



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DJILLALI LIABES DE SIDI-BEL-ABBES
Faculté de Technologie
Département de Génie Mécanique



THESE

Pour l'obtention du diplôme de

Doctorat en Sciences

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Mécanique des Matériaux et Structures

Présentée par Monsieur :

KHADRAOUI Faicel

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES POUTRES COURTES EN FGM

Soutenue le : 21/ 03/ 2023 Devant le jury composé de :

Président :

M. BOUCHOUICHA Benattou Professeur, Université de Sidi Bel Abbes.

Directeur de Thèse :

M. BENRAHOU Kouider Halim Professeur, Université de Sidi Bel Abbes.

Co-Directeur de Thèse :

Mme BENGUEDIAB Soumia Maître de Conférences Classe A, Université de Saida

Examineurs :

M. BOUCHAM Belhadj Professeur, Université de Sidi Bel Abbes.

M. CHIKH Abdelbaki Professeur, Université de Tiaret

M. BOUMIA Lakhdar Maître de Conférences Classe A, Université de Tissemsilt

Invité :

M. BOUHADRA Abdelhakim Maître de Conférences Classe A, Université de Khenchela

2022 - 2023

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

À ma chère mère et mon cher père,

À ma chère femme et mes enfants,

À mes sœurs et mes frères,

A tous mes amis

À tous ceux qui m'ont encouragé tout au

long de ce travail

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à Allah tout puissant pour la volonté, la santé et la puissance, qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon encadreur **Pr. BENRAHOU Kouider Halim**. Professeur, Université de Sidi Bel Abbes, et mon co-encadreur **Pr. BENGUEDIAB Soumia**, Maître de conférences classe A, qui a été attentif à l'évolution de ma recherche et a apporté toute sa contribution pour mener à bien ce travail.

Je remercie vivement les Professeurs, Président de jury **Pr. BOUCHOUICHA Benattou** et **Pr. TOUNSI Abdelouahed** et **Pr. BENGUEDIAB Mohamed** Ils m'ont accompagné de leurs conseils pendant ces quatre dernières années.

J'exprime également toute ma reconnaissance au **Dr. BOUHADRA Abdelhakim**, **Dr. MAMEN Belgacem** et **Dr. MENASRIA Abderahmane** qui ont apporté un soutien scientifique constant à mon travail de recherche. Sa disponibilité et ses conseils avisés ont permis d'aplanir bien des difficultés.

Mes vifs remerciements s'adressent aussi à Messieurs, **Pr. BOUCHAM Belhadj**, Professeur à l'Université Djilali Liabes de Sidi Bel Abbes, **Pr. CHIKH Abdelbaki** Professeur à l'Université de Tiaret et **Dr. BOUMIA Lakhdar** Maître de Conférences Classe A à l'Université de Tissemsilt, Maître de Conférences Classe A, Université de Sidi Bel Abbes, de m'ont fait l'honneur d'examiner cette thèse.

Mes remerciements vont à l'ensemble du personnel du laboratoire des matériaux et Hydrologie de l'Université Djilali Liabès de Sidi Bel Abbés et aux personnels des départements de Génie Civil et Génie mécanique de l'Université de Abbes Laghrour de Khenchela qui m'ont aidé à titres divers et également aux membres de ma petite famille qui m'ont supporté moralement durant toute la période de l'élaboration de cette thèse

Merci pour toutes et tous

ملخص

الهدف من هذا العمل هو تطوير نظرية جديدة لتشوه القص شبه ثلاثي الأبعاد لدراسة سلوك الانحناء لحزم FG المدعومة ببساطة والمعرضة لأحمال غير خطية هيدرو-حرارية ميكانيكية. بالإضافة إلى ذلك ، يتم أخذ تأثير التمدد المستعرض في الاعتبار في هذه الدراسة. يتم اشتقاق معادلات التوازن باستخدام مبدأ العمل الافتراضي ويتم حلها باستخدام تقنية Navier. تظهر النتائج التي تم الحصول عليها أن هناك علاقة جيدة بين الضغوط غير الأبعاد وحالات النزوح مع تلك التي تم الحصول عليها من خلال نظريات ثلاثية الأبعاد وشبه ثلاثية الأبعاد الأخرى. هذا يثبت فعالية ودقة النظرية الحالية. تم تقديم الدراسة البارامترية ومناقشتها بالتفصيل في هذه الأطروحة.

أتاحت الدراسة البارامترية تحديد المصطلحات الخاصة بالأبعاد مثل الانحراف والإزاحة المحورية والضغوط وإبراز تأثير الأحمال الحرارية والرطوبة.

الكلمات المفتاحية : المواد المتدرجة وظيفياً؛ امتداد مستعرض؛ تحميل ميكانيكي حراري غير خطي ؛ سلوك الانحناء ؛ عوارض FG.

Résumé

Le but de ce travail est le développement d'une nouvelle théorie de déformation en cisaillement quasi-3D raffinée pour étudier le comportement en flexion de poutres FG simplement appuyées soumises aux chargements hygro-thermo-mécanique non linéaire. De plus, l'influence de l'étirement transversal est prise en compte dans la présente étude. Les équations d'équilibres sont dérivées en utilisant le principe du travail virtuel et résolues en utilisant la technique de Navier. Les résultats obtenus montrent qu'il y a une bonne corrélation des contraintes et des déplacements non dimensionnels avec ceux obtenus par les autres théories 3D, Quasi-3D. Ce qui prouve l'efficacité et la précision de la théorie actuelle. L'étude paramétrique sont fournie et discutée en détail dans cette thèse.

L'étude paramétrique a permis de quantifier les termes adimensionnels tels que la flèche, le déplacement axial, les contraintes et ont mis en évidence l'effet de charges thermique et d'humidité.

Mots-clés : Matériaux fonctionnellement gradués, Etirement transversal ; chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire ; comportement en flexion ; poutres FG.

Abstract

The aim of this work is the development of a new refined quasi-3D shear deformation theory to study the bending behavior of simply supported FG beams subjected to nonlinear hygro-thermo-mechanical loadings. In addition, the influence of transverse stretching is taken into account in the present study. The equilibrium equations are derived using the principle of virtual work and solved using Navier's technique. The results obtained show that there is a good correlation of the non-dimensional stresses and displacements with those obtained by the other 3D, Quasi-3D theories. This proves the effectiveness and accuracy of the current theory. The parametric study is provided and discussed in detail in this thesis.

The parametric study made it possible to quantify the dimensional terms such as deflection, axial displacement, stresses and highlighted the effect of thermal loads and moisture.

Keywords: Functionally graded materials; Transverse stretching; nonlinear hygro-thermo-mechanical loading; bending behavior: FG beams.

Table des Matières

Table des matières

Remerciement	I
Dédicace	II
Résumé	III
Abstract	IV
ملخص	V
Table de matière	VII
Liste des figures	XI
Liste des tableaux	XIV
Liste des notations	XVI
Introduction générale	1

Chapitre - I- **Généralités Sur les Matériaux Composites et Les Matériaux Fonctionnellement Gradués FGM**

I.1	Introduction	5
I.2	Notions de matériau composite	6
I.3	Dégradation des matériaux composites	6
I.4	L'endommagement à l'échelle de la fibre à gradient fonctionnel	6
I.5	L'endommagement à l'échelle du pli	7
I.6	Matériaux à gradient fonctionnel (FGM)	8
I.7	Bref historique sur (FGM)	10
I.8	Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	12
I.9	Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel	13
I.10	Techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés	14
	a) Procédé de poudre sèche	14
	b) Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)	16
	c) Coulage centrifuge (centrifugal casting)	16
	d) Coulage en bande	17
	e) Pressage à chaud	18
	f) Processus de frittage	18
	g) Processus d'infiltration	19
	h) Projection thermique	19
I.11	Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM	20
I.12	Propriétés matérielles de la poutre P-FGM	21

Table des matières

I.13	Propriétés matérielles de la poutre S-FGM.....	22
I.14	Propriétés matérielles de la poutre E-FGM	23
I.15	Conclusion	24

Chapitre - II - **Théories des poutres en FGM**

II.1	Introduction	26
II.2	Historique des théories des poutres.....	26
II.3	Définition d'une poutre	28
II.4	Conditions aux limites des poutres	28
II.5	Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres.....	29
II.6	Les théories des poutres	30
a	La théorie classique des poutres (CBT Méthode d'Eluer-Bernoulli)	30
b	La théorie des poutres de premier ordre (FSDBT Modèle de Timoshenko).....	31
c	Modèle de la déformation en cisaillement d'Ordre Elevé (HSDT)	33
II.7	Conclusion	36

Chapitre III **Revue des travaux antérieurs sur la modélisation des FGM**

III.1	Introduction	38
III.2	Analyse de la stabilité des poutres en (FGM).....	38
III.3	Revue études les problèmes élasto-statiques des poutres en FGM	39
III.4	Revue on études des phénomènes de flambement thermomécanique	40
III.5	Revue études des problèmes de vibration des poutres FGM.....	43

Chapitre IV **Effets du chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG**

IV.1	Introduction.....	53
IV.2	Propriétés matérielles de la poutre.....	54
IV.3	Formulation théorique d'une poutre FG.....	55

Table des matières

IV.3.1	Champ de déplacement et les déformations et les contraintes.....	56
IV.3.2	Équations constitutives	57
IV.3.3	Équations d'équilibres	58
IV.3.4	Solutions analytiques de Navier pour poutre FG.....	60

Chapitre V

Résultats Numériques et Discussion

V.1	Introduction	64
V.2	Résultats et discussion	64
V.3	Conclusion	81
	Conclusion générale	84
	Références Bibliographiques	87

Liste des Figures

Liste des figures

Chapitre I : Généralités Sur les Matériaux Composites et les Matériaux

Fonctionnellement Gradués FGM

Figure I.1 : La rupture des fibres.	7
Figure I.2 : Délaminage.	7
Figure I.3 : La décohéation des fibres et de la matrice	8
Figure I.4 : Fissuration transverse.....	8
Figure I.5 : Une plaque fonctionnellement graduée.....	10
Figure I.6 : Variation des propriétés des composites conventionnels et des FGM.....	10
Figure I.7 : Les principaux domaines d'application des FGM.	13
Figure I.8 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.	14
Figure I.9 : Organigramme de technique de la métallurgie des poudres Pour la production des FGM	15
Figure I.10 : Représentation schématique du procédure de coulage centrifuge Horizontale .	17
Figure I.11 : Système de processus de coulage en bande	18
Figure I.12 : Géométrie d'une poutre FGM.....	21
Figure I.13 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM	22
Figure I.14 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM).....	23
Figure I.15 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur (E-FGM).....	24

Chapitre II : Théories Des Poutres FGM

Figure II.1 : Principe de modélisation des poutres.	29
Figure II.2 : Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.	30
Figure II.3 : Flexion d'une poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).....	31
Figure II.4 : Cinématique de la poutre de Timoshenko.	32
Figure II.5 : Illustration élémentaire d'une poutre en fonction de deux théories des poutres.	33
Figure II.6 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé d'une poutre	34

Chapitre IV : Effets De Chargement Hygro-Thermo-Mécanique Non Linéaire Sur Le

Comportement En Flexion Des Poutres FG

Figure IV.1 : Géométrie et système de coordonnées d'une poutre FG.....	55
Figure IV.2 : Variation de température et de l'humidité..	58

Liste des figures

Chapitre V : Résultats Numériques et Discussion

Figure V.1 : Évolution du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur en utilisant : (a) un chargement mécanique, (b) un chargement thermomécanique non linéaire et (c) un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.....	72
Figure V.2 : Évolution de la flèche adimensionnelle en fonction du rapport côté/épaisseur en utilisant : (a) chargement mécanique, (b) chargement thermo-mécanique non linéaire et (c) chargement hygrothermo-mécanique non linéaire	74
Figure V.3 : Évolution de la contrainte de flexion adimensionnelle σ_x à travers l'épaisseur en utilisant : (a) un chargement mécanique, (b) un chargement thermomécanique non linéaire et (c) un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.	75
Figure V.4 : Évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle à travers l'épaisseur en utilisant : (a) le chargement mécanique, (b) le chargement thermomécanique non linéaire et (c) le chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.	76
Figure V.5 : Évolution de la flèche adimensionnelle w : (a) dans l'épaisseur, (b) en fonction du rapport côté sur épaisseur a/h , (c) et (d) pour différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T3 et C3).....	78
Figure V.6 : Évolution du déplacement axial adimensionnel u avec différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T3 et C3) : (a) à travers l'épaisseur et (b) en fonction du rapport côté sur épaisseur a/h	79
Figure V.7 : Évolution de la contrainte de flexion adimensionnelle σ_x à travers l'épaisseur en utilisant différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T3 et C3).....	80
Figure V.8 : Évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle τ_{xz} grâce à l'utilisation de différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T3 et C3)	81

Liste des Tableaux

Chapitre II : Théories Des Poutres FGM

Tableau II. 1 : Principales conditions aux limites pour les poutres..... 28

Chapitre V : Résultats Numériques et Discussion

Tableau V.1 : Comparaisons des déformations et des contraintes adimensionnelles sous une charge uniformément répartie. 66

Tableau V.2 : Comparaison des flèches adimensionnelles sous chargement thermomécanique linéaire et non linéaire ($a/h=10$) 67

Tableau V.3: Paramètres adimensionnels utilisant un chargement thermomécanique linéaire ($a/h=10$, $q_0=100$, $T_2=10$, $T_3=0$, $C_2=C_3=0$)..... 67

Tableau V.4 : Paramètres adimensionnels utilisant un chargement thermomécanique non linéaire ($a/h=10$, $q_0=100$, $T_2=T_3=10$, $C_2=C_3=0$)..... 68

Tableau V.5 : Paramètres adimensionnels utilisant un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire ($q_0=100$, $T_2=T_3=10$, $C_2=C_3=100$)..... 68

Tableau V.6: Flèches adimensionnelles sous chargement hygro-thermo-mécanique linéaire et hygrothermo-mécanique non linéaire ($k=10$)..... 69

Tableau V.7 : Flèches 3D non dimensionnelles sous chargement mécanique, thermomécanique linéaire, thermomécanique non linéaire et hygro-thermomécanique non linéaire..... 70

Liste des Notations

Liste des Notations

P	Propriétés mécaniques
V	Fraction volumique
T	Température
T_1, T_2 et T_3	Représente température (constante, linéaire, non linéaire) respectivement
C_1, C_2 et C_3	Représente les termes d'humidité (constante, linéaire, non linéaire) respectivement
E	Module de Young
ν	Coefficient de poisson
K	Conductivité thermique
α	Coefficient de dilatation thermique
β	Coefficients de concentration d'humidité
P_i	Propriétés mécaniques du constituant i
V_i	Fraction volumique du constituant i
P_c	Propriétés mécaniques de la céramique
V_c	Fraction volumique de la céramique
P_m	Propriétés mécaniques du métal
V_m	Fraction volumique du métal
x, y, z	Coordonnées cartésiennes
$E(z)$	Module de Young en fonction de z
$\nu(z)$	Coefficient de poisson en fonction de z
$V(z)$	Fraction volumique en fonction de z
p	Paramètre matériel
h	Épaisseur de la poutre
b	Largeur de la poutre
a	Longueur de la poutre
$P(z)$	Propriétés mécaniques en fonction de z
G	Module de cisaillement
u, w	Déplacements dans les directions x, z
u_0, w_0	Composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la poutre.

Liste des notations

w_b, w_s	Composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal
ϕ_x, ϕ_y	Rotations totales à la normale au plan moyen autour des axes x et y
φ_x, φ_y	Rotations autour des axes x et y
$f(z)$	Fonction de gauchissement
$g(z)$	Première dérivée de la fonction $f(z)$
$g'(z)$	Première dérivée de la fonction $g(z)$
θ	Déplacement transversal dû au cisaillement
σ_x, σ_z	Contraintes normales
τ_{xz}	Contraintes de cisaillement
$\varepsilon_x, \varepsilon_z$	Déformations normales
γ_{xz}	Déformations de cisaillements transversales
ρ	Masse volumique
$q(x, z)$	Charge mécanique sinusoïdale
$T(x, z)$	Champ thermique externe
$C(x, z)$	Concentration en humidité
A, B	Coefficients dépendent de la solution de Navier
C_{ij}, Q_{ij}	Coefficient de rigidité élastique
i et j	Nombres naturels
δU	Variation de l'énergie de déformation
δV	Variation du travail externe
δU_f	Variation du travail de la fondation élastique
$\delta u_0, \delta w_s, \delta w_b, \delta \theta$	Variation du champ de déplacements
N_x, N_z	Efforts normaux
M_b, M_s	Moments de flexion dans la poutre
Q	Effort de cisaillement
q	Charge mécanique
$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}]$	Termes de rigidité en membrane de la poutre
$[B_{sij}, D_{sij}, H_{sij}]$	Termes de rigidité de couplage de la poutre

Liste des notations

$[L_{ij}, L_{ij}^{\alpha}, R_{ij}]$	Constantes mécaniques
$[A_{ij}^T, {}^a B_{ij}^T, {}^b B_{ij}^T, D_{ij}^T]$	Constantes thermiques
$[A_{ij}^C, {}^a B_{ij}^C, {}^b B_{ij}^C, D_{ij}^C]$	Constantes d'humidité
U_0, W_b, W_s, ϕ	Paramètres arbitraires
$q(x)$	Charge transversale
L_{ij}, S_{ij}	Composants de la matrice de rigidité
$\{ \}$	Vecteur
$[K]$	Matrice de rigidité
$\{\Delta\}$	Le vecteur des coefficients inconnus
$\{P\}$	Le vecteur de charge généralisée

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

L'allègement des structures et la longévité des structures pour un coût de fabrication raisonnable est la préoccupation majeure des constructeurs. La réduction de masse et le comportement mécanique dans un environnement à haute température sont ainsi difficiles à concilier.

En effet la forte variation de température et le chargement cyclique altèrent leurs propriétés mécaniques et diminuent considérablement leur durée de vie. Dans ce cas, pour garantir la sécurité de la structure, des moyens financiers supplémentaires sont à prévoir pour des interventions régulières de maintenance. Face à cette problématique, les matériaux composites à gradient de propriétés constituent une solution potentielle, pour satisfaire le cahier de charge. En effet, grâce à leurs propriétés matériaux graduellement continues et la présence de la céramique comme composant, les matériaux à gradient de propriétés (Functionally Graded Materials, FGM) sont d'excellentes barrières thermiques.

Les poutres fonctionnellement graduées (FGM) sont des éléments structuraux constitués de deux matériaux différents. En raison de leur faible poids et de leur grande rigidité, ces éléments sont couramment utilisés dans plusieurs industries telles que la construction, l'aérospatiale, les transports, l'aéronautique et la marine. La prévention des risques peut passer par la connaissance des caractéristiques mécaniques essentielles pour éviter la ruine précoce des structures par fatigue ou l'instabilité thermique par flambage assurer une durée de vie satisfaisante de la structure. L'évolution continue des caractéristiques mécaniques de la surface inférieure vers la surface supérieure élimine l'interface entre les couches, zone d'accumulation et de concentration de contraintes.

Soucieux des effets occasionnés par les chargements couplés (mécaniques, thermiques et d'humidité) auxquels sont soumises les poutres FGM dans de nombreux domaines d'application: aérospatial, automobile, aéronautique, génie civil, il est impératif d'étudier la flexion statique des poutres FG dans ces conditions de chargement. Dans ces applications, les sandwichs étaient au début de leurs utilisations, constitués de couches isotropes. Avec le souci d'incorporer davantage de propriétés dans les infrastructures tout en assurant leur légèreté, les matériaux composites sont devenus incontournables pour améliorer et optimiser les propriétés requises.

L'avantage de l'utilisation de ces matériaux composites réside dans le bon rapport poids/rigidité qu'ils offrent en plus de leur multifonctionnalité intégrée. En ce sens, les composites à fibre, au-delà de leur légèreté et leur bonne rigidité, offrent la possibilité de jouer sur l'orientation de leurs fibres, pour améliorer la résistance et les propriétés de résistance des structures. Les structures composites sont conçues et adaptées aux domaines spécifiques et aux sollicitations auxquelles elles doivent faire face en service.

Mais aujourd'hui ce concept de matériaux à gradient de propriétés retrouve un regain d'intérêt dans l'ingénierie grâce à la flexibilité qu'il offre dans le contrôle de la microstructure et de la texture des composites. Avec ce nouveau concept, il est devenu plus simple d'adapter les propriétés du matériau aux sollicitations et proposer des modèles robustes pour étudier le comportement de ces matériaux.

Ce travail a pour but d'enrichir les théories existantes et de développer une nouvelle théorie raffinée à deux variables pour l'étude du comportement mécanique des poutres FG soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.

La présente thèse est articulée autour de cinq chapitres :

Le premier chapitre manuscrit une présentation des matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués allant de leur fabrication où les concepts de base nécessaires à la compréhension des mécanismes mis en jeu lors de l'élaboration sont présentés jusqu'aux mécanismes d'endommagement de ces matériaux.

Le second chapitre présente les modèles existants avec les différentes formulations de la théorie de l'élasticité ou des modèles théoriques qui en dérivent (théorie des poutres, des plaques et des coques) pour analyser le comportement mécanique et définir la conception de ces structures.

Le troisième chapitre est consacré aux travaux récents dans le domaine dédié aux comportements statique et dynamique des matériaux FGM. Une lecture générale de leurs principes de base et leurs hypothèses sont aussi discutées.

Le quatrième chapitre présente la formulation mathématique proposé, décrivant le comportement d'une poutre fonctionnellement graduée, soumise à un chargement combiné hygro-thermo-mécanique non linéaire à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de

Introduction générale

cisaillement raffinée quasi-3D, Afin d'étudier le comportement en flexion des poutres FG simplement appuyées

Le cinquième chapitre, plusieurs exemples numériques concernant l'analyse de la flexion de poutre FG sous des sollicitations hygro-thermo-mécaniques combinées sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude de la théorie proposée. Où nous avons obtenu des courbes représentant l'efficacité de cette théorie

Enfin, une conclusion générale relative à la recherche effectuée incluant des perspectives pour des travaux futurs.

CHAPITRE I

Généralités Sur les Matériaux Composites et les Matériaux Fonctionnellement Gradués FGM

I. 1. Introduction

Dans le développement de nouveaux matériaux, on s'efforce souvent d'atteindre l'homogénéité des caractéristiques du matériau. Les efforts visant à uniformiser la composition chimique, la structure et la texture ont entraîné le progrès continu de la science et de la technologie des matériaux. Cependant, ces dernières années, à mesure que les environnements dans lesquels les matériaux sont utilisés deviennent plus exigeants, il existe fréquemment des cas dans lesquels les matériaux homogènes conventionnels ne peuvent pas résister à des environnements sévères. Par exemple, dans les applications aérospatiales telles que les turbines et les chambres de combustion, il n'y a pas de matériau homogène approuvé qui peut résister aux températures dominantes (jusqu'à 1800°C dans les chambres de combustion) à un niveau de contrainte utilisable. Pour répondre au besoin croissant de matériaux industriels, des études ont également été menées pour concevoir des composites non homogènes, tels que des matériaux enrobés et assemblés. Ces composites inhomogènes se caractérisent par des caractéristiques différentes sur des surfaces ou des pièces séparées, et ont donc deux fonctions différentes ou plus dans le matériau donné. Malheureusement, cependant, ces matériaux possèdent des limites nettes, dont l'existence se traduit souvent par divers comportements indésirables causés par les discontinuités des caractéristiques physiques et chimiques à la frontière. La séparation des limites dans un matériau revêtu due à une contrainte thermique est un exemple typique de tels inconvénients [1].

Le monde industriel en perpétuel développement est à la recherche continue de perfection. Cette évolution ne peut se concrétiser sans une avancée technologique qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'études et de recherches scientifiques permettant de concevoir des procédés innovants pour le développement industriel. Le domaine des matériaux est considéré comme un axe de recherche très important et fondamental pour tout développement industriel, car toute pièce, tout composant sont à la base un matériau et innover dans cette discipline, c'est révolutionner le monde de l'industrie.

Dans les années 1980, dans le but de développer des matériaux résistants aux contraintes thermiques pour les applications aérospatiales, un nouveau concept de matériaux a été proposé pour traiter le problème des frontières [2,3].

C'est-à-dire qu'un revêtement céramique sur métal ou un matériau joint céramique/métal à texture continue a été développé afin d'augmenter la force d'adhérence et de minimiser la

contrainte thermique près de la frontière céramique/métal. Ce nouveau type de matériau est appelé "matériaux à gradient fonctionnel" (FGM).

I. 2. Notions de matériau composite

Définition Selon le dictionnaire Larousse, une définition de matériau composite peut s'énoncer ainsi : Matériau formé de plusieurs composants élémentaires dont l'association confère à l'ensemble des propriétés qu'aucun des composants pris séparément ne possède. Une pléiade de matériaux répond à ce critère et sont par suite catalogués dans la vaste famille des matériaux composites. Dans la majorité des cas le matériau est composé de deux phases : des renforts mouillés par une matrice. Les renforts assurent la tenue aux efforts mécaniques de la structure : ce sont souvent des fibres, longues ou courtes. La matrice quant à elle permet de répartir les contraintes sur les renforts, elle garantit la géométrie de la pièce et peut aussi conférer au matériau des qualités telles que la résistance au feu, des travaux numériques a été menés sur ce sujet dont [4].

I. 3. Dégradation des matériaux composites

De nombreuses campagnes expérimentales ont été menées pour observer et caractériser la dégradation des composites depuis l'apparition de microfissures à l'interface fibre matrice jusqu'à la rupture brutale des fibres, certaines sont rapportées notamment dans [5-9]. De par sa structure multi-échelle (fibre, couche, empilement), la dégradation d'un composite est susceptible de se produire à plusieurs échelles. Les mécanismes majeurs de rupture identifiés expérimentalement sont classifiés ci-après. La rupture finale de la structure est ainsi la synthèse de plusieurs mécanismes d'endommagement qui interviennent successivement ou en concert à l'échelle de la fibre et à l'échelle du pli pour aboutir à la rupture de la macrostructure.

I. 4. L'endommagement à l'échelle de la fibre

On distingue trois principaux mécanismes d'endommagement à l'échelle de la fibre, longueur caractéristique $\approx 10-5m$:

- L'endommagement diffus dans le pli : des microfissures apparaissent dans les couches et conduisent à des décohésions à l'interface entre les fibres et la matrice (figure I.1) ;

- Le micro délaminage : des microfissures apparaissent dans la zone riche en résine entre deux plis, initiées par les fissures transverses qui créent des concentrateurs de contraintes au niveau de l'interface (figure I.2) ;

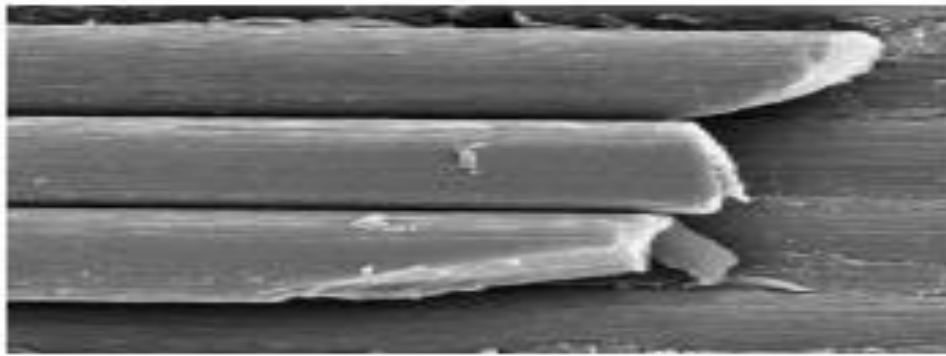


Figure I. 1 : La rupture des fibres

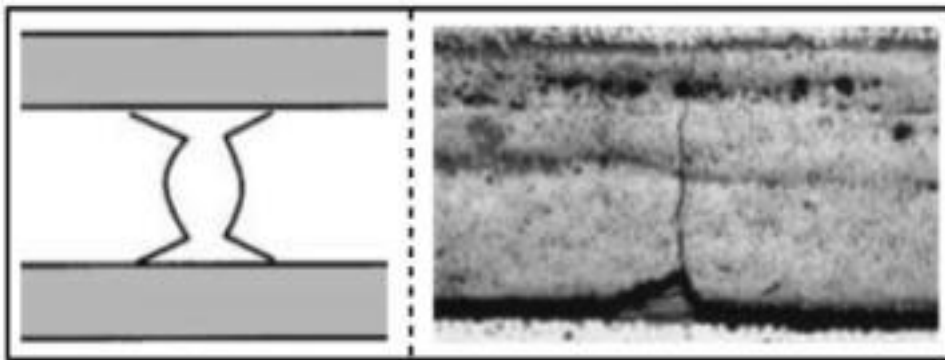


Figure I. 2 : Délaminage

I. 5. L'endommagement à l'échelle du pli

On répertorie deux mécanismes d'endommagement remarquables à l'échelle du pli, longueur caractéristique $\approx 10-4m$:

- Le délaminage (Figure I.3) correspond à un décollement de deux couches entre elles : les plis se détachent, les efforts ne sont plus repris que par certains plis : à ce moment la structure est considérée comme totalement ruinée.
- La fissuration transverse est une macro-fissure qui se développe dans le pli, parallèlement aux fibres (Figure I.4) : elle apparaît par un mécanisme de percolation des microfissures sous-jacentes à l'endommagement diffus ;

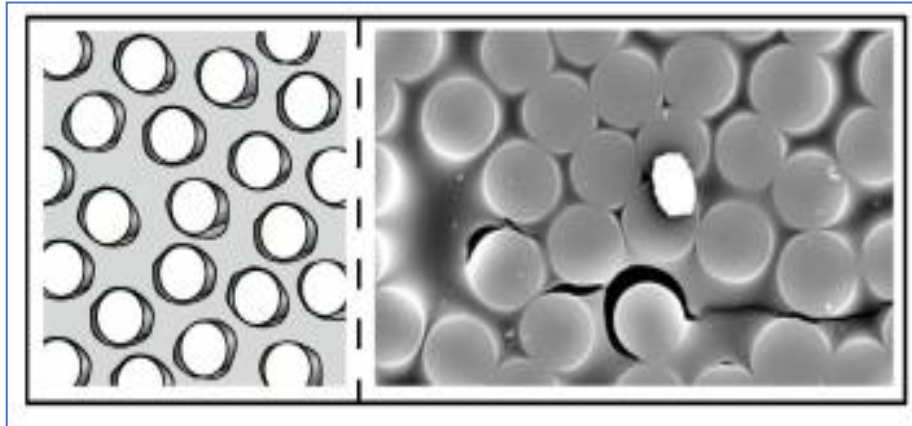


Figure I. 3 : La décohésion des fibres et de la matrice

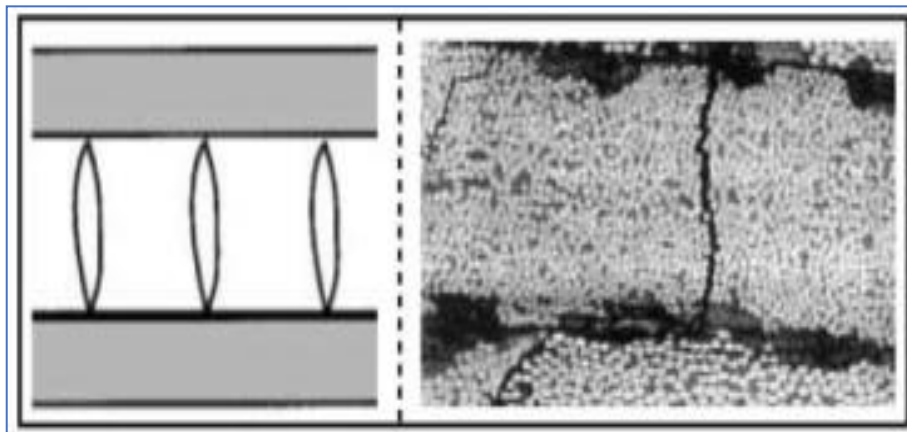


Figure I. 4 : Fissuration transverse

Enfin, cette discontinuité des propriétés matérielles à travers l'interface des constituants de ces matériaux composites, provoque des concentrations de contraintes sous des chargements mécaniques ou dans un milieu thermique ultra-chaud, la différence relative du coefficient d'expansion thermique provoque des contraintes résiduelles importantes. A cet effet, le concept du matériau fonctionnellement gradués (Functionally Graded Materials « FGM ») est introduit pour satisfaire la demande dans un environnement ultra chaud et aussi pour éliminer les contraintes singulières [18].

