام باستدلال حول معلمات التوزيعات مثل احتمال النجاح في التوزيع الثنائيP ومتوسط التوزيع الطبيعي(μ). هذه الإحصاءات تأخذ شكل مجموع لقياسات العينة آو متوسط هذه القياسات وإذا كان الحال كذلك وكانتn كبيرة بكفاية فيمكننا اعتبار التوزيع الطبيعي تقريبا جيدا للتوزيع الاحتمالي لذلك الإحصاء وهما تمس الحاجة إليه عند القيام بأي استدلال إحصائي، ورغم هذه الاستخدامات المفيدة لنظرية النهاية المركزية فان برهانها يتسم بالتعقيد بالنسبة لغير الرياضيين ولذا سنكتفي هنا بالبرهان على أن : $\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{\delta_{\bar{x}}^2}{n}$ و $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$. بينت نظرية النهاية المركزية انه كلما كررنا التجربة كلما كان خطأ المعاينة صغيرا وبالتالي كلما كان تقدير المتوسط أكثر دقة وهي نتيجة هامة بالنسبة لمصممي التجارب حيث تبين أن تكرار التجربة هو شيء مرغوب فيه ما لم تكن هناك قيود تمنع ذلك.

تجدر الاشارة الى **نظرية دي موافر**–**(التقريب الطبيعي للتوزيع الثنائي)** هي حالة خاصة من نظرية النهاية المركزية، ذلك ان متغيرة تتبع القانون $\boldsymbol{B \sim (n,p)}$ يمكن اعتبارها مجموعا لعدد من المتغيرات المستقلة ذات التوزيع البرنولي $\boldsymbol{B(1,p)}$.

قائمة المراجع:

1- Bernard Verlant ;Geneviéve Saint-Pierre ; **Statistiques et Probabilités** ; éditiond Foucher ; Vanves ;2008
2- C.Degrave ; D.Degrave ; **Probabilités- statistiques** ; édition Breal, France,2004.
3- Corina Reischer ;Raymond Leblanc ;Bruno Rémillard ;Denis Larocque ; **Théroie des Probabilités : Problémes et Solutions** ; Presses de l'Université du Québec ;Sainte-Foy (Québec) Canada G1V 2M2 ;2002
4- Denglos Gregory ; **Statistiques et Probabilités appliquées** ; PUF ;2008
5- Jean- Jacques croutsche, **Pratique de l'analyse des données**, édition ESKA ;Paris ; 1997.
6- Masieri Walder ; **Statistique et calcul des probabilités** ;Dalloz ;Paris ;2001
7- René Girand ; Nicole chaix ; **Econométrie** ; presses universitaires de France ;1er édition ; France ;1997
8- Rocuet jeann-Luc ; **éléments de probabilités et statistiques** ; éditions de la Roche Haute 2émé édition ;Paris ;2001
9- SAPORTA Gilbert ; **Probabilités analyse des données et Statistique** ; 2éme éditions TECHNIP ;Paris ;2006
10- Savy A-J ;**Probabilités et statistiques pour modéliser et décider** ;Ellipses ;2006
11- Valeron A-J ; **Probabilités et statistiques** ;Masson ;2émé édition ;France ;2008

12- سليمان محمد مرجان، **بحوث العمليات**، الجامعة المفتوحة، طرابلس، 2002

13- مصطفى الخواجة، **مقدمة في الاحصاء**، الدار الجامعية، الاسكندرية،2002

14- دومينيك سالفاتور، **الاقتصاد القياسي والاحصاء التطبيقي**، سلسلة شوم، دار ماك قراو هيل، 1985

15- ايفازيان واخرون، **مبادئ النمذجة والمعالجة الاولية للبيانات**، سلسلة Edition Mir Mathématiques، موسكو1983، ترجمة من الروسية الى الفرنسية جيلالي مبارك،1986.

اسئلة بخيارات متعددة وتمارين

في كل سؤال هناك على الاقل اجابة صحيحة:

1– في مجموع الاقسام النهائية بإحدى الثانويات يدرس 14% من التلاميذ في اللغة الروسية، 68% لا يدرسون اللغة الروسية ولا يدرسون اللغة الاسبانية،2% يدرسون اللغتين.

a- 20% من التلاميذ يدرسون اللغة الاسبانية على الاقل

b- 16% من التلاميذ يدرسون اللغة الروسية فقط

c- 18% من التلاميذ يدرسون اللغة الاسبانية فقط

d- 32% من التلاميذ يدرسون اللغة الروسية او الاسبانية.

