
Université ABBES LAGHROUR Khenchela



جامعة عباس لغرور خنشلة
Faculté de Sciences et Technologie
كلية العلوم والتكنولوجيا
Département de Génie Mécanique
قسم الهندسة الميكانيكية



Mémoire

De fin d'études Pour l'obtention du diplôme

MASTER (LMD)

Spécialité : Génie Mécanique

Option : Construction Mécanique

Thème

Étude dynamique d'un rotor

Réalisé par :

- *Saoudi Abdelhak*
- *Ben Bouzid Saber*

Dirigé par : *Dr. Meddour Balkacem*

Membres de jury :

- *Dr. Brak Samir*
- *Mr. Himeur Nabil*

Année universitaire : 2020-2021

Dédicace

Je dédie ce travail a :

Mon très cher père et ma très chère mère qui m'ont toujours soutenu et encouragé dans les moments difficiles je leurs témoigne ici affection et gratitude.

A ma Famille ; mes frères :

Assil; Aissam ;Ihab

Ames chers amis :

Hafsaoui Miloud ; Ouannes Lazher

A mon binôme : Ben bouzid Saber

A tous ceux qui tiennent une place dans mon cœur avec lesquels je partage les mots tendresse, amour et amitié.

Remerciement

On remercie dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de Mr Meddour belkacem, on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent également à tous nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles.

Résumé :

Ce mémoire s'intéresse à l'étude des phénomènes vibratoires affectant le comportement dynamique des arbres tournants. Cette étude concerne les vitesses critiques qui conduisent généralement à de problèmes dangereux. On a fait une étude théorique pour obtenir les équations des énergies cinétiques et potentielles des composants du rotor afin de trouver les équations de mouvement puis obtenir les fréquences et donc les vitesses de rotation critiques. Cette étude a été appliquée à un arbre de transmission dans une boîte de vitesses d'un tour parallèle.

ملخص:

هذه المذكرة تهتم بدراسة الظواهر الاهتزازية المؤثرة على السلوك الديناميكي للأعمدة الدوارة، تتعلق هذه الدراسة بالسرعات الحرجة التي في العادة ما تسبب مشاكل خطيرة. لقد قمنا بدراسة نظرية للحصول على معادلات الطاقة الحركية والكامنة لمكونات الدوار وذلك لإيجاد معادلات الحركة ومن ثم الحصول على الترددات ومنه سرعات الدوران الحرجة. وتم تطبيق هذه الدراسة على عمود نقل الحركة في علبة سرعات مخروطية.

Abstract :

The aim of his work is the investigation of the vibratory phenomenons influencing the dyanamic behavior of pivoting shafts. This investigation concerns the basic velocities which by and large lead to dangerous issues. We performed a theoretical study to obtain the kinematic and potential energy equations of the rotor compounds then to find the equations of motion and get the frequencies so rotational speeds. This study was applied to a driveshaft in a lathe gearbox.

Sommaire

Introduction générale

Chapitre I : Modélisation de l'effet de tournoiement (Whirling)

I.1.	Historique	1
I.2.	But de ce chapitre	2
I.3.	Rotor simple	3
I.3.1	Définition.....	3
I.4.	Les composants d'un rotor	3
I.4.1	L'arbre	3
I.4.2.	Disque	4
I.4.3	Balourd	4
I.4.4.	Palier	5
I.5.	Classification des rotors	5
I.5.1.	Modèle de rotor rigide	5
I.5.2.	Modèle de rotor de Jeffcott	5
I.5.3.	Modèle de rotor flexible.....	6
I.5.3.1.	Cas isotrope	6
I.5.3.2.	Cas anisotrope	7
I.6.	Caractéristiques des éléments du rotor.....	7
I.6.1.	Le vecteur de vitesse de rotation.....	8
I.7.	Energies cinétiques des éléments du rotor	9
I.7.1.	L'énergie cinétique de disque	9
I.7.2.	Energie cinétique de l'arbre	10
I.8.	Energie de déformation	11
I.9.	Paliers	12
I.10.	Balourd	13
I.11.	Mise en équation.....	14
I.11.1.	L'équation de mouvement.....	16
I.12.	Conclusion	16

Chapitre II : Modélisation 3D de rotor choisi par SolidWorks

II.1	Introduction	17
II.2	Rotor à modéliser sur SolidWorks	18
II.3	Modelisation du rotor sur SolidWorks	18
II.3	Détermination des caractéristiques inertielles	25
II.4	Conclusion	27

Chapitre III : Application à un arbre de transmission

III.1	. Introduction	28
III.2.	Modèle adopté du rotor.....	28
III.3.	Données de départ de calcul	29
III.4.	Mise en équation.....	30
III.5.	L'énergie cinétique totale	30
III.5.1.	L'énergie cinétique de l'arbre	31
III.5.2.	L'énergie cinétique des trois disques	31
III.5.3.	L'énergie cinétique des trois balourds	32
III.6.	L'énergie de déformation	33
III.7.	Equations du mouvement	33
III.8.	Les fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation.....	34
III.9.	Diagramme de Campbell	37
III.10.	Réponse aux forces d'excitation.....	39
III.11.	Conclusion	41

Chapitre IV : Calcul dynamique en torsion

IV.1.	Introduction	42
IV.2.	Modèle de calcul.....	42
IV.3.	Données de calcul	43
IV.3.1.	Equations de mouvement	44
IV.4.	Conclusion	47

Conclusion générale

Tables des figures

Figure .I.1. Modèle de rotor Rankine	1
Figure .I.2. Modèle de Jeffcott	2
Figure .I.3. Rotor simple	3
Figure .I.4. Exemple d'arbre	4
Figure .I.5. Élément de disque	4
Figure .I.6. Élément de balourd	5
Figure .I.7. Palier à roulement	5
Figure .I.8. Modèle de Laval / Jeffcott.....	6
Figure .I.9. Modèle de Laval / Jeffcott sur paliers flexibles.	7
Figure .I.10. Système équivalent du modèle de Laval / Jeffcott avec paliers flexibles.	7
Figure .I.11. Repère de référence du disque sur l'arbre flexible.	8
Figure .I.12. Les angles d'Euler.	8
Figure .I.13. La géométrie de disque.	10
Figure .I.14. Configuration géométrique pour déterminer les déformations dans la section de l'arbre.	11
Figure .I.15. Amortissements et raideurs de palier	13
Figure .I.16. Balourd.	13
Figure .I.17. Les angles ψ et θ	15
Figure .II.1. Page d'Accueil du logiciel SolidWorks.....	17
Figure .II.2. boîte de vitesse d'une machine de tournage.....	18
Figure .II.3. Modélisation de l'arbre.....	19
Figure .II.4. Modélisation de la 1 ^{ère} dentée.....	19
Figure .II.5. Modélisation de la deuxième roue.	20
Figure .II.6. L'assemblage du rotor.....	20
Figure .II.7. Etape à suivre pour extraire les caractéristiques inertielles sur SolidWorks.	25
Figure .II.8. Les caractéristiques inertielles de l'arbre.	25
Figure .II.9. Caractéristiques inertielles de la 1 ^{ère} roue.....	26

Figure .II.10.Ses propriétés inertielles	26
Figure .III.1. Rotor choisi pour l'étude.	28
Figure .III.2. Modèle de rotor à calculer.	28
Figure .III.3. Courbe de fonction $\omega_1(\Omega)$	36
Figure. III.4. Courbe de fonction $\omega_2(\Omega)$	37
Figure.III.5. Diagramme de Campbell.	38
Figure.III.6. Réponse du balourd.	40
Figure .IV.1 Rotor simple à trois disques.....	43
Figure .IV.2. Isolation des trois disques.....	44
Figure .IV.3. 1 ^{er} mode propre de vibration.....	46
Figure. IV.4. 2 ^{ème} mode propre de vibration.	47

Liste des tableaux

Tableau 1. Représentation de la déformée d'une poutre simple par série trigonométrique.....	14
Tableau .II.1. Données d'inertie des composants du rotor.	27
Tableau .III.1. Les caractéristiques de l'arbre	30
Tableau .III.2. Les caractéristiques de la roue 1 et 3.	30
Tableau .III.2. Les caractéristiques de la roue 2.....	30
Tableau.III.3. Les caractéristiques du balourd.	31
Tableau .IV.1. Les caractéristiques du rotor.....	44

LISTE DES SYMBOLES

Variable	Désignation
T_{tot}	Énergie cinétique totale
T_a	Énergie cinétique de l'arbre
T_d	Énergie cinétique de disque
T_b	Énergie cinétique de balourd
U	Énergie de déformation.
q_i	Coordonnées généralisées du système
F_{q_i}	Force généralisée
ψ	Angle de précession autour de l'axe Oz
θ	Angle de nutation autour de l'axe Ox
φ	Angle de rotation autour de l'axe Oy
Ω	Vitesse de rotation
ω	Pulsation propre
u	Déplacement de l'arbre selon l'axe Ox
w	Déplacement de l'arbre selon l'axe Oz
m_d	La masse de disque
ρ	La masse volumique
h	L'épaisseur de disque
R	Le rayon extérieur de disque
r	Le rayon intérieur de disque
$I_{dO/}$	Le tenseur d'inertie du disque dans le repère ROxyz
I_{dx}	Le moment d'inertie de disque par à rapport Ox
I_{dy}	Le moment d'inertie de disque par à rapport Oy
I_s	Le moment quadratique de l'arbre par à rapport Ox
ε	La déformation longitudinale
σ	La contrainte
V	Le volume
k_{xx}	La rigidité des paliers selon l'axe Ox
k_{zz}	La rigidité des paliers selon l'axe Oz
c_{xx}	L'amortissement des paliers selon l'axe Ox
c_{zz}	L'amortissement des paliers selon l'axe Oy
δW_p	Le travail virtuel de forces extérieures
F_u	Force généralisée autour de l'axe O

F_w	Force généralisée autour de l'axe Oz
m_b	La masse de balourd
O	Centre géométrique de l'arbre O
d	La distance de balourd
$f(y)$	La déformée
L	La longueur de l'arbre
l_1	La position de disque
l_2	La position des paliers
S	L'aire de la section droite de l'arbre
A_e	Limite de déplacement
G	Module d'élasticité transversale
α	Angle de torsion
I_{Os}	Moment quadratique polaire
k_t	La raideur de l'arbre en torsion
ω_0	La fréquence propre du rotor en torsion

Introduction générale

Les machines tournantes comme l'indique leur nom sont composées principalement par des arbres tournant sur les quels sont montées des objets mécaniques tournant tels les turbines, les générateurs, les roues dentées etc. Ces arbres avec ses objets tournants guidés en rotation par des paliers constituent ce qu'on appelle les rotors, ceux-ci se trouvant dans plusieurs domaines d'application (machines-outils, turbines, véhicules, turbocompresseurs, nucléaire, l'industrie pétrolière, etc.). Cependant un effet nuisible auquel ces rotors font face est le tournoiement qui est généré par des balourds existant sur l'ensemble du rotor, ce phénomène est dangereux et peut conduire à des résultats indésirables à la machine. C'est dans ce contexte que ce travail a été proposé, on a choisit un rotor, monté sur un tour à l'usine de Constructions mécaniques à Khenchela, sur lequel on a réalisé une étude dynamique en considérant principalement le tournoiement suivi par la vibration en torsion.

Pour arriver aux objectifs tracés on a scindé le travail comme suit :

- Le premier chapitre a été consacré à la présentation du modèle analytique de calcul du phénomène de tournoiement.
 - Le deuxième traite surtout la modélisation du rotor choisi par Solidworks bien sûr à partir des caractéristiques dimensionnelles des éléments et tout ça dans le but de déterminer les propriétés inertielles de chaque élément.
 - Dans le troisième on réalise les calculs nécessaires en appliquant les données dimensionnelles et inertielles
 - Le dernier est réservé au calcul des vibrations en torsion
-

Chapitre I

Chapitre I : Modélisation de l'effet de tournoiement (Whirling)

I.1. Historique

La dynamique des rotors est une discipline de faisant partie des sciences de la mécanique qui a une remarquable histoire due à l'effet réciproque entre la théorie et la pratique.

Elle concerne essentiellement l'étude du comportement vibratoire des machines tournantes telles que les pompes, les turbines, les compresseurs, les réacteurs etc. Malgré que la dynamique des rotors soit connue depuis l'invention de la roue, sa recherche proprement dite a commencé avec Rankine qui a publié un article en 1869 sur les mouvements de tournoiement (terme spécifique au phénomène vibratoire de l'arbre en flexion) d'un arbre tournant. Mais celui-ci a utilisé incorrectement la deuxième loi de Newton en choisissant un modèle incomplet (Fig. 1) et conclût que pour une certaine vitesse de rotation critique l'arbre tournant fléchit considérablement et qu'au-delà de cette vitesse son fonctionnement serait impossible [1].