I. 6. Matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

Une nouvelle catégorie de matériaux composites est apparue, il s'agit des matériaux fonctionnellement gradués ou (Functionally Graded Materials FGM), Ces types de matériaux possèdent des propriétés souhaitables pour des applications spécifiques, en particulier pour les avions, les véhicules spatiaux, l'optique, la biomécanique, l'électronique, la chimie, la

Chapitre I **Généralités sur les matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradues FGM**

mécanique, la construction navale et d'autres structures d'ingénierie soumises à une concentration de contraintes, à des contraintes thermiques et résiduelles élevées [14].

Ces matériaux ont une microstructure et une composition qui varie graduellement et continuellement de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent (Figure I.5). L'idée d'intégration des fonctions désirées dès la conception, au cœur même de la matière les rend des matériaux intelligents. Les applications spécifiques et les conditions environnementales conduisent à choisir chaque interface, ainsi du point de vue de leur potentiel d'application, ces matériaux possèdent de multiples avantages : amélioration en termes de rigidité, tenue à la fatigue, résistance à la corrosion ou conductivité thermique [10].

En plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales [11,12]. Ou encore l'amélioration du transfert de chaleur [13]. L'émergence de matériaux fonctionnellement gradués (FGM) qui combinent les meilleures propriétés de ses matériaux constitutifs (par exemple, la céramique et les métaux) est considérée comme une alternative à certaines classes de structures aérospatiales exposées à un environnement à haute température. Les FGMs sont caractérisées par une transition graduelle d'un matériau à un autre, évitant ainsi les contraintes de cisaillement d'interface élevées et le problème de délaminage qui persiste dans les composites stratifiés. Avec l'utilisation accrue de ces matériaux, il est nécessaire d'étudier les caractéristiques dynamiques des structures constituées de FGMS [15]. L'objectif était de fabriquer le corps à partir d'un matériau ayant une résistance thermique et des propriétés mécaniques améliorées en changeant progressivement les compositions pour résister à une différence de température sévère de 1000 ° C.

Actuellement, la plupart des activités de recherches et de développements dans les applications structurales se sont concentrées principalement sur secteurs de joindre deux constituants de base, la céramique et le métal. Beaucoup d'avantages sont prévus d'employer cette classe du FGM, par exemple, la face avec le contenu est élevée en céramique peut fournir haute résistance à l'usure, alors que la face opposée où le contenu est élevé en métal offre la haute dureté et la force. Ainsi, de tels matériaux seront très souhaitables pour des applications tribologiques où la résistance à l'usure et la dureté élevée sont requises simultanément [17].

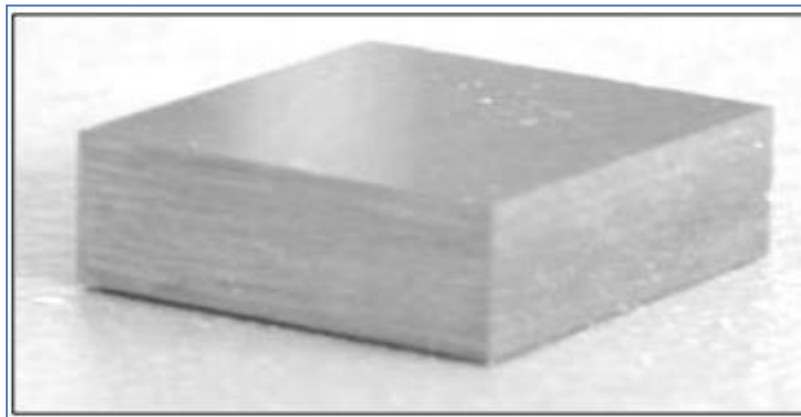


Figure I. 5 : Une plaque fonctionnellement graduée

Les FGMs peuvent également fournir une barrière thermique et peuvent être utilisées comme revêtement à haute résistance aux rayures et à réduction des contraintes résiduelles [19]. De même, les FGMs peuvent être utilisées comme interface de liaison à haute résistance pour connecter deux matériaux incompatibles [20]. La figure I.6 illustre la variation possible des propriétés des composites conventionnels par rapport aux FGM [21].

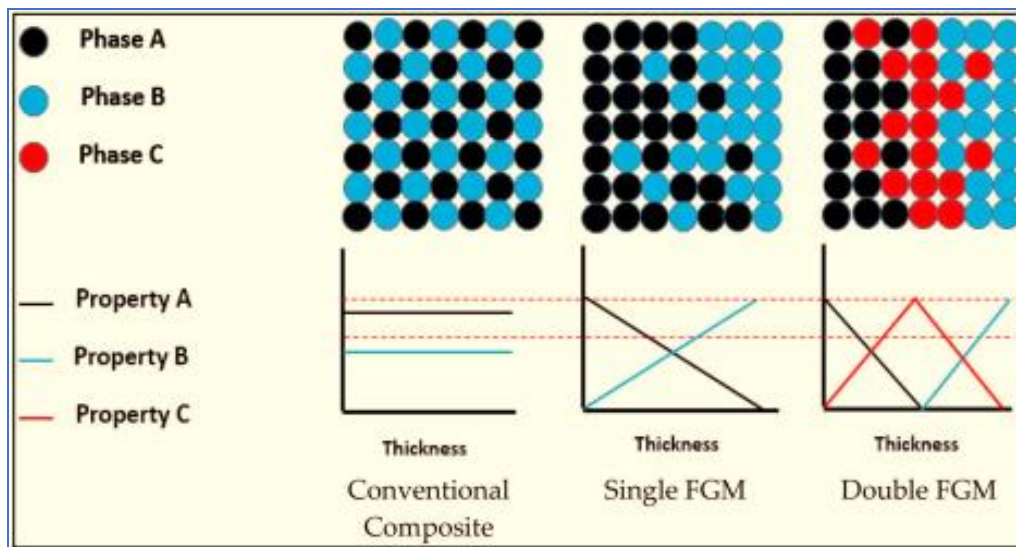


Figure I. 6 : Variation des propriétés des composites conventionnels et des FGM

I. 7. Bref historique sur (FGM)

Le concept des "Matériaux fonctionnellement gradués" a été développé dans le laboratoire national d'aérospatial de Sendai dans une université Japonaise sur l'île de Honshū au Japon en 1984 par M. Niino et ses collègues dont le but de réaliser un engin spatial dont un revêtement pouvant résister à des conditions thermiques très sévères. L'idée est alors de

Chapitre I Généralités sur les matériaux composites et les matériaux fonctionnellement gradués FGM

concevoir un matériau ayant d'excellentes propriétés mécaniques et qui peut répondre à des exigences environnementales dans les structures spatiales et les réacteurs à fusion. Le résultat est l'obtention d'un matériau avec une gradation continue dans la direction de l'épaisseur, passant d'une face totalement métallique vers une face totalement céramique [17, 22].

En 1987, le gouvernement Japonais a lancé un vaste projet intitulé "la recherche sur la technologie de base pour développement des matériaux fonctionnellement gradués et l'étude de la relaxation des contraintes thermiques". L'intérêt du projet est de développer des matériaux présentant des structures utilisées comme barrière thermique dans les programmes aérospatiaux. 17 laboratoires nationaux de recherche, des universités et des entreprises ont été engagées dans ce projet [23,18].

À la fin de la première étape (1987-1989), les chercheurs avaient réussi à fabriquer des petites pièces expérimentales (1-10 mm d'épaisseur et 30 mm de diamètre) pouvant résister à des températures maximales de 2000K (température de surface) et à un gradient de température de 1000K. Quatre techniques ont été utilisées pour fabriquer les matériaux présentant un gradient de composition et de structure. Les techniques utilisées dans la fabrication de tels matériaux sont les suivantes :

- Le système SiC/C par Le dépôt chimique en phase vapeur (chemical vapor deposition C.V.D)

Le système PSZ/Mo par la technique de la compaction sèche des poudres,

- Le système TiB₂/Cu par synthèse par auto-propagation à haute température,
- Le système (Ni-Cr-Al-Y) / (ZrO₂-Y₂O₃) par projection plasma à double torches.

Dans la seconde étape (1990-1991), le but était de réaliser des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes par rapport à celles réalisées dans la première étape. Pendant les années 90, non seulement les champs d'applications des FGM s'est développé pour les matériaux de structure fonctionnant à haute température, mais s'est aussi élargi à d'autres applications : biomécaniques, technologie de capteur optique.

En 1990-1991, c'est la réalisation des pièces de tailles plus grandes et de forme plus complexes avec d'autres applications : Biomécaniques, Technologie de capteur, Optiques...etc. [24].

En 1992, c'est la période de l'amélioration de l'efficacité des FGM dans la conservation d'énergie photoélectrique, thermoélectrique, thermonucléaire [25].

A partir de ces résultats, un nouveau projet national intitulé « recherche sur les matériaux pour la conservation de l'énergie avec le plan fonctionnel gradient de structure »,

communément dénommé « FGM partie II, a été lancé en 1993, pour la promotion de la science et technologie. Ce programme vise à s'appliquer la technologie des FGM dans le but d'améliorer l'efficacité de la conservation de l'énergie comme l'énergie solaire, nucléaire, photovoltaïque, thermoélectrique [18].

I. 8. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Le concept des matériaux fonctionnellement gradués est applicable dans des nombreux domaines, comme il est illustré dans la figure I.7 Il a été initialement conçu pour l'industrie de l'aéronautique, où les FGM ont fournis deux propriétés contradictoires telles que la conductivité et l'isolation thermique dans un matériau. Actuellement, ils permettent la production des matériaux légers, forts et durables, et ils sont applicables dans un large intervalle des domaines tels que les matériaux de construction, matériaux de conversion d'énergie, nucléaire et semi-conducteurs [13].

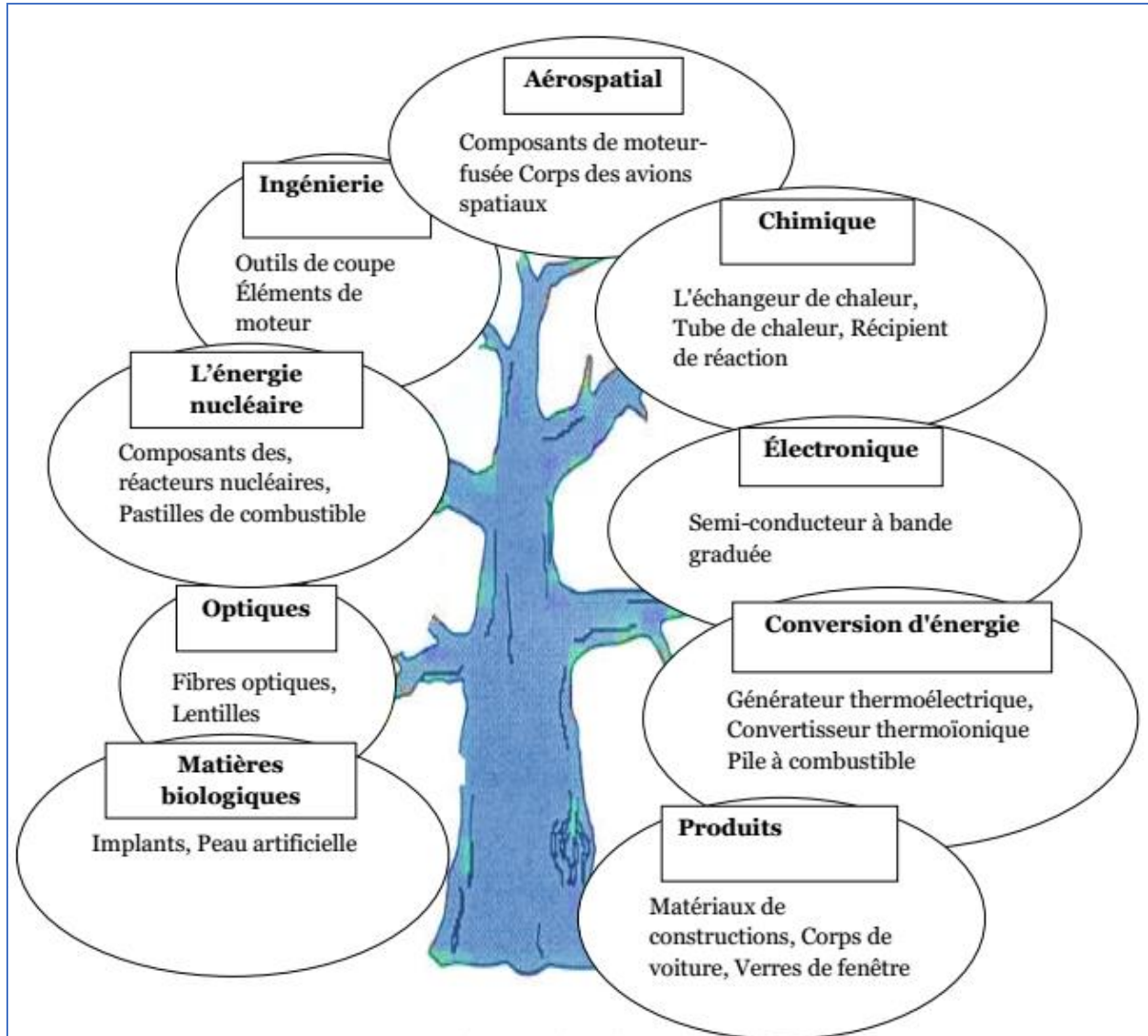


Figure I.7 : Les principaux domaines d'application des FGM.

I. 9. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel

Les FGMs sont très hétérogènes, il sera très utile de les idéaliser comme continua avec leurs propriétés mécaniques variant continûment par rapport aux coordonnées spatiales. Les schémas d'homogénéisation sont nécessaires pour simplifier leurs microstructures hétérogènes complexes afin de les analyser d'une manière efficace. Des solutions fermées de certains problèmes fondamentaux de la mécanique des solides peuvent être obtenues par cette idéalisation et aussi il aidera à l'évolution et le développement de modèles numériques des structures faites par les FGMs. Il est à noter que la répartition de matière dans les structures des FGMs peut être conçue pour diverses spécifications spatiales.

Un FGM typique représente un composite de particules avec une distribution prescrite des fractions de volume des phases constitutives. Les propriétés des matériaux sont généralement supposées suivre une gradation à travers l'épaisseur d'une manière continue. Deux types de fraction volumique (variations/gradations) sont populaires dans la littérature qui couvre la plupart des modèles analytiques existants :

1. Une variation par morceaux de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumée, et le FGM est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c-à-d couche quasi-homogène de céramique-métal (figure I.8.a);
2. Une variation continue de la fraction volumique de la céramique ou du métal est assumé (figure I.8.b), et la fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur (z) [26].

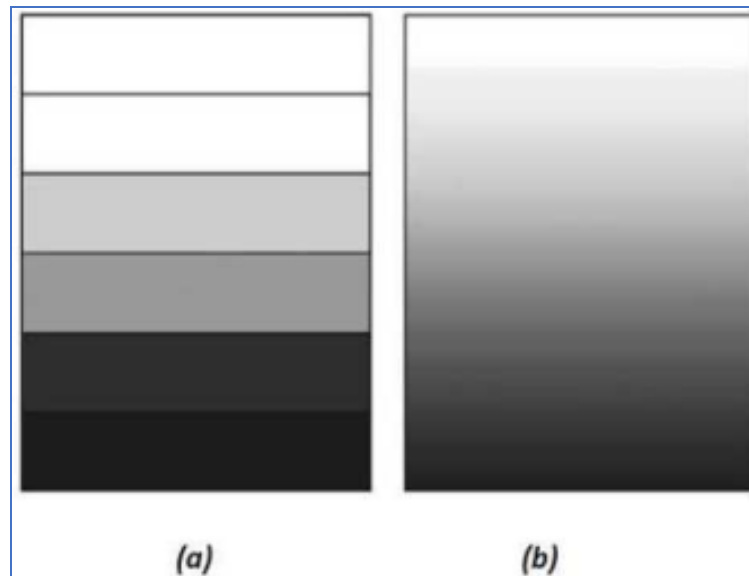


Figure I.8 : Modèle analytique pour une couche d'un matériau à gradient fonctionnel.

I. 10. Techniques de fabrication des matériaux à gradient de propriétés

a) Procédé de poudre sèche

PM (powder metallurgy) est une technologie apparente pour la fabrication du FGM et elle est de plus en plus utilisée pour créer des gradients sur les matériaux. Cette méthode est appropriée pour la fabrication du FGM utilisant des matériaux solides. Ici la technique est utilisée pour produire des matériaux à gradient de propriétés en trois étapes de base à savoir : le pesage et le mélange de poudre en fonction de la répartition spatiale de préconçue comme

dictée par l'exigence fonctionnelle, d'empilage et de damage des poudres pré-mélangées, et enfin, le frittage comme illustré à la figure I.9. La méthode de métallurgie des poudres est l'une des techniques les plus couramment utilisées en raison de son contrôle de la grande, plage de la composition, la microstructure et la capacité de mettre des formes [27, 28, 29].

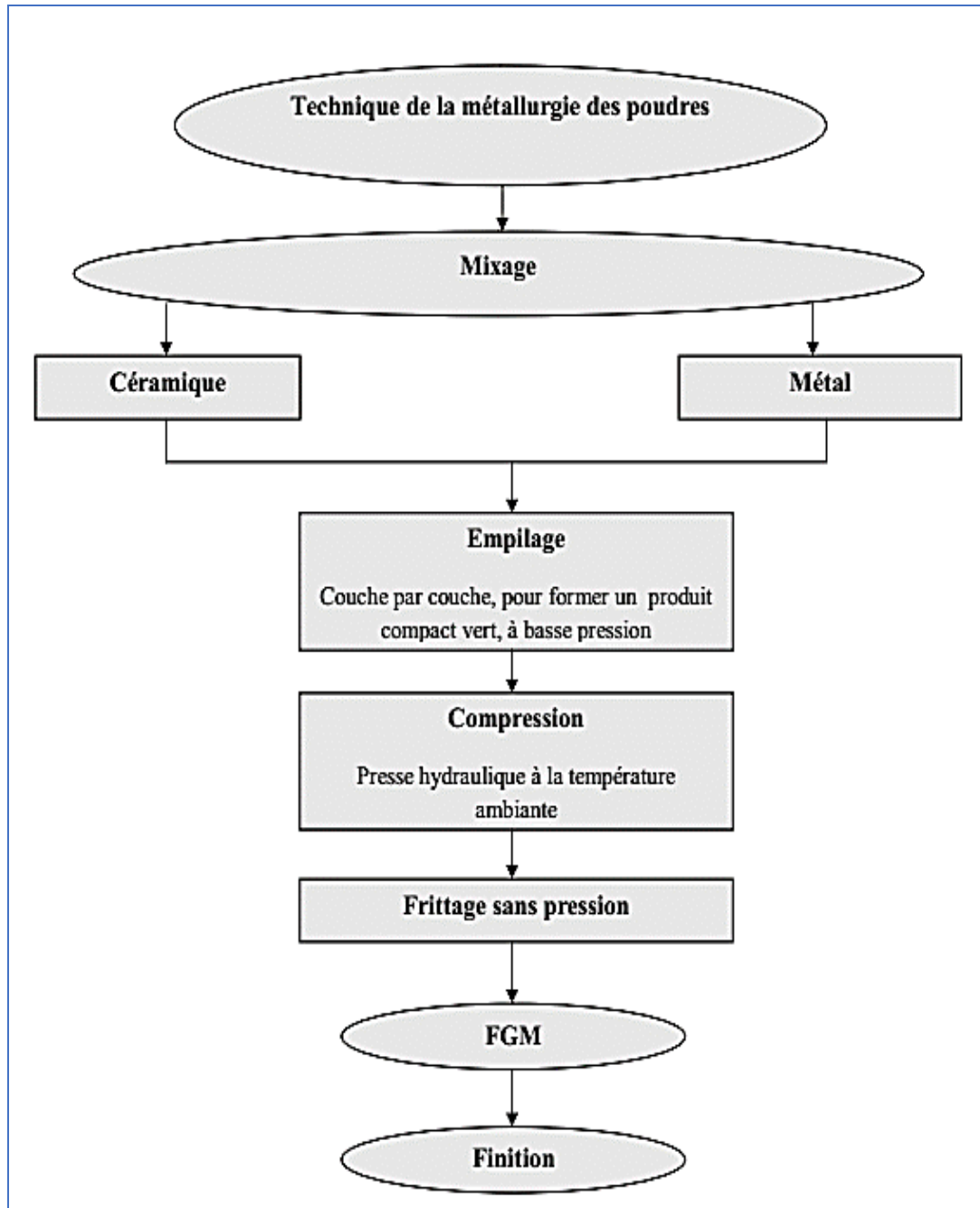


Figure I. 9 : Organigramme de technique de la métallurgie des poudres Pour la production des FGM

b) Coulage Séquentiel en Barbotine (Slip Casting)

Le coulage en barbotine est une poudre basée sur une méthode de mise en forme traditionnelle appliquée dans l'industrie céramique. En général le coulage en barbotine est un procédé de filtration où la poudre suspendue est versée dans un moule en plâtre poreux. En raison des forces capillaires résultantes le liquide élimine la suspension et les particules de poudre sont forcées vers les parois. Le gradient sera formé en changeant la composition ou la taille des grains de la suspension de poudre appliquée pendant la procédure de coulée en barbotine. Cette technique nécessite également l'étape ultérieure de consolidation, où la poudre est densifiée (frittée) et une structure de gradient de propriétés FGM sera produite [30].

c) Coulage centrifuge (centrifugal casting)

La force centrifuge peut être utilisée pour créer une composition de gradient dans une masse fondue métallique qui contient une autre phase solide. En général, la fabrication du FGM par le procédé de centrifugation est classée en deux catégories en fonction de la température de fusion de la particule de renforcement (Figure I.10). Si le point de fusion est significativement plus élevé que la température de traitement, la particule de renfort reste solide dans une matrice liquide.

Cette méthode est appelée la méthode particule-solide centrifuge (CSPM). Le renforcement sélectif de la surface du composant obtenue par les résultats CSPM une résistance à l'usure plus élevée dans la surface extérieure ainsi que le maintien de haute ténacité en vrac. D'un autre côté, si le point de la particule de renfort de fusion est inférieur à la température de traitement, la force centrifuge peut être appliquée au cours de la solidification à la fois à la particule de renfort et à la matrice [17].

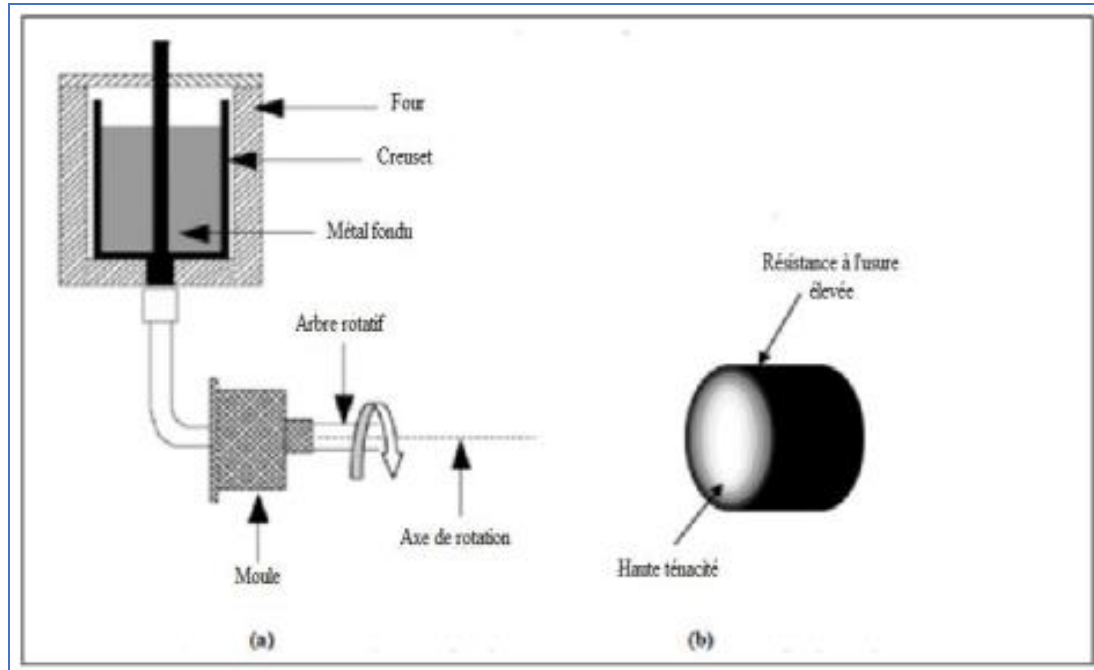


Figure I. 10 : Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC: résistance à l'usure élevée) [29].

d) Coulage en bande

Le procédé de coulée de bande est représenté sur la figure II.6. L'épaisseur de la bande coulée est généralement comprise dans l'intervalle de 25 μm et 1 mm (Figure I.11). Les bandes minimales inférieures à 1 μm pourraient être produites. Les différentes étapes de coulage en bande sont :

1. élaboration de la matière qui contient de l'eau, des particules de poudre et de liant,
2. le séchage du corps vert ou de la bande,
3. la consolidation de la matière dense de band.

Afin d'obtenir un FGM des bandes ou des différents composites ont été préparés ; des unités carrées ont été coupées à partir des bandes vertes qui ont ensuite été placés les uns sur les autres.

Les bandes d'épaisseur appliquée est de l'ordre de 200 μm . La densification de la bande est obtenue par frittage. Gradients superposés des matériaux en métal-céramique et céramique-céramique sont produits par la coulée de bandes de composition différente et de laminage subséquent. (Dumont 2001) ont fabriqué un FGM en $\text{MoSi}_2/\text{Al}_2\text{O}_3$ avec des teneurs en alumine variant de 20 à 80% mole en utilisant une combinaison de coulage en bande et la réaction autoentretenue à haute température (SHS).

Après déliantage, les échantillons verts ont été mis à feu à une température ambiante. Les réactions de combustion ont été effectuées sous une charge faible pour améliorer la densification de composition progressive des composites [31].

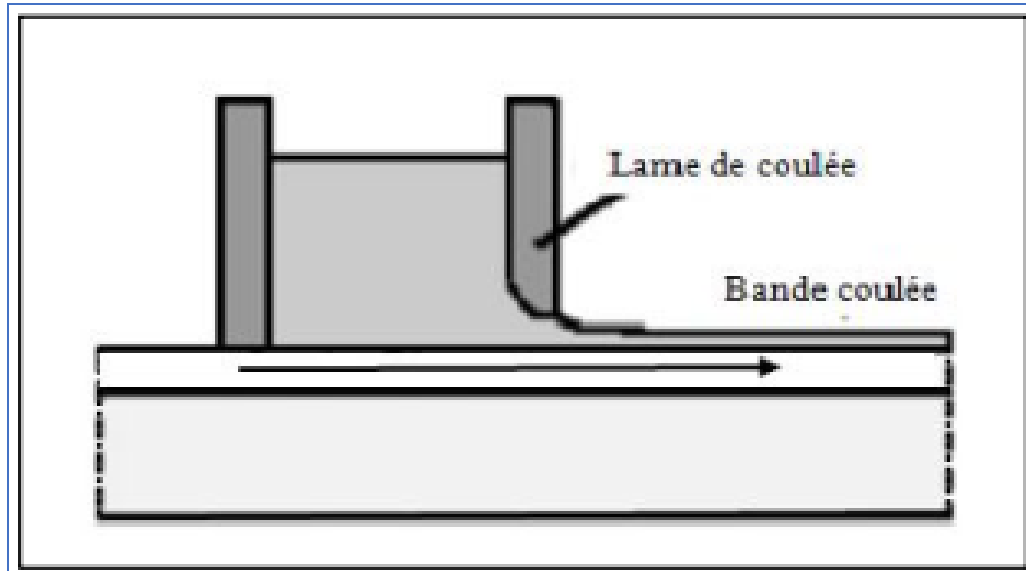


Figure I. 11 : Système de processus de coulage en bande [29]

e) Pressage à chaud

La zircone stabilisée par l'yttria (YSZ) et le nickel 20 chrome (NiCr) sont les deux matériaux combinés en utilisant YSZ-NiCr FGM inter-couche via la méthode de pressage à chaud (Li 2003). À l'étape initiale du traitement, la poudre YSZ et NiCr ont été mélangés dans la boule fraiseuse pendant 12 h avant d'être empilés couche par couche en graphite filière revêtue de nitrure de bore. Cette étude applique le concept de dégradation progressive en disposant la composition de chaque couche pour être en pourcentage désiré. Le pré-compactage de chaque couche a été réalisé sous une pression inférieure avant de stocker la couche adjacente sous une pression supérieure (10 MPa) pour assurer la distribution de composition exacte dans les couches. La jonction de YSZ-NiCr qui a été effectuée à 1200°C pour 1h présente une bonne stabilité thermique et une résistance à l'oxydation jusqu'à 1000 °C avant d'initier la fissure [27][33][32].

f) Processus de frittage

La gradation qui a été effectuée dans la poudre compacte doit être préservée au cours du processus de frittage ou de consolidation. Certaines des poudres métalliques légères, tels que le magnésium et l'aluminium aura tendance à réagir avec l'oxygène et de se disperser dans l'atmosphère qui doit être évitée afin d'obtenir des matériaux appropriés qui en résultent. Le

procédé de frittage est réalisé en même temps que le processus de compactage si le FGM est préparé au moyen du traitement de pressage à chaud. Cependant dans le processus de pressage à froid, le procédé de frittage est effectué seulement après que les poudres ont été compactés [34][32].

g) Processus d'infiltration

Infiltration est le processus pour lequel le fluide sur la surface précipite dans le sol. Ce processus est dirigé soit par la gravité ou la force d'action capillaire. Le taux d'infiltration et dépend des caractéristiques du sol tels que la capacité de stockage, le taux de transmission à travers le sol et la facilité d'entrée. Le taux et la capacité du processus d'infiltration peuvent être contrôlés en ajustant certains paramètres, y compris la texture du sol, les types de végétation et de la couverture, la teneur en eau dans le sol, la température du sol et de l'intensité des précipitations. Comme le processus commun pour la mise en forme du moule est le chauffage de la poudre à une température qui est supérieure à la phase liquide. D'après la littérature, il existe un nombre limité de mise en œuvre du processus d'infiltration. La méthode d'infiltration a été mise en place pour le traitement des FGM depuis de nombreuses années auparavant. Un gradient de composition Al-SiCp a été fabriqué avec succès en utilisant la méthode d'infiltration sans pression au début de la dernière décennie. Il a été indiqué que la conductivité thermique du FGM produit de plus en plus tendance non linéaire tandis que la fraction volumique de l'élément en céramique diminue [35][32].

h) Projection thermique

La projection thermique est une technique pour laquelle une structure est revêtue de matériaux fondus à travers d'un processus de pulvérisation. Concernant le processus avec la préparation FGM, les matières fondues seront les matériaux à gradient variés qu'ont construit des couches de revêtement. Dans ce procédé, le précurseur de revêtement est chauffé électriquement ou chimiquement. Un des avantages de l'utilisation de cette technique est que ce revêtement peut fournir des revêtements épais (20 μm to mm). En 2002, trois types de revêtements à gradient de propriétés de barrière thermique (TBCs) ainsi que des revêtements en double avec la même résistance thermique ont été conçus dans le but d'étudier le comportement thermique à la rupture des structures FGM [32].

I. 11. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel « FGM » consistent en l'association de deux ou plusieurs matériaux aux propriétés structurales et fonctionnelles différentes avec une transition idéalement continue de la composition, de la structure et de la distribution des porosités entre ces matériaux de manière à optimiser les performances de la structure qu'ils constituent [36].