2– ليكن B,A حادثان من نفس الفضاء الاحتمالي حيث $A \cap B = \emptyset$

a- $p(A \cap B) = 0$

b- A و B حادثان متنافيان

c- A و B حادثان مستقلان

d- A و B حادثان متنافيان ومستقلان في نفس الوقت

3– ليكن B,A حادثان من نفس الفضاء الاحتمالي حيث:

$$\boldsymbol{p(A \cap B) = 0.09 \ , p(A)0.3 \ , p(B) = 0.2}$$

a- $p(B/A) = 0.60$ و $p(A/B) = 1.5$

b- $p(B/A) = 0.45$ و $p(A/B) = 0.3$

c- $p(B/A) = 0.30$ و $p(A/B) = 0.45$

d- $p(B/A) = 0.18$ و $p(A/B) = 0.27$

4–ليكن B,A حادثان من نفس الفضاء الاحتمالي حيث:

$$\boldsymbol{p(A \cap B) = 0.1 \quad , \quad p(B) = 0.5 \quad , p(A) = 0.6}$$

a- B,A حادثان مستقلان

b- B,A حادثان متنافيان

c- الحادث $A \cup B = 0.2$ حادث اكيد

d- $p(A/B) = 0.2$

5–اذا كان x متغير عشوائي مستمر، فلدينا وهذا مهما كان العددان الحقيقيان a,b

a- $p(X = a) = 0$

b- $p(a < X < b) = p(a < X \le b)$

c- $p(a < X < b) \ne p(a \le X < b)$

d- $p(X > a) = 1 - p(X < a)$

6– تابع التوزيع هو:

a- هو تابع متزايد تماما

b- معرف على $\mathbb{R}$

c- يأخذ قيمة في المجال [0.1]

d- مستمر وقابل للاشتقاق دوما

7- قانون احتمال متغير عشوائي :

a- معرف كليا بتابع التوزيع

b- معرف كليا بتابع كثافة الاحتمال

c- معرف كليا بالتوقع الرياضي والتباين

d- مرفق بفضاء احتمالي

8- ليكن x متغير عشوائي a و b عددان حقيقيان:

a- $E(ax+b) = aE(x) + b$

b- $var(-x+b) = -var(x) + b$

c- $p\big(x > E(x)\big) = 0.5$

d- $Y = ax + b \Rightarrow F_Y(Y) = F_X(\frac{Y-b}{a})$

التمرين الاول:

A و B حادثان حيث: $p(A \cup B) = 0.7 \;\; ; p(B) = 0.6 \;\; ; p(A) = 0.4$

- احسب $P(A \cap B)$; $P_A(B)$; $P_B(A);$

التمرين الثاني:

مصنع للجوارب يتضمن الات، مساهمة لكل منها في الانتاج اليومي للمصنع هي على الترتيب 30%، 36%، 34% اخترنا عشوائيا جوربا من الانتاج الكلي اليومي للمصنع،

- ما هو احتمال ان يكون معيبا (فيه عيب صناعي) علما ان النسبة المئوية للإنتاج المعيب في الآلات الثلاث هي على الترتيب 1%، 2%، 2%

التمرين الثالث :

ليكن لدينا المتغير العشوائي المتقطع المعرف على المجموعة$\{0,1,2,3, \dots \dots \dots \dots, m_0\}$ ودالة احتماله معطاة بالعلاقة(توزيع ذو الحدين)

$$\boldsymbol{P_r\{X = n\} = C_{m_0}^{n} P^n \, (1-P)^{m_0 - n}}$$

حيث: $n \in \{0,1,2,3, \dots \dots, m_0\}$ ، P مقدار ثابت موجب محصور تماما بين الصفر والواحد $0 < P < 1$

- حساب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

التمرين الرابع :

بفرض ان المتغير العشوائي يأخذ قيما موجبة تماما بقانون احتمال معطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{P_r\{X = n\} = (1-a)^{n-1}\, a}$$

حيث a مقدار ثابت محصور تماما بين الصفر والواحد اي $0 < a < 1$ و $n \in IN^*$

- احسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري لـ X
- استنتج $m_1(x)$

التمرين الخامس :

نزود مجموعة الاعداد الطبيعية IN بقانون الاحتمال (قانون توزيع بواسون)

$$\boldsymbol{P_r\{X = n\} \leq \frac{a^n}{n!}\ e^{-a}}$$

- حيث a مقدار ثابت والمطلوب حساب $E(X)$; $\sigma(X)$

التمرين السادس:

لنفرض ان لدينا عملة غير متزنة بحيث $P(H) = 0.4$ و $P(T) = 0.6$، رميت هذه العملة ثلاث مرات بشكل مستقل، ليكن المتغير العشوائي x يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث

- اوجد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي x
- اوجد $E(X)$; $\sigma(X)$
- اوجد الاحتمالات التالية:

a- الحصول على صورتين

b- الحصول على صورتين على الاقل

c- الحصول على صورة واحدة على الاكثر

d- الحصول على ثلاث كتابات

التمرين السابع:

قطعة نقود متوازنة تحمل الحرف A في وجه و الحرف B في وجه، تقذف هذه القطعة 8 مرات متتابعة ونراقب الوجه العلوي الظاهر في كل مرة، علما ان الحصول على الوجه B يكسب صاحبه 100 دج