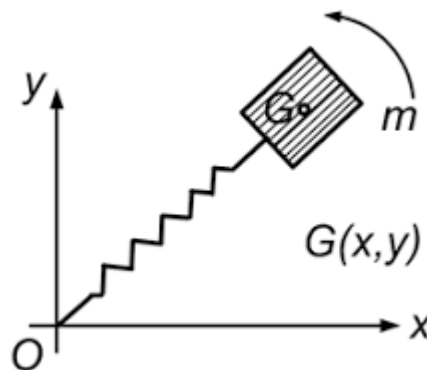


Figure .I.1. Modèle de rotor Rankine [2]

Ainsi le système peut mener aux amplitudes excessives de vibration. Rankine a négligé l'accélération de Coriolis dans son analyse, qui a mené à des conclusions incorrectes qui ont confondu les ingénieurs de pratique pour la moitié par siècle. La turbine construite par Parsons en 1884 (Parsons, 1948) a fonctionné aux vitesses d'environ 18.000t/mn, qui étaient 50 fois plus rapidement que le moteur existant à ce moment-là. En 1883, l'ingénieur suédois de Laval a développé une turbine à vapeur en une seule étape d'impulsion pour des applications marines et réussi à l'actionner à 42.000 t/mn. Il a visé le d'auto-centrage du disque au-dessus de la vitesse critique, un phénomène qu'il a instinctivement identifié. Il a utilisé la pour la première fois un rotor rigide, mais plus tard a utilisé un rotor flexible et a prouvé qu'il était possible d'utiliser au- dessus de la vitesse critique par le fonctionnement à une vitesse de rotation environ sept fois la vitesse Critique (Stodola, 1924). Afin de calculer les vitesses critiques

des axes cylindriques avec plusieurs disques et roulements, la théorie générale de Reynolds (Dunkerley, 1895) a été appliquée. L'effet gyroscopique a été également appliqué [2]

Dans la même année Föppl démontra analytiquement que l'opération au-delà de la vitesse critique est possible, en 1989 Laval a travaillé sur une turbine à vapeur grâce à laquelle il a atteint la confirmation de ses hypothèses des précédents expérimentalement tel que Il a réussi à opérer à sept fois la vitesse critique. [1]

En 1916 Kerr calcula la deuxième vitesse critique et montra ses preuves expérimentales. La théorie fondamentale d'abord enregistrée de dynamique des rotors peut être trouvée dans un papier classique par Jeffcott en 1919. Jeffcott a confirmé la prévision de Föppl qu'une solution supercritique stable a existé, et il a prolongé l'analyse de Föppl en incluant l'atténuation externe (c.-à-d. atténuant les forces qui dépendent seulement de la vitesse absolue du rotor, tandis que l'atténuation interne vient du taux de déformation de l'axe, a souvent appelé l'atténuation tournante) et a prouvé que la phase de la tache lourde change sans interruption pendant que le taux de rotation traverse la vitesse critique. Les grandes contributions de Jeffcott seront appréciables si nous nous rappelons qu'un axe flexible de masse négligeable avec un disque dur au midspan s'appelle rotor de Jeffcott (Fig. 2). [2]

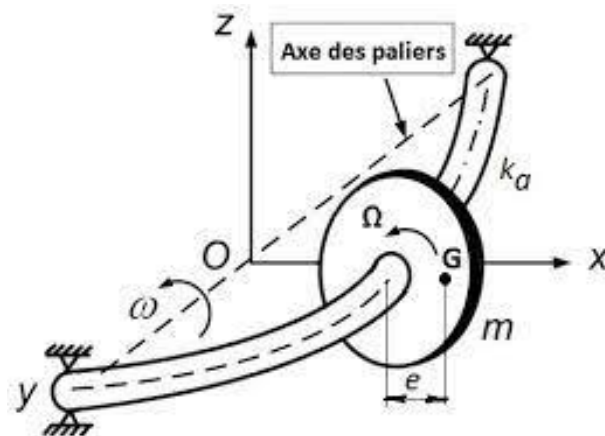


Figure I.2. Modèle de Jeffcott [2]

I.2. But de ce chapitre

Dans ce chapitre on vise à écrire les équations régissant le mouvement vibratoire des rotors simples, et cela en se basant sur la détermination des énergies cinétiques et de l'énergie de déformation des éléments du rotor et l'utilisation des hypothèses pour simplifier le problème et le rendre résoluble analytiquement.

Lorsqu'un arbre tourne, il tend à certaines vitesses de rotation à fléchir et donc à vibrer transversalement. Ces oscillations font tourbillonner l'arbre autour de son axe d'équilibre statique et ce phénomène

s'appelle " Whirling ", mot Anglais introduit pour la première fois par Rankine en 1869 et voulant dire tournoiement.

Le whirling peut être le résultat de plusieurs causes telles que les balourds, les forces gyroscopiques, l'amortissement d'hystérésis, les paliers, les frottements d'huiles dans les paliers, les raideurs non-symétriques, etc.

I.3. Rotor simple

I.3.1 Définition

Le rotor peut être défini d'une manière suivante :

Le rotor se compose de :

- Un arbre rotatif
- Un disque porté par l'arbre généralement flexible ou rigide
- Paliers aux extrémités de l'arbre, supposées supporter l'arbre de la même manière (Fig. 3).

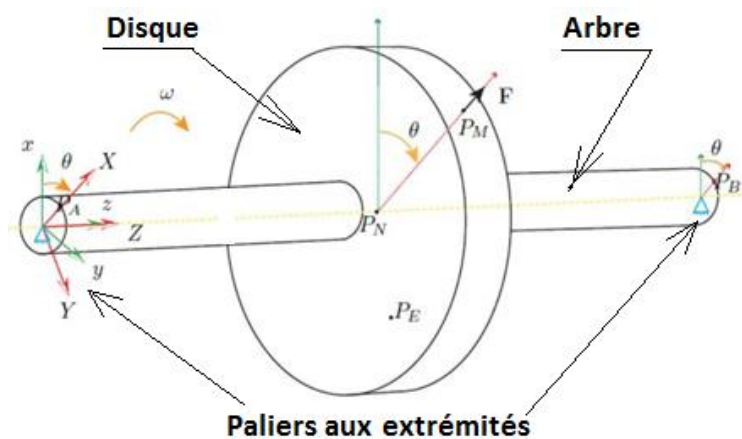


Figure.I.3. Rotor simple [3].

I.4. Les composants d'un rotor

I.4.1 L'arbre

Un arbre est l'élément qui transmet la puissance sous forme de couple et de mouvement de rotation. Les arbres portent généralement des roues dentées, des poulies, des volants, des manivelles, des pignons ou d'autres composants qui transmettent la position angulaire ou la puissance. C'est donc l'un des composants mécaniques les plus couramment utilisés (Fig. 4).

Selon sa géométrie et sa fonction, un arbre peut avoir différentes qualifications, par exemple :

- Arbre d'entraînement, s'il transmet la puissance du moteur à la machine ou à une partie de la machine ;

Arbre de renvoi, s'il distribue un mouvement de rotation entre différents éléments [4]

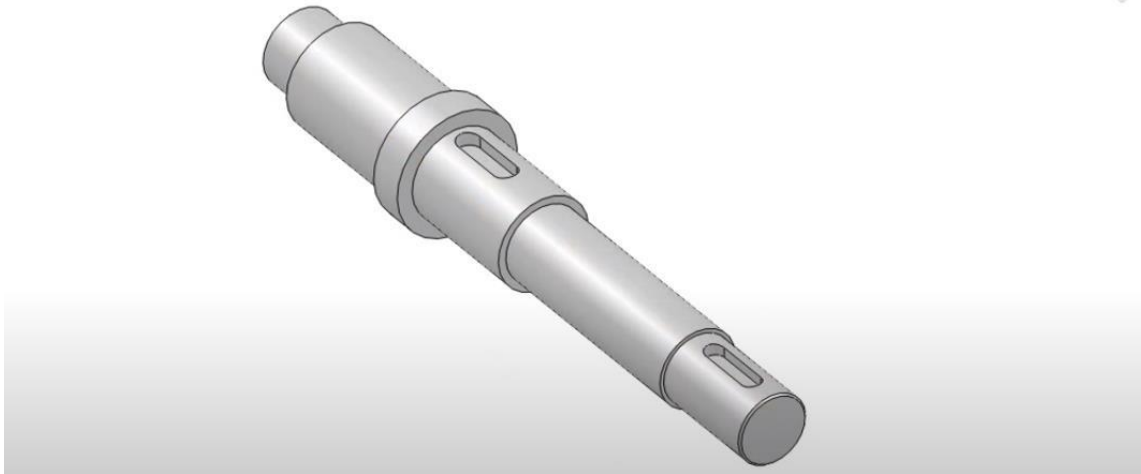


Figure.I.4. Exemple d'arbre [5].

I.4.2. Disque

Une roue dentée, une poulie ou un volant peuvent être modélisés comme un disque, pouvant être déformé ou rigide. La roue peut être représentée par la forme géométrique d'un cylindre (Fig. 5) ; mais en analyse dynamique, cette forme est limitée [6].



Figure .I. 5. Élément disque [7].

I.4.3 Balourd

I.4.3 Un balourd est toute masse m_b excentrique du rotor (masse non située sur l'axe de rotation). Il est situé à une distance d du centre géométrique de l'arbre, comme le montre la figure (Fig.6). [8]

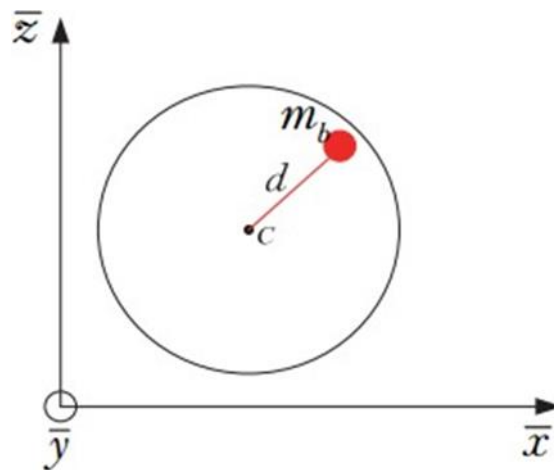


Figure.I.6. Élément balourd [8]

I.4.4. Palier

Le palier est aussi appelé support, il peut être flexible (isotrope ou anisotrope) ou rigide. Le palier constitue un système de dissipation ou non lorsque la flexibilité est anisotrope (Fig. 7). [8]



Figure.I.7. Palier à roulement [8].

I.5. Classification des rotors

I.5.1. Modèle de rotor rigide

Si la déformation de l'arbre est négligeable dans la plage de vitesses de rotation de service, il est appelé rotor rigide [9].

I.5.2. Modèle de rotor de Jeffcott

Le modèle de base ou élémentaire utilisé dans l'introduction à la compréhension du comportement dynamique vibratoire des arbres et rotors est le modèle utilisé par H. Jeffcott (1919), pour analyser la vibration transversale des arbres au voisinage de la vitesse critique (la plus basse).

Le modèle (Fig. 8) est essentiellement constitué de :

- Un disque de masse m monté au centre sur un arbre uniforme flexible e . C'est à dire que son centre de masse et son centre géométrique ne sont pas confondus.
- Un arbre de masse faible et de raideur en flexion k_a . [1]

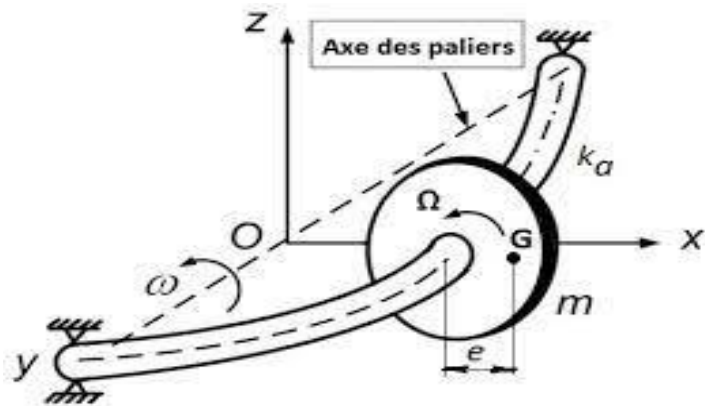


Figure I.8. Modèle de Laval / Jeffcott.[2]

I.5.3. Modèle de rotor flexible

Un rotor est généralement considéré comme étant souple ou flexible quand il fonctionne à proximité ou au-dessus de sa fréquence naturelle (vitesse critique). La règle de base est de considérer un rotor flexible s'il fonctionne à 70% de la 1^{ère} critique ou plus rapide.

Si l'arbre commence à se déformer sensiblement au début de la plage des vitesses de fonctionnement, il est appelé un rotor flexible [3]

I.5.3.1. Cas isotrope

Considérons maintenant le modèle simple de Laval Jeffcott sur deux portés par deux paliers flexibles identiques et considérons le cas où ces deux dernières soient isotropes, c'est à dire que leurs caractéristiques (raideurs et viscosités) sont les mêmes dans les deux directions Ox et Oz (Fig. 9).