Les caractéristiques les plus distinctes des matériaux FGM sont leurs microstructures non uniformes avec des macro-propriétés graduées dans l'espace. Un des paramètres clé à déterminer lors de la fabrication de ces matériaux est la composition multi-phase à travers l'épaisseur. La dépendance des propriétés de la position se traduit par la prise en compte de la loi des mélanges correspondant au modèle de Voigt.

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (I.1)$$

Où P_i et V_{Fi} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i avec la somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne l'unité 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (I.2)$$

Dans la pratique, la plupart des structures FGM sont à deux constituants : de la céramique et du métal inoxydable en général (Figure I. 12). Dans ce cas, la loi de Voigt se réduit à :

$$P = P_c V_c + P_m V_m \quad (I.3)$$

$$V_c + V_m = 1 \quad (I.4)$$

Un FGM peut être définie par la variation des fractions de volume. La plupart des chercheurs emploient la fonction de puissance, la fonction exponentielle, ou la fonction sigmoïde pour décrire les fractions de volume. Les liaisons entre les particules doivent être assez dures à l'intérieur pour résister à la rupture, et également assez dures à l'extérieur pour empêcher l'usure.

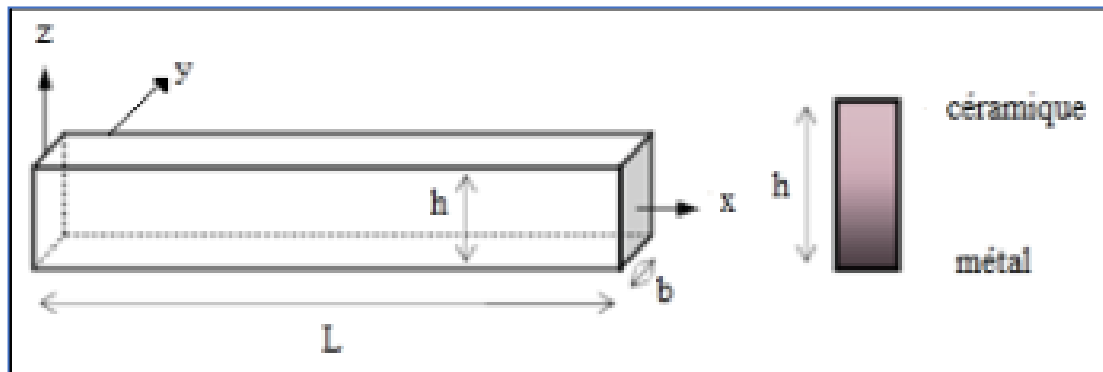


Figure I. 12 : Géométrie d'une poutre FGM

Les coordonnées x et y définissent le plan de la poutre, tandis que l'axe z origine à la surface du milieu de la poutre et dans le sens de l'épaisseur (*Figure I. 13*). Les propriétés du matériau dont le module de Young et le coefficient de Poisson sur les faces supérieures et inférieures sont différentes. Ils varient de façon continue, suivant l'épaisseur (l'axe z), soit :

$$E = E(z) \quad \text{et} \quad \nu = \nu(z) \quad (I.5)$$

Jin and Batra [37], Ziou et al. [38] ont indiqué que l'effet du coefficient de poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, Le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varié en fonction de la loi de puissance (PFGM), la fonction exponentielle (E-FGM) ou avec la fonction sigmoïde (S-FGM).

I. 12. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La fraction volumique de la classe P-FGM obéit à une fonction en loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{z + h/2}{h} \right)^p \quad (I.6)$$

Où p est un paramètre matériel et h est l'épaisseur de la poutre. Une fois la fraction volumique locale $V(z)$ à été définie, les propriétés matérielles d'une poutre P-FGM peuvent être déterminées par la loi des mélanges :

$$E(z) = (E_c - E_m)V(z) + E_m \quad (I.7)$$

Où E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la surface supérieure ($z=+h/2$) et de la surface inférieure ($z = -h/2$) de la poutre FGM.

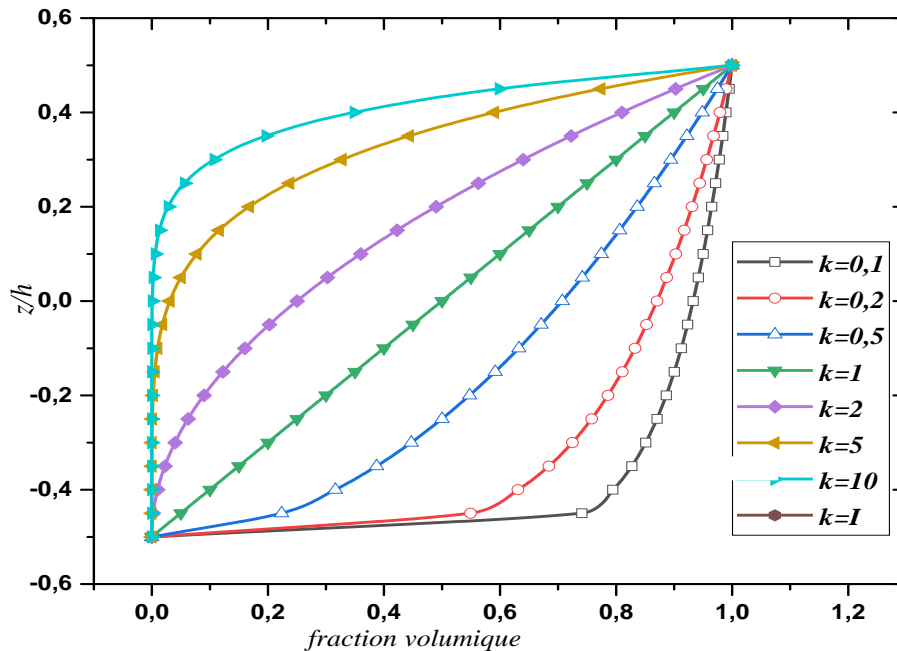


Figure I. 13 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM

La variation de la fraction volumique dans la direction d'épaisseur de la poutre P-FGM est représentée sur la (Figure I. 13). Il apparaît clairement que cette dernière change rapidement près de surface inférieure pour $P < 1$, et augmenté rapidement près de la surface supérieure pour $p > 1$.

I. 13. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Chi et al [39] ont défini la fraction de volume de la poutre FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_c(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2+z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.8a)$$

$$V_m(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2-z}{h/2} \right)^p \quad \text{pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.8b)$$

En utilisant la loi des mélanges, le module de Young de la poutre S-FGM peut être calculé par

$$E(z) = V_c(z)E_c + [1 - V_c(z)]E_m \quad \text{pour : } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.9a)$$

$$E(z) = V_m(z)E_c + [1 - V_m(z)]E_m \quad \text{pour : } 0 \leq z \leq h/2 \quad (I.9b)$$

La (Figure I. 14) montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (1-7a) et (1-7b) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre SFGM).

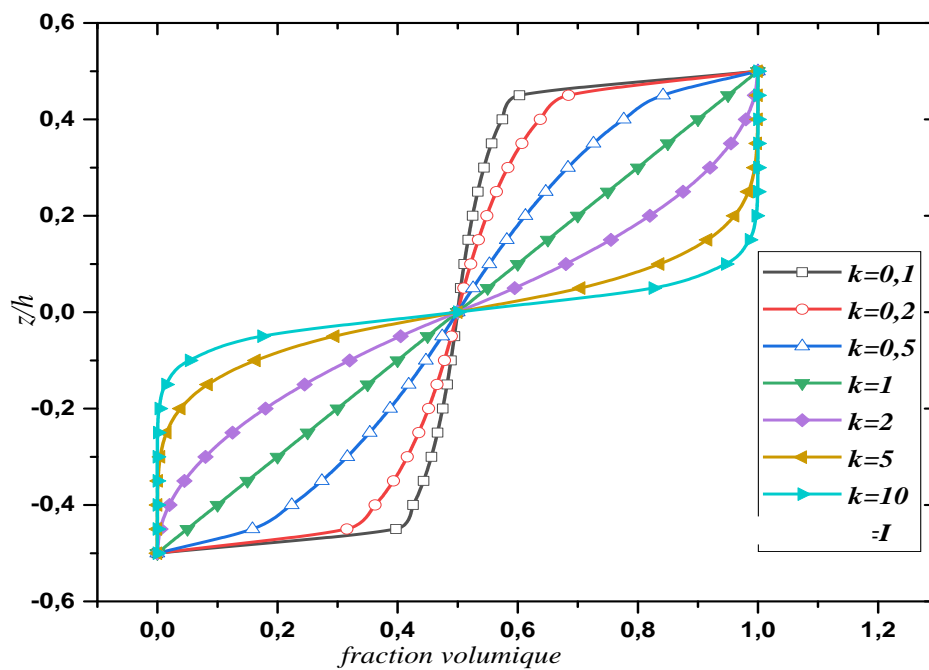


Figure I. 14 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur (S-FGM)

I. 14. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

Pour décrire les propriétés matérielles des matériaux FGM, la plupart des chercheurs utilisent la fonction exponentielle qui s'écrit sous la forme [40].

$$E(z) = E_m^{B(z+h/2)} \quad (I.10a)$$

$$B = \frac{1}{h} \ln \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (I.10b)$$

La variation du module de Young à travers l'épaisseur de la plaque E-FGM est représentée sur la (Figure I. 15).

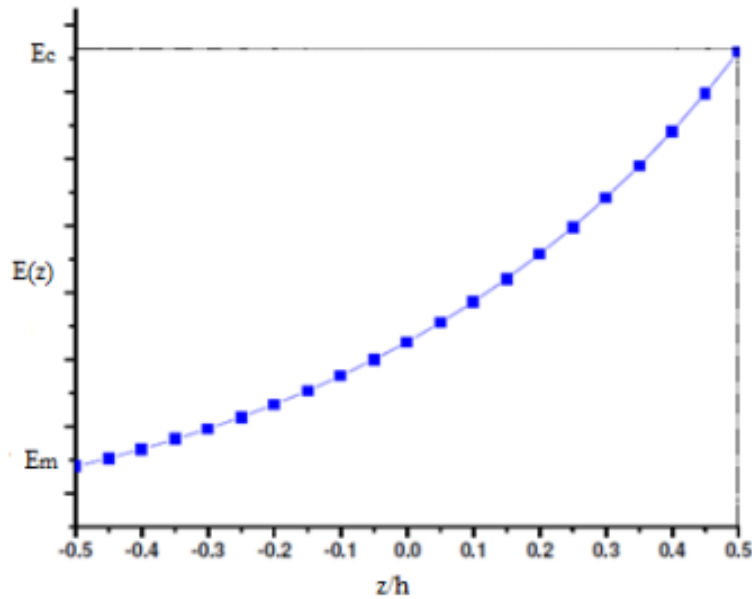


Figure I. 15 : Variation du module de Young à travers l'épaisseur (E-FGM)

I. 15. Conclusion

Avec la naissance d'un nouveau matériau composite (matériau à gradient fonctionnel) et son utilisation dans cette thèse, ce chapitre dédie à présenter le positionnement du problème. Une présentation générale sur les matériaux composites et le rôle des différentes phases (fibre, interface, matrice...) y est faite avec ses avantages et ses inconvénients. Les mécanismes de rupture des composites sont ensuite abordés en insistant sur le phénomène de délaminage. Puis nous avons défini les matériaux à gradient fonctionnel « FGM », l'histoire de leur développement, leurs propriétés, leur conception ainsi leurs différents domaines d'application dans les structures spéciales en génie mécanique et civil.

CHAPITRE II

Théories des poutres FGM

II. 1. Introduction

Les structures complexes couramment étudiées sont constituées de sous-ensembles aux géométries les plus diverses : barres ou poutres, plaques et coquilles minces ou épaisses, parties solides. Les structures minces du type poutre, arc, plaque et coques sont très répandues dans l'environnement naturel (feuilles d'arbres, mollusques, cellules vivantes, etc.) ou créées par l'homme tels que les cadres, voûtes, réservoirs, caissons, ponts de pont, carrosseries d'automobiles, coques de bateaux, ailes d'avions etc. Pour chacun de ces constituants, ils existent des formulations de la théorie de l'élasticité ou de la plasticité ou des modèles théoriques qui en dérivent (théorie des poutres, des plaques et des coques) pour analyser le comportement et définir la conception de ces structures. Dans ce chapitre, nous présentons une analyse des structures de type « poutre ».

II. 2. Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne pût finaliser ses calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte (il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. À cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIXe siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle [41].

Voici dans un ordre chronologique les principaux événements marquants l'évolution de la théorie des plaques [42].

En 1750, Leonhard Euler et Jacques Bernoulli ont été les premiers à donner une approche mathématique au comportement des poutres, en introduisant respectivement deux notions, l'indéformabilité axiale de la fibre neutre (elle se déforme en flexion sans se contracter ni se comprimer) et la faculté des sections droites à rester droites après déformation.

En 1764, par analogie aux poutres, Leonhard Euler est arrivé à définir une équation différentielle du second ordre décrivant la vibration libre de la peau des tambours assimilée à une membrane élastique [42] [43].

En 1787, Ernst Chladni, physicien allemand, connu pour être le fondateur de l'acoustique moderne, publia ses études expérimentales sur les vibrations des plaques, où il cherchait une méthode de mesure de la vitesse du son dans les corps solides. L'expérience de Ernst Chladni consistée à faire vibrer des plaques de taille, de forme et d'épaisseur différentes, saupoudrées de sable fin, et déposées horizontalement sur un support fixe à leurs centres, à l'aide d'un archet. La vibration des plaques fait migrer les grains de sable des zones de forte vibration aux zones de faible vibration, faisant apparaître des figures correspondantes aux différents modes de vibration des plaques.

En 1811, l'Académie Française des sciences a lancé un concours pour la détermination d'une théorie mathématique expliquant les travaux du physicien Ernst Chladni, et c'est en 1816 que Sophie Germain mathématicienne et philosophe française obtient finalement l'équation de la déformée en ajoutant un terme à l'équation d'Euler tenant compte des rayons de courbure dans les deux directions perpendiculaires.

En 1821, Henri Navier présente un mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, ces derniers sont considérés comme le fondement de la théorie d'élasticité.

Les travaux d'Henri Navier ont été suivi par d'autres travaux tels ceux d'Augustin Louis Cauchy, de Siméon Denis Poisson, de Gabriel Lamé et d'Émile Clapeyron.

Gustav Robert Kirchhoff l'un des plus grands physiciens du XIXe siècle, a réussi par ces travaux, à cerner le champ de validité de la solution de Navier, en calculant toutes les composantes du champ de déformation et de contrainte. Et il constata que la solution classique ne satisfaisait pas les conditions aux limites en déplacement pour une plaque d'étendue finie (appuyée ou encastree), mais précisa que l'écart tend à s'annuler lorsque l'épaisseur relative de la plaque tend vers 0 et c'est en 1850 qu'il arriva à établir de façon correcte des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque [42].

En 1888, Augustus Edward Hough Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, pour fonder une théorie des plaques minces.

C'est ainsi que les trois principales théories feront leurs apparitions dans les années qui suivent.

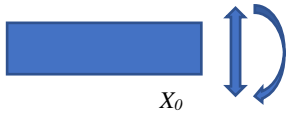

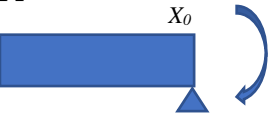

II. 3. Définition d'une poutre

Le terme de « poutre » désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour une grande variété des pièces à condition qu'elles respectent certaines normes. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé "arbre" quand il est soumis à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation [41,44].

II. 4. Conditions aux limites des poutres

Elles sont définies en considérant les quatre grandeurs qui caractérisent le mouvement de flexion qui représenté dans le tableau ci-dessous.

Tableau II. 1 : Principales conditions aux limites pour les poutres

<p>Extrémité libre</p>  <p>x_0</p>	<p>Pas des contraintes sur le déplacement et la rotation \Rightarrow le moment de flexion et la force de cisaillement s'annulent en x_0</p>	$M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>Extrémité encastrée</p>  <p>x_0</p>	<p>Les déplacements transversal et angulaires sont nuls en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>Extrémité simplement supportée</p>  <p>x_0</p>	<p>Le déplacement transversal est bloqué mais la rotation est libre \Rightarrow le moment de flexion est donc nul en x_0</p>	$w(x_0, t) = 0$ $M(x_0, t) = EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big _{x=x_0} = 0$
<p>Extrémité guidée</p>  <p>x_0</p>	<p>Le déplacement transversal est libre et la rotation est bloquée \Rightarrow la force de cisaillement est donc nul en x_0</p>	$\theta(x_0, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big _{x=x_0} = 0$ $Q(x_0, t) = -EI \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big _{x=x_0} = 0$

II. 5. Hypothèses cinématiques de la théorie des poutres

La théorie des poutres dans RDM peut être vue principalement de deux manières différentes.

La première approche est à partir des considérations particulières pour des grandes familles d'exemples, cette approche nécessite une bonne connaissance et une bonne maîtrise de la modélisation des problèmes physiques à résoudre.

Tandis que la seconde approche, plus systématique, permet une formulation rigoureuse de la théorie des poutres à partir de considérations purement mécaniques.

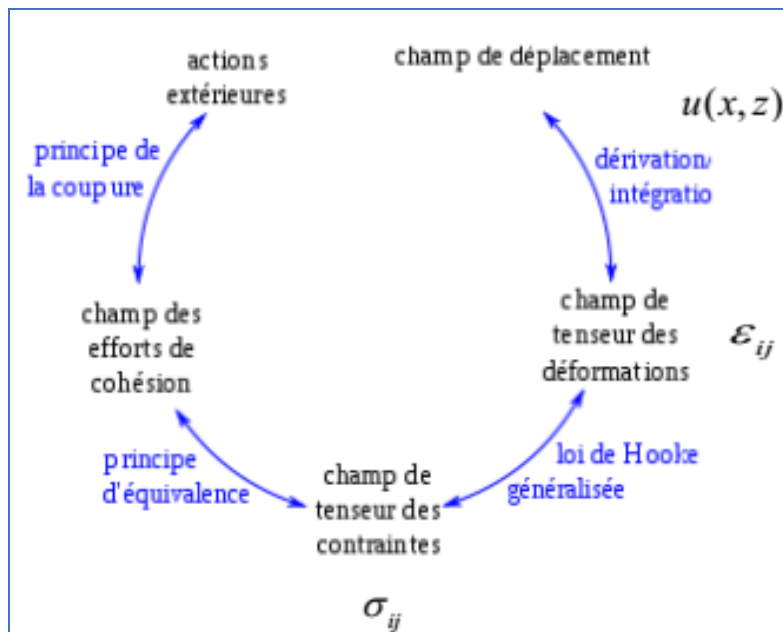


Figure II.1 : Principe de modélisation des poutres. [45]

→ L'hypothèse cinématique fondamentale de la théorie des poutres est l'hypothèse de Navier. (Navier -Bernoulli et Navier -Timoshenko) : "Toute section droite de la configuration de référence est supposée rester plane et inaltérée au cours du mouvement" [46].

→ L'hypothèse de Navier s'énonce aussi de la façon équivalente suivante : "Toute section droite est considérée comme ayant un mouvement de solide indéformable".

→ L'hypothèse d'Euler- Bernoulli énonce que la section droite de la poutre est indéformable reste plane et perpendiculaire à la fibre moyenne avant et après déformation, et la déformation transversale est nulle.

→ L'hypothèse de Timoshenko énonce que la section droite de la poutre est indéformable ne reste pas perpendiculaire à la fibre moyenne après déformation (il y a une rotation de la section droite), et l'effet de cisaillement n'est pas nul et pris en compte.

II. 6. Les théories des poutres

a. La théorie classique des poutres (CBT Méthode d'Euler-Bernoulli)

Il a été énoncé pour la première fois vers 1750, est une simplification de la théorie linéaire de l'élasticité qui fournit un moyen de calculer les caractéristiques de charge et de déflexion des poutres, qui néglige l'influence de cisaillement dans le cas de la flexion au cours de la déformation,

Il est bien connu que la théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines. Dans cette théorie, le modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur de la poutre. Les déformations dues au cisaillement transversal sont négligées (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre). La section reste perpendiculaire à la ligne moyenne de la poutre et la section plane reste plane (**Figure II. 3**).

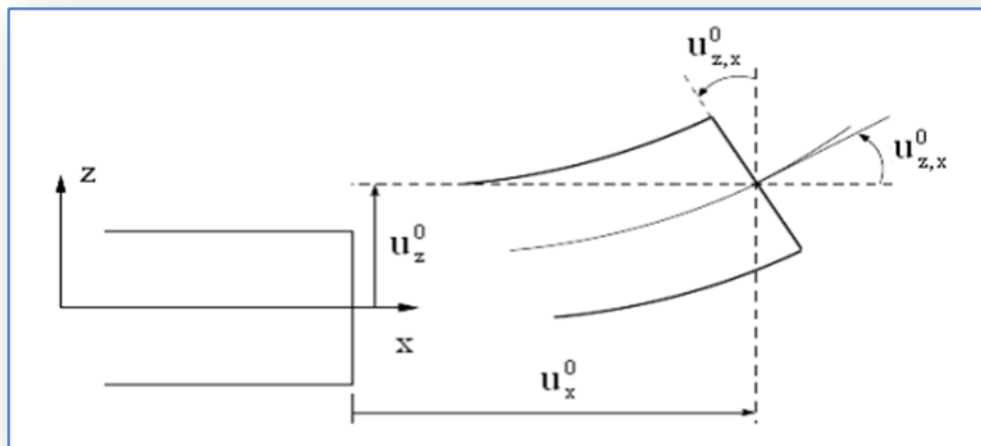


Figure II. 2 : Cinématique de la poutre d'Euler Bernoulli.

La fonction qui décrit la répartition de déplacement suivant l'épaisseur de la poutre est:

$$f(z) = 0 \quad (II.1)$$

Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres, le déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (II.2a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (II.2b)$$

Avec,

u_0, w_0 sont les composantes de déplacement au milieu de la section et sur la ligne moyenne de la poutre ($Z = 0$) respectivement le long des axes X et Z.

La rotation de l'axe Y, provoquée par la flexion est tel que :

$$\frac{\partial w_0(x)}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (II.3)$$

Cela veut dire que la distorsion est nulle et par conséquent la contrainte de cisaillement est nulle puisque,

$$\tau_{xz} = G_{xz} \gamma_{xz} = 0 \quad (II.4)$$

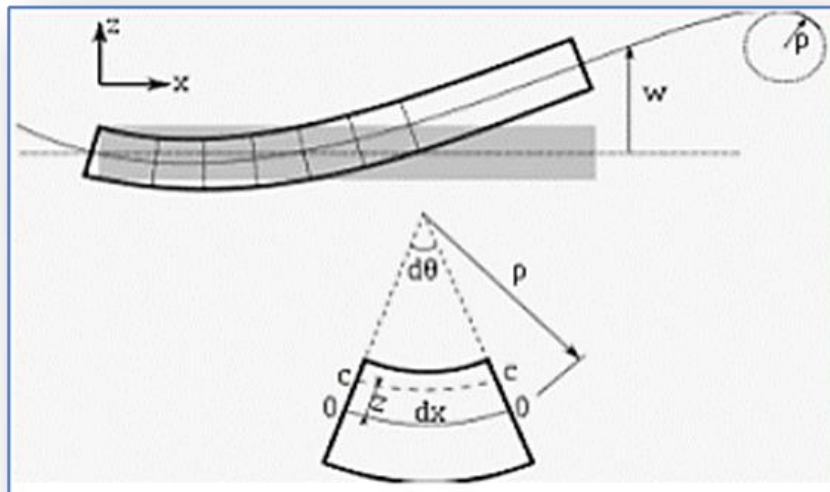


Figure II.3 : Flexion d'une poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).

b. La théorie des poutres de premier ordre (FSDBT Modèle de Timoshenko)

Timochenko a été le premier à étudier les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, qui ont été développés au début du XXe

siècle Timoshenko et Woinowsky-Kreiger [47], Reddy [48] et Miara et Podio-Guidugli [49].

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (théorie de Timoshenko) a prolongé la théorie classique des poutres en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Elle s'applique pour le cas des poutres courtes, elle est basée sur le principe ; qu'après déformation, la section plane reste plane mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre (figure II.5).

Dans ce cas, la fonction $f(z)$ est égale à z .

Il existe un cisaillement uniforme et les déformations dues au cisaillement transversal ne sont pas négligées [44].

L'hypothèse de base porte sur une schématisation du champ de déplacement à l'intérieur du solide (hypothèse "cinématique") : le solide est assimilé à un milieu curviligne, le champ de déplacement du milieu continu étant ensuite évalué à partir de la solution trouvée en supposant qu'une section droite initialement plane et perpendiculaire à la "ligne moyenne" ainsi définie reste plane mais non perpendiculaire. En un point quelconque du milieu curviligne [50].

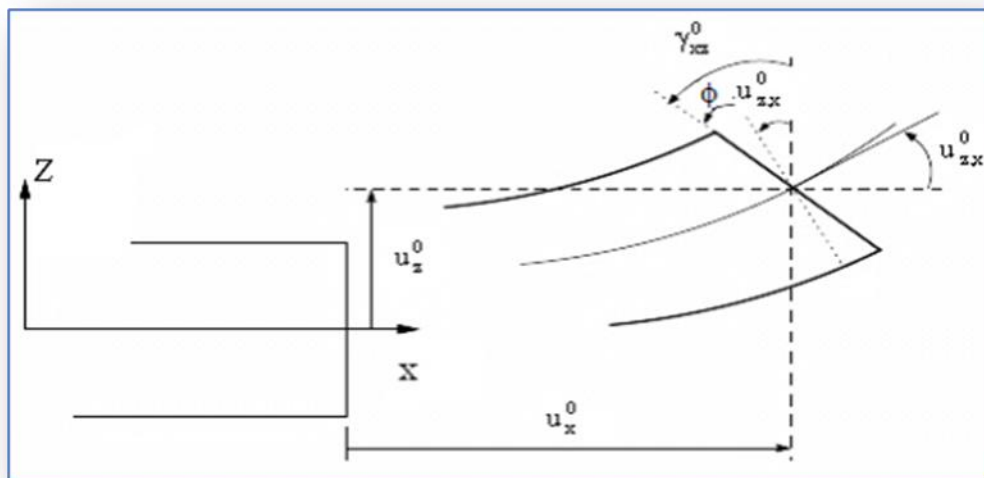


Figure II. 4 : Cinématique de la poutre de Timoshenko

Le champ de déplacement pour un point M (x, z) quelconque s'exprime en fonction de ces inconnues :

$$u(x, z) = u_0(x) + z \phi_x(x) \quad (II.5a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (II.5b)$$

$\phi(x, z)$ C'est la distorsion ou la déformation angulaire mesurée sur la ligne moyenne de la poutre.

Tel que :

$$\phi_x(x) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}(x) \tag{II.6}$$

La TBT est donc une extension de la cinématique de la CBT par une déformation de cisaillement transversale de la poutre dans leur hypothèse cinématique (**Figure II.6**).

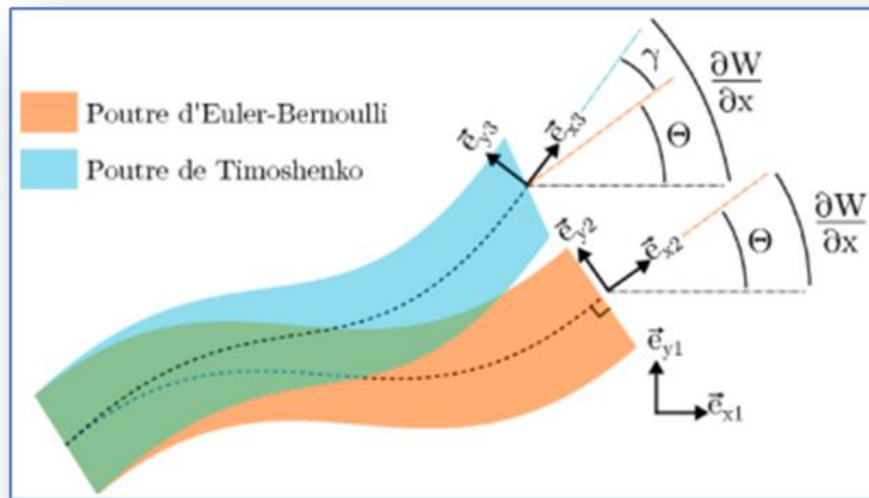


Figure II.5 : Illustration élémentaire d'une poutre en fonction de deux théories des poutres.

c. La théorie de déformation en cisaillement d'Ordre Elevé (HSDT) (High Shear deformation Theory)

La théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs de déplacement selon l'épaisseur de la poutre. Contrairement à la théorie classique CPT et la théorie de Timoshenko FSDT Elle est plus précise, puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de " gauchissement ".

Par définition ; le gauchissement apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité (figure III.7).

La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement. Ces modèles permettent de représenter le gauchissement de la section dans la configuration déformée, plusieurs théories d'ordre élevé ont été proposées [51-57]. Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. [44, 50, 58].

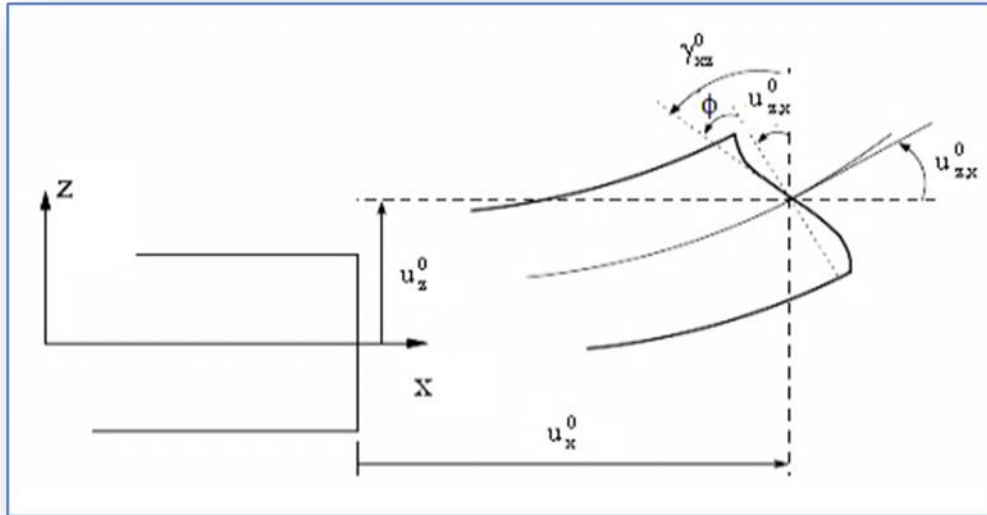


Figure II.6 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé d'une poutre

Dans ce modèle de théorie, le champ de déplacement s'écrit sous la forme suivante :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x) \quad (II.7a)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (II.7b)$$

$$\gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f'(z) \varphi_0(x) + \frac{\partial w_0(x)}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz}(x) = f'(z) \varphi_0(x) \quad (II.8)$$

Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques contributions importantes de développement de modèles d'ordre élevé qui se sont distingués dans la littérature et qui diffèrent par la fonction de formes $f(z)$ Nous citons en particulier :

- L'approche de Ambartsumyan [59] :

$$f(z) = \frac{1}{2}z \left(\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{3}z^2 \right) \quad (II.9)$$

- L'approche de Reissner [60] qui est utilisée par Kaczkowski [61], Panc [62], Voyiadjis et Shi [63], Shi et Voyiadjis [64] :

$$f(z) = \frac{5}{4}z \left(1 - \frac{4}{3} \frac{z^3}{h^2} \right) \quad (II.10)$$

- L'approche de Aydogdu [65] :

$$f(z) = z \alpha^{\frac{2z^2}{h^2 \ln \alpha}} \quad (II.11)$$

- Les approches de Levinson [66], Murthy [67] et Reddy [48] :

$$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (II.12)$$

Dans le modèle de Reddy [48], le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal « w » est constant.

Cette approche se concentre principalement sur les théories de la couche unique équivalente, y compris la théorie classique de la poutre (CBT), la théorie de la déformation de cisaillement de premier ordre (FSDT), les théories d'ordre élevé de la déformation de cisaillement (HSDT), des théories simplifiées et théories mixtes puisqu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des plaques et coques à gradient fonctionnel [44].

Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution élastique tridimensionnelle. La distribution des contraintes de cisaillement transversal est parabolique dans l'épaisseur. Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites [58].

- L'approche de Touratier [68] :

$$f(z) = \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \quad (II.13)$$

Touratier propose le modèle "sinus" qui est différent des autres modèles d'ordre supérieur puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoïdale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

- L'approche de Afaq [69] propose un modèle exponentiel avec une cinématique plus riche.

$$f(z) = z e^{-\frac{2z^2}{h^2}} \quad (II.14)$$

L'approche de Mechab [70], cette approche a été utilisée par Ait Atmane [71] et El Meiche [72]

$$f(z) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} \left[z \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{h}{2} \sinh\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right] \quad (II.15)$$

II. 7. Conclusion

Nous avons présenté Dans cette partie des différents types des théories des poutres telles que la théorie classique (CBT), la théorie de cisaillement de premier ordre (FSDBT) et les théories d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT). On a présenté les différents modèles des poutres avec une approche monocouche. Le modèle monocouche équivalent est mieux adaptée pour les matériaux FGM car il n'y a pas de changement brusque dans les caractéristiques mécaniques contrairement aux composites conventionnels ou le délaminage est un problème à ne pas écarter. En conclusion En raison de vaste champ qui se développe rapidement sur les FGMs.

Les matériaux à gradient de propriétés représentent un domaine en évolution rapide en sciences et en ingénierie avec de nombreuses applications pratiques. Les besoins de recherche dans ce domaine sont particulièrement nombreux et variées, les FGMs promettent des avantages potentiels importants qui justifient la nécessité des efforts importants.

CHAPITRE III

Revue des travaux antérieurs sur la modélisation des FGM

III. 1. Introduction

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) c'est une nouvelle classe de matériaux composites dont la microstructure et la composition varient graduellement et continûment avec la position de manière à optimiser les performances mécaniques et thermiques de la structure qu'ils constituent. Ainsi, les FGMs peuvent être confectionnés pour répondre à des performances matérielles aux différentes parties de la structure. Ils sont considérés comme des matériaux intelligents dont les fonctions désirées sont intégrées, dès la conception, au cœur même de la matière. A chaque interface, le matériau est choisi selon les applications spécifiques et les charges environnementales [42].

Ces matériaux possèdent de multiples avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application. Il peut s'agir de l'amélioration de la rigidité, de la tenue à la fatigue, de la résistance à la corrosion ou de la conductivité thermique en plus d'avoir une gradation des propriétés permettant ainsi d'augmenter ou de moduler des performances telles que la réduction des contraintes locales. Récemment, plusieurs travaux scientifiques s'intéressant au comportement statique et dynamique des matériaux FGM ont vu le jour. L'objet de cette partie bibliographique est de présenter quelques travaux réalisés sur les structures fabriquées en FGM [36].

III. 2. Analyse de la stabilité des poutres en (FGM)

Ke et Wang [73] ont montré à travers des plusieurs études que l'effet de la taille des matériaux sur la stabilité dynamique des micro-poutres en FGM ne peut être pris en compte que lorsque le paramètre d'échelle de longueur a la même valeur que celui de l'épaisseur de la poutre.

Autres chercheurs tel que Piovan et Machado [74] ont suggéré que les zones dynamiquement instables des poutres FGM à parois minces varient inversement à la rigidité élastique. Azizi et *al.*, [75] ont fait une analyse de la stabilité sur des MEMS piézoélectriques FGM (Micro-Electro-Mechanical Systems) et ont déduit que pour que les micro-poutres piézoélectriques FGM soient dans l'état stable, une fréquence d'excitation et une quantité de tension AC appropriées sont nécessaires. Pour l'analyse statique, la stabilité des micro-poutres FGM capacitifs ne change pas lorsque la température de la source change, à condition que la tension appliquée reste constante. D'autre part, dans le cas d'une analyse dynamique, la température affecte la stabilité. Zamanzadeh et son groupe [76] ont suggéré que

pour l'analyse du comportement mécanique, l'échelle de longueur des matériaux doit être prise en considération. Esfahani et ses collègues [77] ont étudié le phénomène du flambement thermique, ils ont constaté que le flambement et le post – flambement des poutres FGM reposant sur une fondation élastique non linéaire dépendent de la température de son constituant. De plus, la température critique de flambement est affectée par les coefficients de fondation élastique, lorsque la charge thermique est soumise à une augmentation de température uniforme ou à une conduction thermique. Komijani et ses collaborateurs [78] ont trouvé que les paramètres linéaires et non linéaires d'une fondation sont responsables de la résistance au flambement des poutres FGM.

Kolakowski [79] a effectué une recherche sur la stabilité dynamique des poutres trapézoïdales en FGM. Il a été trouvé une relation entre les flambements statiques et dynamiques de la structure et les flambements locaux primaires et secondaires. Nguyen et al., [80] ont travaillé sur la stabilité en flexion-torsionnelle des poutres FGM. Il a été observé que la poutre longue n'est pas favorable au mode de flexion, et dans le cas de torsion, la poutre courte n'est pas idéale. Une autre étude a été faite sur la vibration et la stabilité des poutres FGM poreuses reposant sur des fondations élastiques par Fazzolari [81], il a utilisé des différentes théories mathématiques, divers paramètres des matériaux ont été pris en compte pour étudier la fréquence et la charge de flambement des poutres FGM.

III. 3. Etudes de la problématique élasto-statiques des poutres en FGM

Une nouvelle méthode des éléments finis des poutres basée sur la théorie du premier ordre (la théorie de Timoshenko) a été développée pour étudier le comportement élastique des poutres FGM par Chakraborty et al. [82-83] ont employé la fonction de loi de puissance et la fonction exponentielle pour décrire la distribution des propriétés matérielles des structures FGM. Kapuria et al. [84] ont présenté un modèle d'élément fini pour les réponses statiques et de vibration libre d'une poutre FGM, par l'utilisation de la théorie du troisième ordre pour estimer le module d'élasticité effectif, et sa validation expérimentale pour deux systèmes différents d'un FGM sous diverses conditions aux limites. Kadoli et al. [85] ont proposé un modèle précis d'élément fini basé sur une approximation de troisième ordre de déplacement axial et un déplacement transversal constant pour l'analyse statique des poutres FGM en métal-céramique. La fraction volumique des composants était supposée varier selon une fonction de loi de puissance. Une approche de couche discrète a été adoptée pour tenir en compte la gradation du matériau. Autant que des solutions d'élasticité sont concernées.

Shi et al. [86] ont présenté l'élément fini quasi-conforme pour l'analyse de flexion des poutres composites à l'aide des théories d'ordre élevé. Kutis et al. [87] ont présenté une procédure d'éléments finis pour modéliser une poutre FGM avec une variation spatiale des propriétés matérielles. En utilisant la méthode des éléments finis, Pindera et Dunn [88] ont évalué la théorie d'ordre élevé en effectuant une analyse détaillée des éléments finis en FGM.

Ils ont constaté que les résultats (HOTFGM = Higher-Order Theory for Functionally Graded Materials) coïncident bien avec les résultats FEM. Aussi, Reddy [89] a conçu un modèle d'élément fini super convergent pour les problèmes statiques des poutres de Timoshenko.

Chen et ses collaborateurs [90], ont développé une intégration nodale stabilisée pour la méthode de maillage de Galerkin afin d'obtenir une plus grande efficacité avec la précision souhaitée et les propriétés convergentes, une stabilisation de la déformation est introduite pour calculer la déformation nodale par une contrepartie de divergence d'une moyenne spatiale de la déformation.

III. 4. Etudes des phénomènes de flambement thermomécanique thermomécanique

Le flambage des poutres, des plaques et des coques est un problème très important étudié par beaucoup de chercheurs. Ces éléments structuraux sont en général gradés de façon non symétrique par rapport au plan moyen. Il existe alors un couplage flexion-traction. Dû à ce fait, les charges critiques de flambage risquent d'être plus importantes que celles obtenues pour les mêmes membres structuraux en matériau homogène et symétrique. Le flambement des plaques FGM devient très dangereux lorsque celles-ci sont utilisées dans des systèmes de protection thermique.

L'une des recherches cible l'analyse du flambement des micro-poutres en FGM par l'utilisation de la théorie de contrainte doublée modifiée a été réalisée par Nateghi et ses collègues [91], Il a été constaté que la déviation de la charge de flambement peut être obtenue par la théorie de la contrainte doublée modifiée et d'autres théories classiques. En outre, le coefficient de Poisson joue un rôle important dans le flambement des micro-poutres en FGM. Sahmani et Ansari [92], ont effectué une analyse de flambement des micro-poutres en FGM soumises à un effet thermique. Il a été révélé que la charge critique de flambement des micro-poutres FGM en milieu élastique diminue avec l'augmentation de la température à condition que le rapport d'élançement soit élevé. Dans le même sujet, Şimşek et Reddy [93], ont étudié le flambement des micro-poutres FGM à l'aide de la théorie de la contrainte doublée modifiée.

Ils ont montré que la charge critique de flambement peut être augmentée en incluant une constante de milieu élastique.

Une étude sur le flambement des structures FGM a été réalisée par Javaheri et Eslami [94]. Il s'est intéressé au flambement thermique des plaques FGM rectangulaires graduées dans la direction de l'épaisseur suivant une loi de distribution en puissance d'un mélange métal-céramique. Ils se sont basés sur la théorie classique des plaques. Les charges critiques de flambement sont influencées par les changements de température à travers l'épaisseur. Deux observations importantes ressortent de leur étude :

- La variation de la température critique de flambement d'une plaque FGM est inférieure à celle d'une plaque homogène.
- En augmentant l'indice k de la loi de distribution en puissance, la température critique de flambement est réduite.

Na et Kim [95] analysèrent le flambement des plaques FGM sous des charges thermiques et mécaniques combinées en utilisant la méthode des éléments finis. Le flambement thermique sous des changements de températures uniformes et non uniformes à travers l'épaisseur a été traité. Il ressort de cette étude que les caractéristiques du flambement thermique des plaques FGM sont très influencées par le champ de température, la distribution de la fraction volumique et les paramètres géométriques du système structural. En 2004, Wu [96] a analysé le flambement thermique d'une plaque FGM d'épaisseur moyenne avec des bords en appuis simples. Il appliqua la théorie de déformation du premier ordre. Les équations d'équilibre et de flambement ont été résolues analytiquement.

L'analyse du post-flambement des plaques avec des propriétés dépendant de la température a été abordée par Shen [97]. Les équations sont basées sur une théorie des plaques d'ordre supérieur incluant les effets thermiques. Les imperfections géométriques initiales sont prises en considération. Les résultats publiés concernent le post-flambage thermique du plan moyen des plaques FGM symétriques. Bodaghi et Saidi [98] ont analysé le flambement d'une plaque FGM rectangulaire épaisse en se servant de la théorie d'ordre supérieur de Reddy et d'une méthode analytique. Les auteurs ont développé une procédure pour découpler les cinq équations différentielles et obtenir deux équations à résoudre. Pour les conditions imposées, deux côtés de la plaque sont en appuis simples et la plaque est soumise à différents types de chargements en plan. D'autres études intensives sur le flambement des plaques FGM ont été entreprises par Javaheri et Eslami [99-100], Shariat, Javaheri et al, [101]. Récemment, Khalfi et al. [102] ont utilisé une théorie de déformation en cisaillement

simple et raffinée pour le flambement thermique des plaques fonctionnellement graduées reposant sur une fondation élastique. Zidi et *al.* [103] ont étudié le comportement hygrothermomécanique des plaques FG supportées par des fondations élastiques en proposant une théorie des plaques simple et raffinée à quatre variables.

Ait Amar Meziane et *al.* [104] ont développé une théorie de déformation en cisaillement raffinée simple et efficace pour l'analyse de flambement et de la vibration des plaques EGM sandwiches sur fondations élastiques en considérant divers types de conditions aux limites. Lanc et *al.* [105] ont fait une analyse du flambement des poutres FGM Sandwich en considérant différentes conditions aux limites. Il a été déduit que la diminution du flambement critique dans toutes les conditions aux limites a une relation directe avec le rapport d'épaisseur peau-cœur-peau de la poutre en caisson. De plus, la répartition des matériaux sur un volume de poutre en caisson joue un rôle important dans la charge de flambement critique. Nguyen et *al.* [106] ont introduit une nouvelle théorie de déformation par cisaillement qui répartit la contrainte de cisaillement transversale dans les poutres FGM Sandwich de manière hyperbolique. Les résultats obtenus à travers cette nouvelle théorie tiennent compte de la charge de flambement critique en considérant des paramètres tels que l'indice de loi de puissance, le rapport longueur/profondeur et l'épaisseur de la peau à l'âme et correspondent à d'autres théories existantes. Huang et ses collaborateurs [107] ont examiné le flambement des poutres FGM axiales en utilisant la théorie de Timoshenko. Il a été conclu que le gradient et le paramètre géométrique jouent un rôle significatif dans la détermination de la charge critique de flambement.

Nguyen et *al.* [108] ont utilisé la théorie de la déformation quasi-cisaillement pour analyser le flambement des poutres FGM Sandwich. Divers paramètres tels que l'indice de loi de puissance, le rapport entre l'épaisseur de la couche de peau et l'épaisseur de la couche du noyau et le rapport entre la portée et la profondeur ont été étudiés pour la charge critique de flambement. Les résultats obtenus coïncident avec les résultats précédents rapportés dans la littérature Heydari et *al.* [110] a examiné les influences de la gradation du matériau, de la déformation en cisaillement et des différentes conditions aux limites sur le comportement au flambement des poutres (2DFGM). Il a constaté que l'indice de gradient, le flambement des poutres FGM Timoshenko bidimensionnelles peut être contrôlé [111] et [112] à travers des plusieurs recherches, ils ont constaté que l'effet de l'indice de puissance de la poutre poreuse FGM est plus important s'il varie dans la direction de l'axe par opposition à la direction de l'épaisseur. En outre, la charge de flambement non dimensionnelle diminue lorsque la fraction

volumique augmente. Nguyen et *al.* [113] a étudié le flambement des poutres à gradation fonctionnelle axiale basée sur la théorie du gradient de déformation non local. Les résultats obtenus montrent que la charge de flambement critique a une relation directe avec le paramètre d'échelle de longueur et une relation inverse avec le paramètre non local. En outre, sur la base du paramètre dépendant de la taille, un effet d'assouplissement et de durcissement de la rigidité peut être produit par les poutres FGM axiales sur la charge de flambement critique. Nguyen et autres [114] ont analysé le flambement latéral des poutres FGM en sections ouvertes. Les résultats révèlent que les paramètres de flambement dépendent de la variation de l'indice de fraction volumique. De plus, il a été expliqué que le rapport du moment final et le noyau céramique ont un effet considérable sur la capacité de flambement.

III. 5. Etudes des problèmes de vibration des poutres FGM

Il existe relativement peu de travaux consacrés au comportement dynamique de la poutre FGM Rahmani et autres [115] ont étudié la vibration libre d'une structure en sandwich ayant un noyau syntaxique FGM à l'aide de la théorie des panneaux sandwich d'ordre supérieur. Les résultats obtenus révèlent que l'inhomogénéité du matériau joue un rôle important dans les modes propres de la poutre. De plus, les fréquences propres ont une relation inverse avec le rapport entre la portée et l'épaisseur

En 2003, Chakraborty et *al.* [116] présentèrent un nouvel élément poutre pour étudier le comportement thermoélastique des poutres en matériau à gradient fonctionnel. L'étude est basée sur une théorie de déformation du premier ordre. Les propriétés thermomécaniques sont considérées varier dans la direction de l'épaisseur de la poutre.

Aussi par l'utilisation de la méthode des éléments finis, Alshorbagy et *al.* [117] ont étudié les caractéristiques des poutres Euler-Bernoulli pour la vibration libre des poutres FGM à la fois axialement et transversalement à travers l'épaisseur de la poutre. En adoptant la méthode de Ritz, Aminbaghai et *al.* [118] ont étudié la vibration libre des poutres FGM avec une variation polynomiale spatiale continue de propriétés matérielles par une quatrième équation différentielle de la théorie du deuxième ordre, Oz [119] a calculé les fréquences naturelles d'une poutre Euler-Bernoulli avec une masse concentrée en utilisant la méthode des éléments finis avec différentes conditions aux limites. Aydogdu et Taskin [120] ont par la suite analysé les vibrations libres d'une poutre FGM en appuis simples. Différentes théories de déformation ont été utilisées (théorie classique, du premier ordre et d'ordre supérieur). Le module de Young est considéré varier suivant des lois de distribution en puissance et exponentielle. Les fréquences naturelles ont été obtenues en utilisant des

solutions de type Navier. Aucune prise en compte de la température n'a été faite dans cette étude. Ying et al. [121] ont obtenu des solutions exactes pour la flexion et la vibration libre d'une poutre FGM sur un support élastique Winkler-Pasternak, en utilisant une théorie bidimensionnelle de l'élasticité. Ils ont considéré la poutre orthotrope et les propriétés mécaniques sont supposées varier exponentiellement dans la direction de l'épaisseur. Le problème a été résolu en utilisant la SSP (State Space Procedure). Simsek et Kocatürk [122] ont étudié la vibration libre des poutres FGM soumises à une charge harmonique mobile concentrée.

Il a été conclu que l'exposant de la loi de puissance joue un rôle important dans l'analyse de la vibration libre en tenant compte de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Sina et al. [123] ont appliqué une nouvelle théorie des poutres pour étudier la vibration libre des poutres FGM. Une analyse complète a été présentée concernant les formes de mode des poutres FGM en utilisant la théorie des poutres à déformation par cisaillement du premier ordre (FSDBT1 et FSDBT2) et la théorie classique des poutres. Il a été démontré que l'exposant de la loi de puissance, la distribution de la loi de puissance, le mode de vibration, la géométrie de la structure et l'épaisseur affectent grandement la vibration libre des poutres FGM. Huang et Li [124] ont proposé une nouvelle méthode basée sur les équations intégrales de Fredholm et ont évalué la fréquence propre des poutres FGM ayant une section transversale non uniforme en tenant compte de la rigidité à la flexion, de la densité de masse et du paramètre de gradient axial. Les résultats ont été jugés utiles pour la conception de structures de poutres non homogènes. Alshorbagy et ses collaborateurs [125] ont utilisé la méthode des éléments finis pour élaborer la vibration libre des poutres en FGM. Il a été montré que le présent modèle est efficace pour comparer la poutre conique de largeur ou profondeur linéairement variable et les poutres graduées de non-homogénéité polynomiale spéciale. De plus, il a été suggéré d'utiliser les théories de Timoshenko ou de Reddy pour étudier l'effet du rapport d'élancement. Sur la base de la théorie de la poutre de Timoshenko, les micro-poutres de FGM ont été analysées par Ansari et al. [126]. La fréquence propre sans dimension a été examinée par rapport à divers paramètres tels que l'indice de gradient, le rapport d'élancement, le mode de la poutre et l'épaisseur de la poutre en utilisant la théorie classique, la théorie de la contrainte doublée modifiée (MCST) et la théorie du gradient de déformation (SGT). Il a été conclu que les micropoutres de FGM ont une valeur de fréquence propre sans dimension plus élevée que les autres micro-poutres et moins que les micro-poutres de carbure de silicium (SiC). De plus, les micropoutres de FGM ont des fréquences

intermédiaires dans les micro-poutres métalliques et céramiques. Hein et Feklistova [127] ont utilisé l'approche par ondelettes de Haar pour trouver les fréquences des poutres en FGM en utilisant différentes géométries, densités de masse et coefficients aux limites. Les résultats montrent que l'approche par ondelettes de Haar est capable de calculer des fréquences pour les poutres avec différentes formes, rigidité, densité de masse, petits ou grands coefficients aux limites de translation et de rotation. L'avantage de la nouvelle approche c'est sa simplicité. Mohanty et *al.* [128] ont étudié l'instabilité dynamique des poutres ordinaire à gradient fonctionnel (FGO = Functionally Graded Ordinary) et la poutre sandwich FGM (FGSW = Functionally Graded Sandwich Beam) repose sur une fondation de type Winkler en utilisant la méthode des éléments finis.

Shahba et *al.* [129] ont étudié la vibration libre et l'analyse de stabilité des poutres coniques FGM de Timochenko selon des conditions aux limites classiques et non classiques et à travers une approche d'élément fini.

Les premières publications réalisées sur l'analyse des vibrations par élément fini des poutres ont été présenté par Mei [130-132]. Venkateswara et *al.* [133] ont formulé les grandes amplitudes des vibrations libres des poutres et des plaques par la linéarisation des termes quadratiques dans les relations contraintes-déplacements. Cependant, ils ont ignoré l'effet du déplacement axial. Après, des efforts énormes ont été fait sur la recherche des solutions d'élément fini pour ce problème. Gupta et *al.* [134] ont présenté une formulation élément fini relativement simple donnant les fréquences naturelles non linéaires des poutres d'Euler-Bernoulli avec des supports d'extrémité de tout type. Leur formulation commence avec une hypothèse de la (SHM = Simple Harmonic Motion) et par conséquent corrigée par l'application de la méthode du bilan harmonique (HBM = Harmonic Balance Method). Ensuite, ils ont continué leur travail et ont étudié le même problème basé sur la théorie de Timoshenko [135].

Les caractéristiques dynamiques d'une poutre FGM dans laquelle les propriétés des matériaux changent soit dans une direction axiale ou le long de l'épaisseur suivant une loi de puissance sont étudiées par Sudhanwa et *al.* [136]. Le système résultant des équations différentielles ordinaires d'analyse de vibration libre sont résolus en utilisant une méthode analytique. La méthode des éléments finis est utilisée pour discrétiser le modèle et obtenir une approximation numérique d'équation de mouvement. Le modèle a été vérifié avec les articles déjà publiés et ils ont trouvé une bonne conformité avec eux. Mohammad Azadi [137] a étudié une méthode d'élément fini (FEM) pour la vibration latérale libre et forcée des poutres

en matériau à gradation fonctionnel avec différentes conditions aux limites et les fréquences naturelles ont été obtenues. Ses résultats ont été comparés avec la solution analytique et les résultats des logiciels ANSYS et NASTRAN. Les résultats numériques ont été obtenus pour montrer l'influence et la dépendance de la température des propriétés matérielles, la distribution de la fraction de volume, les paramètres géométriques et les conditions aux limites. En 2008, Xiang et Yang [138] étudièrent les vibrations libres et forcées d'une poutre FGM multicouche d'épaisseur variable, sous des contraintes thermiques initiales. La poutre de Timoshenko étudiée a été prise sous les conditions aux limites : encasturé-libre, encasturé-encasturé et sur appuis simples. Les inerties axiales et de rotation ont été prises en considération. M. Hemmatnezhad et *al.* [139] ont étudié l'analyse de vibration libre à grande amplitude des poutres à gradient fonctionnel à l'aide d'une formulation par éléments finis. Les relations de type non linéaires de déformation - déplacement de Von-Karman sont employées lorsque les extrémités de la poutre sont contraintes de se déplacer axialement. Les effets de cisaillement transverse et de l'inertie de rotation sont inclus sur la base de la théorie des poutres de Timoshenko. Les propriétés du matériau sont supposées être variées dans le sens de l'épaisseur selon une distribution de loi de puissance.

Une théorie des poutres de déformation en cisaillement efficace basée sur la position de la surface neutre a été proposée par Ould Larbi et *al.* [140] pour la flexion et la réponse des poutres FG en vibration libre. Draiche et *al.* [141] ont examiné la vibration libre des plaques composites rectangulaires avec une masse de pièce en utilisant un modèle de plaque à quatre variables trigonométriques Saidi et *al.* [142] ont utilisé la nouvelle théorie de déformation en cisaillement hyperbolique dans laquelle l'effet d'étirement (stretching) est inclus pour étudier la réponse en flexion thermomécanique des plaques FGM. Shahba et ses collaborateurs [143] ont analysé la vibration libre des poutres coniques de Timoshenko en FGM. Les résultats montrent que la fréquence propre diminue avec le rapport de conicité. Yousefi et Rastgoo [144] ont utilisé la méthode de Ritz pour analyser la vibration libre des poutres courbes spatial en FGM qui se présentent sous la forme d'un ressort hélicoïdal cylindrique. Il a été rapporté qu'en augmentant le nombre de tours et l'angle de pas d'hélice, le paramètre de fréquence augmente. Shahba et Rajasekaran [145] ont utilisé la méthode des éléments de transformation différentielle (DTEM) et la méthode des éléments de quadrature différentielle (DQEM) d'ordre inférieur pour déterminer les fréquences transversales et longitudinales des poutres en FGM d'Euler-Bernoulli. Les résultats montrent que la DTEM est rapide par rapport à la DTM (la méthode de transformation différentielle), et que les résultats

obtenus sont plus précis. Thai et Vo [146] ont développé des théories de fortes similitudes avec la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli dans certains aspects, pour l'analyse de flexion et la vibration libre de poutres FGM. Les théories développées tiennent compte de la variation d'ordre supérieur de la déformation de cisaillement transverse à travers la profondeur de la poutre, et satisfont les conditions aux limites. Il a été conclu que les effets de déformation par cisaillement réduisent les fréquences propres des poutres de FGM. Wattanasakulpong et ses collaborateurs [147] ont utilisé une théorie améliorée de la déformation par cisaillement du troisième ordre pour formuler une équation déterminante pour prédire la vibration libre de poutres en couches de FGM, il a été conclu que la position de la masse ajoutée à la poutre a un effet substantiel sur les fréquences. Wei et al. [148] ont utilisé la méthode de la matrice de transformation pour étudier l'effet du nombre et de l'emplacement des fissures, de l'inertie rotative et de la déformation par cisaillement sur les fréquences des poutres d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko. Les résultats montrent que l'existence de fissures dans les poutres de FGM diminue les fréquences et modifie le mode de vibration. De plus, l'inertie en rotation a un effet négligeable, et la déformation en cisaillement a un effet significatif sur la vibration libre des poutres en FGM. Aydin [149] a étudié la vibration libre des poutres FGM contenant un nombre arbitraire de fissures à bord ouvert. L'étude est basée sur une poutre Euler-Bernoulli et des ressorts de rotation sans masse reliant deux segments intacts de la poutre. Une étude paramétrique détaillée a été effectuée pour examiner les influences de la profondeur des fissures, de l'emplacement des fissures, du nombre total de fissures, de la distribution des propriétés des matériaux et des conditions aux limites sur les fréquences propres des poutres FGM endommagées par un déterminant du troisième ordre. Les résultats montrent que la fréquence diminue lorsque les fissures se développent à un point où le moment de flexion est concentré. En plus, par rapport aux études précédentes, cette diminution de l'ordre des déterminants peut conduire à des avantages significatifs dans le temps de calcul. Huang et autres [150] ont présenté une nouvelle approche pour étudier les comportements de vibration des poutres de Timoshenko à gradation fonctionnelle axiale avec une section transversale non uniforme pour obtenir des fréquences propres d'ordre supérieur et inférieur de manière efficace. Une autre analyse de la vibration libre des poutres rectangulaires en FGM chargées axialement a été réalisée par Nguyen et ses collaborateurs [151]. Il a été conclu qu'en changeant le mode de force axiale de la tension à la compression, les fréquences propres disparaissent. De plus, la fréquence propre augmente

sous l'effet du coefficient de Poisson. Paradhan et Chakraverty [152] ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour examiner la vibration libre des poutres d'Euler et Timoshenko en FGM.

L'objectif de ce travail est d'étudier les effets des fractions volumiques constituantes, des rapports d'élanement et des théories des poutres sur les fréquences propres. Akgöz et Civalek [153] ont étudié la réponse aux vibrations libres d'une micro-poutre FGM en porte-à-faux conique en conjonction avec la poutre d'Euler Bernoulli et la théorie des contraintes doublées modifiées. Il a été conclu que les fréquences sans dimension augmentent en augmentant le rapport du module de Young des surfaces supérieure et inférieure de la poutre jusqu'à ce que la valeur de l'indice de loi de puissance soit faible. Ziane et ses collaborateurs [154] ont utilisé la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre (FSDT) pour calculer les fréquences propres des poutres en caisson FGM à parois épaisses et minces. Il a été conclu que les fréquences propres de torsion sont directement proportionnelles au rapport entre l'épaisseur et le côté. Hadji et ses collaborateurs [155] ont développé une théorie des poutres de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse des vibrations statiques et libres de poutres FGM. La théorie tient compte de la variation d'ordre supérieur de la déformation de cisaillement transversale sur la profondeur de la poutre. La précision des solutions a été vérifiée par comparaison des résultats obtenus avec les solutions existantes. Aghazadeh et *al.* [156] ont utilisé trois théories de poutre, à savoir la théorie d'Euler-Bernoulli, la théorie de la poutre de Timoshenko et la théorie des poutres à déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT) pour étudier la vibration libre des poutres FGM ayant un paramètre d'échelle de longueur variable. Les résultats montrent qu'en augmentant le paramètre d'échelle de longueur, la fréquence du mode de déformation transversale augmente. Il a également été déclaré que la méthode présentée peut être utile pour analyser et concevoir des poutres FGM à petite échelle. Li et ses collègues [157] ont étudié des poutres FGM à moyeu rotatif en utilisant la théorie de la dynamique couplée rigide-flexible.

Le modèle dynamique développé ici peut être utilisé dans la conception de matériaux gradués des poutres FGM pour obtenir des caractéristiques dynamiques spécifiées. Liu et Shu [158] ont développé une solution analytique pour étudier l'impact du délaminage sur les fréquences des poutres FGM de manière exponentielle en utilisant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli, les hypothèses de "mode libre" et de "mode contraint". Il a été conclu que les fréquences en mode contraint et en mode libre augmentent en augmentant le rapport du module de Young jusqu'à une unité, à condition que l'effet de délaminage n'existe pas. Au

même titre Liu et al. [159] ont conclu que le délaminage entraîne une augmentation des fréquences propres de la poutre FGM et cet effet devient plus important en augmentant le rapport du module de Young et en diminuant les propriétés des matériaux. Mashat et ses collaborateurs [160] ont utilisé la formulation unifiée de Carrera (CUF) et d'autres théories pour analyser la vibration libre des poutres FGM. Il est conclu que pour déterminer avec précision les fréquences de flexion et de torsion des poutres à parois épaisses et minces en FGM, il faut utiliser des théories d'ordre supérieur. En outre, le (CUF) est utile pour obtenir divers modèles unidimensionnels. Yang et autres [161] ont présenté une méthode d'équation intégrale de domaine limite sans maillage pour analyser les comportements de vibration libre des structures de FGM. Sur la base de la théorie de l'élasticité bidimensionnelle, cette méthode conserve l'avantage de réduction de dimensionnalité de la méthode des éléments aux limites (BEM) classique et utilise des solutions fondamentales élastostatiques simples. Enfin ils ont démontré efficacité et sa précision élevées de la présente méthode par des exemples numériques. Hadji et autres [162] ont utilisé une théorie raffinée de la déformation par cisaillement exponentielle pour l'analyse des vibrations libres d'une poutre FGM en tenant compte des porosités qui peuvent éventuellement se produire à l'intérieur des FGM pendant leur fabrication. Des exemples illustratifs sont également donnés pour montrer les effets de gradients variables, de fraction volumique de porosité, de rapports d'aspect et de rapports épaisseur/longueur sur la vibration libre des poutres FGM. Jin et Wang [163] ont évalué les fréquences des poutres de FGM en utilisant la méthode des éléments en quadrature de forme faible. Les résultats se sont avérés être en bon accord avec ceux de la littérature existante.