ليكن المتغير العشوائي x الذي يحصي عدد النجاحات

- ما هو احتمال كسب 500 دج
- احسب $E(X)$; $V(X)$; $\sigma(X)$

التمرين الثامن:

ليكن متغير عشوائي x ان يأخذ قيمة حقيقية بتابع كثافة احتمال معرف على الشكل التالي:

$\boldsymbol{f(x) = k\ e^{-|x|}}$ حيث k ثابت موجب

- حدد قيمة الثابت k
- حدد تابع توزيع المتغير x

التمرين التاسع :

ليكن التابع $f(x)$ المعرف على $\mathbb{R}$ على النحو التالي:

$$\begin{cases} \boldsymbol{c(1-x^k)} & \boldsymbol{si\ 0 \leq x \leq 1} \\ \boldsymbol{0} & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

حيث $IN^* \,; c \in$

- حدد قيمة كل من $c; k$ حتى يكون $f(x)$ تابع كثافة احتمال لمتغير عشوائيx
- مثل بيانيا تابع التوزيع $f(x)$ من اجل $k = 1$
- اوجد x_0 بحيث $p(x < x_0) = \frac{1}{2}$
- $p\left(x < \frac{1}{4}\right)$ و $p\left(\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{4}\right)$

التمرين العاشر :

ليكن x متغير عشوائي يأخذ قيما طبيعية موجبة بدالة احتمال:

$$\boldsymbol{P_r\{x = n\} = \frac{e^{-1}}{n!} \quad n \in IN}$$

- حدد اصغر عدد طبيعي $_0$ بحيث يكون لدينا $P_r\{x < n\} \geq 99\%$
- قارن هذه النتيجة بتلك التي يمكن الحصول عليها بتطبيق متراجحة تشيبيشيف

التمرين الحادي عشر:

نفرض ان المتغير x يتبع توزيع Γ والمطلوب تحديد دالة كثافة احتمال المتغير $\boldsymbol{Y = 2\delta^2}$ ، (δ ثابت موجب معطى)

التمرين الثاني عشر:

نفرض ان المتغير x يتبع التوزيع الطبيعي المعياري والمطلوب تحديد دالة كثافة احتمال المتغير $\boldsymbol{Y = x^2}$

التمرين الثالث عشر:

ليكن $\bar{}$ متوسط المتغير العشوائي x، وليكن $\sigma(x)$ انحرافه المعياري

ليكن المجالان:

$$\boldsymbol{A = \left\{x \in \frac{IR}{|x - \bar{x}|} < \varepsilon\sigma\right\} et\ B = \left\{x \in \frac{IR}{|x - \bar{x}|} \geq \varepsilon\sigma\right\}}$$

حيث ε ثابت اختياري موجب

- اثبت العلاقة:

$$\sigma^2 \geq \int_{IR}^{*}(x-\overline{x})^2\,dp \geq \varepsilon^2\sigma^2\int_{IR}^{*}dp$$

- استنتج:

$$P_r\{x \in B\} \ \leq \frac{1}{\varepsilon^2}$$

التمرين الرابع عشر: إذا كان الدخل السنوي للأسرة في أحد مناطق المملكة يتبع توزيع طبيعي متوسطه *80* ألف، وتباينه *900*. **والمطلوب:**

1– كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

2– كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

3– ما هي نسبة الأسر التي يقل دخلها عن*60* ألف؟

4– ما هو الدخل الذي أقل منه *0.975* من الدخول؟

حلول التمارين:

1– الاجابة الصحيحة هي a وd

2– الاجابة الصحيحة هي a و b

3– الاجابة الصحيحة هي c

4– الاجابة الصحيحة هي c وd

5– الاجابة الصحيحة هي a و b وd

6– الاجابة الصحيحة هي b وc

7– الاجابة الصحيحة هي a وd

8– الاجابة الصحيحة هيa

<u>حل التمرين الاول:</u>

- **حساب $P(A\cap B)$: نعلم ان**

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$
$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B) = 0.4 + 0.6 - 0.7 = 0.3$$
$$\boldsymbol{P(A\cap B) = 0.3}$$

- **استنتاج كل من:**

$$P_A(B) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

$$\boldsymbol{P_A(B) = 0.75}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5$$

$$\boldsymbol{P_B(A) = 0.5}$$

حل التمرين الثاني:

B_1 الحادثة الجورب من انتاج الالة الاولى

B_2 الحادثة الجورب من انتاج الالة الثانية

B_3 الحادثة الجورب من انتاج الالة الثالثة

حادثة الجورب المعيب هي A

بما ان $B_3 . B_2 . B_1$ تشكل تجزئة لفضاء العينة المجموعة الاساسية Ω الموافق لتجربة الاختيار العشوائي لجورب من مجمل الانتاجي اليومي للمصنع، فأي جورب نختاره لابد ان يكون من انتاج الالة الأولى او من انتاج الالة الثانية، او من انتاج الالة الثالثة، وبتطبيق قانون الاحتمال الكلي نجد:

$$P(A) = P(A/B_1).P(B_1) + P(A/B_2).P(B_2) + P(A/B_3).P(B_3)$$

$$P(B_1) = 0.30 \quad ; \quad P(B_2) = 0.36 \quad ; \quad P(B_3) = 0.34$$

وبالتعويض في علاقة الاحتمال الكلي نجد:

$$P(A) = 0.01 \times 0.30 + 0.02 \times 0.36 + 0.02 \times 0.34 = 0.017$$

$$\boldsymbol{P(A) = 0.017}$$

حل التمرين الثالث:

$$\boldsymbol{P_r\{X = n\} = C_{m_0}^{n} P^n \, (1 - P)^{m_0 - n}}$$

- **حساب التوقع الرياضي:**

$$\overline{\boldsymbol{X}} = E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

وبالتعويض عن x_i و i نجد:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{m_0} n \, C_{m_0}^{n} \; p^n (1-p)^{m_0 - n} = \sum n \, C_{m_0}^{n} p^n \; \frac{(1-p)^{m_0}}{(1-p)^n}$$

ومنه m_0 ثابت نجد :

$$E(x) = (1-p)^{m_0} \sum_{n=0}^{m_0} n \, C_{m_0}^{n} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

لدينا حسب ثنائي الحد :

$$(1+x)^{m_0}=\sum_{n=0}^{m_0} C_{m_0}^n x^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1)$$

لنشتق العلاقة (1) نجد:

$$m_0(1+x)^{m_0-1}=\sum_{n=0}^{m_0} n\, C_{m_0}^n x^{n-1}$$

بضرب العلاقة في(x) نجد :

$$x\, m_0(1+x)^{m_0-1}=\sum_{n=0}^{m_0} n\, C_{m_0}^n x^n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

نضع $x=\frac{p}{1-p}$ ونعوضها في (3) فنجد:

$$m_0\left(\frac{p}{1-p}\right)\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{m_0-1}=\sum_{n=0}^{m_0} n\, C_{m_0}^n\left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$m_0\left(\frac{p}{1-p}\right)\left(\frac{1-p+p}{1-p}\right)^{m_0-1}=\sum_{n=0}^{m_0} n\, C_{m_0}^n\left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$m_0\left(\frac{p}{1-p}\right)\left(\frac{1}{1-p}\right)^{m_0-1}=\sum_{n=0}^{m_0} n\, C_{m_0}^n\left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$m_0\, p\left(\frac{1}{1-p}\right)^{m_0}=\sum_{n=0}^{m_0} n\, C_{m_0}^n\left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

بضرب العلاقة في $(1-p)^{m_0}$ نجد

$$m_0\, p=\left[\sum_{n=0}^{m_0} n\, C_{m_0}^n\left(\frac{p}{1-p}\right)^n\right]\ [1-p]^{m_0}$$

وعليه الطرف الايمن من العلاقة الاخيرة هو $E(x)$ حسب العلاقة (1) وعليه نجد:

$$\boldsymbol{E(x)=m_0p}$$

- **حساب الانحراف المعياري نجد:**

$$v(x)=E(x^2)-[E(x)]^2$$

$$\sigma(x)=\sqrt{v(x)}$$

اولا: نحسب $[E(x)]^2$:

عندنا $x\, m_0(1+x)^{m_0-1} = \sum_{n=0}^{m_0} n\, C_{m_0}^n x^n$

نقوم باشتقاق هذه العلاقة:

$$m_0[x\, m_0(1\acute{+}x)^{m_0-1}] = \sum_{n=0}^{m_0} n^2\, C_{m_0}^n x^{n-1}$$

$$m_0[(1+x)^{m_0-1} + (m_0-1)(x)(1+x)^{m_0-2}] = \sum_{n=0}^{m_0} n^2\, C_{m_0}^n x^{n-1}$$

$$m_0(1+x)^{m_0-2}[(1+x) + (m_0-1)(x)] = \sum_{n=0}^{m_0} n^2\, C_{m_0}^n x^{n-1}$$

$$m_0(1+x)^{m_0-2}(1+x+m_0x-x) = \sum_{n=0}^{m_0} n^2\, C_{m_0}^n x^{n-1}$$

$$m_0(1+x)^{m_0-2}(1+x\, m_0) = \sum_{n=0}^{m_0} n^2\, C_{m_0}^n x^{n-1} \quad \dots\dots\dots\dots..(*)$$

بضرب العلاقة (*) في (x) عندها نجد:

$$m_0\, x\, (1+x)^{m_0-2}(1+x\, m_0) = \sum_{n=0}^{m_0} n^2\, C_{m_0}^n x^n \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(5)$$

نعلم ان :

$$E(x^2) = (1-p)^{m_0} \sum n^2\, C_{m_0}^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