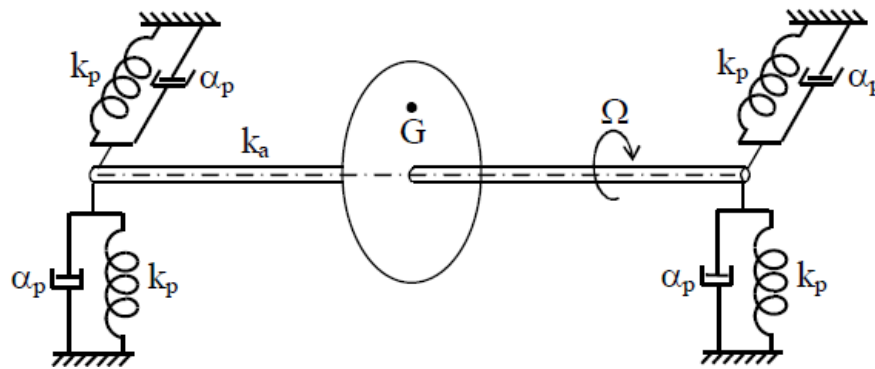


Figure .I. 9. Modèle de Laval / Jeffcott avec paliers flexibles. [1]

Pour permettre l'étude du mouvement dans chacune des deux directions le modèle peut être représenté par le système masse- ressort- amortisseur (Fig. 10) :

$$k_x = k_z \text{ et } \alpha_x = \alpha_z$$

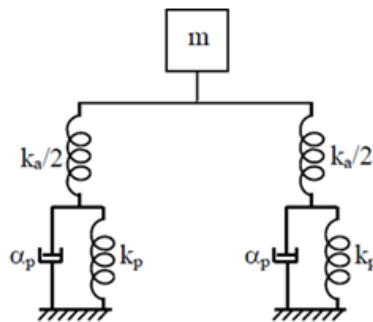


Figure.I.10. Système équivalent du modèle de Laval / Jeffcott avec paliers flexibles. [10]

I.5.3.2. Cas anisotrope

Les raideurs et les viscosités des paliers sont différents suivants les directions Ox et Oz:

$$k_x \neq k_z \text{ et } \alpha_x \neq \alpha_z$$

I.6. Caractéristiques des éléments du rotor

L'équation générale du rotor dépend des équations partielles de ses composants de base :

- L'énergie cinétique T_i de chacune des éléments ; le disque, l'arbre et le balourd
- L'énergie de déformation U de l'arbre.
- Les forces extérieures

Les équations de Lagrange s'écrivent comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = F_{q_i} \tag{I.1}$$

Où N ($1 \leq i \leq N$) est le nombre de degrés de liberté, q_i sont les coordonnées généralisées indépendantes sont les forces généralisées et ou (0) désigne une dérivée par rapport au temps

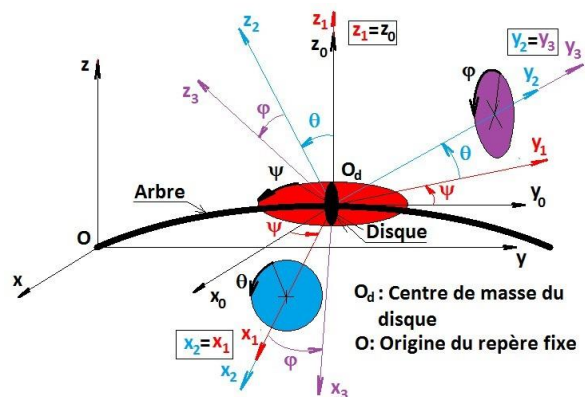


Figure .I.11. Repère de référence du disque sur l'arbre flexible.

Pour déterminer l'orientation du disque on considère les rotations successives suivantes :

- * La précession ψ

Rotation autour de l'axe $O'z$ qui fait passer de $O'xyz$ à $o'x_1y_1z$ (voir fig11a).

- * La nutation θ

Rotation autour l'axe $O'x_1$ qui fait passer de $O'x_1y_1z$ à $o'x_1y'z_2$ (voirfig11b).

- * La rotation propre ϕ

Rotation autour de l'axe $O'y'$ qui fait passer de $O'x_1y'z_2$ à $O'x'y'z'$ (voir Fig. 11c).

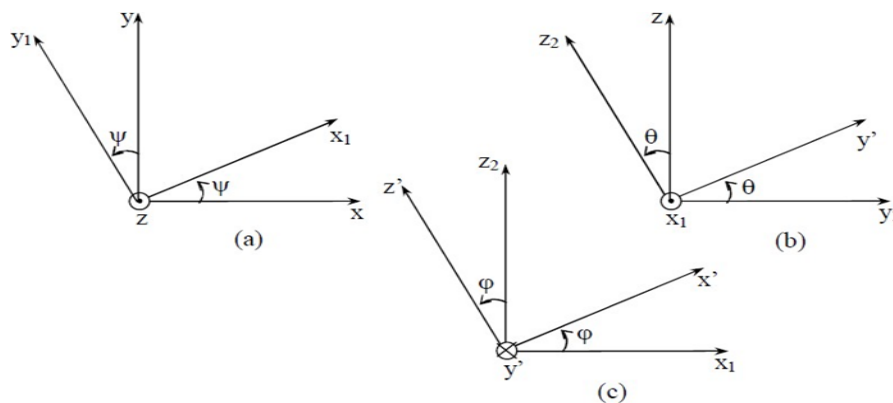


Figure.I.12. Les angles d'Euler.

I.6.1. Le vecteur de vitesse de rotation

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{z}_1 + \dot{\theta}\vec{x}_2 + \dot{\phi}\vec{y}_3 \tag{I.2}$$

Ce vecteur est écrit en fonction des vecteurs unitaires $\vec{z}_1, \vec{x}_2, \vec{y}_3$, des axes $(O_dz_1), (O_dx_2)$ et (O_dy_3) .

Il doit écrire le vecteur de vitesse de rotation en fonction des coordonnées de repère (O_d, x_3, y_2, z_3) .

Pour cela il faut exprimer les vecteurs unitaires \vec{z}_1, \vec{x}_2 en fonction des vecteurs unitaires de repère (O_d, x_3, y_2, z_3) et après un développement mathématique on trouve :

$$\vec{z}_1 = \cos \theta \vec{z}_2 + \sin \theta \vec{y}_1 \quad (\text{I.3})$$

$$\vec{z}_2 = \sin \varphi \vec{x}_3 + \cos \varphi \vec{z}_3 \quad (\text{I.4})$$

$$\vec{y}_1 = \vec{y}_3 \quad (\text{I.5})$$

$$\vec{z}_1 = \cos \theta (\sin \varphi \vec{x}_3 + \cos \varphi \vec{z}_3) + \sin \theta \vec{y}_3 \quad (\text{I.6})$$

$$\vec{z}_1 = \cos \theta \sin \varphi \vec{x}_3 + \cos \theta \cos \varphi \vec{z}_3 + \sin \theta \vec{y}_3 \quad (\text{I.7})$$

$$\vec{x}_2 = \cos \varphi \vec{x}_3 - \sin \varphi \vec{z}_3 \quad (\text{I.8})$$

Finalement celui-ci s'écrit :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

Du fait que la flexion de l'arbre est faible, les angles θ, ψ sont petits, cela emmène à écrire : $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$

On prend aussi $\dot{\varphi} = \Omega$ tel que :

Ω : La vitesse constante de disque.

Le vecteur de vitesse de rotation s'écrira :

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \Omega + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (\text{I.10})$$

I.7. Energies cinétiques des éléments du rotor

I.7.1. L'énergie cinétique de disque

L'expression de l'énergie cinétique de disque s'écrit sous la formule suivante :

$$\begin{aligned} T_d^{\text{rot}} &= \frac{1}{2} I_{dx0} \omega_{x0}^2 + \frac{1}{2} I_{dy0} \omega_{y0}^2 + \frac{1}{2} I_{dz0} \omega_{z0}^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{\psi} \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega + \dot{\psi} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2} I_{dz0} (\dot{\psi} \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi)^2 \\ &= \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{\psi}^2 \sin^2 \varphi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi + 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \varphi \sin \varphi) + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega^2 + \dot{\psi}^2 \theta^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) + \\ &\frac{1}{2} I_{dz0} (\dot{\psi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi - 2\dot{\psi}\dot{\theta} \cos \varphi \sin \varphi) \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

I_{dx0} : Le moment d'inertie par rapport à l'axe x_0

I_{dy0} : Le moment d'inertie par rapport à l'axe y_0

I_{dz0} : Le moment d'inertie par rapport à l'axe z_0

I_{dx0}, I_{dz0} sont égaux du fait de la symétrie du disque. $I_{dx0} = I_{dz0}$

$$T_d^{\text{rot}} = \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega^2 + 2\psi\theta) \quad (\text{I.12})$$

Le mouvement de translation du disque peut être repéré par les coordonnées u, w suivant les axes Ox et Oz

m_d : La masse de disque telle que $m_d = \pi h \rho_d (R^2 - r^2)$.

ρ_d : La densité volumique du disque.

Son énergie cinétique de translation est donnée comme suit :

$$T_d^{\text{trans}} = \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \quad (\text{I.13})$$

L'énergie totale de disque :

$$T_d^{\text{tot}} = T_d^{\text{rot}} + T_d^{\text{trans}}$$

$$T_d^{\text{tot}} = \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega^2 + 2\Omega\psi\theta) + \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) \quad (\text{I.14})$$

$I_{dy0} \Omega \psi \theta$: Terme dû à l'effet gyroscopique (Coriolis)

Le tenseur d'inertie du disque s'écrit :

$$I_{d/0} = \begin{bmatrix} I_{dx0} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy0} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_d}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_d}{2} (R^2 + r^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_d}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2) \end{bmatrix}$$

A remarquer :

$$I_{dx0} = I_{dz0} = \frac{m_d}{12} (3R^2 + 3r^2 + h^2)$$

$$I_{dy0} = \frac{m_d}{2} (R^2 + r^2)$$

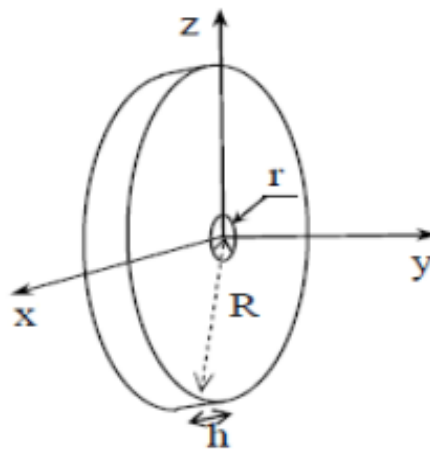


Figure 13. La géométrie de disque. [9]

I.7.2. Energie cinétique de l'arbre

La formule de l'énergie cinétique de l'arbre s'inspire de celle de l'énergie cinétique du disque sauf que l'arbre est un système continu considéré comme une poutre circulaire infiniment mince d'épaisseur dy , de section droite $S_a=s$, de masse volumique $\rho_a=\rho$ et de longueur L .

L'énergie cinétique de l'arbre s'exprime comme suit :

$$T_a^{\text{tot}} = \frac{1}{2} I_s \rho \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \frac{1}{2} I_s \rho \Omega^2 L + 2 I_s \Omega \rho \int_0^L \dot{\psi} \theta dy + \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy \quad (\text{I.15})$$

$\frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy$: Energie cinétique d'une poutre en flexion.

$\frac{1}{2} I_s \rho \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy$: Effet secondaire de l'inertie de rotation.

$2 I_s \rho \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy$: Effet gyroscopique.

$\frac{1}{2} I_s \rho \Omega^2 L$: Ce terme apparait constant n'a et par conséquent il ne sera pas pris en compte dans les équations de mouvement (La dérivée de constante est nulle).

I.8. Energie de déformation

Considérons le centre géométrique de la section droite de l'arbre et un B de la section droite. Sachant que le déplacement suivant l'axe y est supposé inexistant, l'énergie de déformation de l'arbre se calcule à partir de la position du point B.

Soit la configuration géométrique qui est illustrée dans la figure (Fig.14):

- ε et σ représentant successivement la déformation et la contrainte suivant l'axe de l'arbre
- u^* et w^* les déplacements du centre géométrique de l'arbre par rapport au repère $R(x,y,z)$

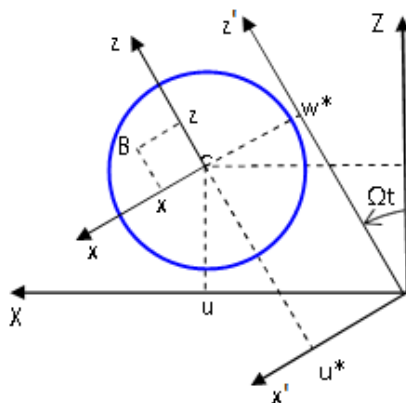


Figure 14. Configuration géométrique pour déterminer les déformations dans la section de l'arbre. [10]

La déformation linéaire au point B s'écrit :

$$\varepsilon_{yy} = -x' \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z' \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (\text{I.16})$$

L'énergie de déformation de l'arbre est donnée par l'expression suivante :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_v \varepsilon_{yy}^2 dv \quad (\text{I.17})$$

Où :

V : Volume de l'arbre

On remplace l'expression (17) dans (18) on trouve :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_V \left(-x' \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z' \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dV \quad (I.18)$$

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \int_S \left[x'^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z'^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2x'z' \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] ds dy \quad (I.19)$$

A cause de la symétrie de la section le terme $\left(2x'z' \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)$ de l'intégrale est nul par suite, on aura :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_{sz'} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_{sx'} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (I.20)$$

Et d'autre coté on a les deux vecteur de déplacement :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t. \quad (I.21)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t. \quad (I.22)$$

Avec : $I_{sx'} = I_{sz'} = I_s$

En remplaçant les deux relations (22) et (23) dans l'expression de (21) :

$$U_a = \frac{EI_s}{2} \int_0^L \left[\left(\cos^2 \Omega t \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - \sin^2 \Omega t \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\sin^2 \Omega t \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} + \cos^2 \Omega t \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (I.23)$$

Après la simplification on aura :

$$U_a = \frac{EI_s}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (I.24)$$

I.9. Paliers

Le palier supporte l'arbre en agissant par des forces d'action sur lui. Dans le cas général l'action palier/arbre se fait avec des caractéristiques de rigidité et d'amortissement (Fig. 15):

$k_{xx}, k_{zz}, c_{xx}, c_{zz}$ les rigidités et les amortisseurs selon les directions x et z de l'arbre.

$K_{xz}, k_{zx}, c_{xz}, c_{zx}$ les rigidités et les amortissements dans une direction (x ou z) mais affectés par l'autre direction.