Şimşek [164] a étudié la vibration libre de la poutre de Timoshenko bidirectionnel (BD) de FGM en utilisant la théorie de la poutre de Timoshenko. Il a été signalé que pour répondre aux exigences de conception du (BD) FGM, il faut tenir compte de l'indice de gradient de matériau et des propriétés. Calim [165] a examiné les vibrations libres et forcées des poutres FGM Timoshenko sur des fondations élastiques/viscoélastiques. Il a été avéré que le gradient de matériau est un paramètre important qui joue un rôle vital dans les fréquences propres et fondamentales de la structure FGM et ajouté que la variation de l'indice de gradient de matière affecte la période de vibration et le déplacement de la poutre de Timoshenko en FGM. Chen et ses collaborateurs [166] ont étudié les caractéristiques de vibration libre et forcée des poutres poreuses en FGM avec une distribution de porosité non uniforme dont les modules d'élasticité et la densité de masse sont échelonnés de manière non linéaire le long de la direction de l'épaisseur. Il a été rapporté que l'augmentation de la porosité des poutres FGM

entraîne une augmentation de la fréquence fondamentale des poutres ayant 10 couches de porosité mais diminue pour les poutres ayant 20 couches de porosité. Jing et ses collaborateurs [167] ont utilisé la théorie des poutres de Timoshenko et la méthode des éléments finis pour étudier les vibrations statiques et libres des poutres FGM. Il a été rapporté que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de l'exposant de la fraction volumique et augmentent avec l'augmentation du rapport entre la portée et la profondeur. Li et al. [168] ont présenté un modèle de poutre de Timoshenko dépendant de la taille, qui tient compte de la variation de la loi de puissance sur l'épaisseur d'un matériau à gradient fonctionnel (FGM) à deux constituants. Il a été conclu que les fréquences propres des poutres FGM peuvent être contrôlées en classant le matériau selon l'épaisseur et l'indice de loi de puissance. La déformation par cisaillement a un impact plus considérable sur les fréquences d'ordre supérieur que sur les fréquences d'ordre inférieur.

En outre, les poutres de FGM peuvent exercer un impact de durcissement et de ramollissement de la rigidité en fonction de la valeur comparative du paramètre des caractéristiques du matériau et du paramètre non local. Rezaiee Pajand et Hozhabrossadati [169] ont présenté une analyse des vibrations libre de deux systèmes à double poutre pour étudier l'effet de la rigidité du ressort, de la masse suspendue et du paramètre de gradient sur des poutres FGM à double axe. Il a été conclu que la fréquence des poutres FGM est directement proportionnelle au facteur de constante du ressort et inversement proportionnelle à l'épaisseur de la poutre. Tossapanon et Wattanasakulpong [170] ont étudié la vibration des poutres sandwich FGM reposant sur une fondation élastique à deux paramètres comprenant des ressorts à couche Winkler et de cisaillement. Il est révélé que les constantes de ressort des fondations élastiques ont un impact significatif sur les résultats de vibration des poutres. Zhao et autres [171] ont présenté une nouvelle approche basée sur la théorie des polynômes de Chebyshev pour analyser les vibrations libres de poutres Euler-Bernoulli et Timoshenko à gradation fonctionnelle axiale avec des sections transversales non uniformes. La méthode adoptée s'est avérée pratique, et les résultats obtenus sont comparés à ceux d'autres méthodes. Lee et son collègue [172] ont développé une méthode de matrice de transfert exacte pour analyser les caractéristiques de vibration libre d'une poutre FGM, La matrice de transfert pour la poutre FGM est déduite de la relation des déplacements et des forces aux deux extrémités de la poutre. Ils ont démontré l'exactitude de la méthode proposée par comparaison des fréquences propres calculées à celles discutées dans les articles précédents. Hadji et autres [173] ont développé diverses théories des poutres de déformation par cisaillement d'ordre

supérieur pour la propagation des ondes dans des poutres FGM. Il a été discuté en détail sur l'effet des distributions de fractions volumiques sur la propagation des ondes d'une poutre FGM. Il a été conclu que les résultats obtenus peuvent être utilisés dans les techniques d'inspection par ultrasons et la surveillance de l'état de la structure.

D'après les recherches de Fang et ses collègues [174], il a été conclu que le paramètre d'échelle de longueur et la variation du gradient de matériau jouent un rôle essentiel dans la déformation des micro-poutres FGM en rotation en fonction de leur taille.

CHAPITRE IV

***Effets du chargement hygro-thermo-mécanique
non linéaire sur le comportement en flexion des
poutres FG***

Chapitre IV Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

IV.1 Introduction

Les poutres fonctionnellement graduées (FGM) sont des éléments structuraux constitués de deux matériaux différents. En raison de leur faible poids et de leur grande rigidité, ces éléments sont couramment utilisés dans plusieurs industries telles que la construction, l'aérospatiale, les transports, l'aéronautique et la marine. Par conséquent, connaître leur caractéristique statique est essentiel pour les scientifiques et les ingénieurs.

Les deux matériaux constitutifs des poutres composites classiques sont solidaires, ce qui augmente le risque de délaminage. Notamment, l'évolution continue des caractéristiques mécaniques de la surface inférieure vers la surface supérieure élimine l'interface entre les couches, zone d'accumulation et de concentration de contraintes. De plus, les structures FG ont deux propriétés essentielles : la résistance au chargement mécanique à travers la face métallique et le chargement thermique le long du côté céramique. Par conséquent, ces caractéristiques attirent de nombreux chercheurs pour étudier et analyser la réponse mécanique de ces structures matérielles sous différentes sollicitations.

Les poutres FG sont souvent soumises à des chargements couplés (mécaniques, thermiques et d'humidité) dans plusieurs domaines d'ingénierie. Ainsi, il est crucial d'étudier la flexion statique des poutres FG dans ces conditions de chargement. Cependant, les théories CBT et FSDBT sont imprécises pour prédire les différents comportements des poutres épaisses en raison de la négligence de l'effet de déformation normale transversale. Par conséquent, de nombreux modèles de calcul raffinés sont proposés par de nombreux chercheurs pour prédire avec précision la réponse statique des poutres FG avec précision [175-190].

De plus, la flexion thermomécanique des poutres FG est également un sujet intéressant et attire toujours les chercheurs du monde entier. Sankar et Tzeng [191] ont développé une théorie de poutre simple de type Euler-Bernoulli pour piloter la distribution des contraintes axiales. Les paramètres thermoélastiques de la température ont été considérés comme variant exponentiellement à travers l'épaisseur. De plus, des solutions sous forme fermée des équations d'équilibre ont été extraites. Nirmala et al. [192] ont dérivés des expressions analytiques à partir de l'étude de la répartition des contraintes thermiques dans des poutres sandwich à trois couches avec un noyau FG comme couche intermédiaire. Ma et Lee [193] ont étudié le comportement statique et dynamique de ces éléments sous des charge thermique dans le plan en utilisant le modèle physique de surface neutre. Encore une fois, Ma et Lee

Chapitre IV Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

[194], sur la base des travaux précédents et en réduisant les équations gouvernantes à une seule équation différentielle non linéaire du quatrième ordre, les réponses post-flambement et de flexion des poutres fonctionnellement graduées sous charge thermique sont discutées.

Zamanzadeh al.[195], ont analysé la stabilité statique et dynamique de cinq micro-faisceaux FG différents soumis à une pression électrostatique non linéaire et à des changements thermiques à l'aide d'une théorie modifiée des contraintes de couple. Megharbel [196] a utilisé une analyse théorique pour examiner l'influence du chargement thermique et des paramètres mécaniques sur la contrainte axiale résultante dans les poutres FG. Les caractéristiques matérielles des poutres FG sont considérées comme changeant en fonction de la fonction de puissance le long de la direction de la profondeur.

Toudehdeghan et al.[197] ont examiné le comportement statique de poutres à revêtement mince serrées-serrées soumises à des chargements thermomécaniques. Les équations aux dérivées partielles gouvernantes ont été dérivées sur la base de la théorie d'Euler-Bernoulli. L'analyse thermique de la poutre 2D FGM a été réalisée à l'aide du code d'éléments finis COMSOL et d'une méthode des moindres carrés pondérés sans maillage (MWLS), Zhou et al. [198] Les résultats obtenus sont validés avec la littérature existante, et un excellent accord est observé entre les approches analytiques et numériques.

Plus important encore, des recherches considérables ont été menées pour analyser la réponse statique et dynamique des plaques FG sous chargement hygro-thermo-mécanique tel que [199-207]. Cependant, pour les poutres FG soumises à des charges hygro-thermo-mécaniques non linéaires, la littérature relative à ce sujet est très limitée. Récemment, Bouazza et Zenkour [208] ont utilisé une approche analytique fondée sur une théorie raffinée de la déformation par cisaillement pour analyser le comportement en flambement des poutres mixtes sous chargement hygro-thermo-mécanique. Ghumare et Sayyad [209] ont étudié le comportement en flexion des poutres FG soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique sur la base d'une nouvelle théorie du cinquième ordre.

IV.2 Propriétés matérielles de la poutre

La poutre simplement appuyée considérée de longueur (a), largeur (b) et épaisseur (h) est constituée d'un matériau composite à gradient fonctionnel et soumise à des charges hygro-thermo-mécaniques non linéaires, voir Fig.IV.1 Les caractéristiques mécaniques sont progressivement et variant en continu à travers l'épaisseur de la surface inférieure en métal à la surface supérieure en matériau céramique.

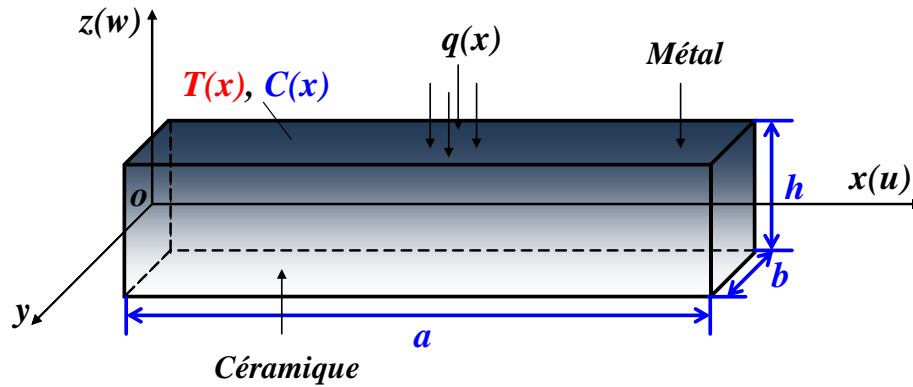


Figure. IV.1: Géométrie et système de coordonnées d'une poutre FG.

Il est important de noter que les propriétés du matériau de la poutre $P(z)$ telles que le module de Young, la dilatation thermique et les coefficients de concentration d'humidité sont exprimées sous la forme :

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m) V_c \quad (IV.1)$$

Où : P_c et P_m désignent respectivement les propriétés de la céramique et du métal.

Le V_c désigne la fraction volumique du constituant de la surface supérieure et est donné selon la loi de puissance suivante :

$$V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (IV.2)$$

Où : k est l'exposant de la fraction volumique.

IV.3 Formulation théorique d'une poutre FG

La présente étude est étendue pour étudier le comportement en flexion de poutres FG simplement appuyées soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement affinée quasi-3D.

Chapitre IV Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

IV.3.1 Champ de déplacement et les déformations et les contraintes

En considérant les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est considéré comme suit :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (IV.3a)$$

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) + g(z)\phi(x) \quad (IV.3b)$$

Où u_0 est le déplacement axial d'un point sur le plan médian de la poutre le long de l'axe x . w_b et w_s sont les composantes de flexion et de cisaillement du déplacement transversal, respectivement, ϕ est l'effet de l'étirement en épaisseur.

Dans la présente théorie raffinée à quatre variables, les nouvelles fonctions de forme $f(z)$ et $g(z)$ sont proposées comme suit :

$$f(z) = z - z \left(\frac{5\pi h}{4\pi + 53.25} - \frac{z^2}{\pi} \right) \quad (IV.4a)$$

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (IV.4b)$$

De plus, sur la base de la théorie de l'élasticité, les composantes de déformations linéaires non nulles sont obtenues à partir des équations (3a) et (3b) comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \quad (IV.5a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = g'(z)\phi(x) \quad (IV.5b)$$

$$\gamma_{xz} = g(z) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial x} \right) \quad (IV.5c)$$

Où ε_x et ε_z sont les déformations normales et transversales, γ_{xz} est la déformation de cisaillement transverse.

Chapitre IV Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

IV.3.2 Équations constitutives

En supposant que le matériau de la poutre FG suit la loi de Hook, les équations constitutives élastiques linéaires en un point sont énoncées comme suit :

$$\sigma_x = Q_{11}(z) [\varepsilon_x - \alpha(z)T(x, z) - \beta(z)C(x, z)] + Q_{13}(z) [\varepsilon_z - \alpha(z)T(x, z) - \beta(z)C(x, z)] \quad (IV.6a)$$

$$\sigma_z = Q_{13}(z) [\varepsilon_x - \alpha(z)T(x, z) - \beta(z)C(x, z)] + Q_{33}(z) [\varepsilon_z - \alpha(z)T(x, z) - \beta(z)C(x, z)] \quad (IV.6b)$$

$$\tau_{xz} = Q_{55}(z) \gamma_{xz} \quad (IV.6c)$$

Où :

$$Q_{11}(z) = Q_{33}(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{13}(z) = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}, \quad Q_{55}(z) = \frac{E(z)}{2(1-\nu)}$$

E , α et β Sont respectivement le module de Young, la dilatation thermique et les coefficients de concentration d'humidité.

La poutre est soumise à une charge mécanique sinusoïdale $q(x, z)$ combinée à un champ thermique externe $T(x, z)$ et à une concentration en humidité $C(x, z)$. La répartition de l'humidité et le champ de température sont supposés comme suit [27] :

$$T(x, z) = T_1(x) + \bar{z}T_2(x) + \bar{\psi}(z)T_3(x) \quad (IV.7a)$$

$$C(x, z) = C_1(x) + \bar{z}C_2(x) + \bar{\psi}(z)C_3(x) \quad (IV.7b)$$

Où :

$$\bar{z} = \frac{z}{h} \quad \text{et} \quad \bar{\psi}(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (IV.8)$$

Avec T_1 représente une température constante, T_2 correspond à une température linéaire et T_3 représente une température non linéaire. La même signification peut être supposée pour les termes d'humidité C_1 , C_2 et C_3 , comme le montre la Figure. IV. 2.

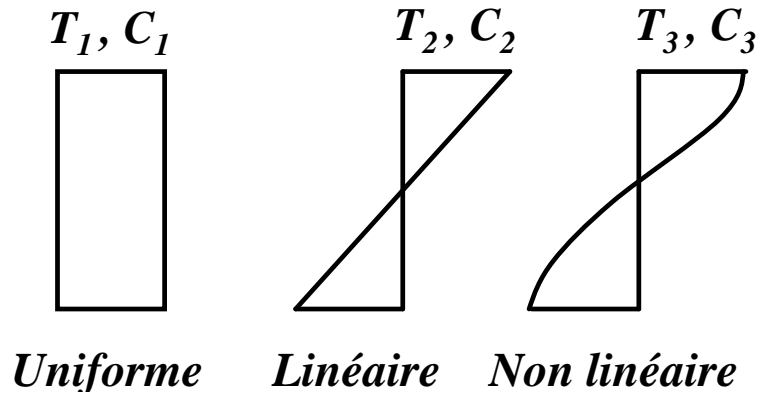


Figure. IV.2: Variation de température et de l'humidité.

IV.3.3 Équations d'équilibre

En utilisant le principe du déplacement virtuel, les quatre équations d'équilibre gouvernantes cohérentes variation elles sont développées comme suit :

$$\int_0^a \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dx dz = \int_0^a [q(x) \delta (w_b + w_s)] dx \quad (IV.9)$$

$$\int_0^a \left[N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + N_z \delta \phi - M_b \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial^2 x} - M_s \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial^2 x} + Q \left(\frac{\partial \delta \phi}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} \right) \right] dx = \int_0^a [q(x) \delta (w_b + w_s)] dx \quad (IV.10)$$

Où N_x, M_b, M_s, N_z et Q sont les résultantes de contrainte, exprimées comme :

$$[N_x, M_b, M_s] = \int_{-h/2}^{h/2} [1, z, f(z)] \sigma_x dz \quad (IV.11a)$$

$$N_z = \int_{-h/2}^{h/2} g'(z) \sigma_z dz \quad (IV.11b)$$

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} g(z) \tau_{xz} dz \quad (IV.11c)$$

Les équations différentielles déterminantes (IV.12a) – (IV.12d) sont obtenues en intégrant l'équation (IV.10) par parties et en mettant $\delta u_0, \delta w_b, \delta w_s, \delta \phi$ égal à zéro :

Chapitre IV Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} = 0 \quad (IV.12a)$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} = -q \quad (IV.12b)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -q \quad (IV.12c)$$

$$\delta \phi : \frac{\partial Q}{\partial x} - N_z = 0 \quad (IV.12d)$$

Les équations différentielles déterminantes (IV.13a) – (IV.13d) en termes de variables de déplacement inconnues sont obtenues en remplaçant les équations (IV.11a) – (IV.11c) dans les équations (IV.12a) – (IV.12d) comme suit :

$$\begin{aligned} \delta u_0 : & A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} - B_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} + L_{13} \frac{\partial \phi}{\partial x} - (A_{11}^T + A_{13}^T) \frac{\partial T_1}{\partial x} - (aB_{11}^T + aB_{13}^T) \frac{\partial T_2}{\partial x} - (aB_{s11}^T + aB_{s13}^T) \frac{\partial T_3}{\partial x} \\ & - (A_{11}^C + A_{13}^C) \frac{\partial C_1}{\partial x} - (aB_{11}^C + aB_{13}^C) \frac{\partial C_2}{\partial x} - (aB_{s11}^C + aB_{s13}^C) \frac{\partial C_3}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (IV.13a)$$

$$\begin{aligned} \delta w_b : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - D_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + L_{13} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - (bB_{11}^T + bB_{13}^T) \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - (D_{11}^T + D_{13}^T) \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - (bD_{s11}^T + bD_{s13}^T) \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \\ & - (bB_{11}^C + bB_{13}^C) \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - (D_{11}^C + D_{13}^C) \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} - (bD_{s11}^C + bD_{s13}^C) \frac{\partial^2 C_3}{\partial x^2} = -q \end{aligned} \quad (IV.13b)$$

$$\begin{aligned} \delta w_s : & B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - D_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} - H_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} + A_{55}^a \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + (R_{13} + A_{55}^s) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - (cB_{11}^T + cB_{13}^T) \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - (cD_{11}^T + cD_{13}^T) \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - (H_{s11}^T + H_{s13}^T) \frac{\partial^2 T_3}{\partial x^2} \\ & - (cB_{11}^C + cB_{13}^C) \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - (cD_{11}^C + cD_{13}^C) \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} - (H_{s11}^C + H_{s13}^C) \frac{\partial^2 C_3}{\partial x^2} = -q \end{aligned} \quad (IV.13c)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi : & L_{13} \frac{\partial u_0}{\partial x} - L_{13}^a \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + (R_{13} + A_{55}^s) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - A_{55}^a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + R_{33}^a \phi + (L_{13}^T + L_{33}^T) T_1 + (L_{a13}^T + L_{a33}^T) T_2 + (R_{13}^T + R_{33}^T) T_3 \\ & + (L_{13}^C + L_{33}^C) C_1 + (L_{a13}^C + L_{a33}^C) C_2 + (R_{13}^C + R_{33}^C) C_3 = 0 \end{aligned} \quad (IV.13d)$$

Les constantes mécaniques, thermiques et de l'humidité mentionnées dans les équations (IV.13a) – (IV.13d) sont exprimées comme suit :

- Constantes mécaniques

$$[A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) [1, z, z^2] dz \quad (IV.14a)$$

$$[B_{sij}, D_{sij}, H_{sij}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) [f(z), zf(z), f(z)^2] dz \quad (IV.14b)$$

$$[L_{ij}, L_{ij}^a, R_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) g'(z) [1, z, f(z)] dz \quad (IV.14c)$$

$$[R_{ij}^a] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) [g'(z)^2] dz \quad (IV.14d)$$

$$[A_{55}^s] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) [g(z)^2] dz \quad (IV.14e)$$

Chapitre IV Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

- Constantes thermiques

$$\left[A_{ij}^T, {}^a B_{ij}^T, {}^b B_{ij}^T, D_{ij}^T \right] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) \alpha(z) [1, \bar{z}, z, z\bar{z}] dz \quad (IV.15a)$$

$$\left[{}^a B_{sij}^T, {}^b B_{sij}^T, {}^c D_{sij}^T, {}^d D_{sij}^T, H_{sij}^T \right] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) \alpha(z) [\bar{\psi}(z), f(z), z\bar{\psi}(z), f(z)\bar{z}, f(z)\bar{\psi}(z)] dz \quad (IV.15b)$$

$$\left[L_{ij}^T, L_{sij}^T, R_{ij}^T \right] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) \alpha(z) g'(z) [1, \bar{z}, \bar{\psi}(z)] dz \quad (IV.15c)$$

- Constantes de l'humidité

$$\left[A_{ij}^C, {}^a B_{ij}^C, {}^b B_{ij}^C, D_{ij}^C \right] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) \beta(z) [1, \bar{z}, z, z\bar{z}] dz \quad (IV.16a)$$

$$\left[{}^a B_{sij}^C, {}^b B_{sij}^C, {}^c D_{sij}^C, {}^d D_{sij}^C, H_{sij}^C \right] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) \beta(z) [\bar{\psi}(z), f(z), z\bar{\psi}(z), f(z)\bar{z}, f(z)\bar{\psi}(z)] dz \quad (IV.16b)$$

$$\left[L_{ij}^C, L_{sij}^C, R_{ij}^C \right] = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(z) \beta(z) g'(z) [1, \bar{z}, \bar{\psi}(z)] dz \quad (IV.16c)$$

Pour une poutre FG simplement appuyée à $x = 0$ et $x = a$, les conditions aux limites sont exprimées comme suit :

$$\text{Soit } N_x = 0 \quad \text{ou } u_0 = 0 \quad \text{est prescrit} \quad (IV.17a)$$

$$\text{Soit } M_b = 0 \quad \text{ou } \frac{\partial w_b}{\partial x} = 0 \quad \text{est prescrit} \quad (IV.17b)$$

$$\text{Soit } M_s = 0 \quad \text{ou } \frac{\partial w_s}{\partial x} = 0 \quad \text{est prescrit} \quad (IV.17c)$$

$$\text{Soit } Q = 0 \quad \text{ou } \phi = 0 \quad \text{est prescrit} \quad (IV.17d)$$

$$\text{Soit } Q = 0 \quad \text{ou } w_s = 0 \quad \text{est prescrit} \quad (IV.17e)$$

IV.3.4 Solutions analytiques de Navier pour poutre FG

Nous nous intéressons ici à trouver des solutions exactes pour l'analyse en flexion d'une poutre FG simplement appuyée. En utilisant la technique de solution de Navier, les charges q , T et C sont exprimées en une seule série trigonométrique comme :

$$\begin{Bmatrix} T \\ C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_i \\ C_i \end{Bmatrix} \sin(\lambda x) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (IV.18)$$

$$\text{Où : } \lambda = \frac{\pi}{a}$$

Chapitre IV Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

T_i, C_i Sont respectivement les charges thermiques et d'humidité. T, C sont donnés dans les équations (8a-b).

La charge transversale q est exprimée par :

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \sin \lambda x \quad (IV.19)$$

Où Q_n est l'amplitude de charge déterminée comme suit :

$$Q_n = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \lambda x dx \quad (IV.20)$$

Les coefficients Q_n sont donnés comme suit :

- Pour charge sinusoïdale q_0 :

$$Q_n = q_0 (n=1) \quad (IV.21)$$

- Pour une charge uniforme q_0 :

$$Q_n = \frac{4q_0}{n\pi} (n=1,3,5) \quad (IV.22)$$

Suivant la technique de résolution de Navier, les variables de déplacement sont exprimées dans la série trigonométrique unique comme suit :

$$\begin{cases} u_0 \\ w_b \\ w_s \\ \phi \end{cases} = \begin{cases} U_0 = \cos(\pi\lambda) \\ W_b = \sin(\pi\lambda) \\ W_s = \sin(\pi\lambda) \\ \phi_a = \sin(\pi\lambda) \end{cases} \quad (IV.23)$$

U_0, W_b, W_s , et ϕ Sont les coefficients inconnus.

En substituant la forme trigonométrique q, T, C, u_0, w_b, w_s , et ϕ des équations (IV.18, 19, 21 et 23) aux équations différentielles gouvernantes (IV.13a) – (IV.13d), l'équation d'opérateur résultante se trouve sous la forme :

$$[K] \{\Delta\} = \{P\} \quad (IV.24)$$

Où $[K]$ représente la matrice de rigidité, $\{\Delta\}$ représente le vecteur des coefficients inconnus et $\{P\}$ représente le vecteur de charge généralisée. Les éléments de $[K]$, $\{\Delta\}$ et $\{P\}$ sont exprimés comme suit :

Chapitre IV Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

$$[K] = \begin{bmatrix} -A_{11}\lambda^2 & B_{11}\lambda^3 & B_{11}^s\lambda^3 & L_{13}\lambda \\ B_{11}\lambda^3 & -D_{11}\lambda^4 & -D_{11}^s\lambda^4 & -L_{13}^a\lambda^2 \\ B_{11}^s\lambda^3 & -D_{11}^s\lambda^4 & -(H_{11}^s\lambda^4 + A_{55}^s\lambda^2) & -\lambda^2(R_{13} + A_{55}^{ss}) \\ L_{13}\lambda & -L_{13}^a\lambda^2 & -\lambda^2(R_{13} + A_{55}^{ss}) & -(R_{33}^s + A_{55}^s\lambda^2) \end{bmatrix} \quad (IV.25)$$

$$\{\Delta\} = \{U_0, W_b, W_s, \phi_a\}^T \quad (IV.26)$$

$$\{P\} = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}^T \quad (IV.27)$$

Les composantes du vecteur de charge généralisé $\{P\}$ sont données par :

$$P_1 = \lambda \left[\begin{aligned} & (A_{11}^T + A_{13}^T)T_1 + (aB_{11}^T + {}^aB_{13}^T)T_2 + (aB_{s11}^T + {}^aB_{s13}^T)T_3 + (A_{11}^C + A_{13}^C)C_1 + \\ & (aB_{11}^C + {}^aB_{13}^C)C_2 + (aB_{s11}^C + {}^aB_{s13}^C)C_3 \end{aligned} \right] \quad (IV.28a)$$

$$P_2 = -q - \lambda^2 \left[\begin{aligned} & (bB_{11}^T + {}^bB_{13}^T)T_1 + (D_{11}^T + D_{13}^T)T_2 + (bD_{s11}^T + {}^bD_{s13}^T)T_3 + (bB_{11}^C + {}^bB_{13}^C)C_1 + \\ & (D_{11}^C + D_{13}^C)C_2 + (bD_{s11}^C + {}^bD_{s13}^C)C_3 \end{aligned} \right] \quad (IV.28b)$$

$$P_3 = -q - \lambda^2 \left[\begin{aligned} & (cB_{s11}^T + {}^aB_{s13}^T)T_1 + (cD_{s11}^T + {}^aD_{s13}^T)T_2 + (H_{s11}^T + H_{s13}^T)T_3 + (cB_{s11}^C + {}^aB_{s13}^C)C_1 + \\ & (cD_{s11}^C + {}^aD_{s13}^C)C_2 + (H_{s11}^C + H_{s13}^C)C_3 \end{aligned} \right] \quad (IV.28c)$$

$$P_4 = -(L_{13}^T + L_{33}^T)T_1 - (L_{a13}^T + L_{a33}^T)T_2 - (R_{13}^T + R_{33}^T)T_3 - (L_{13}^C + L_{33}^C)C_1 - (L_{a13}^C + L_{a33}^C)C_2 - (R_{13}^C + R_{33}^C)C_3 \quad (IV.28d)$$

CHAPITRE V

Résultats numériques et discussions

V.1. Introduction

Ce travail vise à développer une théorie originale de déformation par cisaillement quasi-3D raffinée pour étudier le comportement en flexion d'une poutre FG simplement appuyée sous chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire en prenant en compte l'influence de l'étirement. Les équations d'équilibre sont déterminées en utilisant le principe du travail virtuel et résolues en utilisant la technique de Navier. L'efficacité et la précision de la théorie actuelle sont confirmées en comparant les résultats calculés avec ceux obtenus par d'autres théories. Enfin, de nombreuses études paramétriques sont fournies et discutées.

La présente théorie est vérifiée à travers différents exemples tridimensionnels de flexion de poutre FG sous des charges hygro-thermo-mécaniques combinées. Des comparaisons sont faites avec différentes théories de poutres bidimensionnelles disponibles dans la littérature. De plus, les caractéristiques d'une poutre FG sont données comme :

- Céramique : $E_c = 380GPa, \nu = 0.3, \alpha_c = 7 \times 10^{-6}/^{\circ}C$ et $\beta_c = 0.001$.
- Métal : $E_m = 70GPa, \nu = 0.3, \alpha_m = 23 \times 10^{-6}/^{\circ}C$ et $\beta_m = 0.44$.

V.2. Résultats et discussion

Les résultats numériques du déplacement axial, de la flèche et des contraintes sont présentés dans des formules non dimensionnelles comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{u}\left(0, -\frac{h}{2}\right) &= \frac{100 E_m h^3 u}{q_0 a^4}, & \bar{w}\left(\frac{a}{2}, 0\right) &= \frac{100 E_m h^3 w}{q_0 a^4} \\ \bar{\sigma}_x\left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right) &= \frac{h \sigma_x}{q_0 a}, & \bar{\sigma}_z\left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right) &= \frac{h \sigma_z}{q_0 a}, & \bar{\tau}_{xy}(0, 0) &= \frac{h \tau_{xy}}{q_0 a} \end{aligned} \quad (29)$$

Le Tableau V.1 présente les résultats des déformations et des contraintes adimensionnelles sous une charge uniformément répartie obtenus par la théorie actuelle comparés à ceux obtenus par Thai et al. [211] et Vo et al. [210]. On note qu'il y a une bonne corrélation entre les résultats obtenus et ceux de la littérature. Ceci démontre que le modèle proposé peut prédire avec précision le comportement hydro thermomécanique de la poutre FG.

Dans le tableau V.2, sont présentées les valeurs des flèches non dimensionnelles \bar{w} utilisant des chargements thermomécaniques linéaires et non linéaires pour $a/h=10$ obtenues par le modèle proposé et celles obtenues par Ghumarea et Sayyada [209]. L'effet d'étirement de

l'épaisseur sur le comportement en flexion de la poutre FG est mis en évidence par les écarts entre les valeurs obtenues en 2D et 3D.

Le matériau utilisé dans cette étude est : Riche en céramique (alumine, Al_2O_3) : $E_c = 380 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\alpha_c = 7.11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ et $\beta_c = 0$, ou riches en métaux (aluminium, Al) $E_m = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\alpha_m = 10.33 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ et $\beta_m = 0.33$.

Le Tableau V.3 présente l'évolution du déplacement axial adimensionnel maximal \bar{u} , de la flèche transversale \bar{w} , de la contrainte de flexion $\bar{\sigma}_x$ et de la contrainte de cisaillement transversale $\bar{\tau}_{xz}$ des poutres FG sous chargement thermomécanique linéaire pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k . On note que lorsque l'indice de loi de puissance augmente, la rigidité des poutres FG diminue et par conséquent une augmentation de la flèche et du déplacement axial. Les contraintes sont également sensibles à la variation de l'indice de loi de puissance k .

Le tableau V.4 montre les valeurs du déplacement axial adimensionnel maximal v , de la flèche \bar{w} , de la contrainte de flexion $\bar{\sigma}_x$ et de la contrainte de cisaillement transverse $\bar{\tau}_{xz}$ pour différentes valeurs de l'indice de loi de puissance k en utilisant une théorie de déformation de cisaillement affinée quasi-2D ou 3D. Les observations sont les mêmes pour le chargement thermomécanique. Cependant, une augmentation importante des valeurs des paramètres non dimensionnels est obtenue en raison du chargement thermique non linéaire.

Le tableau V.5 présente une comparaison des différents paramètres adimensionnels maximaux des poutres FG sous chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire pour différentes valeurs d'indice de loi de puissance k . Dans ce cas, les remarques sont identiques aux précédentes. Néanmoins, la présence de la charge d'humidité augmente à nouveau les valeurs des paramètres non dimensionnels. Par conséquent, la charge d'humidité ne peut être négligée pour examiner correctement le comportement des poutres FG.