بالتعويض في العلاقة (5) بـ $x = \frac{p}{1-p}$ نجد:

$$m_0\left(\frac{p}{1-p}\right)\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{m_0-2}\left(1+m_0\frac{p}{1-p}\right) = \sum n^2\, C_{m_0}^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$m_0\left(\frac{p}{1-p}\right)\left(\frac{1-p+p}{1-p}\right)^{m_0-2}\left(\frac{1-p+m_0p}{1-p}\right) = \sum n^2\, C_{m_0}^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$m_0\left(\frac{p}{1-p}\right)\left(\frac{1}{1-p}\right)^{m_0-2}\left(\frac{1-p+pm_0}{1-p}\right) = \sum n^2\, C_{m_0}^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$m_0\left(\frac{p(1-p+p\, m_0)}{(1-p)^{m_0}}\right) = \sum n^2\, C_{m_0}^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

بضرب العلاقة في $(1-p)^{m_0}$

$$m_0\, p\,[1-p+m_0 p] = (1-p)^{m_0} \sum n^2\, C_{m_0}^{n} \left(\frac{p}{1-p}\right)^n$$

$$\boldsymbol{E(x^2) = m_0\, p\,(1-p) + m_0^2\, p^2}$$

ومنه $(1-p)^{m_0} \sum n^2\, C^n{}_0 \left(\frac{p}{1-p}\right)^n = \boldsymbol{E(x^2)}$

$$\boldsymbol{v(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = m_0\, p\,(1-p) + m_0^2\, p^2 - m_0^2\, p^2}$$

$$\boldsymbol{v(x) = m_0\, p\,(1-p)}$$

$$\boldsymbol{\sigma(x) = \sqrt{m_0\, p\,(1-p)}}$$

حل التمرين الرابع: نعلم في حالة المتغير العشوائي المتقطع:

$$\overline{\boldsymbol{X}} = E(x) = \sum_{i=1}^{\infty} {}_i p_i$$

وعليه يمكن تعويض i **بـ** $\boldsymbol{n}$ وذلك لان:

$$x_1 = 1\ ; x_2 = 2;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ x_i = n$$

وتعويض $p_i = (1-a)^{n-1}$

$$E(x) = \sum n\ (1-a)^{n-1}\, a$$

لنجد المجموع $(1-a)^{n-1}$ ولهذا نستخدم المساواة:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \ldots\ldots.. + x^n \quad si\ |x| < 1 \quad = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

كما يمكن اعتبار هذا المجموع حدود متتالية هندسية لا نهائية اساسها هو x لما:

$$S_n = 1.\frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} \qquad \text{لما} \quad n \to \infty$$

عند اشتقاق العبارة(I) نجد:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n\ x^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(II)$$

بوضع $x = (1-a)$ وتعويضها نجد:

$$\frac{1}{\left(1-(1-a)\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} n\ \ (1-a)^{n-1}=\frac{1}{a^2}\dots\dots\dots\dots..(III)$$

بضرب طرفي العلاقة (II) بـ a نجد:

$$a\ \ \frac{1}{a^2}=\ \ a\sum n(1-a)^{n-1}$$

اذن الطرف الايمن هو $E(x)$ ومنه:

$$\boldsymbol{E(x)=\frac{1}{a}}$$

- **حساب الانحراف المعياري: هذا بضرب العلاقة رقم (III) بـ x نجد:**

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} n\ \ x^n$$

وباشتقاق هاته العبارة نجد:

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=0}^{\infty} n^2\ \ x^{n-1}\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(V)$$

ان :

$$\boldsymbol{E(x^2)=\sum n^2\ \ (1-a)^{n-1}\ \ a=a\sum n^2\ (1-a)^{n-1}}$$

ولكن بتعويض $x=(1-a)$ في العبارة Vنجد:

$$\frac{1+(1-a)}{(1-(1-a))^3}=\sum_{n=0}^{\infty} n^2\ \ (1-a)^{n-1}=\frac{2-a}{a^3}=\sum_{n=0}^{\infty} n^2\ \ (1-a)^{n-1}$$

بضرب طرفي العلاقة في a نجد:

$$\frac{2-a}{a^2}=a\sum_{n=0}^{\infty} n^2\ \ (1-a)^{n-1}=E(x^2)$$

$$v(x)=E(x^2)-[E(x)]^2=\frac{2-a}{a^2}-\left(\frac{1}{a}\right)^2=\frac{2-a-1}{a^2}=\frac{1-a}{a^2}$$

$$\boldsymbol{v(x)=\frac{1-a}{a^2}}\ ;\quad \boldsymbol{\sigma(x)=\sqrt{\frac{1-a}{a^2}}}$$

- استنتج $m_1(x)$;

$$m_1(x) = E(x)\ \frac{1}{i}\ \frac{d\theta}{dt}(0) = \frac{1}{a}$$

حل التمرين الخامس:

$$P_r\{X = n\} \leq \frac{a^n}{n!}\ e^{-a}$$

- حساب $E(X)$; $\sigma(X)$:

لدينا:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \dots \dots . + \frac{x^n}{n!}$$

نشر التابع الاسي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . . (1)$$

باشتقاق هذه العلاقة (1) فنجد:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\ x^{n-1}}{n!} \dots \dots$$ بضرب العلاقة بـx

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\ x^n}{n!} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . (I)$$

لنشتق هذه العلاقة : $e^x + xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\ x^{n-1}}{n!}$

بضرب هذه العلاقة الاخيرة بـ x نجد :

$$xe^x + x^2e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\ x^n}{n!} \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots . (II)$$

يوضع $x = a$ عندها نجد من (I) :

$$ae^a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\ a^n}{n!} \quad ,\ a = e^{-a} \sum \frac{n\ a^n}{n!} = E(x)$$

حسب $(E(x))$ نجد :

$$E(x^2) = e^{-a} \sum \frac{n^2 a^n}{n!} = e^{-a}[a\, e^{+a} + a^2 \; e^{+a}] = a + a^2$$

$$v(x) = E(x^2) + [E(x)]^2 = a + a^2 - a^2 = a$$

$$\boldsymbol{v(x) = a \quad , \sigma(x) = \sqrt{a}}$$

حل التمرين السادس:

- **ايجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي:**

ان توزيع المتغير العشوائي يتوزع توزيع ثنائي الحدين $n = 3; p = 0.4$

$$x \sim Binomial(3; 0.4)$$

$$f(x) = p(X = x) = \binom{3}{x} 0.4^x\, 0.6^{3-x} \qquad ; x = 0,1,2,3$$

وعليه يمكن تمثيل الدالة كما يلي:

X	$\boldsymbol{f(x) = p(X = x)}$
0	$\binom{3}{0} 0.4^0\, 0.6^{3-0} = 0.216$
1	$\binom{3}{1} 0.4^1\, 0.6^{3-1} = 0.432$
2	$\binom{3}{2} 0.4^2\, 0.6^{3-2} = 0.288$
3	$\binom{3}{3} 0.4^3\, 0.6^{3-3} = 0.064$

- **حساب التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي:**

$$E(x) = n\, p = 3(0.4) = 1.2$$

$$v(x) = n\, p\, (1 - p) = 3(0.4)(0.6) = 0.72$$

✓ **ايجاد الاحتمالات التالية:**

- الحصول على صورتين: $p(X = 2) = f(2) = 0.288$
- الحصول على صورتين على الاقل:

$$p(X \geq 2) = f(2) + f(3) = 0.288 + 0.064 = 0.352$$

- الحصول على صورة واحدة على الاكثر:

$$p(X \leq 1) = f(0) + f(1) = 0.216 + 0.432 = 0.648$$

- الحصول على ثلاث كتابات:

$p(X=0)=f(0)=0.216$

حل التمرين السابع:

- بما ان قطعة النقود متوازنة فان احتمال ظهور كل من الوجهين 5مرات معناه: A و $B\ = 0.5$

ان توزيع المتغير العشوائي يتوزع توزيع ثنائي الحدين $n=8; p=0.5$

$x \sim Binomial(8;0.5)=\ C_8^5\ (0.5)^5\ (0.5)^{8-5}=0.21875$

- **حساب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري:**

$E(x)=n\,p=8(0.5)=4$

$v(x)=n\,p\,(1-p)=3(0.5)(0.5)=2$

$\sigma(x)=\sqrt{v(x)}=\sqrt{2}=1.44$

حل التمرين الثامن:

- حتى يكون التابع $f(x)$ تابع كثافة احتمال لمتغير عشوائي x يجب ان يكون لدينا:

$$\boldsymbol{f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} k\ e^{-|x|}=1}$$

لكن لدينا:

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}=\ \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx+\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\ \ dx=2$

ومنه يكون لدينا: $k=\frac{1}{2}$

- **تحديد تابع توزيع المتغير $\boldsymbol{x}$:**

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

فمن اجل $x<0$ لدينا:

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{x}\ dx=\frac{1}{2}\,e^{x}=\frac{1}{2}\,e^{-|-x|}$$

فمن اجل $x \geq 0$ لدينا: $F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \quad ^{-|x|}\; dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} e^{-x}\, dx = 1 -$
$\frac{e^{-x}}{2} = 1 - \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$

ومنه يكون لدينا:

$$\boldsymbol{F(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{\frac{1}{2}\, e^{-|x|}} \quad ; & \boldsymbol{si\ x < 0} \\ \boldsymbol{1 - \frac{1}{2}\, e^{-|x|}} \quad ; & \boldsymbol{si\ x \geq 0} \end{cases}$$

<u>حل التمرين التاسع:</u>

1- $f(x)$ دوما موجب لان $k \in IN^*$ و $1 - x^k$ من اجل $0 \leq x \leq 1$ ومنه نجد $c > 0$