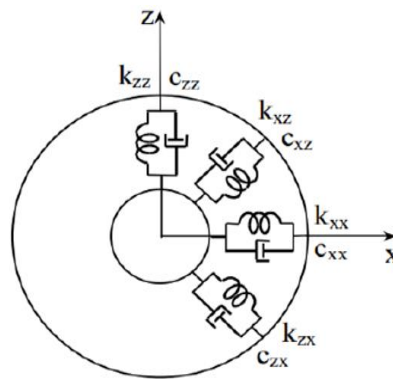


Figure.I.15. Amortissements et raideurs de palier [9]

Le travail virtuel des forces agissant sur l'arbre s'écrit :

$$\delta W = -k_{xx}u\delta u - k_{xz}w\delta u - k_{zz}w\delta w - k_{zx}u\delta w - c_{xx}\dot{u}\delta u - c_{xz}\dot{w}\delta u - c_{zz}\dot{w}\delta w - c_{zx}\dot{u}\delta w \quad (I.25)$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$\delta W = F_u\delta u + F_w\delta w \quad (I.26)$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xz} \\ c_{zx} & c_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (I.27)$$

Où F_u et F_w sont les composantes de la force généralisée

I.10. Balourd

C'est la caractéristique du déséquilibre est que son énergie cinétique est composée de masses ponctuelles m_d qui est placée dans le plan du disque à une distance d du centre du disque. Le centre de masse du disque est C, Masse déséquilibrée en D voir (Fig. 16)

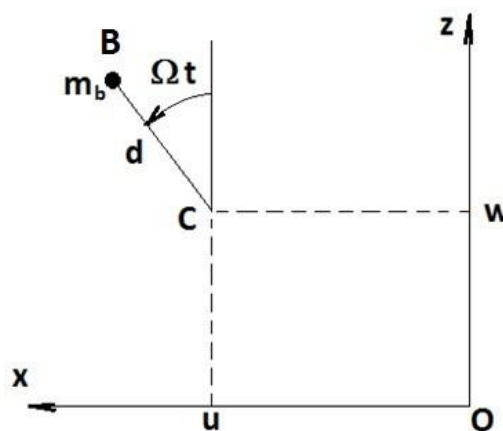


Figure.I.16. Balourd. [11]

Les coordonnées du balourd dans le repère fixe R (O, x, y, z) sont données par :

$$\vec{OB} = \begin{pmatrix} u + d \cos \Omega t \\ 0 \\ w + d \sin \Omega t \end{pmatrix} \quad (\text{I.28})$$

D'où la vitesse :

$$\vec{V}_B = \frac{d\vec{OB}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{pmatrix}. \quad (\text{I.29})$$

Et l'énergie cinétique est :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b [(\dot{u} + d\Omega \cos \Omega t)^2 + (\dot{w} - d\Omega \sin \Omega t)^2] \quad (\text{I.30})$$

Après une simplification mathématique on aura :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b [\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + d^2 \Omega^2 + 2\dot{u}d\Omega \cos \Omega t - 2\dot{w}d\Omega \sin \Omega t] \quad (\text{I.31})$$

A remarquer que :

- $\frac{1}{2} m_b d^2 \Omega^2$ ce terme étant constant, n'intervient pas dans les équations.
- La quantité $\frac{1}{2} m_b (\dot{u}^2 + \dot{w}^2)$ ajoutée à la masse de l'arbre et du disque paraît négligeable.

Donc finalement l'énergie cinétique du balourd s'écrit :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b [\dot{u}d\Omega \cos \Omega t - \dot{w}d\Omega \sin \Omega t] \quad (\text{I.32})$$

I.11. Mise en équation

La méthode Rayleigh Ritz est l'une des méthodes de calcul les plus pratiques. Cette méthode est basée sur la séparation des variables c.à.d. écrire les déplacements en un produit d'une fonction représentant la déformée par une autre fonction représentant la coordonnée généralisée.

Le tableau (Tab. 1) illustre les modes de vibrations d'une poutre s'appuyant sur deux appuis.

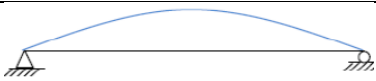
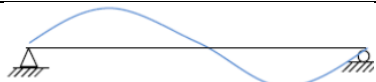
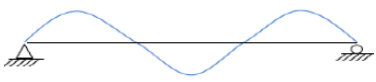
Modes	Fonction déformée	Illustration
1 ^{er} mode	$f(y) = b_1 \sin \pi x/L$	
2 ^{ème} mode	$f(y) = b_2 \sin 2\pi x/L$	
3 ^{ème} mode	$f(y) = b_3 \sin 3\pi x/L$	

Tableau.I.1. Représentation de la déformée d'une poutre simple par série trigonométrique

Les vecteurs de déplacements peuvent s'écrire en fonction de la fonction de déformée

$$u(y, t) = f(y)q_1(t) \quad \text{alors} \quad \dot{u} = f(y)\dot{q}_1 \quad (\text{I.33})$$

$$w(y, t) = f(y)q_2(t) \quad \text{alors} \quad \dot{w} = f(y)\dot{q}_2 \quad (\text{I.34})$$

Où :

- q_1 et q_2 sont les coordonnées généralisées indépendantes.
- $f(y)$ est la fonction forme du mode.

L'approximation de ψ et θ :

$$\text{tg}(-\psi) = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{Ou} \quad \text{tg}(\psi) = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \text{tg}(\theta) = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{I.35})$$

Comme ψ et θ sont petits :

$$\psi \approx \text{tg}(\psi) = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{Et} \quad \theta \approx \text{tg}(\theta) = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (\text{I.36})$$

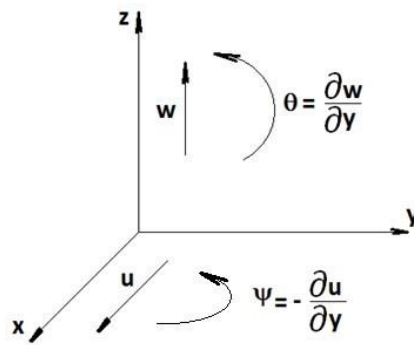


Figure.I.17. Les angles ψ et θ

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -q_1 \frac{\partial f(y)}{\partial y} = -q_1 g(y) \quad \text{et} \quad \dot{\psi} = -\dot{q}_1 g(y) \quad (\text{I.37})$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = q_2 \frac{\partial f(y)}{\partial y} = q_2 g(y) \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \dot{q}_2 g(y) \quad (\text{I.38})$$

Les dérivées du second ordre de u et w sont aussi nécessaires pour exprimer l'énergie de déformation elle s'écrit : L'énergie cinétique disque-arbre devient :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = q_1 h(y) \quad (\text{I.39})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = q_2 h(y) \quad (\text{I.40})$$

On remplace ces paramètres et ces approximations dans l'équation totale de l'énergie cinétique et aussi dans l'énergie de déformation pour le but de diminuer le nombre des variables

$$\begin{aligned} T_d^{\text{tot}} + T_a^{\text{tot}} + T_b = & \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) + \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \\ & \frac{1}{2} I_s \rho \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \frac{1}{2} I_s \rho \Omega^2 L + 2 I_s \Omega \rho \int_0^L \dot{\psi}\theta dy + \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \\ & \frac{1}{2} m_b [\dot{u} \Omega \cos \Omega t - \dot{w} \Omega \sin \Omega t] \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

$$\begin{aligned} T_d^{\text{tot}} + T_a^{\text{tot}} + T_b = & \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{q}_1^2 g(y_d)^2 + \dot{q}_2^2 g(y_d)^2) + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega^2 - 2\Omega \dot{q}_1 g(y_d)^2 q_2) + \\ & \frac{1}{2} m_d (f(y_d)^2 \dot{q}_1^2 + f(y_d)^2 \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2} I_s \rho \int_0^L (\dot{q}_1^2 g(y)^2 + \dot{q}_2^2 g(y)^2) dy + \frac{1}{2} I_s \rho \Omega^2 L + \end{aligned}$$

$$2I_s \Omega \rho \int_0^L (q_1 g(y)^2 q_2) dy + \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (f(y)^2 \dot{q}_1^2 + f(y)^2 \dot{q}_2^2) dy + \frac{1}{2} m_b [f(y) \dot{q}_1 d\Omega \cos \Omega t - f(y) \dot{q}_2 w d\Omega \sin \Omega t] \quad (I.42)$$

L'énergie de déformation ça devient :

$$U_a = \frac{EI_s}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (I.43)$$

$$U_a = \frac{EI_s}{2} [(q_1 h(y))^2 + (q_2 h(y))^2] dy \quad (I.44)$$

$$U_a = \frac{EI_s}{2} [(q_1^2 + q_2^2) h(y)^2] \quad (I.45)$$

I.11.1. L'équation de mouvement

Pour obtenir les équations du mouvement on utilise la formulation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = F_{q_i} \quad (I.46)$$

Qui s'écrivent sous la forme générale :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - \alpha\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = C\Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + \alpha\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = C\Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (I.47)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = C\Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (I.48)$$

I.12. Conclusion

Ce chapitre nous a permis de projeter de la lumière sur le phénomène de whirling et de présenter le modèle de calcul et par suite son application dans l'étude du rotor considéré.

Chapitre II

Chapitre II : Modélisation 3D de rotor choisi par SolidWorks

II.1 Introduction

SOLIDWORKS est un logiciel de CAO (conception assistée par ordinateur) fonctionnant sous Windows. La première version a été lancée en 1995 et est maintenant devenu l'un des logiciels les plus utilisés Ingénierie de conception dans le monde. Il s'agit de l'une des principales conceptions techniques du troisième plus grand logiciel de conception au monde. Aujourd'hui, plus de 2 millions d'entreprises utilisent SOLIDWORKS pour introduire des produits et des innovations, ce qui représente une grande partie des 3 millions d'utilisateurs de SOLIDWORKS. Dans cette section, nous explorerons les différentes applications prises en charge par SOLIDWORKS. [1]

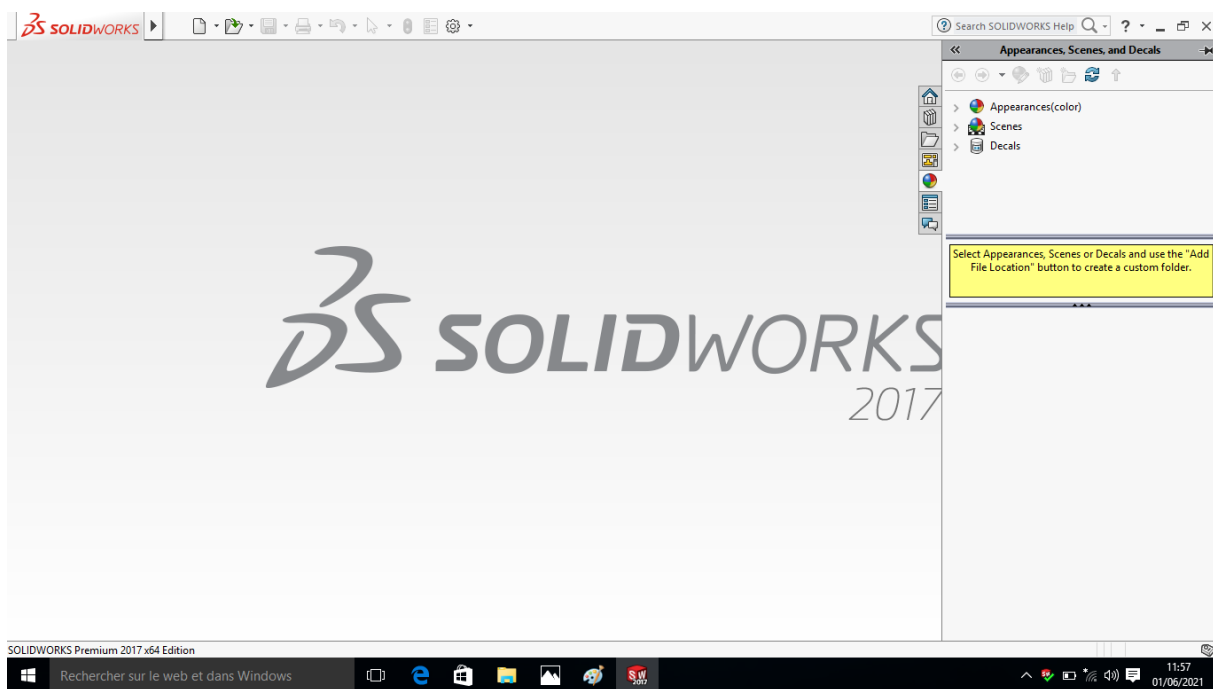


Figure .II.1. Page d'Accueil du logiciel SolidWorks.

SOLIDWORKS s'adresse principalement aux concepteurs de produits et aux ingénieurs. Il est utilisé dans diverses applications et industries. Certaines de ces industries sont les suivantes :

- ✚ Les produits de consommation.
- ✚ Espace aérien.
- ✚ Médecine.
- ✚ Electronique high-tech.
- ✚ Pétrole et gaz.
- ✚ Machines d'emballage.
- ✚ Services de génie mécanique.

- + Conception de meubles.
- + Automobiles.

SOLIDWORKS utilise des applications dans les disciplines suivantes :

- + Conception mécanique creuse.
- + Diagramme bidimensionnel.
- + Conception de surfaces.
- + Analyse de mouvement.
- + Soudage.
- + Réalisation du moule. [1]

II.2 Rotor à modéliser sur SolidWorks

Le rotor considéré dans cette étude a été choisi lors d'un petit stage effectué à l'établissement des constructions mécaniques de Khenchela (ECMK). C'est un arbre sur lequel sont montées 3 roues dentées et qui fait partie du mécanisme de la boîte de vitesses de la broche d'un tour parallèle. (Fig.II.2)



Figure .II.2. boîte de vitesse d'une machine de tournage

II.3 Modelisation du rotor sur SolidWorks

Les composants du rotor en l'occurrence: Arbre et les 3 roues dentées sont modélisés chacun sous forme de pièce et après on réalise leur assemblage. Cette étape est importante dans cette étude en effet les caractéristiques inertielles (masses et moments d'inerties) des différents éléments modélisés constituent des données pour le calcul dynamique du Whirling. Le but de ce chapitre

- L'arbre (Fig II.3)



Figure .II.3. Modélisation de l'arbre.

