

Exercice 1(8pts)

1. Soit le problème (P) de Cauchy suivant

$$(P) \begin{cases} y' = g(x, y); & x \in [a, b] \\ y(x_0) = y(a) = y_0 \end{cases} \quad ; \text{ on admet que } (P) \text{ a une solution unique } y.$$

- (a) Montrer la formule d'Adam- Bashforth a **3** pas AB₃ suivante

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23g_n - 16g_{n-1} + 5g_{n-2}); \quad y_n \simeq y(x_n) \text{ et } g_n = g(x_n, y_n)$$

- (b) Montrer que l'erreur globale de cette méthode est d'ordre 3.

2. Soit l'équation différentielle ordinaire suivante

$$\begin{cases} y' + 2y = 2(\cos 2x - \sin 2x); & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y(x_0 = 0) = 1 \end{cases}$$

- (a) On prend $h = \frac{\pi}{12}$. Calculer $y_1 = y(\frac{\pi}{12})$ par la méthode AB₁.
(b) Utiliser la méthode RK₂ pour calculer y_2 .
(c) Utiliser la formule AB₃ pour calculer $y_3 = y(\frac{\pi}{4})$.
(d) Expliquer comment utiliser la méthode (**prédiction-correction**) pour calculer y_3 .

Exercice 2 (12pts)

1. Soit le problème suivant

$$(PC) \begin{cases} -u''(x) + \beta u(x) = f(x), & \beta < 0, \quad x \in I =]a, b[\\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad u \in C^2([a, b]) \text{ et } f \in C^1([a, b])$$

On pose $f(x) = \sin(\alpha x); \alpha > 0$.

- (a) Trouver une relation entre α et β pour que $u(x) = f(x)$ soit une solution de (PC) .
(b) on prend $\beta = -3, I =]0, \pi[, h = \frac{\pi}{4}$. Calculer la solution exacte de (PC) .
2. Trouver la formulation variationnelle (FV) du problème (PC) .
3. Montrer que la formulation variationnelle (FV) admet une solution unique.
4. Appliquer **la méthode des éléments finis** sur le problème (PV) .
(a) Calculer la matrice A et le vecteur D du système $AU = D$ associé au (PV) .
(b) Expliquer comment calculer la solution approchée du problème (PV) .