2- يجب ان تتحقق العلاقة:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 = \int_{0}^{1} c(1 - x^k)\, dx = c\left(1 - \frac{x^k}{k+1}\right) = 1$$

ومنه يكون لدينا:

$$c = \frac{k+1}{k}$$

من اجل كل ثنائية$(c; k)$ المرتبطة بالعلاقة اعلاه اي $(\frac{k+1}{k}; k)$ ، $(c; k)$ فان $f(x)$ تعرف دالة احتمال

ولدينا مثلا:

$$(2;2), \left(\frac{3}{2};2\right), \left(\frac{4}{3};3\right), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, (\frac{n+1}{n};n)$$

من اجل *k=2*

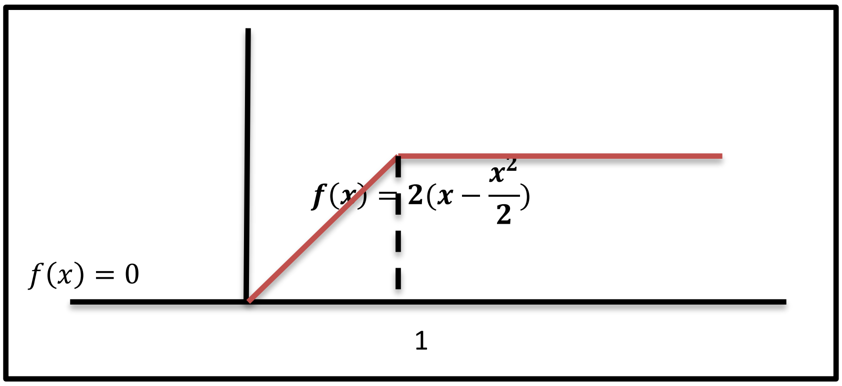
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right) & si\ \ x \in [0;1] \\ 1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

من اجل k=1

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & si\ \ 0 \leq\ x \leq 1 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ 2\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right) & si\ \ 0\le x<1\\ 1 & si\ x\ge 1\end{cases}$$



3- لدينا من اجل k=1

$$2\int_0^{x_0}(1-x)dx=\frac{1}{2}$$

ومنه:

$$2x_0-{x_0}^2=\frac{1}{2}$$

ويعطينا الحل :

$$x_{0,1}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=0.29$$

$x_{0,2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}=1.7$ مرفوض $x\in[0;1]$

وعليه:

$$\boldsymbol{x_{0,1}=0.29}$$

- $p\left(\frac{1}{4}\le x<\frac{3}{4}\right)=2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}(1-x)dx=\frac{1}{2}$
- $p\left(x<\frac{1}{4}\right)=2\int_0^{\frac{1}{4}}(1-x)dx=\frac{7}{16}$

حل التمرين العاشر :

$$P_r\{x < N_0\} = \sum_{n=0}^{N_0-1} \frac{e^{-1}}{n!} \geq \frac{99}{100}$$

بتطبيق متراجحة تشيشييف من اجل $\bar{x} = 1$ و $\sigma = 1$

$$p_r\{|x-1| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$$

لنأخذ $1 - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{99}{100}$ اي $\varepsilon = 10$

ومنه يكون لدينا:

$$p_r\{|x-1| \leq 10\} \geq \frac{99}{100}$$

ومنه :

$p_r(x < 11) \geq \frac{99}{100}$ بما ان x موجب

$$N = 11$$

حل التمرين الحادي عشر:

$$\Delta_x =]0, +\infty[$$

لنرمز بـ $F(x)$ لتابع توزيع المتغير x عندها يكون لدينا:

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(x)} . x^{\alpha-1} . \ e^{-x} & si\ x > 0 \end{cases}$$

ليكن

$$Y = 2\sigma x$$

و $G(y)$ تابع توزيع Y عندها:

$$\acute{G}(y) = 0\ ; \quad \Delta_y =]0, +\infty[$$

عندها $\gamma \in \ ]0, +\infty[$ يمكننا ان نكتب

$$G(y) = p_r\ \{\Gamma < \gamma\} = p_r\ \{2\ \sigma^2 < \gamma\} = p_r\ \left\{x < \frac{1}{2\ \sigma^2}\ \gamma\right\}$$

ومنه:

$$G(y) = F\left(\frac{y}{2\,\sigma^2}\right) \;\ldots\ldots(2) \qquad\qquad \forall\, y \in \left]0, +\infty\right[$$

وباشتقاق العلاقة(2) نجد:

$$g(y) = \acute{G}(y) = \frac{1}{2\,\sigma^2}\;\acute{F}\left(\frac{y}{2\,\sigma^2}\right)$$

وباستخدام العلاقة (1) نجد:

$$g(y) = \frac{1}{2\,\sigma^2}.f\left(\frac{y}{2\,\sigma^2}\right) = \frac{1}{2^{\propto}\quad \sigma^{2\propto}\quad \Gamma(\alpha)}\;.y^{d-1}.e^{-\frac{y}{2\,\sigma^2}}$$