- La 1^{ère} roue dentée (Deux roues identiques)

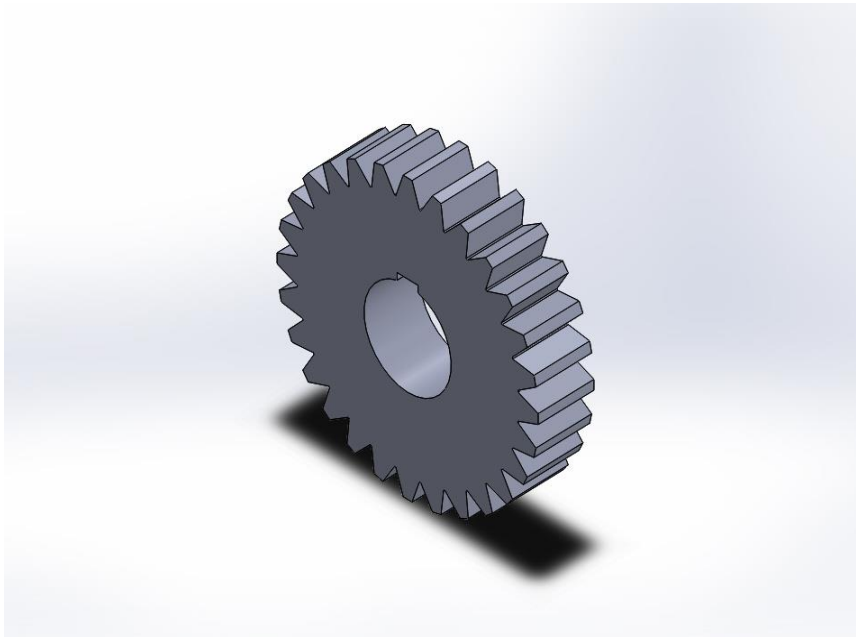


Figure .II.4. Modélisation de la 1^{ère} dentée.

- La deuxième roue dentée

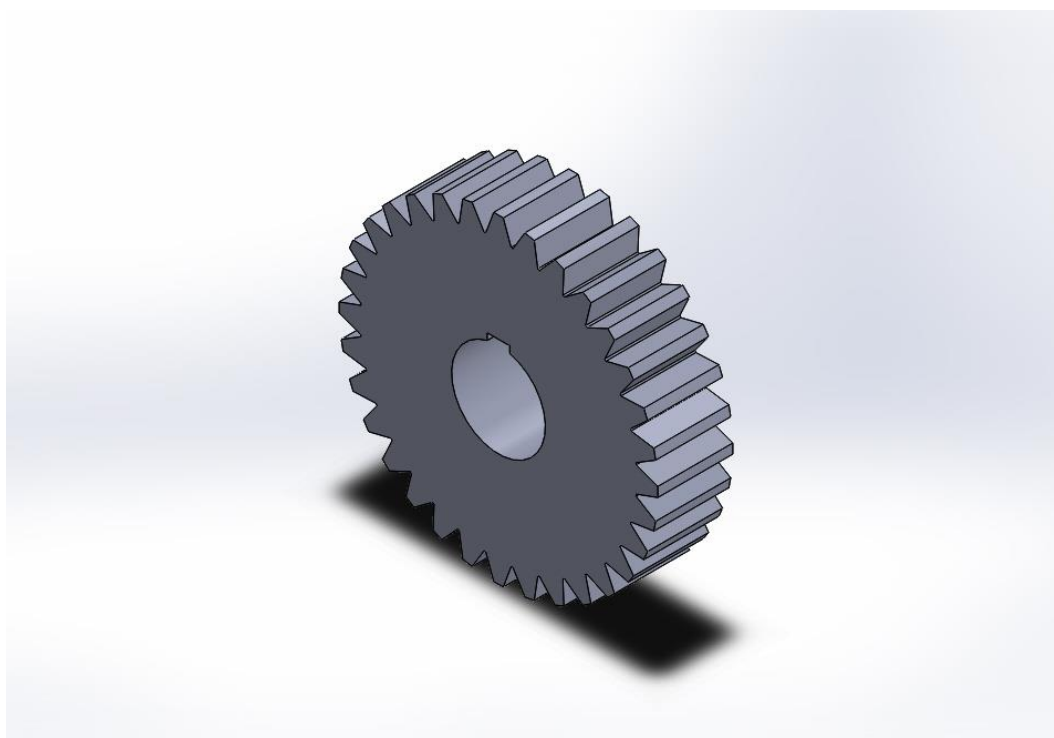


Figure .II.5. Modélisation de la deuxième roue.

- Assemblage

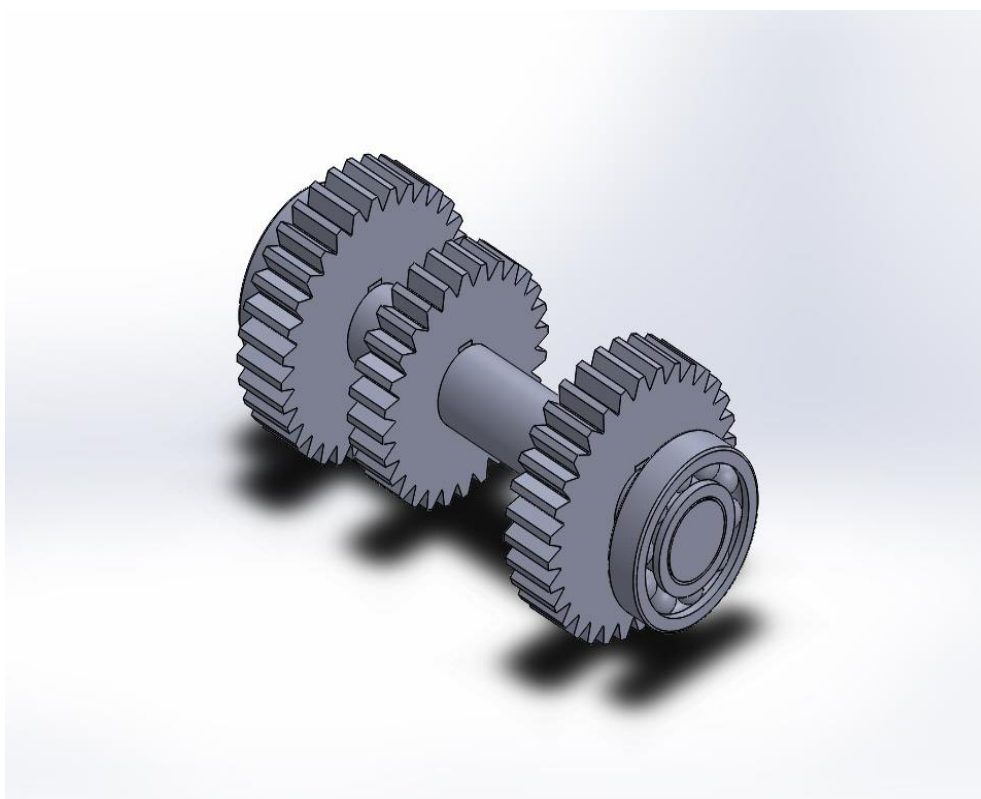
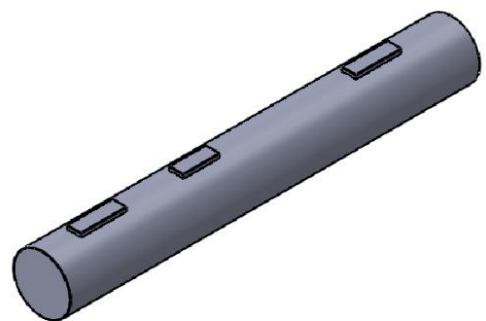
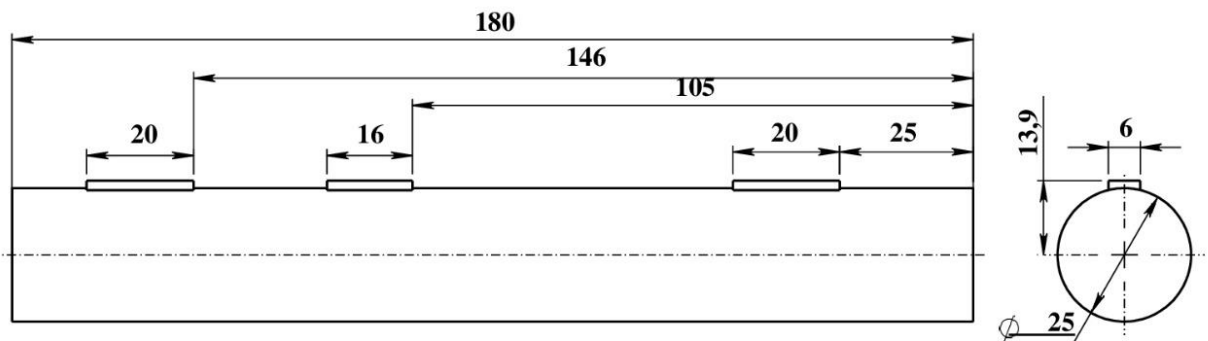
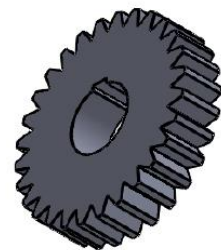
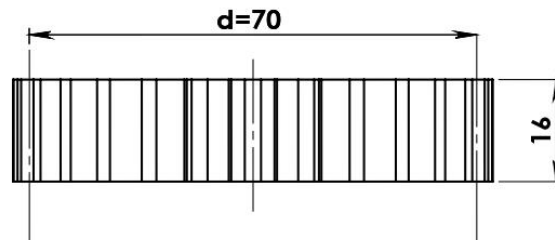
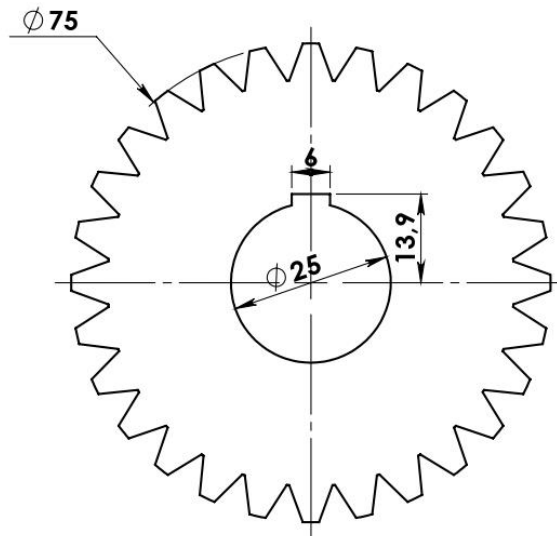


Figure .II.6. L'assemblage du rotor.



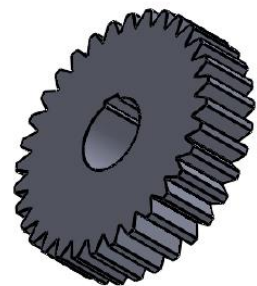
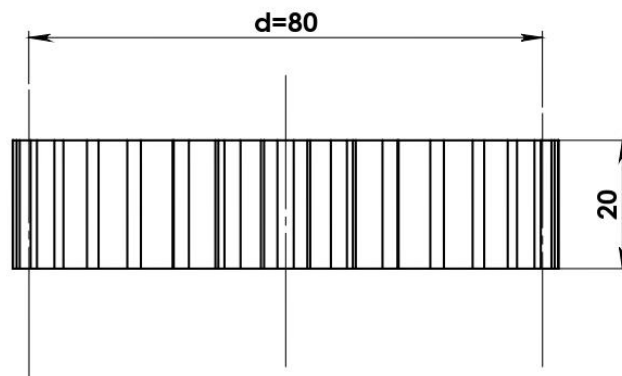
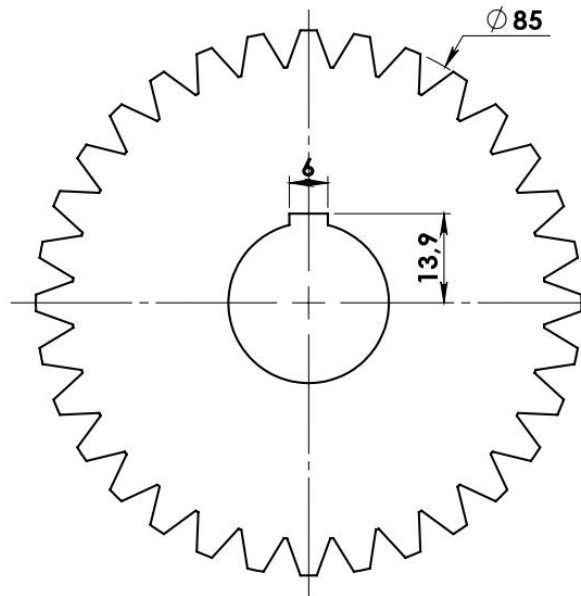
Désignation:	Dessin de brute d'un arbre	Tolérance générale:	± 0.1		 Université abbes laghrour KHENCHELA
NB. des pièces	01	Etat de surface générale:	▽ 7		
Dessiné par:	Les étudiants: SAOUDI Abdelhak BEN BOUZID Saber	Date:		Echelle: 1:1	
Vérifié:		Matière:	45Cr	Feuille: 1 / 1	
Approuvé:		T.T:	50 HRC	A4	