Tableau V.1 : Comparaisons des déformations et des contraintes adimensionnelles sous une charge uniformément répartie.

a/h	Paramètres non-dimensionnels	Théories	k					
			0	1	2	5	10	
5	\bar{w}	Présent (2D)	3.1654	6.2594	8.0677	9.8281	10.9382	
		Thai et al. (2D) [210]	3.1654	6.2594	8.0677	9.8281	10.9381	
		Présent (3D)	3.1397	6.1338	7.8606	9.6038	10.7578	
		Vo et al. (3D) [211]	3.1397	6.1338	7.8606	9.6037	10.7578	
	\bar{u}	Présent (2D)	0.9398	2.3038	3.1130	3.7100	3.8864	
		Thai et al. (2D) [210]	0.9398	2.3038	3.1130	3.7100	3.8864	
		Présent (3D)	0.9264	2.2167	2.9729	3.5490	3.7467	
		Vo et al. (3D) [211]	-	-	-	-	-	
	$\bar{\sigma}_x$	Présent (2D)	3.8020	5.8837	6.8827	8.1107	9.7124	
		Thai et al. (2D) [210]	3.8020	5.8836	6.8826	8.1106	9.7122	
		Présent (3D)	3.8006	5.8813	6.8819	8.1141	9.7165	
		Vo et al. (3D) [211]	3.8005	5.8812	6.8818	8.1140	9.7164	
	$\bar{\tau}_{xy}$	Présent (2D)	0.7333	0.7333	0.6707	0.5906	0.6468	
		Thai et al. (2D) [210]	0.7332	0.7332	0.6706	0.5905	0.6467	
		Présent (3D)	0.7233	0.7233	0.6623	0.5840	0.6397	
		Vo et al. (3D) [211]	0.7233	0.7233	0.6622	0.5840	0.6396	
	$\bar{\sigma}_z$	Présent (3D)	0.1352	0.0670	0.0930	0.0180	-0.0182	
		Vo et al. (3D) [211]	0.1352	0.0670	0.0925	0.0180	-0.0181	
	20	\bar{w}	Présent (2D)	2.8962	5.8049	7.4421	8.8182	9.6905
			Thai et al. (2D) [210]	2.8962	5.8049	7.4421	8.8182	9.6905
Présent (3D)			2.8947	5.7201	7.2805	8.6479	9.5749	
Vo et al. (3D) [211]			2.8947	5.7201	7.2805	8.6479	9.5749	
\bar{u}		Présent (2D)	0.2306	0.5686	0.7691	0.9134	0.9536	
		Thai et al. (2D) [210]	0.2306	0.5686	0.7691	0.9134	0.9536	
		Présent (3D)	0.2303	0.5520	0.7401	0.8804	0.9275	
		Vo et al. (3D) [211]	-	-	-	-	-	
$\bar{\sigma}_x$		Présent (2D)	15.0130	23.2054	27.0992	31.8131	38.1387	
		Thai et al. (2D) [210]	15.0129	23.2053	27.0991	31.8130	38.1385	
		Présent (3D)	15.0126	23.2048	27.0991	31.8140	38.1398	
		Vo et al. (3D) [211]	15.0125	23.2046	27.0988	31.8137	38.1395	
$\bar{\tau}_{xy}$		Présent (2D)	0.7457	0.7457	0.6830	0.6027	0.6601	
		Thai et al. (2D) [210]	0.7451	0.7451	0.6824	0.6023	0.6596	
		Présent (3D)	0.7434	0.7434	0.6801	0.6012	0.6585	
		Vo et al. (3D) [211]	0.7432	0.7432	0.6809	0.6010	0.6583	
$\bar{\sigma}_z$		Présent (3D)	0.0335	-0.5870	-0.6280	-1.1680	-1.5555	
		Vo et al. (3D) [211]	0.0337	-0.5880	-0.6269	-1.1698	-1.5572	

Tableau V.2 : Comparaison des flèches adimensionnelles sous chargement thermomécanique linéaire et non linéaire ($a/h=10$).

Type de chargement	Théorie	k					
		0	1	2	5	10	∞
$q_0=100$ $T_2=10$ $T_3=0$	Présent-2D	2.8318	5.2446	6.5819	7.7558	8.5024	13.3678
	Présent-3D	2.8255	5.1765	6.4538	7.6177	8.4032	13.3384
	Ghumarea et Sayyada-2D [209]	2.8186	5.2001	6.4961	7.7387	8.4827	13.3451
	Ghumarea et Sayyada-3D [209]	2.8214	5.5257	6.5080	7.7374	8.4799	13.3446
$q_0=100$ $T_2=0$ $T_3=10$	Présent-2D	3.2220	5.7062	7.0510	8.2387	8.9924	13.9348
	Présent-3D	3.2147	5.6421	6.9274	8.1041	8.9084	13.9039
	Ghumarea et Sayyada-2D [209]	3.2314	5.7324	7.0821	8.3387	9.0378	13.9289
	Ghumarea et Sayyada-3D [209]	3.2265	5.6475	6.9469	8.1126	8.8763	13.9323

Tableau V.3 : Les paramètres adimensionnels utilisant un chargement thermomécanique linéaire ($a/h=10, q_0=100, T_2=10, T_3=0, C_2=C_3=0$).

k	Théorie	ε_z	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Présent-2D	=0	0.4360	2.8240	7.4354	0.47730
	Présent-3D	$\neq 0$	0.4350	2.8177	8.0071	0.47730
1	Présent-2D	=0	1.0549	5.5909	11.5275	0.47596
	Présent-3D	$\neq 0$	1.0408	5.5486	12.4251	0.47531
2	Présent-2D	=0	1.3814	7.0014	13.3423	0.43547
	Présent-3D	$\neq 0$	1.3493	6.9047	14.3377	0.43459
5	Présent-2D	=0	1.6240	8.2782	15.6581	0.38434
	Présent-3D	$\neq 0$	1.5837	8.1641	16.8204	0.38354
10	Présent-2D	=0	1.6987	9.1042	18.5667	0.42124
	Présent-3D	$\neq 0$	1.6654	9.0195	19.8736	0.42048
∞	Présent-2D	=0	2.1997	14.267	6.9104	0.47730
	Présent-3D	$\neq 0$	2.1934	14.234	7.2561	0.47735

Tableau V.4 : Les paramètres adimensionnels utilisant un chargement thermomécanique non linéaire ($a/h=10, q_0=100, T_2= T_3=10, C_2= C_3=0$).

k	Théorie	ε_z	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Présent-2D	=0	0.4963	3.2082	8.4649	0.47630
	Présent-3D	≠0	0.4953	3.2009	9.4795	0.47582
1	Présent-2D	=0	1.1909	6.3295	13.1668	0.47380
	Présent-3D	≠0	1.1871	6.3117	14.7702	0.47224
2	Présent-2D	=0	1.5275	7.8036	15.1514	0.43303
	Présent-3D	≠0	1.5064	7.7352	16.9253	0.43114
5	Présent-2D	=0	1.7823	9.1700	17.7409	0.38222
	Présent-3D	≠0	1.7513	9.0777	19.7990	0.38051
10	Présent-2D	=0	1.8658	10.0663	20.8773	0.41921
	Présent-3D	≠0	1.8402	9.9952	23.1779	0.41756
∞	Présent-2D	=0	2.3979	15.5287	7.5335	0.47670
	Présent-3D	≠0	2.3920	15.4938	8.1473	0.47644

Tableau V.5 : Les paramètres adimensionnels utilisant un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire ($q_0=100, T_2= T_3=10, C_2= C_3=100$).

k	Théorie	ε_z	\bar{u}	\bar{w}	$\bar{\sigma}_x$	$\bar{\tau}_{xz}$
0	Présent-2D	=0	0.49830	3.2207	8.4984	0.47630
	Présent-3D	≠0	0.49731	3.2134	9.5277	0.47580
1	Présent-2D	=0	1.2387	6.5565	13.5681	0.47302
	Présent-3D	≠0	1.2412	6.5542	15.3443	15.3443
2	Présent-2D	=0	1.5826	8.0738	15.6621	0.43201
	Présent-3D	≠0	1.5683	8.0240	17.6558	0.42965
5	Présent-2D	=0	1.8456	9.5003	18.4333	0.38121
	Présent-3D	≠0	1.8205	9.4222	20.7891	0.37910
10	Présent-2D	=0	1.9346	10.4427	21.7248	0.41827
	Présent-3D	≠0	1.9134	10.3802	24.3900	0.41624
∞	Présent-2D	=0	2.4849	16.0822	7.80655	0.47660
	Présent-3D	≠0	2.4791	16.0460	8.53809	0.47619

Le tableau V.6 présente les valeurs des flèches non dimensionnelles pour différentes du rapport portée/profondeur. On remarque lorsque le rapport portée/profondeur augmente, les valeurs des flèches non dimensionnelles diminuent. L'introduction des termes non linéaires présentent les valeurs les plus élevées de la flèche pour $a/h = 5$. Cependant, l'effet de la charge hygrothermique non linéaire devient moins critique à mesure que le rapport portée / profondeur augmente.

L'ensemble des résultats obtenus montrent que les déplacements transversaux adimensionnels de la théorie affinée quasi-3D sont légèrement inférieurs à ceux obtenus par les théories 2D. Cette légère différence est due au non prise en compte de l'effet d'étirement de l'épaisseur.

Tableau V.6 : Flèches adimensionnelles sous chargement hygro-thermo-mécanique linéaire et hygro-thermo-mécanique non linéaire ($k=10$).

a/h	$q_0=100, T_2=10, T_3=0$ et $C_2=100, C_3=0$		$q_0=100, T_2=T_3=10$ et $C_2=C_3=100$	
	Présent-2D	Présent-3D	Présent-2D	Présent-3D
5	14.5221	14.4134	19.0098	18.9275
10	9.31602	9.23643	10.4427	10.3802
20	8.01025	7.92525	8.29219	8.21212
40	7.76822	7.68169	7.75402	7.66816
60	7.62298	7.53542	7.65436	7.56735
80	7.60181	7.51411	7.61946	7.50295
100	7.59199	7.50421	7.60333	7.51569

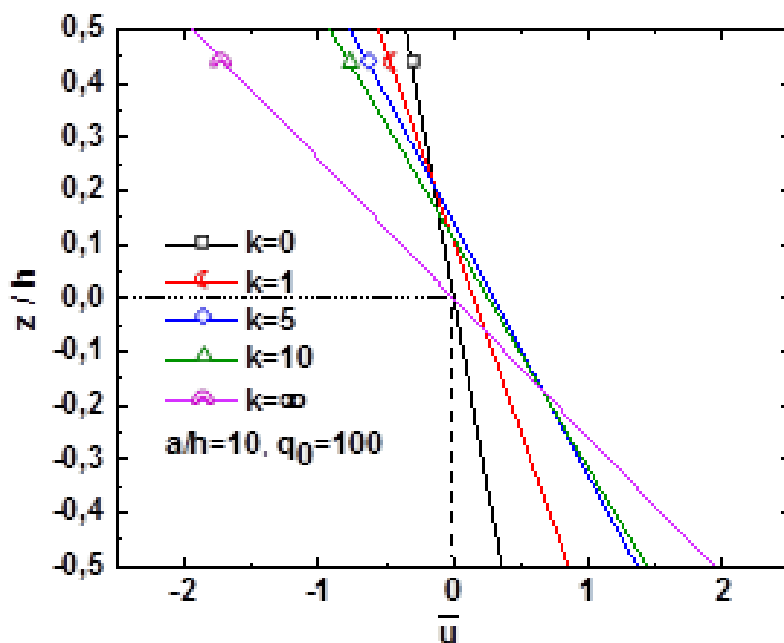
Le Tableau V.7 présente les valeurs de la flèche non dimensionnelle 3D sous des chargements mécaniques, thermomécaniques linéaires, thermomécaniques non linéaires et hygro-thermo-mécaniques non linéaires pour différentes valeurs du rapport portée/profondeur a/h et d'indice de loi de puissance k . On note que les valeurs de la flèche adimensionnelle décroissent lorsque le rapport portée/profondeur augmente pour une valeur de l'indice de la loi de puissance donné d'une part, d'autre part, lorsque l'indice de loi de puissance augmente, la flèche augmente en raison de la diminution de la rigidité des poutres FG. Les valeurs les plus élevées des flèches sont obtenues dans le cas du chargement Non Linéaire Hygro-Thermo-Mécanique (NHTM) comparés aux autres types de chargement (chargement M, LTM et NTM).

De plus, la différence est plus importante pour les poutres épaisses ($a = 5h$) et les poutres moyennement épaisses ($10 \leq a \leq 20h$) en métal plein ($k = \infty$).

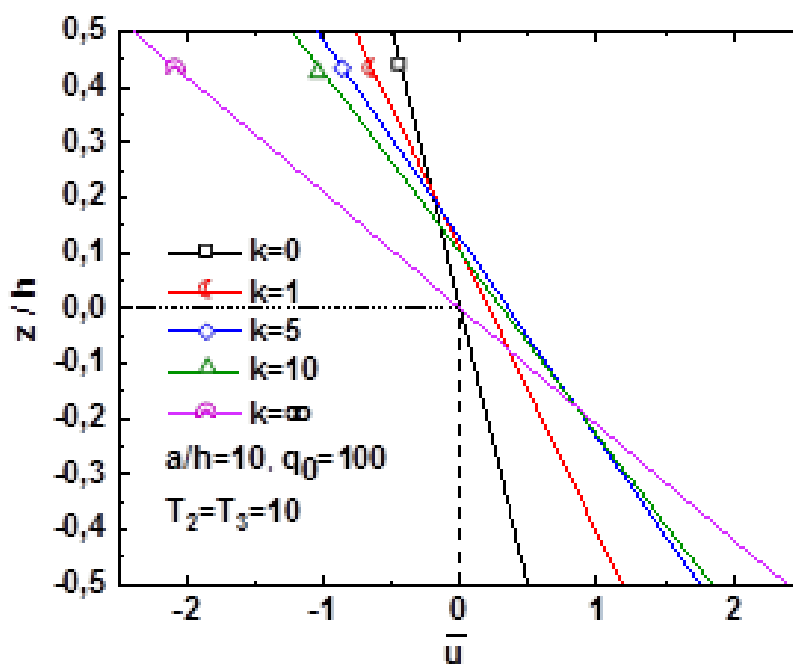
Tableau V.7 : Flèches 3D non dimensionnelles sous chargement mécanique, thermomécanique linéaire, thermomécanique non linéaire et hygro-thermomécanique non linéaire.

Type de chargement	k	Rapport d'épaisseur (a/h)					
		5	10	20	40	60	80
Mécanique : (M) q ₀ =100 T ₂ =T ₃ =0 C ₂ =C ₃ =0	0	2.48098	2.32245	2.28262	2.27265	2.27079	2.27016
	1	4.84547	4.57775	4.51045	4.49363	4.49052	4.48943
	2	6.21075	5.83531	5.74101	5.71742	5.71299	5.71152
	5	7.59378	6.97504	6.81969	6.78082	6.77358	6.77109
	10	8.50882	7.74312	7.55081	7.50273	7.49383	7.49070
	∞	13.4681	12.6076	12.3914	12.3372	12.3272	12.3237
Thermo-Mécanique Linéaire : (LTM) q ₀ =100 T ₂ =10 T ₃ =C ₂ =C ₃ =0	0	4.44717	2.81770	2.40666	2.30367	2.28458	2.27792
	1	8.69987	5.54860	4.75366	4.55445	4.51755	4.50464
	2	10.4508	6.90468	6.00893	5.78445	5.74281	5.72827
	5	12.3007	8.16459	7.11788	6.85539	6.80674	6.78975
	10	13.5565	9.01943	7.87081	7.58281	7.52938	7.51072
	∞	19.9285	14.2348	12.7989	12.4392	12.3725	12.3492
Thermo-Mécanique Non Linéaire : (NTM) q ₀ =100 T ₂ =T ₃ =10 C ₂ =C ₃ =0	0	5.96648	3.20087	2.50266	2.32769	2.29526	2.28392
	1	11.7262	6.31170	4.94480	4.60227	4.53881	4.51660
	2	13.7392	7.73521	6.21709	5.83648	5.76598	5.74128
	5	15.9070	9.07767	7.34688	6.91273	6.83224	6.80405
	10	17.4083	9.99516	8.11556	7.64402	7.55660	7.52603
	∞	24.9205	15.4938	13.1143	12.5181	12.4076	12.3689
Hygro-Thermo- Mécanique Non Linéaire : (NHTM) q ₀ =100 T ₂ =T ₃ =10 C ₂ =C ₃ =100	0	6.01626	3.21342	2.50580	2.32847	2.29562	2.28413
	1	12.6884	6.55418	5.00557	4.61746	4.54556	4.52041
	2	14.8830	8.02403	6.28944	5.85461	5.77403	5.74580
	5	17.2672	9.42221	7.43325	6.93434	6.84185	6.80947
	10	18.9275	10.3802	8.21212	7.66816	7.56735	7.53208
	∞	27.1114	16.0460	13.2527	12.5527	12.4229	12.3776

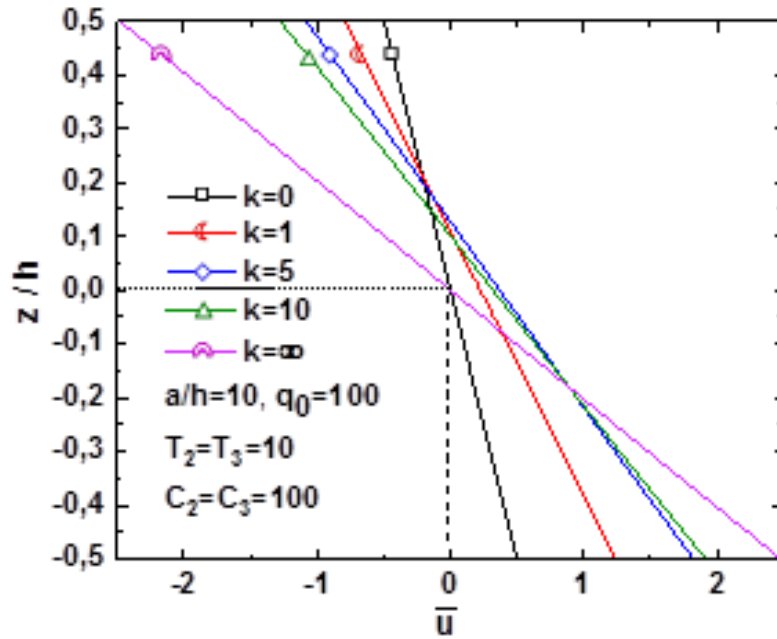
Les Figures V.1a-c montrent l'évolution du déplacement axial non dimensionnel à travers l'épaisseur de la poutre FG soumise à un chargement mécanique, un chargement thermomécanique non linéaire et un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire, respectivement. Dans le cas du chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire, les déplacements axiaux sont légèrement plus importants.



(a)



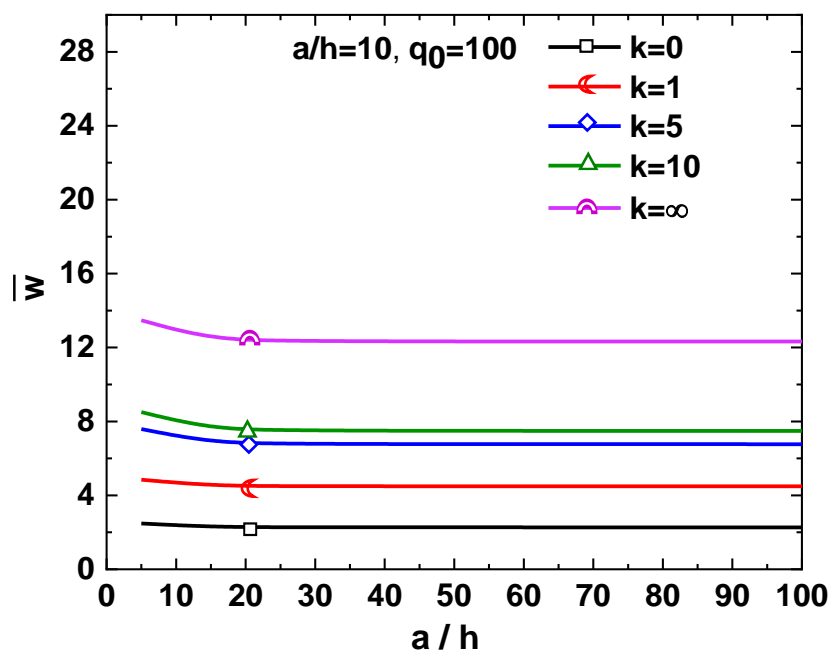
(b)



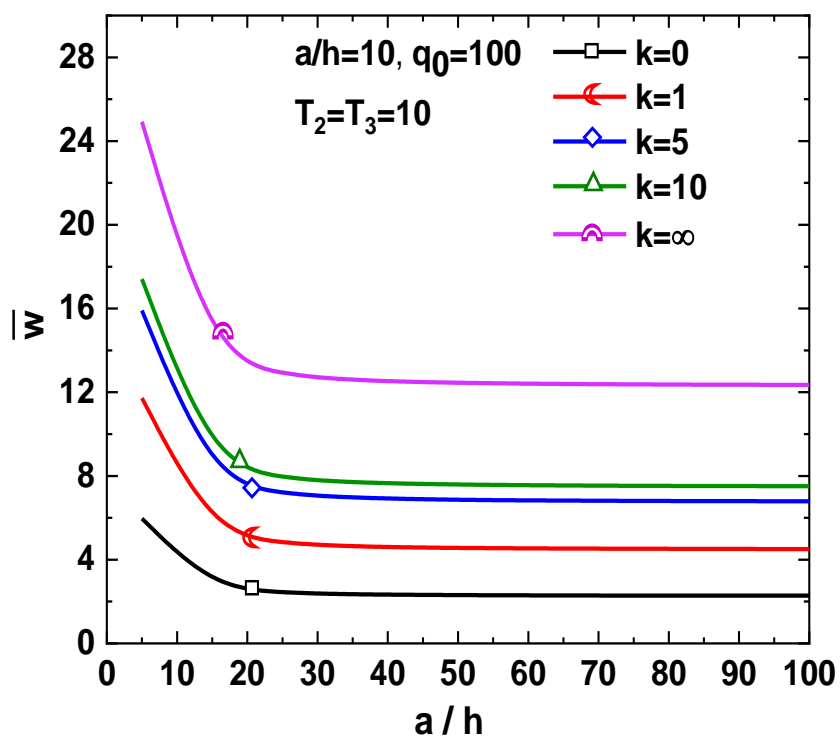
(c)

Figure.V.1 : Évolution du déplacement axial adimensionnel à travers l'épaisseur en utilisant : (a) un chargement mécanique, (b) un chargement thermomécanique non linéaire et (c) un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.

L'évolution de la flèche \bar{w} en fonction du rapport côté/épaisseur a/h en utilisant un chargement thermomécanique non linéaire et un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire est illustrée sur les Figures V.2a-c. Dans le cas d'un chargement thermique non linéaire, les valeurs de la flèche présentent un maximum pour les poutres épaisses ($a/h=5$) puis ces valeurs diminuent légèrement pour $10 \leq a/h \leq 20$ rapport correspondant aux poutres moyennement épaisses. Au-delà de $a/h > 20$, l'évolution de la flèche présente un palier (Voir Figure V.2a). Dans le cas du chargement Non Linéaire Hygro-Thermo-Mécanique (NHTM), l'évolution suit la même tendance que précédemment avec les valeurs plus élevées pour les poutres épaisses et moyennement épaisses. L'influence du chargement Non Linéaire Hygro-Thermo-Mécanique (NHTM) ne peut être négligée pour les poutres épaisses ($a/h=5$) et moyennement épaisses ($10 \leq a/h \leq 20$) lorsque la valeur de l'indice de loi de puissance k est comprise entre 5 et ∞ .



(a)



(b)

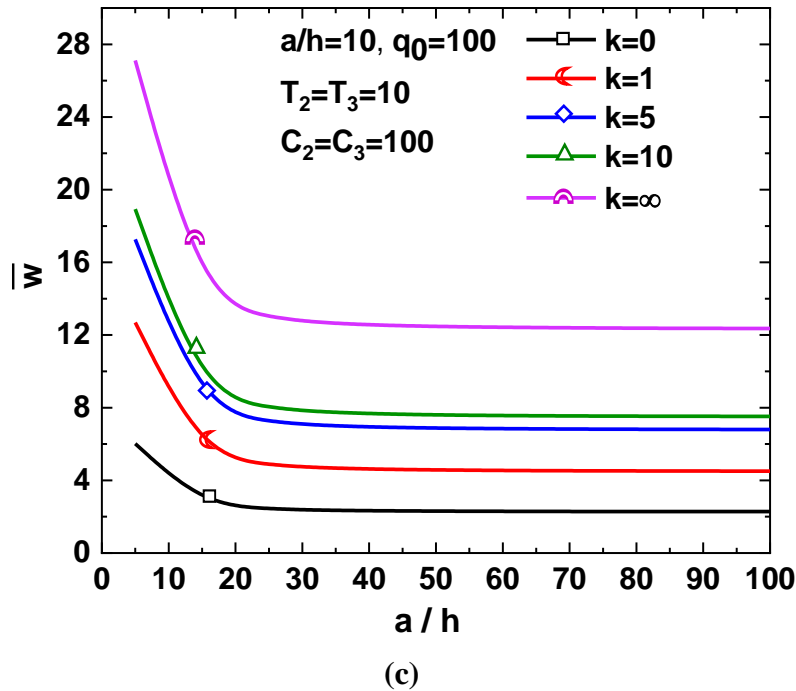


Figure.V.2 : Évolution de la flèche adimensionnelle en fonction du rapport côté/épaisseur en utilisant : (a) chargement mécanique, (b) chargement thermo-mécanique non linéaire et (c) chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire

L'évolution de la contrainte de flexion adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur sous un chargement mécanique, un chargement thermomécanique non linéaire et un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire est présentée à la figure V.3.

Lorsque les poutres FG sont en céramique pleine $k=0$, les contraintes maximales de traction et de compression sont les mêmes dans les trois types de chargement (chargement M, NTM et NHTM). Cependant, lorsque l'indice de la loi de puissance $k>0$, les contraintes de flexion maximales en traction sont plus faibles en chargement (NHTM). Cette différence est principalement due à l'introduction des charges dues à l'humidité.

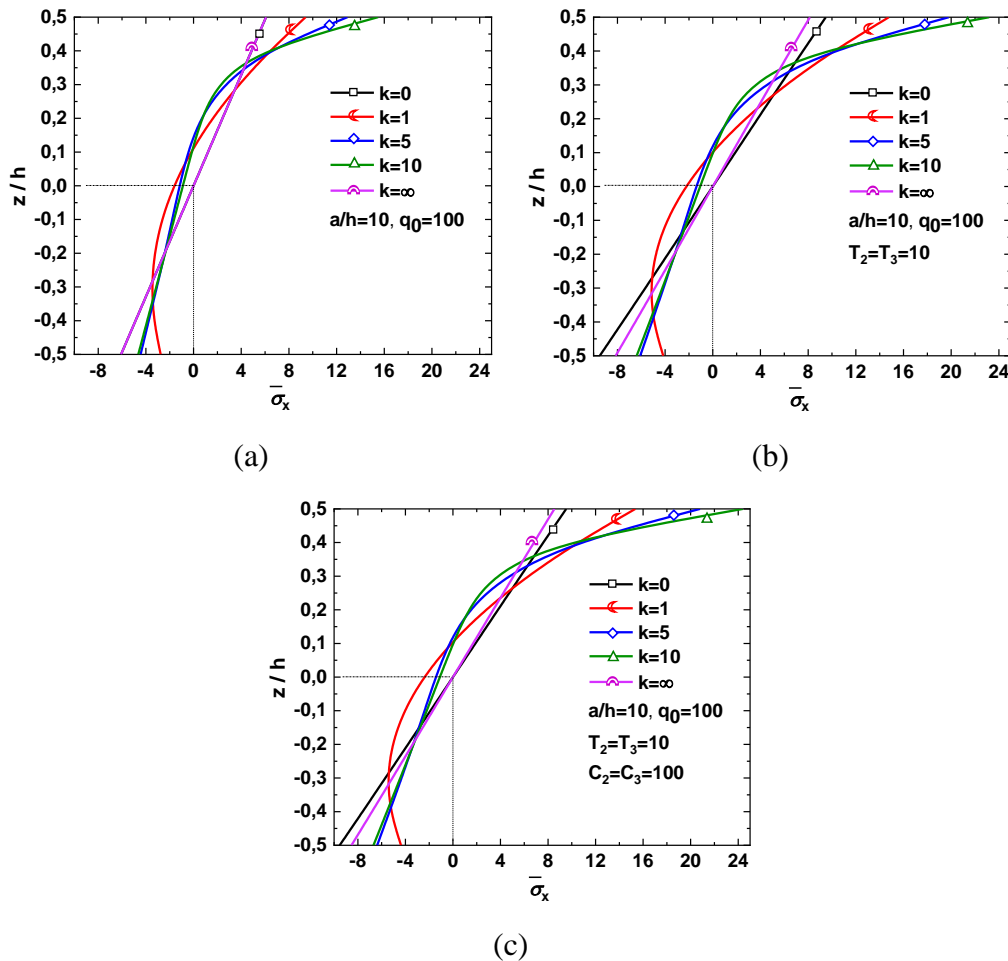


Figure. V. 3 : Évolution de la contrainte de flexion adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur en utilisant : (a) un chargement mécanique, (b) un chargement thermomécanique non linéaire et (c) un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire

Les Figures V.4a-c représentent l'évolution de la contrainte de cisailment transversale non dimensionnelle respectivement sous un chargement mécanique (M), thermomécanique non linéaire (NTM) et hygro-thermo-mécanique non linéaire (NHTM). L'évolution de la contrainte de cisailment transverse adimensionnelle suit la même tendance dans les trois types de chargement sauf pour les poutres FG en métal pur $k = \infty$. La contrainte de cisailment transversal diminue légèrement pour les poutres métalliques soumises à des chargements (NTM) et (NHTM) par rapport au chargement mécanique (M). Pour les poutres en céramique pure et en métal pur, les évolutions de la contrainte de cisailment transverse sont paraboliques. Leurs maximums se produisent à l'axe neutre en raison des propriétés homogènes et isotropes

de ces matériaux. Les évolutions de la contrainte de cisaillement transverse ne sont pas paraboliques, et leurs maximums sont décalés vers la phase métallique.