واذا وضعنا $n = 2\alpha$ نجد توزيع $\boldsymbol{X^2}$

حل التمرين الثاني عشر:

$$\Delta_x = R$$

$$\acute{F}(X) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\;e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \forall\;\; x \in\;\mathbb{R}$$

لدينا: $\Delta_y = \;\left]0.+\infty\right[$

من اجل $y \in\; \left]0, +\infty\right[$ يمكننا ان نكتب العلاقة الموالية:

$$G(y) = p_r\,\{\mathrm{Y} < \gamma\} = p_r\,\{X^2 < \gamma\} = p_r\,\{-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}\,\}$$

$$G(y) = p_r\,\{Y < \gamma\} = F\left(\sqrt{y}\right) - F(-\sqrt{y})$$

وباشتقاق العبارة الاخيرة نجد:

$$g(y) = \acute{G}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\acute{F}\left(\sqrt{y}\right) + \acute{F}(\sqrt{y})\,\right) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{n}}}.\frac{\boldsymbol{e}^{-\frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{2}}}}{\sqrt{\boldsymbol{y}}}$$

حل التمرين الثالث عشر:

ان A و B تشكل تجزئة لـ R ومنه يكون لدينا:

$$\boldsymbol{\sigma^2} = \int_{\boldsymbol{IR}}^{*}(\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{dp} = \int_{A}^{*}(x-\bar{x})^2 dp + \int_{B}^{*}(x-x)^2 dp$$

ان $\boldsymbol{\sigma^2}$ هو مجموع حدين موجبين ومنه :

$$\int_{B}^{*} (x-\bar{x})^2 dp \leq \ \sigma^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

لدينا بالتعريف :

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B} \qquad (\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^2 \geq \boldsymbol{\varepsilon^2}\, \boldsymbol{\sigma^2}$$ ومنه:

$$\int_{\boldsymbol{B}}^{*} (\boldsymbol{x}-\overline{\boldsymbol{x}})^2 \boldsymbol{dp} \geq \ \int_{\boldsymbol{B}}^{*} \varepsilon^2\, \sigma^2\, dp = \emptyset\, \varepsilon^2\, \sigma^2 \int \emptyset\, p \ = \ \varepsilon^2\, \sigma^2\, P(B)$$

ومنه نستنتج من (1) :

$$\boldsymbol{\varepsilon^2\, \sigma^2\, P(B) \leq \sigma^2 \, = P(B) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}}$$

<u>حل التمرين الرابع عشر:</u>

1- كتابة قيمة معالم التوزيع الاحتمالي للدخل السنوي.

بفرض أن x متغير عشوائي يعبر عن الدخل السنوي بالألف ريال، وهو يتبع التوزيع الطبيعي، ومعالمه هي:

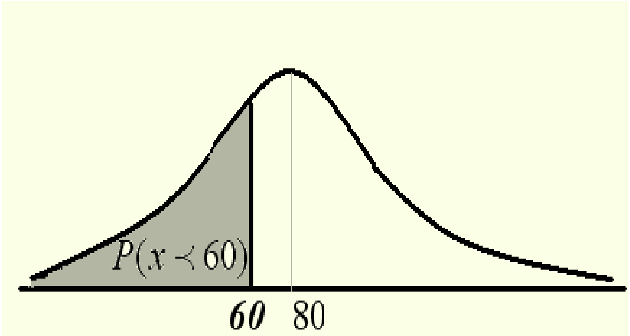
أ- المتوسط $E(x) = \mu = 80$ **ب- التباين هو:** $Var(x) = \sigma^2 = 900$

أي أن : $x \sim N(80,900)$

2- شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2}\ ,\ -\infty < x < \infty\ \ ,\ \ \pi = 22/7$$

3- نسبة الأسر التي يقل دخلها عن *60* ألف هي: $P(x \prec 60)$



ويتبع الخطوات المذكورة سابقا في حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(x<60)=p\left(z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(z<\frac{60-80}{30}\right)=P(z<-0.67)=F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة في جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، نجد أن

$$P(x<60)=P(z<-0.67)=0.2514$$

4- الدخل الذي أقل منه *0.975* من الدخول: في هذه الحالة يبحث عن قيمة المتغير (x) الذي أقل منه *0.975* ، بفرض أن هذا المتغير هو (x_1) ، فإن :

$$P(x<x_1)=p\left(z<\frac{x_1-80}{30}\right)=0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن المساحة 0.9750 **نجدها تقع عند تقاطع الصف** 1.9 **، والعمود** .06 **أي أن قيمة** $z=1.96$ **، ويكون :**

$$1.96=\frac{x_1-80}{30}\quad,\ Then\quad x_1=30(1.96)+80=138.8$$

إذا الدخل هو *138.8* ألف في السنة.

فهرس المحتويات