Z=28
m=2.5

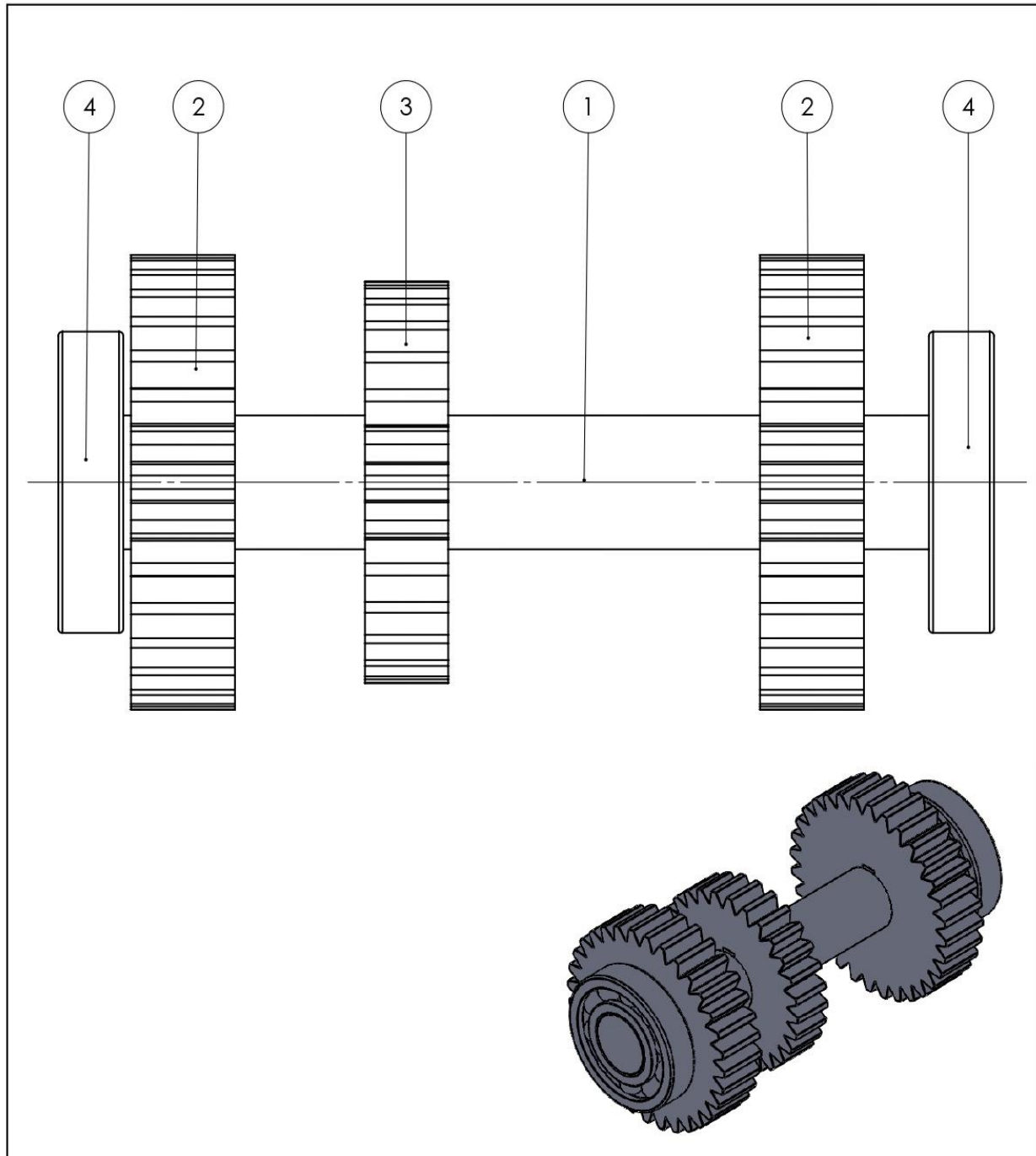


Désignation:	Roue à denture droite avec clavette	Tolérance générale:	± 0.1		
NB. des pièces	01	Etat de surface générale:	▽ 7		
Dessiné par:	Les étudiants: SAOUDI Abdelhak BEN BOUZID Saber	Date:		Echelle: 1:1	
Vérifié:		Matière:	45Cr	Feuille: 1 / 1	
Approuvé:		T.T:	50 HRC	A4	

Z=32
m=2.5



Désignation:	Roue à denture droite avec clavette	Tolérance générale:	± 0.1		 Université abbes laghrour KHENCHELA
NB. des pièces	02	Etat de surface générale:	▽ 7		
Dessiné par:	Les étudiants: SAOUDI Abdelhak BEN BOUZID SABER	Date:		Echelle: 1:1	
Vérifié:		Matière:	45Cr	Feuille: 1 / 1	
Approuvé:		T.T:	50 HRC	A4	



No. ARTICLE	NUMERO DE PIECE	MATIERE	QTE
1	arbre	45Cr	1
2	roue 1 et 3	45Cr	2
3	roue 2	45Cr	1
4	Roulement	45Cr	2

Désignation:	Dessin de brute d'une Roue à denture droite avec cannelures	Tolérance générale:	± 0.1		
NB. des pièces	01	Etat de surface générale:	▽ 7		
Dessiné par:	Les étudiants: SAOUDI Abdelhak BEN BOUZID Saber	Date:		Echelle: 1:1	
Vérifié:		Matière:	45Cr	Feuille: 1 / 1	
Approuvé:		T.T:	50 HRC	A4	

II.3 Détermination des caractéristiques inertielles

Nous rappelons que le but essentiel de l'utilisation du logiciel de SolidWorks est de déterminer les caractéristiques inertielles de chaque élément du rotor choisi.

La figure (Fig .II.7) montre comment déterminer les différentes caractéristiques inertielles de chaque composant :

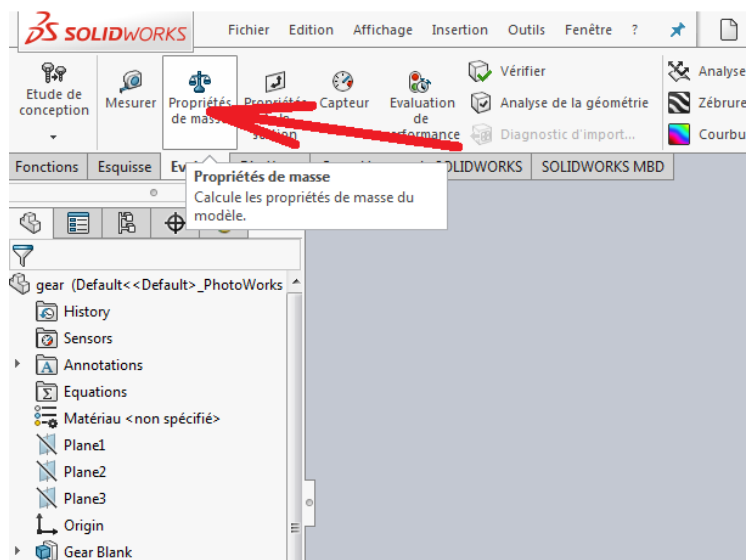


Figure .II.7. Etape à suivre pour extraire les caractéristiques inertielles sur SolidWorks.

➤ Les propriétés inertielles de l'arbre

```

Mass properties of arbre
Configuration: Default
Coordinate system: -- default --

Density = 7800.000000 kilograms per cubic meter

Mass = 0.6931733 kilograms

Total weld mass = 0.0000000 kilograms

Volume = 0.0000889 cubic meters

Surface area = 0.0153681 square meters

Center of mass: ( meters )
X = -0.0900604
Y = 0.0000755
Z = 0.0000000

Principal axes of inertia and principal moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the center of mass.
Ix = ( 1.0000000, -0.0002964, 0.0000000)      Px = 0.0000545
Iy = ( 0.0002964, 1.0000000, 0.0000000)      Py = 0.0018990
Iz = ( 0.0000000, 0.0000000, 1.0000000)      Pz = 0.0018996

Moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.
Lxx = 0.0000545      Lxy = -0.0000005      Lxz = 0.0000000
Lyx = -0.0000005      Lyy = 0.0018990      Lyz = 0.0000000
Lzx = 0.0000000      Lzy = 0.0000000      Lzz = 0.0018996

Moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the output coordinate system.
Ixx = 0.0000545      Ixy = -0.0000053      Ixz = 0.0000000
Iyx = -0.0000053      Iyy = 0.0075212      Iyz = 0.0000000
Izx = 0.0000000      Izy = 0.0000000      Izz = 0.0075219

```

Figure .II.8. Les caractéristiques inertielles de l'arbre.

➤ Les propriétés inertielles de la 1^{ère} roue (Deux roues identiques)

```

Mass properties of roue 1 et 3
  Configuration: Default
  Coordinate system: -- default --

Density = 7800.000000 kilograms per cubic meter

Mass = 0.7188421 kilograms

Volume = 0.0000922 cubic meters

Surface area = 0.0206471 square meters

Center of mass: ( meters )
  X = 0.0000000
  Y = -0.0000260
  Z = 0.0100000

Principal axes of inertia and principal moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the center of mass.
  Ix = ( 1.0000000, 0.0000000, 0.0000000)      Px = 0.0003480
  Iy = ( 0.0000000, 1.0000000, 0.0000000)      Py = 0.0003482
  Iz = ( 0.0000000, 0.0000000, 1.0000000)      Pz = 0.0006482

Moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.
  Lxx = 0.0003480  Lxy = 0.0000000  Lxz = 0.0000000
  Lyx = 0.0000000  Lyz = 0.0003482  Lyz = 0.0000000
  Lzx = 0.0000000  Lzy = 0.0000000  Lzz = 0.0006482

Moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the output coordinate system.
  Ixx = 0.0004199  Ixy = 0.0000000  Ixz = 0.0000000
  Iyx = 0.0000000  Iyy = 0.0004201  Iyz = -0.0000002
  Izx = 0.0000000  Izy = -0.0000002  Izz = 0.0006483

```

Figure .II.9. Caractéristiques inertielles de la 1^{ère} roue.

➤ Les propriétés inertielles de la deuxième roue

```

Mass properties of roue 2
  Configuration: Default
  Coordinate system: -- default --

Density = 7800.000000 kilograms per cubic meter

Mass = 0.427161 kilograms

Volume = 0.0000548 cubic meters

Surface area = 0.0149847 square meters

Center of mass: ( meters )
  X = 0.0000000
  Y = -0.0000350
  Z = 0.0080000

Principal axes of inertia and principal moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the center of mass.
  Ix = ( 1.0000000, 0.0000000, 0.0000000)      Px = 0.0001614
  Iy = ( 0.0000000, 1.0000000, 0.0000000)      Py = 0.0001615
  Iz = ( 0.0000000, 0.0000000, 1.0000000)      Pz = 0.0003047

Moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the center of mass and aligned with the output coordinate system.
  Lxx = 0.0001614  Lxy = 0.0000000  Lxz = 0.0000000
  Lyx = 0.0000000  Lyz = 0.0001615  Lyz = 0.0000000
  Lzx = 0.0000000  Lzy = 0.0000000  Lzz = 0.0003047

Moments of inertia: ( kilograms * square meters )
taken at the output coordinate system.
  Ixx = 0.0001887  Ixy = 0.0000000  Ixz = 0.0000000
  Iyx = 0.0000000  Iyy = 0.0001889  Iyz = -0.0000001
  Izx = 0.0000000  Izy = -0.0000001  Izz = 0.0003047

```

Figure .II.10. Ses propriétés inertielles

Composants	Masse (Kg)	Moments d'inertie (Kg.m ²)		
		I _x	I _y	I _z
Arbre	0.6931	1.89*10 ⁻⁴	5.45*10 ⁻⁵	1.89*10 ⁻⁴
Petite roue	0.427	1.6*10 ⁻⁴	3.047*10 ⁻⁴	1.6*10 ⁻⁴
Grande roue	0.72	3.48*10 ⁻⁴	6.48*10 ⁻⁴	3.48*10 ⁻⁴

Tableau .II.1. Données d'inertie des composants du rotor.

II.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu déterminer les données inertielles de notre rotor choisi, bien sûr cela a été possible après avoir modélisé les composants du rotor avec SolidWorks, ces données extraites vont être introduites dans le calcul au chapitre suivant.

Chapitre III

Chapitre III : Application à un arbre de transmission

III.1. Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'application du modèle du calcul d'un rotor simple cité dans le premier chapitre. Les données géométriques pour calculer les caractéristiques inertielles ont été déterminées dans le deuxième chapitre. Le rotor choisi pour l'étude est un arbre sur lequel sont montées trois roues dentées et guidé en rotation par deux roulements.

III.2. Modèle adopté du rotor

Le rotor choisi pour l'étude peut être modélisé par un arbre et trois disques tel que les deux disques de l'extrémité sont identiques, aussi on suppose que les paliers sont considérablement rigides (Fig. III.1).

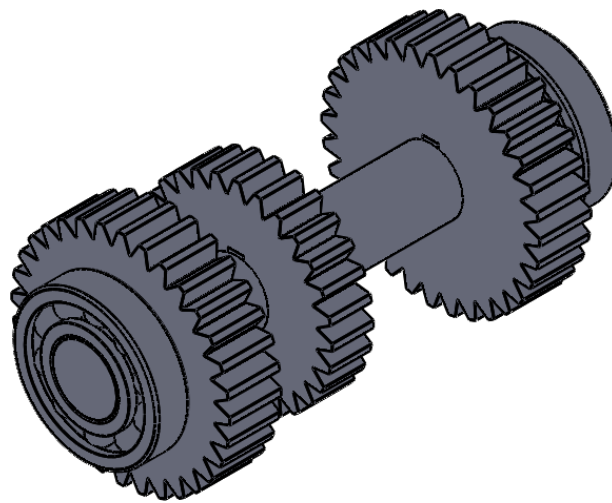


Figure .III.1. Rotor choisi pour l'étude.