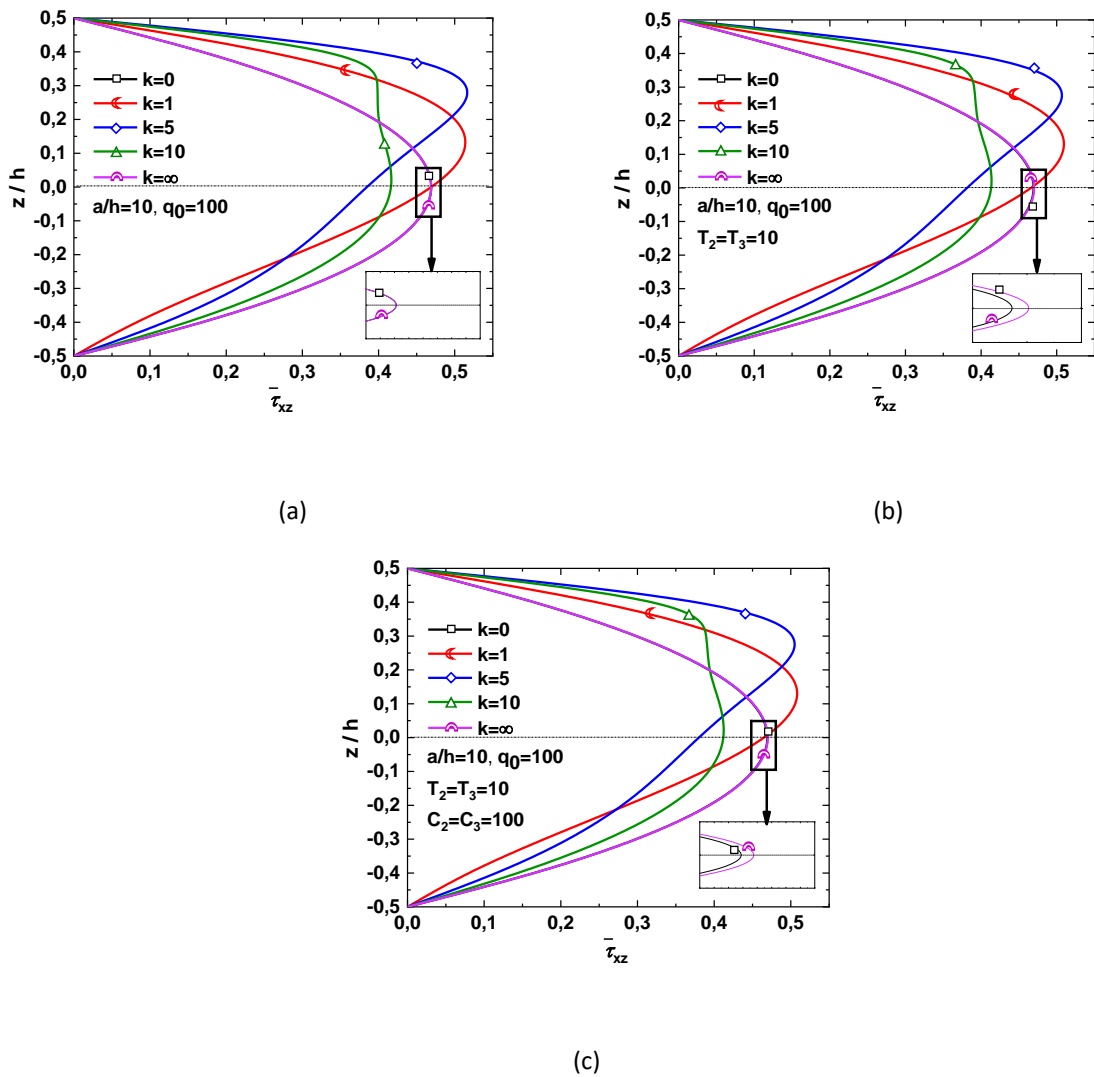
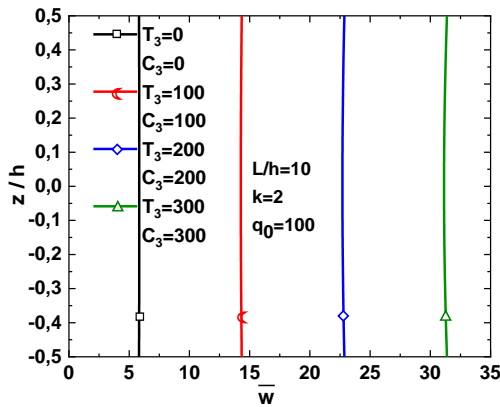


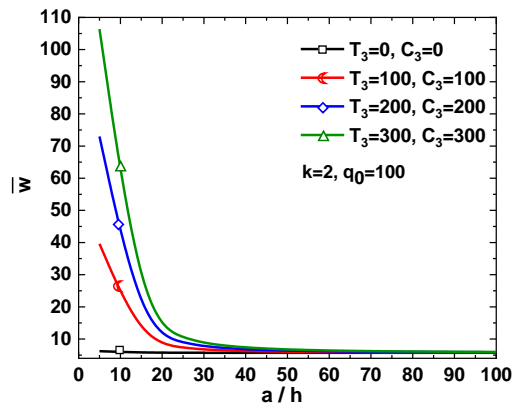
Figure.V.4 : Évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle à travers l'épaisseur en utilisant : (a) le chargement mécanique, (b) le chargement thermomécanique non linéaire et (c) le chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.

Les paramètres non dimensionnels (\bar{u} , \bar{w} , $\bar{\sigma}_x$ et $\bar{\tau}_{xz}$) avec différentes charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3) sont résumés dans le Tableau V.6 pour différentes valeurs du rapport portée/profondeur a/h et de l'indice de loi de puissance k . On remarque que les paramètres non dimensionnels (\bar{u} , \bar{w} et $\bar{\sigma}_x$) diminuent lorsque le rapport porté sur profondeur a/h augmente, alors qu'ils augmentent avec l'augmentation de l'indice de loi de puissance k et de la charge thermique non linéaire T_3 ainsi que la charge d'humidité non linéaire C_3 .

Les Figures V.5a-d présentent l'évolution de la flèche adimensionnelle sous différentes charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3). On note sur la Figure V.5a que la flèche augmente avec l'augmentation des charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3). Les valeurs de la flèche sont plus importantes pour les poutres épaisses ($a/h=5$) et moyennement épaisses ($10 \leq a/h \leq 20$), comme le montre la Figure V.5b, mais diminuent avec l'augmentation du rapport a/h . Cependant, d'une part, elle augmente considérablement à mesure que la charge thermique non linéaire induite (T_3) augmente, Fig.V.5c. D'autre part, l'introduction de la charge d'humidité non linéaire a un léger effet sur la flèche lorsque cette charge est inférieure à 15. Au-dessus de cette valeur, la flèche reste constante (voir Fig.5d).



(a)



(b)

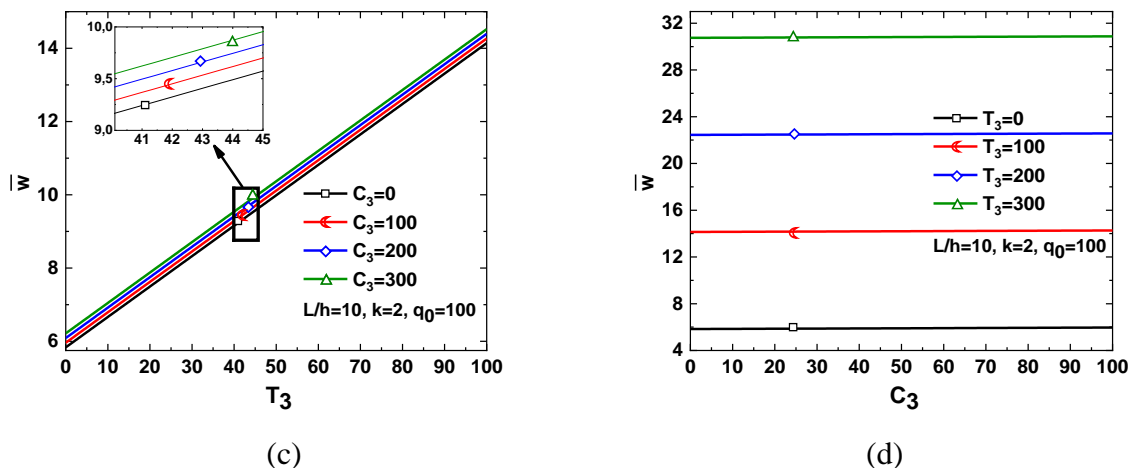
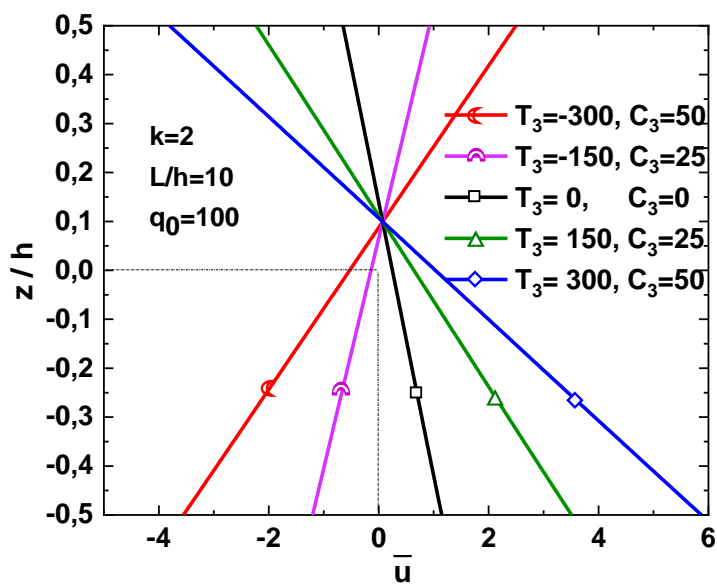


Figure. V. 5 : Évolution de la flèche adimensionnelle \bar{w} : (a) dans l'épaisseur, (b) en fonction du rapport côté sur épaisseur a/h , (c) et (d) pour différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3).

L'évolution du déplacement axial non dimensionnel \bar{u} à travers l'épaisseur et en fonction du rapport côté sur épaisseur a/h en utilisant différentes charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3) est respectivement illustrée dans les Figures V.6a et V.6b. Concernant l'évolution du déplacement axial, les interprétations sont similaires à celles du déplacement transversal. De plus, pour les charges thermiques non linéaires $T_3 = -300$ et $T_3 = +300$, les déplacements axiaux sont respectivement de $-35,45$ et $40,07$. Ces valeurs confirment que le comportement des poutres FG n'est pas symétrique vis-à-vis de la charge thermique non linéaire T_3 .



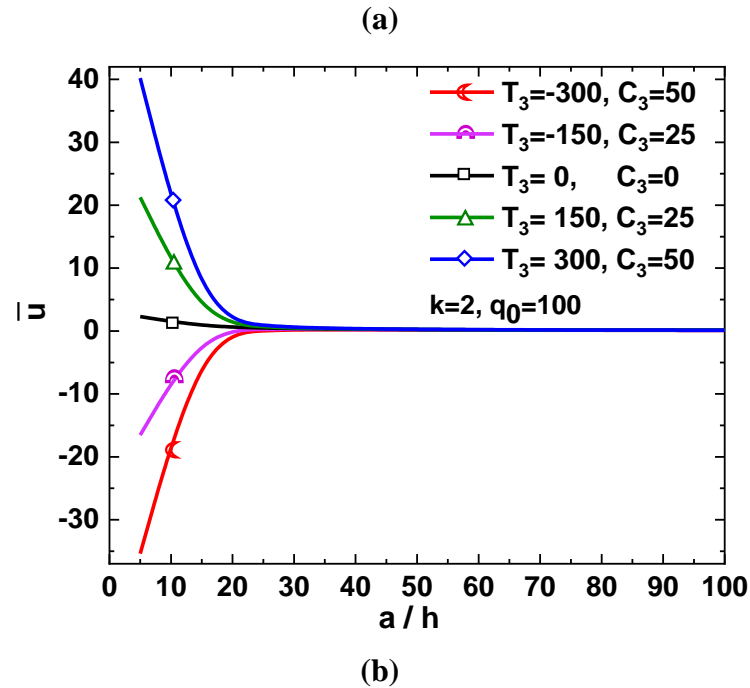
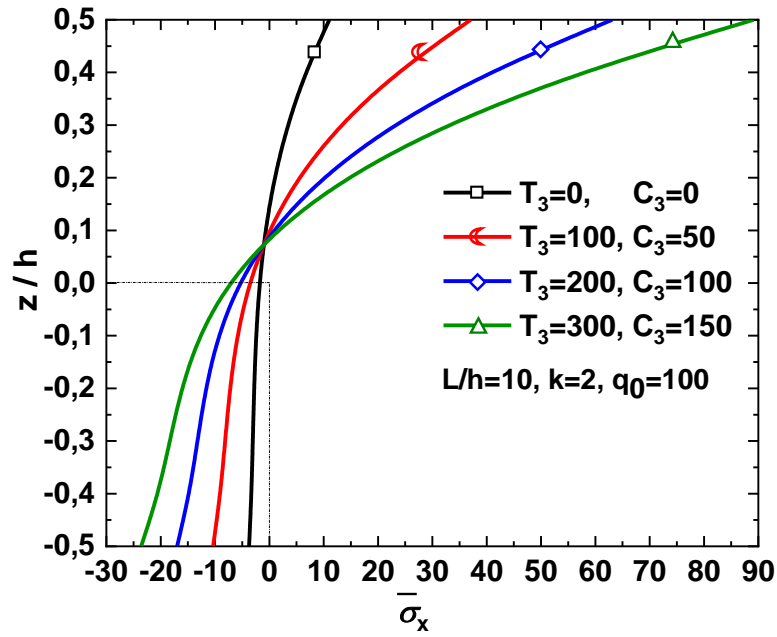
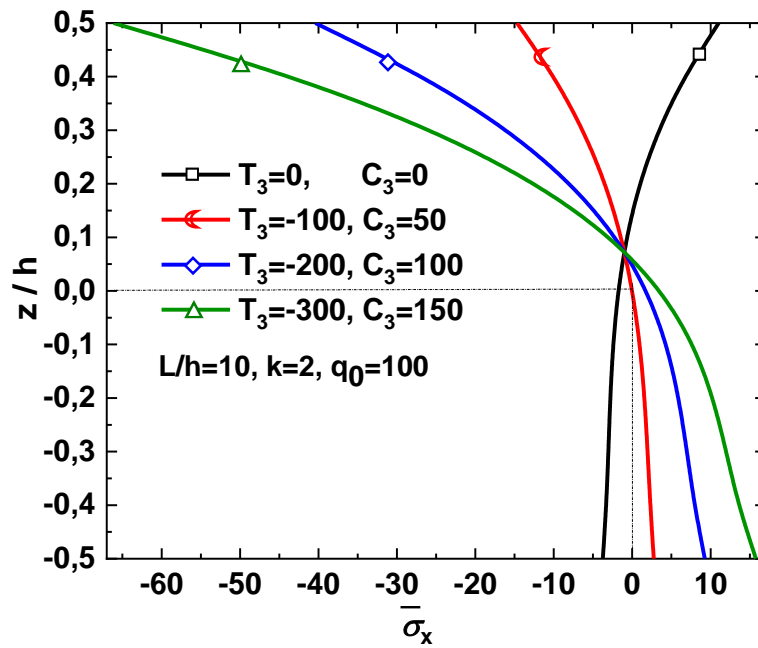


Figure.V.6 : Évolution du déplacement axial adimensionnel \bar{u} avec différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3) : (a) à travers l'épaisseur et (b) en fonction du rapport côté sur épaisseur a/h .

Les Figures V.7a et V.7b présentent la variation de la contrainte de flexion non dimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur pour différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3). Sur la figure V.7a les contraintes de compression maximales sont à la surface supérieure et les contraintes de traction maximales se produisent à la surface inférieure pour les températures positives, par contre pour les températures négatives, les contraintes de compression maximales se situent à la surface inférieure et les contraintes de traction maximales se produisent à la surface supérieure (Figure V.7b).



(a)



(b)

Figure.V.7 : Évolution de la contrainte de flexion adimensionnelle $\bar{\sigma}_x$ à travers l'épaisseur en utilisant différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3).

La variation de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ à travers l'épaisseur à l'aide de différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3) est présentée à la Fig.V.8. La sensibilité des charges thermiques et d'humidité non linéaires sur la contrainte de cisaillement est bien représentée aux valeurs maximales.

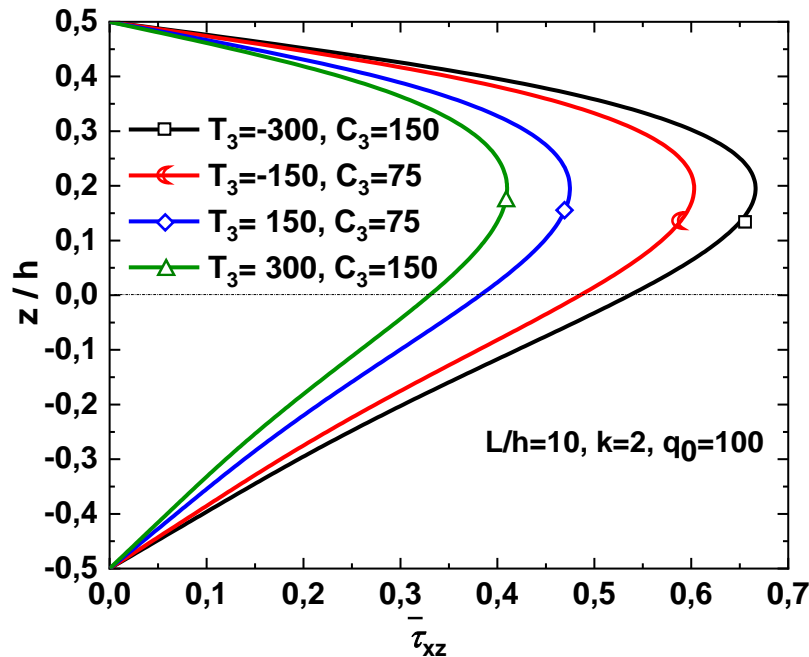


Figure.V. 8 : Évolution de la contrainte de cisaillement non dimensionnelle $\bar{\tau}_{xz}$ grâce à l'utilisation de différentes valeurs de charges thermiques et d'humidité non linéaires (T_3 et C_3).

V.3. Conclusion

Sur la base de la théorie raffinée de déformation en cisaillement quasi-3D proposée et de la technique de solution de Navier, un modèle analytique est développé pour étudier le comportement en flexion de différentes poutres FG simplement supportées soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire. Les contraintes et les déplacements adimensionnels sont calculés sous différents chargements externes (M, LTM, NTM, LHTM et NHTM). Les résultats obtenus par l'utilisation de cette théorie de déformation par cisaillement quasi-3D comparés à ceux obtenus par différentes théories 2D d'ordre supérieur, mettent en évidence la déformation de cisaillement et les effets d'étirement d'épaisseur sur les paramètres non dimensionnels. Les différents paramètres tels que l'indice de puissance, le rapport d'aspect

a/h, les charges thermiques et d'humidité influent sur le comportement en flexion des poutres FG. Les résultats obtenus montrent qu'il y a une bonne corrélation entre les résultats obtenus par le présent modèle et ceux de la littérature, ce qui montre l'efficacité et la précision du présent modèle.

Conclusion générale

Conclusion générale et perspectives

Les poutres fonctionnellement graduées (FGM) sont des éléments structuraux couramment utilisés dans plusieurs industries telles que la construction, l'aérospatiale, les transports, l'aéronautique et la marine à cause de leur faible poids et de leur grande rigidité. Ces structures travaillent dans des environnements agressifs et des chargements couplés (mécaniques, thermiques et d'humidité) dans plusieurs domaines d'ingénierie. Pour répondre à cette problématique nous avons développé un modèle analytique qui a été développé pour étudier le comportement en flexion de diverses poutres FG simplement supportées soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire. Les contraintes et les déplacements adimensionnels sont calculés à l'aide de divers chargements externes hygro-thermo-mécaniques (M, LTM, NTM, LHTM et NHTM). Pour mettre en évidence la déformation de cisaillement et les effets d'étirement d'épaisseur sur les paramètres non dimensionnels, les résultats numériques actuels sont comparés à ceux prédits par les théories d'ordre supérieur 2D et quasi-3D. Les termes adimensionnels tels que la flèche, le déplacement axial, les contraintes sont obtenus pour différents paramètres $k, a/h, T_2, C_2$ et T_3

Les flèches sont plus élevées en chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire (NHTM) que dans les autres cas (chargement M, LTM et NTM). De plus, leurs valeurs sont plus critiques pour les poutres ($a = 5h$) en métal plein ($k = \infty$). Par contre, la contrainte de cisaillement transversal diminue légèrement pour les poutres métalliques soumises à des chargements NTM et NHTM par rapport au chargement M. Il est crucial de souligner que lorsque l'indice de la loi de puissance $k > 0$, les contraintes maximales de flexion en traction sont beaucoup plus faibles en chargement (NHTM). Cette différence est principalement due à la présence de charges thermiques et d'humidité. Par conséquent, l'influence de la charge thermique et de l'humidité est importante et doit être introduite lors du processus de conception pour étudier correctement le comportement de flexion des poutres FG pour des applications techniques spéciales dans l'aérospatiale, l'automobile et le génie civil.

Conclusion générale et perspectives

La formulation quasi-3D développée peut être étendue pour étudier d'autres modèles de structures et de matériaux.

Perspectives

Ces travaux ouvrent la voie à de nombreux axes de recherche :

- La modélisation numérique avec l'utilisation des codes de calcul pour simuler le comportement des structures en matériaux FGM sous la combinaison des différents types de chargement (mécanique, thermique, hygrothermique).
- Réalisation d'un banc d'essai avec une centrale d'acquisition des données,
- En plus, il serait très intéressant d'étudier l'influence des défauts de fabrication à savoir la porosité sur la réponse globale des structures en matériaux FGM sous différentes sollicitations.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

Chapitre - I-

Généralités Sur les Matériaux Composites et Les Matériaux Fonctionnellement Gradués FGM

- [1] **S. Somiya et al.**, « Handbook of Advanced Ceramics », (Eds.) Copyright (c) 2003 Elsevier Inc.
- [2] **Niino M., Kumakawa A., Hirano T., Sumiyoshi K. and Watanabe R.**, « Proc. 36th Congress of the International Astronautical Federation », Stockholm, p. 1. 1985.
- [3] **Niino M., Hirai T. and Watanabe R.**, J. Jpn. Soc. Compos. Mater. 13 : 257, 1987.
- [4] **G. Auguin, D. Marquis, P. Barabinot, V. Drean and P. Latrubesse.** « Résistance au feu des matériaux composites : application à un panneau sandwich ». 21ème Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, 2013.
- [5] **K.W. Garrett and J.E. Bailey.** « Multiple transverse fracture in 90 cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester ». Journal of materials science, 12(1) :157–168, 1977.
- [6] **C. Huchette.** « Etude Sur la complémentarité des approches expérimentales et numériques pour la modélisation des mécanismes d'endommagement des composites stratifiés ». Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2005.
- [7] **G. J. Dvorak and N. Laws.** « Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates II ». First ply failure Journal of Composite Materials, 21(4) :309–329, 1987.
- [8] **J.M. Berthelot.** « Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates: static and fatigue loading ». Applied Mechanics Reviews, 56(1) :111–147, 2003.
- [9] **J.A. Nairn and S. Hu.** « The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites ». International Journal of Fracture, 57(1) :1–24, 1992.
- [10] **Ait Taleb Souad,** « Analyse du comportement des poutres non – homogènes renforcées par des plaques composites » Thèse De Doctorat L.M.D 3ème Cycle, Université Mouloud Mammeri De Tizi Ouzou, 2016.
- [11] **Miyamoto M., Kaysser W.A. and Rabin B.H.,** « Functionally Graded Materials Design ». Processing and Applications, 1999.

- [12] **Öchsner A., Murch G.E. and DeLemos M.J.S.** « Cellular and Porous Materials », WILEY-VCH, 398-417, 2008.
- [13] **Bachir Bouiadjra Rabbab,** « Contribution à l'Etude de la Stabilité des Plaques Epaissees en Composite sur Fondations Elastiques », Thèse de doctorat LMD 3eme cycle, université de d'Oran, 2015.
- [14] **Bouhadra A., et al.,** « Thermal buckling response of functionally graded plates with clamped boundary conditions ». Journal of Thermal Stresses, 38(6): p. 630-650, 2015.
- [15] **Natarajan S., G. Manickam and S. Bordas,** « Supersonic flutter analysis of functionally graded material plates with cracks ». Frontiers in Aerospace Engineering, 2(2): p. 91-97, 2013.
- [16] **El-Galy I.M., B.I. Saleh and M.H. Ahmed,** « functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view ». SN Applied Sciences, 1(11) : p. 1378, 2019.
- [17] **Bouamama Mohamed,** « Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM », Thèse de Doctorat en Sciences, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, 2019.
- [18] **Benbakhti Abdeldjalil,** « Modélisation du comportement thermomécanique des plaques FGM », Thèse De Doctorat L.M.D 3ème Cycle, Université Abdelhamid Ibn Badis Mostaganem, 2017.
- [19] **Saleh B. et al.,** « Effect of main parameters on the mechanical and wear behaviour of functionally graded materials by centrifugal casting: a review ». Metals and Materials International, 25(6): p. 1395-1409, 2019.
- [20] **Udupa G., S.S. Rao and K. Gangadhara,** « functionally graded composite materials: an overview ». Procedia Materials Science, 5 : p. 1291-1299, 2014.
- [21] **Refrafi Salah,** « Etude des effets des conditions hygrothermiques sur la réponse mécanique des plaques sandwiche fonctionnellement graduées en utilisant une théorie avancée des plaques », Thèse de Doctorat en Sciences, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, 2020.
- [22] **M. Koizumi,** « Recent Progress of functionally graded materials in Japan ». Ceram. Eng. Sci. Proc; 13 (7-8): 333- 347, 1992.
- [23] **Koizumi. M,** « FGM activities in Japan », Department of Materials Chemistry, Ryukoku University, Ohtsu 520- 21. Japan,1997.

- [24] **H. Okamura**, « State of the art of material design projects for severe service applications », *Mater. Sci. Eng: A*; 143 (1-2): 3- ,1991.
- [25] **Kieback B., Neubrand A. and Riedel H.** « Processing techniques for functionally graded materials ». *Materials Science and Engineering : A*, 362(1-2) :81–106, 2003.
- [26] **Menasria Abderrahmane**, « Etude de l'effet de la Microstructure Sur le Flambement Thermique des Plaques Fonctionnellement Graduées », Thèse de Doctorat en Sciences, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, 2018.
- [27] **Ramachandran T., Kokula Krishna, Hari K., Thiruvengadam B., Daniel James.**, « Proceedings of the International Conference on Systems, Science, Control, communication », *Engineering and Technology*, 10-11, Karpagam Institute of Technology, Coimbatore, 2015.
- [28] **EL-Wazery M. S.**, « Electrical and Mechanical Performance of Zirconia-Nickel Functionally Graded Materials », *International Journal of Engineering* 26 (4 (A). 2013, doi: 10.5829/idosi.ije.2013.26.04a.06.
- [29] **Saiyath ibrahim A., Mohamed N.S.S. and Dhanapal P.**, « Processing techniques of functionally graded materials—a review », In *International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology* (pp. 98-105), 2015.
- [30] **Katayama T., Sukenaga S., Saito N., Kagata H. and Nakashima, K.** “ Fabrication of Al₂O₃- W functionally graded materials by slipcasting method”. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 18, No. 20, p. 202023). IOP Publishing, 2011.
- [31] **Dumont Anne-Laure, Jean-Pierre Bonnet, Thierry Chartier and José M.F. Ferreira.** "Mosi₂/Al₂O₃ FGM: Elaboration by Tape Casting And SHS", *Journal of the European Ceramic Society* 21(13):2353-2360, 2001.doi:10.1016/s0955- 219(01)00198-4.
- [32] **Jamaludin S.N.S., Mustapha F., Nuruzzaman D.M., Basri S.N.**, "A review on the fabrication techniques of functionally graded ceramic-metallic materials in advanced composites". *Scientific Research and Essays*, 8 (21), 828-840, 2013.
- [33] **Wu A.H., W.B. Cao, C.C. Ge, J.F. Li and A. Kawasaki.** "Fabrication and Characteristics of Plasma Facing Sic/C Functionally Graded Composite Material» *Materials Chemistry and Physics* ,91(2-3): 545-550, 2005.
Doi: 10.1016/j.matchemphys.2004.12.038.

- [34] **Watari Fumio, H. Kondo, Shingo Matsuo, Rika Miyao, Atsuro Yokoyama, Mamoru Omori and Toshio Hirai et al.**, "Development Of Functionally Graded Implant and Dental Post for BioMedical Application". Materials Science Forum 423-425: 321-326, 2003. Doi: 10.4028/www.scientific.net/msf.423-425.321.
- [35] **Cho K.M., Choi I.D. and Park I. M.**, 'Thermal properties and fracture behavior of compositionally graded Al-SiCp composites". In Materials Science Forum (Vol. 449, pp. 621-624). Trans Tech Publications, 2004.
- [36] **Hassina ZIOU**, « Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionnel », Thèse de Doctorat en Sciences, Université Mohamed Khider – Biskra, 2017
- [37] **Jin Z.H and Batra R.C.**, Journal of Thermal Stresses, 19, 317–339, 1996.
- [38] **H. Ziou, H. Guenfoud and M. Guenfoud**, “Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method”. International Journal of Structural Engineering; 7(3), 239-261, 2016
- [39] **Chi. Shyang-ho and Chung Yen-Ling**, “Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings”, Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243, 2003.
- [40] **Delale F. and Erdogan F.**, “The crack problem for a non-homogeneous plane”. ASME Journal of Applied Mechanics; 50 (3): 609-614, 1983

Chapitre - II - **Théories des poutres en FGM**

- [41] **Sellai B.O.**, “Etude Et Analyse Des Structures En FGM : Comparaison Entre EFGM, P-FGM Et S-FGM ” ; Thèse De Doctorat Université Djillali Liabés De Sidi Bel Abbès, 2011
- [42] **Safa Abdelkader**, « Analyse De L’effet Thermique Sur Les Fréquences Des Structures Non Homogènes Epaises », Thèse de Doctorat en Sciences, Université Djillali Liabes de Sidi Belabbes, 2021,
- [43] **Chaouche Abdellah**, « Analyse Vibratoire Des Plaques Minces Sous Déférentes Conditions Aux Limites », Master Professionnel, université Kasdi Merbah Ouargla, 2013.

- [44] **Bouamama Mohamed**, « Etude du comportement dynamique et stabilité des poutres en FGM », Thèse de Doctorat en Sciences, Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, 2019
- [45] **Berrabah Hamza Madjid, Adda Bedia El Abbas et Tounsi Abdelouahed**, « Comparaison Des Différentes Théories De Poutre Non Locale Raffinée Pour La Flexion Et L'analyse Du Flambement Des Nano-Poutres », 2170-127X, © Mouloud Mammeri University Of Tizi-Ouzou, Algeria, 2016.
- [46] **Coffignal Gérard**, « Mécanique Non-Linéaire Et Eléments Finis. », Version Electronique E.1.0, 2001. [Http://Www. Paris.Ensam. Fr /Lmsp](http://www.Paris.Ensam.Fr/Lmsp), 2001.
- [47] **Timoshenko S and Woinowsky-Krieger S**, “Theory of Plates and Shells: Bending Moments in A Simply Supported Rectangular Plate with A Concentrated Load”, The National Academies of Sciences, Engineering, And Medicine, 1959, <https://Trid.Trb.Org/View/102976>.
- [48] **Reddy J.N.**, "A simple higher-order theory for laminated composite plates". Journal of Applied Mechanics, Vol. 51, (4), pp. 745-752, 1984.
- [49] **Bernadette Miara and Paolo Podio-Guidugli**, “Une approche formelle unifiée des Théories de plaques et poutres linéairement élastiques”, Comptes Rendus Mathématique, Volume 343, Issue 10, 2006.
- [50] **Larbi chaht Fouzia**, « Etude Du Comportement Des Nano-Poutres En Flexion, En Flambement Et En Vibration En Utilisant Les Théories Non Locales De Déformation De Cisaillement Des Poutres », Thèse De Doctorat En Sciences, Université Djillali Liabès De Sidi Belabbès,
- [51] **Hildebrand F.B., Reissner E., Thomas G.G.**, "Notes on the foundations of theory of small displacements of orthotropic shells". NACA T. N, p. 1833, 1949.
- [52] **Naghdi P. M.**, "On the theory of thin elastic shells". Quarterly Appl. Math. Vol. 14, pp. 369-380, 1957.
- [53] **Liberscu L.**, "On the theory of anisotropic elastic shell and plates". Int J Solids Structures, Vol. 3, pp. 53-68, 1967.
- [54] **Nelson. R. B and D.R. Lorch**, “A refined theory for laminated orthotropic plates”. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol.41, pages 177-183, 1974.
- [55] **Kant T. and Swaminathan K.**, "Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory". Composite. Structure, Vol. 56, (4), pp. 329-344, 2002.

- [56] **Lo K.H., Christensen R.M. and Wu E.M.**, “A high-order theory of plate deformation”. Part 1: Homogeneous plates. *J. Appl. Mech.* 44,663-668, 1977a.
- [57] **Lo K.H., Christensen R.M. and Wu E.M.** “A high-order theory of plate deformation”. Part 2 :Laminated plates. *J. Appl, Mech.* 44,669-676, 1977b.
- [58] **Matouk Hakima**, « Etude des propriétés hygro-thermo-élastique des Nanostructures à base de métal-céramique. », Thèse de Doctorat 3ème Cycle Université de Sidi bel Abbes, 2021.
- [59] **Ambartsumyan S.A.**, “Theory of AnrkotropicP&es” (translated from Russian by T. Cheron and Edited by 1. E. Ashton). Technomic Publications. Stanford, 1969.
- [60] **Reissner E.**, “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates”. *1. Appi. Mech.* 12, m-77, 1945.
- [61] **Kaczkowski S.A. (1968)**. “Plates: Statical calculations” (in Polish). Arkady, Warszawa. Taken from Viola et al (2013).
- [62] **Panc, V. (1975)**. “Theories of Elastic Plates”. Noordhoff, Leyden, Netherlands. Taken from Viola et al (2013).
- [63] **Voyiadjis, G.Z., Shi, G.**, A refined two-dimensional theory for thick cylindrical shells. *Int. J. Solids Struct.* 27, 261–282, 1991.
- [64] **Shi G. and Voyiadjis G. Z.**, “A Sixth-order Theory of Shear Deformable Beams with Variational Consistent Boundary Conditions.”, *J. ApplMech*, 78(2), 021019, 1-11, 2011.
- [65] **Aydogdu M.**, « Une nouvelle théorie de déformation de cisaillement pour les Plaques composites stratifiées. *Composite Structures*, 94– 101, 2003.
- [66] **Levinson M.**, “An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates.” *Mech. Res. Comm.*, 7(6), 343-350, 1980.
- [67] **Murthy, M.V.V.**, “An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates,” *NASA TP 1903*, 1-37, 1981.
- [68] **Touratier M.**, "An efficient standard plate theory". *Int. J. Eng. Sc.* Vol. 29, (8), pp. 901-916, 1991.

- [69] **Afaq K.S**, « Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord ». PhD thesis, University Toulouse III - Paul Sabatier, 2003.
- [70] **Mechab I., Ait Atmane H., Tounsi A., Belhadj H.A. and Adda Bedia E.A**, “A two variable refined plate theory for the bending analysis of functionally graded plates”, *Acta Mech Sin*, 26, 941–949, 2010.
- [71] **Ait Atmane H., A. Tounsi., I. Mechab. and E.A Adda Bedia**, “Free vibration analysis of functionally graded plates resting on Winkler-Pasternak elastic foundations using a new shear deformation theory”. *Int. J. Mech. Mater. Design*; 6 (2): 113-121, 2010.
- [72] **El Meiche, N. Tounsi, A. Ziane, N. Mechab I. and Adda Bedia, E.A.**, "A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate", *International Journal of Mechanical Sciences*, 237–247, 2011.

Chapitre III

Revue des travaux antérieurs sur la modélisation des FGM

- [73] **Ke L.L and Wang. Y.-S**, «Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 342–350, 2011.
- [74] **Piovan M. T and Machado S. P**, «Thermoelastic dynamic stability of thin-walled beams with graded material properties», *Thin-Walled Structures*, vol. 49, no. 3, pp. 437–447, 2011.
- [75] **Azizi S, Ghazavi M.-R, Esmail zadeh Khadem. S, Yang. J, and.Rezazadeh. G**, «Stability analysis of a parametrically excited functionally graded piezoelectric, MEM system», *Current Applied Physics*, vol. 12, no. 2, pp. 456–466, 2012,
- [76] **Zamanzadeh M, Rezazadeh G, Jafar sadeghi-poornaki I. and Shabani R.**, «Static and dynamic stability modeling of a capacitive FGM micro-beam in presence of temperature changes», *Applied Mathematical Modeling*, vol. 37, no. 10-11, pp. 6964–6978, 2013.
- [77] **Esfahani S.E., Kiani Y. and Eslami M.R**, «Non-linear thermal stability analysis of temperature dependent FGM beams supported on non-linear hardening elastic foundations», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 69, pp. 10–20, 2013.
- [78] **Komijani M, Esfahani S.E, Reddy J.N, Liu Y.P. and Eslami. M.R.**, «Nonlinear thermal stability and vibration of pre/postbuckled temperature- and microstructure-dependent functionally graded beams resting on elastic foundation», *Composite Structures*, vol. 112, pp. 292–307, 2014.

- [79] **Kolakowski Z.**, «Some aspects of interactive dynamic stability of thin-walled trapezoidal FGM beam-columns under axial load», *Thin-Walled Structures*, vol. 98, pp. 431–442, 2016,
- [80] **Nguyen T.T, Thang P.T. and Lee J.**, «Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams», *Thin-Walled Structures*, vol. 110, pp. 88–96, 2017.
- [81] **Fazzolari F.A.**, «Generalized exponential, polynomial and trigonometric theories for vibration and stability analysis of porous FG sandwich beams resting on elastic foundations», *Composites Part B: Engineering*, vol. 136, pp. 254–271, 2018.
- [82] **Chakraborty A. and Gopalakrishnan S.**, «A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams». *International Journal of Solids and Structures*, vol.40:2421–48, 2003.
- [83] **Chakraborty A., Gopalakrishnan S. and Reddy JN.**, «A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials». *International Journal of Mechanical Sciences*; vol.45:519–39, 2003.
- [84] **Kapuria S., Bhattacharyya M. and Kumar AN.**, «Bending and free vibration response of layered functionally graded beams: A theoretical model and its experimental validation». *Composite Structures*, 82(3): 390-402, 2008.
- [85] **Kadoli R., Akhtar K. and Ganesan N.**, «Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory». *Applied Mathematical Modelling*, 32(12):2509-2525, 2008.
- [86] **Shi G., Lam K.Y. and Tay T.E.**, «On efficient finite element modeling of composite beams and plates using higher-order theories and an accurate composite beam element», *Composite Structures*, 41 159–165, 1998.
- [87] **Kutiš V., Murin J., Belak R. and Paulech J.**, «Beam element with spatial variation of material properties for multi-physics analysis of functionally graded materials», *Computers & Structures* 89 1192–1205, 2011.
- [88] **Pindera M-J., Dunn P.**, «An Evaluation of Coupled Microstructural Approach for the Analysis of Functionally Graded Composites via the Finite Element Method», NASA CR 195455. Lewis Research Center, Cleveland, OH, 1995.
- [89] **Reddy JN.**, «On the dynamic behaviour of the Timoshenko beam finite elements», *Sadhana*; 24:175–98, 1997.

- [90] **Chen JS., Wu CT., Yoon S. and You Y.**, «A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods». *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; 50:435–66, 2001.
- [91] **Nateghi A, Salamat T.M., Rezapour J. and Daneshian B.**, «Size dependent buckling analysis of functionally graded micro beams based on modified couple stress theory», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 10, pp. 4971–4987, 2012.
- [92] **Sahmani S. and Ansari R.**, «Size-dependent buckling analysis of functionally graded third-order shear deformable microbeams including thermal environment effect», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 37, no. 23, pp. 9499–9515, 2013.
- [93] **Şimşek M. and Reddy. J. N.**, «A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded inelastic medium using modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 101, pp. 47–58, 2013.
- [94] **Javaheri R. and Eslami M.R.** «Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory» *J. Therm. Stress.*, 25(1), 603-625, 2022a.
- [95] **Na K.S. et Kim, J.H.**, «Three-Dimensional Thermomechanical Buckling of Functionally Graded Materials», *AIAA Journal*, 47, 1605-1612, 2005.
- [96] **Wu L.**, «Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate», *Composite Structures*, 64, 211–218, 2004.
- [97] **Shen H.-S.**, «Thermal post buckling behavior of shear deformable FGM plates with temperature-dependent properties», *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 466-478, 2007.
- [98] **Bodaghi M. and Saidi A.R.**, «Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory», *Applied Mathematical Modelling*, 3659–3673, 2010.
- [99] **Javaheri R. and Eslami M.R.**, «Thermal buckling of functionally graded plates based on higher order theory», *J. Therm. Stress.*, 25(1), 603-625, 2002b.
- [100] **Javaheri R. and Eslami M.R.**, «Buckling of functionally graded plates under in-plane compressive loading», *ZAMM*, 82, No. 4, 277-283, 2002c.
- [101] **Shariat BAS. and Eslami M.R.**, «Effect of initial imperfections on thermal buckling of functionally graded plates», *Journal of Thermal Stresses*, 28, 1183–98, 2005.

- [102] **Khalfi Y., Houari M.S.A. and Tounsi A.**, «A refined and simple shear deformation theory for thermal buckling of solar functionally graded plates on elastic foundation», *International Journal of Computational Methods*, In press, 2014.
- [103] **Zidi M., Tounsi A., Houari M.S.A., Adda Bedia, E.A. and Anwar Bég O.**, «Bending analysis of FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory», *Aerospace Science and Technology*, 34, 24–34, 2014.
- [104] **Ait Amar Meziane, M. Abdelaziz H.H. and Tounsi A.**, «An efficient and simple refined theory for buckling and free vibration of exponentially graded sandwich plates under various boundary conditions», *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 16(3), 293–318, 2014.
- [105] **Lanc D., Vo T.P., Turkalj G. and Lee J.**, «Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams», *Thin-Walled Structures*, vol. 86, pp. 148–156, 2015.
- [106] **Nguyen T.K., Truong P.N.T., Vo T.P. and Thai H.T.**, «Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 76, pp. 273–285, 2015.
- [107] **Huang Y., Zhang M. and Rong H.**, «Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory», *Acta Mechanica Sinica*, vol. 29, no. 2, pp. 200–207, 2016.
- [108] **Nguyen T.K., Vo T.P., Nguyen B.D. and Lee J.**, «An analytical solution for buckling and vibration analysis of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D shear deformation theory», *Composite Structures*, vol. 156, pp. 238–252, 2016.
- [109] **Şimşek M.**, «Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functionally graded material (2D-FGM) having different boundary conditions», *Composite Structures*, vol. 149, pp. 304–314, 2016.
- [110] **Heydari A., Jalali A. and Nematì A.**, «Buckling analysis of circular functionally graded plate under uniform radial compression including shear deformation with linear and quadratic thickness variation on the elastic foundation», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 41, pp. 494–507, 2017.

- [111] **Shafiei N. and Kazemi M.**, «Buckling analysis on the bidimensional functionally graded porous tapered nano-/micro-scalebeams», *Aerospace Science and Technology*, vol. 66, pp. 1–11, 2017.
- [112] **Li X., Li L., Hu Y., Ding Z. and Deng W.**, «Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory», *Composite Structures*, vol. 165, pp. 250–265, 2017.
- [113] **Nguyen. T.-K, Vo. T. P, and Thai. H.-T**, «Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first order shear deformation theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 55, pp. 147–157, 2013.
- [114] **Nguyen T.T., Thang P.T. and Lee J.**, «Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams», *Composite Structures*, vol. 160, pp. 952–963, 2017.
- [115] **Rahmani O., Khalili S.M.R, Malekzadeh K. and Hadavinia H.**, «Free vibration analysis of sandwich structures with a flexible functionally graded syntactic core», *Composite Structures*, vol. 91, no. 2, pp. 229–235, 2009.
- [116] **Chakraborty A. and S. Gopalakrishnan**, «A Spectrally Formulated Finite Element for Wave Propagation Analysis in Functionally Graded Beams». *International Journal of Solids and Structures* 40 (10): 2421-2448. doi:10.1016/s0020-7683(03)00029-5, 2003.
- [117] **Alshorbagy A.E., Eltaher M.A., Mahmoud F.F.**, «Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method», *Applied Mathematical Modelling*, 35 412–425, 2011.
- [118] **Aminbaghai M. Murin and Kutiš J.V.**, «Modal analysis of the FGM-beams with continuous transversal symmetric and longitudinal vibration of material properties with effect of large axial force», *Engineering Structures*, 34, 314–329, 2012.
- [119] **Oz HR.**, «Calculation of the natural frequencies of a beam-mass system using finite element method», *Mathematical Computational Applications*; 5:67–75, 2000.
- [120] **Aydogdu Metin and Vedat Taskin**, «Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Simply Supported Edges». *Materials & Design* 28 (5): 1651-1656, 2007. doi: 10.1016/j.matdes.2006.02.007.
- [121] **Ying J., Lu C.F. and Chen, W.Q.**, « Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations. », *Composite Structures*, 84, 209-219, 2008.

- [122] **Şimşek M. and Kocatürk T.**, «Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load», *Composite Structures*, vol. 90, no. 4, pp. 465–473, 2009.
- [123] **Sina S.A., Navazi H.M. and Haddadpour H.**, «An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams», *Materials and Design*, vol. 30, no. 3, pp. 741–747, 2009.
- [124] **Huang Y. and Li X.F.**, «Buckling of functionally graded circular columns including shear deformation», *Materials & Design*, vol. 31, no. 7, pp. 3159–3166, 2010.
- [125] **Alshorbagy A.E., Eltaher M.A. and Mahmoud F.**, «Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 35, no. 1, pp. 412–425, 2011.
- [126] **Ansari R., Gholami R. and Sahmani S.**, «Free vibration analysis of size-dependent functionally graded microbeams based on the strain gradient Timoshenko beam theory», *Composite Structures*, vol. 94, no. 1, pp. 221–228, 2011.
- [127] **Hein H. and Feklistova L.**, «Free vibrations of non-uniform and axially functionally graded beams using wavelets», *Engineering Structures*, vol. 33, no. 12, pp. 3696–3701, 2011.
- [128] **Mohanty S.C., Dash R.R. and Rout T.**, «Parametric instability of a functionally graded Timoshenko beam on Winkler's foundation». *Nuclear Engineering and Design*; 241:2698–715, 2011.
- [129] **Shahba A., Attarnejad R., Marvi M.T. and Hajilar, S.**, «Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions». *Composites: Part B*; 42:801–8, 2011.
- [130] **Mei C.**, «Nonlinear vibration of beams by matrix displacement method», *AIAA* 10 (3) 355–357, 1972.
- [131] **Mei C.**, «Finite element analysis of nonlinear vibrations of beam columns», *AIAA* 11 115–117, 1973.
- [132] **Mei C.**, «Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibrations of beams and plates», *Computers & Structures*. 3, 163–174, 1973.
- [133] **Venkateswara Rao G., Kanaka Raju K. and Raju I.S.**, «Finite element formulation for the large amplitude free vibrations of slender beams and orthotropic circular plates». *Computers and Structures*, 6, 169-172, 1976.

- [134] **Gupta R.K., Jagadish Babu G., Ranga Janardhan G. and Venkateswara Rao G.**, « Relatively simple finite element formulation for the large amplitude free vibrations of uniform beams». *Finite Elements in Analysis and Design*, 45, 624-631, 2009.
- [135] **Jagadish Babu G., Gupta R.K., Ranga Janardhan G. and Venkateswara Rao G.**, «Large amplitude free vibration analysis of Timoshenko beams using a relatively simple finite element formulation». *International Journal of Mechanical Sciences*, 52, No. 12, 1597-1604, 2010.
- [136] **Sudhanwa Kulkarni and Mandar Chikate**, «Vibration analysis of Functionally Graded beam by using Finite Element Method». *International Journal of Advanced Research in Civil, Structural, Environmental and Infrastructure Volume-1: Issue-1JAN*, 2013.
- [137] **Mohammad Azadi**, «A finite element method (FEM) free and forced lateral vibration analysis of beams made of functionally graded materials (FGMs)», *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25 (1) 69~80, 2011.
- [138] **Xiang, H.J. and Yang, J.**, « Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction», *Composites: Part B*, 39, 292_303, 2007.
- [139] **Hemmatnezhad M., Ansari R. and Rahimi G.H.**, «Large-amplitude free vibrations of functionally graded beams by means of a finite element formulation». *Applied Mathematical Modelling*, 37, 8495–8504, 2013.
- [140] **Ould Larbi L., Kaci A., Houari M.S.A. and Tounsi, A.**, «An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams», *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 41, 421 –433, 2013.
- [141] **Draiche K., Tounsi A. and Khalfi Y.**, «A trigonometric four variable plate theory for free vibration of rectangular composite plates with patch mass», *Steel and Composite Structures*, 17(1), 69-81, 2014.
- [142] **H. Saidi, Houari M.S.A, Tounsi A. and Adda bedia E.A.**, «Thermo-mechanical bending response with stretching effect of functionally graded sandwich plates using a novel shear deformation theory», *Steel and Composite Structures*, 15 N° 2, 221–245, 2013.

- [143] **Shahba A., Attarnejad R., Marvi M.T. and Hajilar S.**, «Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions», *Composites Part B: Engineering*, vol. 42, no. 4, pp. 801–808, 2011.
- [144] **Yousefi A. and Rastgoo A.**, «Free vibration of functionally graded spatial curved beams», *Composite Structures*, vol. 93, no. 11, pp. 3048–3056, 2011.
- [145] **Shahba A. and Rajasekaran S.**, «Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials», *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 7, pp. 3094–3111, 2012.
- [146] **Thai H.T. and Vo T.P.**, «Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 62, no. 1, pp. 57–66, 2012.
- [147] **Wattanasakulpong N., Gangadhara Prusty B., Kelly D.W. and Hoffman M.**, «Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation», *Materials and Design (1980-2015)*, vol. 36, pp. 182–190, 2012.
- [148] **Wei D., Liu Y. and Xiang Z.**, «An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams with edge cracks», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 331, no. 7, pp. 1686–1700, 2012.
- [149] **Aydin K.**, «Free vibration of functionally graded beams with arbitrary number of surface cracks», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 42, pp. 112–124, 2013.
- [150] **Huang Y., Yang L.E. and Luo Q.Z.**, «Free vibration of axially functionally graded Timoshenko beams with non-uniform cross section», *Composites Part B: Engineering*, vol. 45, no. 1, pp. 1493–1498, 2013.
- [151] **Nguyen T.K., Vo T.P. and Thai H.T.**, «Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first order shear deformation theory», *Composites Part B: Engineering*, vol. 55, pp. 147–157, 2013.
- [152] **Pradhan K.K. and Chakraverty S.**, «Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method», *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 175–184, 2013.
- [153] **Akgöz B. and Civalek Ö.**, «Free vibration analysis of axially functionally graded tapered Bernoulli–Euler microbeams based on the modified couple stress theory», *Composite Structures*, vol. 98, pp. 314–322, 2013.

- [154] **Ziane N., Meftah S.A., Belhadj H.A., Tounsi A. and Bedia E.A.A.**, «Free vibration analysis of thin and thick-walled FGM boxbeams», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 66, pp.273–282, 2013.
- [155] **Hadji L., Daouadji T.H., Tounsi A. and Adda Bedia E.A.**, «A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam», *Steel and Composite Structures*, Vol. 16, no.5, pp. 507-519, 2014.
- [156] **Aghazadeh R., Cigeroglu E. and Dag S.**, «Static and free vibration analyses of small-scale functionally graded beams possessing a variable length scale parameter using different beam theories», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 46, pp.1–11, 2014.
- [157] **Li L., Zhang D.G. and Zhu W.D.**, «Free vibration analysis of a rotating hub–functionally graded material beam system with the dynamic stiffening effect», *Journal of Sound and Vibration*, vol.333, no. 5, pp. 1526–1541, 2014.
- [158] **Liu Y. and Shu D.W.**, «Free vibration analysis of exponential functionally graded beams with a single delamination», *Composites Part B: Engineering*, vol. 59, pp. 166–172, 2014.
- [159] **Liu Y., Xiao J. and Shu D.**, «Free vibration of exponential functionally graded beams with single delamination», *Procedia Engineering*, vol. 75, pp. 164–168, 2014.
- [160] **Mashat D.S., Carrera E., Zenkour A.M., Al Khateeb S.A. and Filippi M.**, «Free vibration of FGM layered beams by various theories and finite elements», *Composites Part B: Engineering*, vol. 59, pp. 269–278, 2014.
- [161] **Yang Y., Kou K.P., Iu V.P., Lam C.C. and Zhang C.**, «Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded structures by a boundary–domain integral equation method», *Composite Structures*, vol. 110, pp. 342–353, 2014.
- [162] **Hadji L., Daouadji T.H. and Adda Bedia E.A.**, «A refined exponential shear deformation theory for free vibration of FGM beam with porosities», *Geomechanics and Engineering*, Vol. 9, no.3, pp.361-372, 2015.
- [163] **Jin. C. and Wang X.**, «Accurate free vibration analysis of Euler functionally graded beams by the weak form quadrature element method», *Composite Structures*, vol. 125, pp. 41–50, 2015.
- [164] **Şimşek M.**, «Bi-directional functionally graded materials (BDFGMs) for free and forced vibration of Timoshenko beams with various boundary conditions», *Composite Structures*, vol.133, pp. 968–978, 2015.

- [165] **Calim. F.F.**, «Free and forced vibration analysis of axially functionally graded Timoshenko beams on two-parameter viscoelastic foundation», *Composites Part B: Engineering*, vol.103, pp. 98–112, 2016.
- [166] **Chen D., Yang J. and Kitipornchai S.**, «Free and forced vibrations of shear deformable functionally graded porous beams», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 108-109, pp. 14–22, 2016.
- [167] **Jing L.I., Ming P.j., Zhang W.P., Fu L.R. and Cao**, «Static and free vibration analysis of functionally graded beams by combination Timoshenko theory and finite volume method», *Composite Structures*, vol. 138, pp. 192–213, 2016.
- [168] **Li L., Li X. and Hu Y.**, «Free vibration analysis of nonlocal strain gradient beams made of functionally graded material», *International Journal of Engineering Science*, vol. 102, pp. 77–92, 2016.
- [169] **Rezaiee-Pajand M. and Hozhabrossadati S.M.**, «Analytical and numerical method for free vibration of double-axially functionally graded beams», *Composite Structures*, vol. 152, pp. 488–498, 2016.
- [170] **Tossapanon P. and Wattanasakulpong N.**, «Stability and free vibration of functionally graded sandwich beams resting on two parameter elastic foundation», *Composite Structures*, vol. 142, pp.215–225, 2016.
- [171] **Zhao Y., Huang Y. and Guo M.**, «A novel approach for free vibration of axially functionally graded beams with non-uniform cross-section based on Chebyshev polynomials theory», *Composite Structures*, vol. 168, pp. 277–284, 2017.
- [172] **Lee J.W. and Lee J.Y.**, «Free vibration analysis of functionally graded Bernoulli-Euler beams using an exact transfer matrix expression», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol.122, pp. 1–17, 2017.
- [173] **Hadji L., Zouatnia N. and Kassoul A.**, «Wave propagation in functionally graded beams using various higher-order shear deformation beams theories», *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 62, no.2, pp. 143-149, 2017.
- [174] **Fang J., Gu J. and Wang. H.**, «Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 136, pp. 188–199, 2018.

Chapitre IV

Effets de chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire sur le comportement en flexion des poutres FG

- [175] **Benatta, M. A., Mechab, I., Tounsi, A., Bedia, E. A. A.** “Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects”. *Computational Material Science*, 44, 765–773, 2008. <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2008.05.020>.
- [176] **Giunta, G., Belouettar, S., and Carrera, E.** “Analysis of FGM beams by means of classical and advanced theories”. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 17 (8), 622–635, 2010. <https://doi.org/10.1080/15376494.2010.518930>.
- [177] **Giunta, G., Crisafulli, D., Belouettar, S., and Carrera, E.** “Hierarchical theories for the free vibration analysis of functionally graded beams”. *Compos. Struct.*, 94, 68–74, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.11.017>.
- [178] **Carrera, E., Brischetto, S.** “Modeling and analysis of functionally graded beams, plates and shells Part-II”. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 18(1), 1–2, 2011. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.537567>.
- [179] **Carrera, E., Giunta, G., and Petrolo, M.** “Beam Structures: Classical and Advanced Theories”, John Wiley & Sons Ltd U.K. ISBN 978-0-470-97200-7, 2011.
- [180] **Ke, L.L, and Wang, Y.S.** “Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory”. *Composite Structures*, vol. 93, no. 2, pp. 342–350. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.09.008>, 2011.
- [181] **Piovan, M.T., and Machado, S.P.** “Thermoelastic dynamic stability of thin-walled beams with graded material properties”. *Thin-Walled Structures*, 49 (3), 437–447, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.11.002>.
- [182] **Nguyen, T.K., Vo, T.P., and Thai, H.T.** “Static and free vibration of axially loaded functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory”. *Composite Part B*, 55, 147–157, 2013. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2010.11.002>.
- [183] **Daouadji, T.H., Henni, A.H., Tounsi, A., and Bedia E.A.A.** “Elasticity solution of a cantilever functionally graded beam”. *Applied Composite Material*, 20, 1–15, 2013. <https://doi.org/10.1007/s10443-011-9243-6>.
- [184] **Bourada M., Kaci A., Houari M.S.A., and Tounsi A.** “A new simple shear and normal deformations theory for functionally graded beams. *Steel and Composite Structures*”, 18, 409–423, 2015. <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2015.18.2.409>.

- [185] **Kolakowski, Z.** “Some aspects of interactive dynamic stability of thin-walled trapezoidal FGM beam-columns under axial load”. *Thin-Walled Structures*, 98, 431–442, 2016. <http://dx.doi.org/10.15632/jtam-pl.54.2.449>.
- [186] **Nguyen, T.T., Wang, P.T. and Lee, J.** “Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams”. *Thin-Walled Structures*, 110, 88–96, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2016.09.021>.
- [187] **Akbas, S.D.** “Geometrically nonlinear analysis of functionally graded porous beams. *Wind and Structures* “, 27 (1), 59–70, 2018. <https://doi:10.12989/was.2018.27.1.059>.
- [188] **Sayyad, A.S., and Ghugal, Y.M.** “A unified five-degree-of freedom theory for the bending analysis of softcore and hardcore functionally graded sandwich beams and plates”. *J. Sandw. Struct. Mater*, 2019. <https://doi.org/10.1177/1099636219840980>.
- [189] **Bellifa, H., Selim, M.M., Chikh, A., Bousahla, A.A., Bourada, F., Tounsi, A., Benrahou, K.H., Al-Zahrani, M.M. and Tounsi, A.** “Influence of porosity on thermal buckling behavior of functionally graded beams. *Smart Structures and Systems*. 27 (4), 719-728, 2021. <http://dx.doi.org/10.12989/sss.2021.27.4.719>.
- [190] **Bouhadra, A., Menasria, A. and Ali Rachedi, M.** “Boundary conditions effect for buckling analysis of porous functionally graded nanobeam”. *Advances in Nano Research*, 10 (4), 313-325, 2021. <https://doi.org/10.12989/anr.2021.10.4.313>.
- [191] **Sankar, B.V., and Tzeng, J.T.** “Thermal stresses in functionally graded beams”. *AIAA Journal*, 40 (6), 1–5, 2002. <https://doi.org/10.2514/2.1775>.
- [192] **Nirmala, K., Upadhyay, P.C., Prucz, J., and Lyons, D.** “Thermoelastic stresses in composite beams with functionally graded layer”. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2(12),1241–1254, 2006. <https://doi.org/10.1177/0731684406059787> .
- [193] **Ma, L.S., and Lee, D.W.** “ A further discussion of nonlinear mechanical behavior for FGM beams under in plane thermal loading”. *Composite Structures*, 93, 831–842, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.07.011>.
- [194] **Ma, L.S., and Lee, D.W.** “Exact solutions for nonlinear static responses of a shear deformable FGM beam under an in plane thermal loading”, *European Journal of Mechanics-A/Solids*,31,13–20,2012.<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.06.016>.
- [195] **Zamanzadeh, M., Rezazadeh, G., Jafarsadeghi-poornaki, I., Shabani, R.** “ Static and dynamic stability modeling of a capacitive FGM micro-beam in presence of temperature changes”. *Applied Mathematical Modelling*, 37(10-11), 6964–6978, 2013. <https://doi:10.1016/j.apm.2013.02.034>.

- [196] **Megharbel, A.E.** “ A theoretical analysis of functionally graded beam under thermal loading”, *World Journal of Engineering and Technology*, 4, 437–449, 2016. <https://doi.org/10.4236/wjet.2016.43044> .
- [197] **Toudehdeghan, A., Rahman, M.M., Tarlochan, F.** “Mechanical and thermal analysis of classical functionally graded coated beam”, *E3S Web of Conferences* 34 01033, 2018. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20183401033>.
- [198] **Zhou, H.M., Zhang, X.M., Wang, Z.Y.** “ Thermal analysis of 2D FGM beam subjected to thermal loading using meshless weighted least-square method”, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 2541707, 10 pages, 2019. <https://doi.org/10.1155/2019/2541707>.
- [199] **Zenkour, A.M.** “Hygro-thermo-mechanical effects on FGM plates resting on elastic foundations”, *Composite Structures* 93(1), 234238, 2010. <https://doi:10.1016/j.compstruct.2010.04.017>.
- [200] **Zidi, M., Taunsi, A., Hauari, M., Bedia, E., Beg, O.A.** “Bending analysis of an FGM plates under hygro-thermo-mechanical loading using a four variable refined plate theory”, *Aerospace Science and Technology* 14 24–34, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2014.02.001>.
- [201] **Zenkour, A.M., Allam, M.N., Radwan, A. F.** “Effects of transverse shear and normal strains on FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loading”, *International Journal of Applied Mechanics*, 6 (5) 1–26, 2014. <https://doi.org/10.1142/S175882511450063X>.
- [202] **Kar, V.R., Mahapatra, T.R. and Panda, S.K.** “Nonlinear flexural analysis of laminated composite flat panel under hygro-thermo-mechanical loading. *Steel and Composite Structures*”, 19 (4), 1011-1033, 2015. <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2015.19.04.1011>.
- [203] **Daouadji, T.H., Adim, B. and Benferhat, R.** “Bending analysis of an imperfect FGM plates under hygro-thermo-mechanical” loading with analytical validation. *Advances in Materials Research*. 5 (1), 35-53, 2016. <http://dx.doi.org/10.12989/amr.2016.5.1.035>.
- [204] **Sobhy, M. and Radwan, A.F.** “A New Quasi 3D Nonlocal Plate Theory for Vibration and Buckling of FGM Nanoplates”, *International Journal of Applied Mechanics*, 9(1), 1750008, 2017. <https://doi:10.1142/S1758825117500089>.
- [205] **Sobhy, M. and Zenkour, A.M.** Vibration analysis of functionally graded graphene platelet-reinforced composite doubly-curved shallow shells on elastic foundations. *Steel*

and Composite Structures, 33, 195-208, 2019. <http://dx.doi.org/10.12989/scs.2019.33.2.195>.

- [206] Refrafi, S., Bousahla, A.A., Bouhadra, A., Menasria, A. Bourada, F., Tounsi, A. Adda Bedia, E.A., Mahmoud, S.R., Benrahou, K.H., and Tounsi, A. “Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations”. Computers and Concrete, 25 (4), 311-325, 2020. <https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.4.311>.
- [207] Merazka, B., Bouhadra, A., Menasria, A., Selim, M.M., Bousahla, A.A., Bourada, F., Tounsi, A., Benrahou, K.H., Tounsi, A. and Al-Zahrani, M.M. “Hygro-Thermo-Mechanical Bending Response of FG plates resting on elastic foundations”. Steel and Composite Structures, 39(5),631-643,2021. <https://doi:10.12989/scs.2021.39.5.631>.
- [208] Bouazza, M. and Zenkour, A.M. “Hygro-thermo-mechanical buckling of laminated beam using hyperbolic refined shear deformation theory”. Composite Structures 252,112689, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112689>.
- [209] Ghumare, S.A. and Sayyad, A.S. “Analytical solutions for the hygro-thermo-mechanical bending of FG beams using a new fifth order shear and normal deformation theory”. Applied and Computational Mechanics. 14 (1), 2020. <https://doi.org/10.24132/acm.2020.580>.

Chapitre V

Résultats Numériques et Discussion

- [210] Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Inam, F., & Lee, J. “Static behaviour of functionally graded sandwich beams using a quasi-3D theory”. Composites Part B: Engineering, 68, 59-74, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.08.030>
- [211] Thai, H. T., & Vo, T. P. “Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories”. International journal of mechanical sciences, 62(1), 57-66, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.05.014>