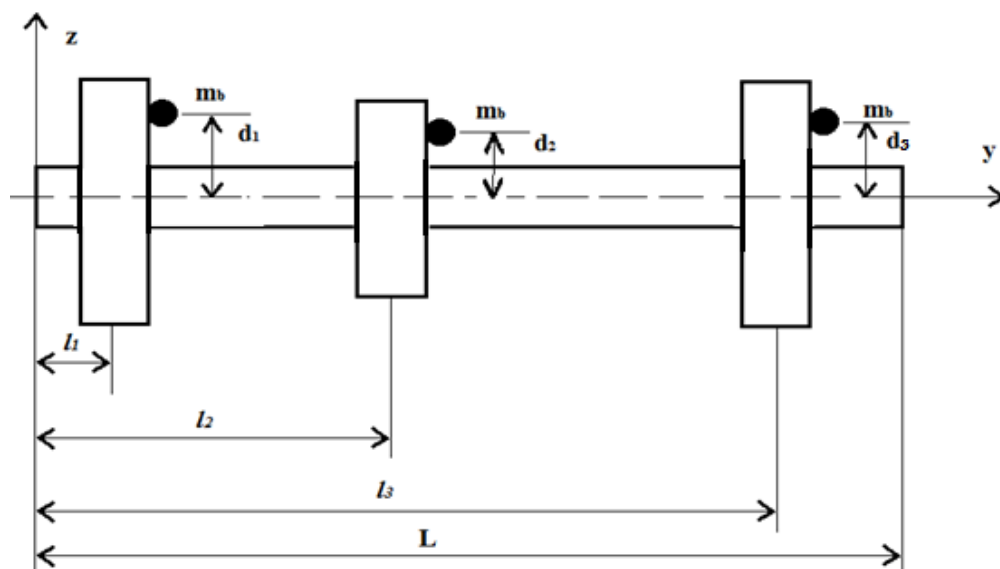


Figure .III.2. Modèle de rotor à calculer.

III.3. Données de départ de calcul

Les caractéristiques du rotor sont données comme suit :

➤ **Arbre**

Caractéristiques	Valeurs
Le diamètre d_a (m)	0.028
La longueur L (m)	0.18
La densité ρ (Kg/ m ³)	7800
La masse m_a (Kg)	0.6931
La surface S_a (m ²)	0.0153
Le volume V_a (m ³)	0.00889
Moment quadratique (m ⁴)	$1.91 * 10^{-8}$
Moments d'inertie (Kg- m ²)	$I_{dx}=I_{dz}=1.89*10^{-4}$ $I_{dy}=5.45*10^{-5}$

Tableau .III.1. Les caractéristiques de l'arbre.

➤ **Disques 1 et 3**

Les caractéristiques	Les valeurs
Cotes d'emplacement l_1 et l_3 (m)	$l_1=0.024$ $l_3=0.145$
L'épaisseur h (m)	0.02
Le diamètre extérieur d_{de1} (m)	0.08
Le diamètre intérieur d_{di1} (m)	0.025
Le volume V_{d1} (m ³)	$9.22*10^{-5}$
La densité ρ (Kg/m ³)	7800
La masse m_{d1} (Kg)	0.72
Moments d'inertie (Kg- m ²)	$I_{d1x}=I_{d1z}=3.48*10^{-4}$ $I_{d1y}=6.48*10^{-4}$

Tableau .III.2. Les caractéristiques de la roue 1 et 3.

➤ **Disque 2**

Les caractéristiques	Les valeurs
Cote d'emplacement l_2 (m)	0.067
L'épaisseur h_2 (m)	0.016
Le diamètre extérieur d_{de2} (m)	0.07
Le diamètre intérieur d_{di2} (m)	0.025

Le volume V_{d2} (m^3)	$5.48 \cdot 10^{-5}$
La masse m_{d2} (Kg)	0.427
La densité ρ (Kg/m^3)	7800
Moments d'inertie ($Kg \cdot m^2$)	$I_{d2x}=I_{d2z}=1.6 \cdot 10^{-4}$ $I_{d2y}=3.047 \cdot 10^{-4}$

Tableau .III.2. Les caractéristiques de la roue 2.➤ **Balourd**

Les caractéristiques	Les valeurs
La masse (m_b) (Kg)	$m_{b1}=m_{b2}=m_{b3}= m_b =10^{-4}$
L'excentricité (m)	$d_1=0.04$ $d_2=0.035$

Tableau.III.3. Les caractéristiques du balourd.**III.4. Mise en équation**

$$u(y, t) = f(y)q_1(t) \quad (\text{III-1})$$

$$w(y, t) = f(y)q_2(t) \quad (\text{III-2})$$

En dérivant par rapport au temps :

$$\dot{u} = f(y)\dot{q}_1 \quad (\text{III-3})$$

$$\dot{w} = f(y)\dot{q}_2 \quad (\text{III-4})$$

Et

$$\psi = -\frac{\partial u}{\partial y} = -q_1 \frac{\partial f(y)}{\partial y} = -q_1 g(y) \quad (\text{III-5})$$

$$\theta = \frac{\partial w}{\partial y} = q_2 \frac{\partial f(y)}{\partial y} = q_2 g(y) \quad (\text{III-6})$$

Nous dérivons aussi par rapport le temps (t) :

$$\dot{\psi} = -\dot{q}_1 g(y) \quad (\text{III-7})$$

$$\dot{\theta} = \dot{q}_2 g(y) \quad (\text{III-8})$$

Alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = q_1 h(y) \quad (\text{III-9})$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = q_2 h(y) \quad (\text{III-10})$$

En appliquant numériquement la fonction déformée s'écrit :

$$f(y) = \sin \pi y / L = \sin \frac{3.14y}{0.18} = \sin 17.44y \quad (\text{III.11})$$

III.5. L'énergie cinétique totale

$$T^{totale} = T_d^{tot} + T_a^{tot} + T_b^{tot} \quad (\text{III.12})$$

T_d^{tot} : L'énergie cinétique totale des trois disques

T_a^{tot} : L'énergie cinétique totale d'arbre

T_b^{tot} : L'énergie cinétique totale du balourd

Alors l'expression de l'énergie cinétique sera:

$$T^{totale} = \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) + \frac{1}{2} m_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_s \rho \int_0^L (\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2) dy + \frac{1}{2} I_s \rho \Omega^2 L + 2I_s \Omega \rho \int_0^L \dot{\psi}\theta dy + \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} m_b [\dot{u}\Omega \cos \Omega t - \dot{w}\Omega \sin \Omega t] \quad (III.13)$$

III.5.1. L'énergie cinétique de l'arbre

$$T_a^{tot} = \frac{1}{2} I_s \rho \int_0^L (\dot{q}_1^2 g(y)^2 + \dot{q}_2^2 g(y)^2) dy + \frac{1}{2} I_s \rho \Omega^2 L - 2I_s \Omega \rho \int_0^L (\dot{q}_1 g(y)^2 \dot{q}_2) dy + \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (f(y)^2 \dot{q}_1^2 + f(y)^2 \dot{q}_2^2) dy \quad (III.14)$$

Application numérique :

$$T_a^{tot} = \frac{1}{2} * 1.91 * 10^{-8} * 7800 \int_0^L (\dot{q}_1^2 (17.44 \cos 17.44y)^2 + \dot{q}_2^2 (17.44 \cos 17.44y)^2) dy + \frac{1}{2} * 1.91 * 10^{-8} * 7800 * 0.18\Omega^2 - 3.82 * 10^{-8} * 7800\Omega \int_0^L ((17.44 \cos 17.44y)^2 \dot{q}_1 \dot{q}_2) dy + \frac{1}{2} * 7800 * 0.0153 \int_0^L (\sin^2(17.44y) \dot{q}_1^2 + \sin^2(17.44y) \dot{q}_2^2) dy \quad (III.15)$$

Après la simplification mathématique :

$$T_a^{tot} = 10.1602\dot{q}_1^2 + 10.1602\dot{q}_2^2 + 1.34 * 10^{-5}\Omega^2 - 8.7 * 10^{-4}\dot{q}_1\dot{q}_2 \quad (III.16)$$

III.5.2. L'énergie cinétique des trois disques

En général l'énergie cinétique d'un disque s'écrit sous la forme suivante :

$$T_d^{tot} = \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{q}_1^2 g(y_d)^2 + \dot{q}_2^2 g(y_d)^2) + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega^2 - 2\Omega\dot{q}_1 g(y_d)^2 \dot{q}_2) + \frac{1}{2} m_d (f(y_d)^2 \dot{q}_1^2 + f(y_d)^2 \dot{q}_2^2) \quad (III.17)$$

$$T_d^{tot} = T_{d1} + T_{d2} + T_{d3} \quad (III.18)$$

Application numérique :

➤ L'énergie cinétique de disque 1

$$T_{d1} = \frac{1}{2} I_{dx0} (\dot{q}_1^2 g(l_1)^2 + \dot{q}_2^2 g(l_1)^2) + \frac{1}{2} I_{dy0} (\Omega^2 - 2\Omega\dot{q}_1 g(l_1)^2 \dot{q}_2) + \frac{1}{2} m_d (f(l_1)^2 \dot{q}_1^2 + f(l_1)^2 \dot{q}_2^2) \quad (III.19)$$

$$T_{d1} = \frac{1}{2} * 3.48 * 10^{-4} (\dot{q}_1^2 17.44^2 + \dot{q}_2^2 17.44^2) + \frac{1}{2} * 6.48 * 10^{-4} (\Omega^2 - 2 * 17.44^2 \Omega \dot{q}_1 \dot{q}_2) + \frac{1}{2} * 0.72 (0.073^2 \dot{q}_1^2 + 0.073^2 \dot{q}_2^2) \quad (III.20)$$

Après simplification mathématique :

$$T_{d1} = 0.548\dot{q}_1^2 + 0.548\dot{q}_2^2 + 3.24 * 10^{-4}\Omega^2 - 0.197\Omega\dot{q}_1q_2 \quad (\text{III.21})$$

➤ L'énergie cinétique de disque 2

$$T_{d2} = \frac{1}{2}I_{dx0}(\dot{q}_1^2 g(l_2)^2 + \dot{q}_2^2 g(l_2)^2) + \frac{1}{2}I_{dy0}(\Omega^2 - 2\Omega\dot{q}_1 g(y_d)^2 q_2) + \frac{1}{2}m_d(f(l_2)^2 \dot{q}_1^2 + f(l_2)^2 \dot{q}_2^2) \quad (\text{III.22})$$

$$T_{d1} = \frac{1}{2} * 1.6 * 10^{-4}(\dot{q}_1^2 17.44^2 + \dot{q}_2^2 17.44^2) + \frac{1}{2} * 3.047 * 10^{-4}(\Omega^2 - 2 * 17.44^2 \Omega \dot{q}_1 q_2) + \frac{1}{2} * 0.427(0.02^2 \dot{q}_1^2 + 0.02^2 \dot{q}_2^2) \quad (\text{III.23})$$

Après simplification mathématique :

$$T_{d2} = 0.0243\dot{q}_1^2 + 0.0243\dot{q}_2^2 + 1.52 * 10^{-4}\Omega^2 - 0.924\Omega\dot{q}_1q_2 \quad (\text{III.24})$$

➤ L'énergie cinétique de disque 3

$$T_{d3} = \frac{1}{2}I_{dx0}(\dot{q}_1^2 g(l_3)^2 + \dot{q}_2^2 g(l_3)^2) + \frac{1}{2}I_{dy0}(\Omega^2 - 2\Omega\dot{q}_1 g(l_3)^2 q_2) + \frac{1}{2}m_d(f(l_3)^2 \dot{q}_1^2 + f(l_3)^2 \dot{q}_2^2) \quad (\text{III.25})$$

$$T_{d3} = \frac{1}{2} * 3.48 * 10^{-4}(\dot{q}_1^2 17.44^2 + \dot{q}_2^2 17.44^2) + \frac{1}{2} * 6.48 * 10^{-4}(\Omega^2 - 2 * 17.44^2 \Omega \dot{q}_1 q_2) + \frac{1}{2} * 0.72(0.044^2 \dot{q}_1^2 + 0.044^2 \dot{q}_2^2) \quad (\text{III.26})$$

Après simplification mathématique :

$$T_{d1} = T_{d3} = 0.548\dot{q}_1^2 + 0.548\dot{q}_2^2 + 3.24 * 10^{-4}\Omega^2 - 0.197\Omega\dot{q}_1q_2 \quad (\text{III.27})$$

Finalement :

$$T_d^{\text{tot}} = 1.12\dot{q}_1^2 + 1.12\dot{q}_2^2 + 8 * 10^{-4}\Omega^2 - 0.96\Omega\dot{q}_1q_2 \quad (\text{III.28})$$

III.5.3. L'énergie cinétique des trois balourds

L'énergie cinétique d'un balourd dans le cas général est comme suit :

$$T_b = \frac{1}{2}m_b[\dot{u}d\Omega \cos \Omega t - \dot{w}d\Omega \sin \Omega t] \quad (\text{III.29})$$

$$T_b^{\text{tot}} = T_{b1} + T_{b2} + T_{b3} \quad (\text{III.30})$$

Pour : $y=l_1=0.024\text{m}$, $d_1=0.08\text{m}$

$$T_{b1} = \frac{1}{2}m_b[f(l_1)\dot{q}_1 d_1 \Omega \cos \Omega t - f(l_1)\dot{q}_2 d_1 \Omega \sin \Omega t] \quad (\text{III.31})$$

Application numérique :

$$T_{b1} = \frac{1}{2} * 10^{-4}[0.04 * 0.073\dot{q}_1 \Omega \cos \Omega t - 0.04 * 0.073\dot{q}_2 \Omega \sin \Omega t] \quad (\text{III.32})$$

$$T_{b1} = 1.485 * 10^{-7}\dot{q}_1 \Omega \cos \Omega t - 1.485 * 10^{-7}\dot{q}_2 \Omega \sin \Omega t \quad (\text{III.33})$$

Pour : $y = l_2 = 0.067\text{m}$, $d_2 = 0.07\text{m}$

$$T_{b2} = \frac{1}{2} m_b [f(l_2) \dot{q}_1 d_2 \Omega \cos \Omega t - f(l_2) \dot{q}_2 d_2 \Omega \sin \Omega t] \quad (\text{III.34})$$

$$T_{b2} = \frac{1}{2} * 10^{-4} [0.035 * 0.02 \dot{q}_1 \Omega \cos \Omega t - 0.035 * 0.02 \dot{q}_2 \Omega \sin \Omega t] \quad (\text{III.35})$$

$$T_{b2} = 3.5 * 10^{-8} \dot{q}_1 \Omega \cos \Omega t - 3.5 * 10^{-8} \dot{q}_2 \Omega \sin \Omega t \quad (\text{III.36})$$

Pour : $y = l_3 = 0.145\text{m}$, $d_3 = d_1 = 0.08\text{m}$

$$T_{b3} = \frac{1}{2} m_b [f(l_3) \dot{q}_1 d_3 \Omega \cos \Omega t - f(l_3) \dot{q}_2 d_3 \Omega \sin \Omega t] \quad (\text{III.37})$$

$$T_{b3} = \frac{1}{2} * 10^{-4} [0.04 * 0.044 \dot{q}_1 \Omega \cos \Omega t - 0.04 * 0.044 \dot{q}_2 \Omega \sin \Omega t] \quad (\text{III.38})$$

$$T_{b3} = 0.88 * 10^{-7} \dot{q}_1 \Omega \cos \Omega t - 0.88 * 10^{-7} \dot{q}_2 \Omega \sin \Omega t \quad (\text{III.39})$$

Alors :

$$T_b^{tot} = 2.71 * 10^{-7} \dot{q}_1 \Omega \cos \Omega t - 2.71 * 10^{-7} \dot{q}_2 \Omega \sin \Omega t \quad (\text{III.40})$$

L'énergie cinétique totale de rotor s'écrit :

$$T^{totale} = 11.28 \dot{q}_1^2 + 11.28 \dot{q}_2^2 + 8.13 * 10^{-4} \Omega^2 - 0.96 \Omega \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2.71 * 10^{-7} \dot{q}_1 \Omega \cos \Omega t - 5.43 * 10^{-7} \dot{q}_2 \Omega \sin \Omega t \quad (\text{III.41})$$

III.6. L'énergie de déformation

$$U_a = \frac{EI_s}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (\text{III.42})$$

Application numérique :

$$U_a = \frac{EI_s}{2} \int_0^L [(q_1 h(y))^2 + (q_2 h(y))^2] dy \quad (\text{III.43})$$

$$U_a = \frac{2 * 10^{11} * 1.91 * 10^{-8} * 92509.41}{2} \int_0^L [q_1^2 \sin^2(17.44y) + q_2^2 \sin^2(17.44y)] dy$$

$$U_a = \frac{2 * 10^{11} * 1.91 * 10^{-8} * 92509.41 * 0.17}{2} (q_1^2 + q_2^2) \quad (\text{III.44})$$

$$U_a = 2.988 * 10^7 (q_1^2 + q_2^2) \quad (\text{III.45})$$

III.7. Equations du mouvement

À partir de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i} = F_{q_i} \quad (\text{III.46})$$

On trouve :

$$\begin{cases} 22.56 \ddot{q}_1 - 0.96 \Omega \dot{q}_2 + 5.97 * 10^7 q_1 = 2.71 * 10^{-7} \Omega^2 \sin \Omega t \\ 22.56 \ddot{q}_2 + 0.96 \Omega \dot{q}_1 + 5.97 * 10^7 q_2 = 2.71 * 10^{-7} \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Qui s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{cases} m \ddot{q}_1 - \alpha \Omega \dot{q}_2 + k q_1 = C \Omega^2 \sin \Omega t \\ m \ddot{q}_2 + \alpha \Omega \dot{q}_1 + k q_2 = C \Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Tel que les coefficients :

$$m=22.56$$

$$\alpha=0.96$$

$$k=5.97 \cdot 10^7$$

$$C=2.71 \cdot 10^{-7}$$

Le système d'équations (III.48) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = C \Omega^2 \begin{bmatrix} \sin \Omega t \\ \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (\text{III.49})$$

III.8. Les fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation

Les fréquences propres (naturelles) du rotor en fonction de la vitesse de rotation sont calculées à partir du système d'équations homogènes suivant:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - \alpha\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = 0 \\ m\ddot{q}_2 + \alpha\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.50})$$

Les solutions homogènes de ces équations différentielles :

$$\begin{cases} q_{1h} = \overline{A}_1 \cos(\omega t + \Phi_1) \\ q_{2h} = \overline{A}_2 \cos(\omega t + \Phi_2) \end{cases} \quad (\text{III.51})$$

Qui peuvent s'écrire aussi sous la forme suivante :

$$\begin{cases} q_{1h} = A_1 \exp(i\omega t) \\ q_{2h} = A_2 \exp(i\omega t) \end{cases} \quad (\text{III.52})$$

$$\text{Avec } A_1 = \overline{A}_1 \exp(i\Phi_1 t) \quad \text{et} \quad A_2 = \overline{A}_2 \exp(i\Phi_2 t)$$

La solution (III.52) sera insérée dans le système suivant :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1h} - \alpha\Omega\dot{q}_{2h} + kq_{1h} = 0 \\ m\ddot{q}_{2h} + \alpha\Omega\dot{q}_{1h} + kq_{2h} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

Après remplacement on aura :

$$\begin{bmatrix} k - m\omega^2 & -i\alpha\omega \\ i\alpha\omega & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.54})$$

Si $\det \neq 0$ on a $A_1 = A_2 = 0$ alors $q_{1h} = q_{2h} = 0 \Rightarrow$ C'est une solution est triviale (à ne pas considérer).

Si $\det = 0$, on a $A_1 = \frac{0}{0}$ et $A_2 = \frac{0}{0} \Rightarrow$ On a une indétermination donc il ya possibilité d'avoir des solutions non nulles c.à.d. $A_1 \neq 0$ Et $A_2 \neq 0$

Alors soit :

$$\det = \begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -i\alpha\omega \\ i\alpha\omega & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III.55})$$

Cela donne :

$$m^2\omega^4 - (2km + \alpha^2\Omega^2)\omega^2 + k^2 = 0 \quad (\text{III.56})$$

Considérons le cas d'arrêt du rotor ($\Omega = 0$)

L'équation (III.56) se réduit à :

$$m^2\omega^4 - 2km + k^2 = 0 \quad (\text{III.57})$$

Remplaçons les coefficients par leurs valeurs :

$$22.56^2\omega^4 - 2 * 5.97 * 10^7 * 22.56m + (5.97 * 10^7)^2 = 0 \quad (\text{III.58})$$

Finalement :

$$508.95\omega^4 - 2.69 * 10^9\omega^2 + 3.564 * 10^{15} = 0 \quad (\text{III.59})$$

Elle admet une solution double :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{III.60})$$

$$\omega_0 = 1626.73 \text{rad/s}$$

Considérons le cas où le rotor fonctionne ($\Omega \neq 0$)

(III.56) s'écrit après remplacement des coefficients par leurs valeurs

$$508.95\omega^4 - (2.69 * 10^9 + 0.92\Omega^2)\omega^2 + 3.564 * 10^{15} = 0 \quad (\text{III.61})$$

On a deux solutions réelles positives sont

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\alpha^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_0^2}{\alpha^2\Omega^2}} \right)} \quad (\text{III.62})$$

$$\omega_1 = \sqrt{1626.73^2 + \frac{0.96^2\Omega^2}{22.56^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4*22.56^2*1626.73^2}{0.96^2\Omega^2}} \right)} \quad (\text{III.63})$$

$$\omega_1 = \sqrt{2.64 * 10^6 + 0.0018\Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{5.84*10^9}{\Omega^2}} \right)} \quad (\text{III.64})$$

Et :

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\alpha^2\Omega^2}{2m^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4m^2\omega_0^2}{\alpha^2\Omega^2}} \right)} \quad (\text{III.65})$$

$$\omega_2 = \sqrt{1626.73^2 + \frac{0.96^2\Omega^2}{22.56^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4*22.56^2*1626.73^2}{0.96^2\Omega^2}} \right)} \quad (\text{III.66})$$

$$\omega_2 = \sqrt{2.64 * 10^6 + 0.0018\Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5.84*10^9}{\Omega^2}} \right)} \quad (\text{III.67})$$

Construire les courbes des fonctions $\omega_1(\Omega) = \sqrt{2.64 * 10^6 + 0.0018\Omega^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{5.84*10^9}{\Omega^2}}\right)}$ et

$$\omega_2(\Omega) = \sqrt{2.64 * 10^6 + 0.0018\Omega^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{5.84*10^9}{\Omega^2}}\right)}$$

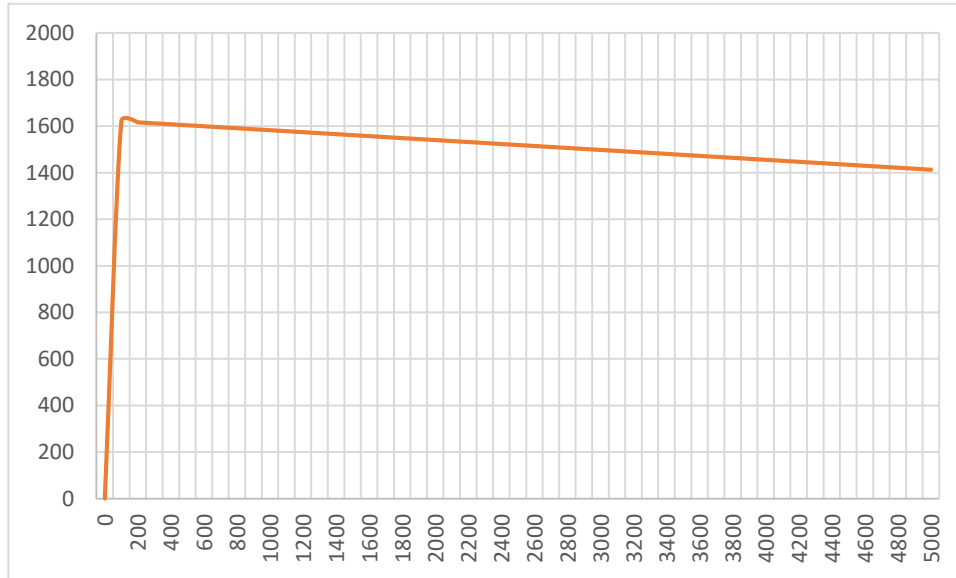


Figure .III.3. Courbe de fonction $\omega_1(\Omega)$

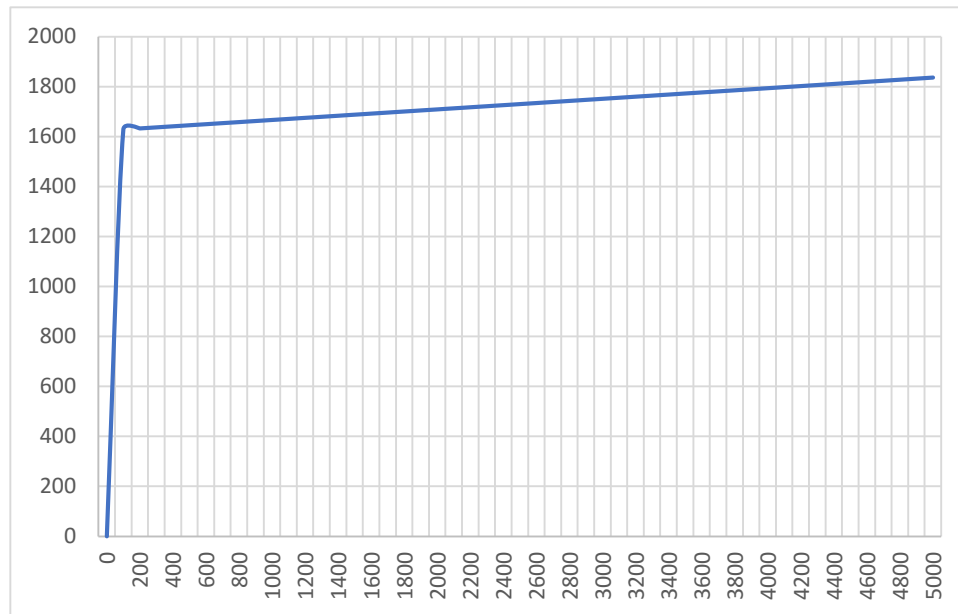


Figure. III.4. Courbe de fonction $\omega_2(\Omega)$

III.9. Diagramme de Campbell

Le diagramme de Campbell représente l'évolution des fréquences naturelles en fonction de la vitesse de rotation. $m^2\omega^4 - (2km + \alpha^2\Omega^2)\omega^2 + k^2 = 0$

Reprenons l'équation (III.56), écrivons : $\omega = s\Omega$ et remplaçons dans (III.56) :

$$s^2(s^2m^2 - \alpha^2)\Omega^4 - 2kms^2\Omega^2 + k^2 = 0 \quad (\text{III.68})$$

Cette équation admet deux solutions qui sont :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \sqrt{\frac{k}{s(sm+\alpha)}} \\ \Omega_2 = \sqrt{\frac{k}{s(sm-\alpha)}} \end{cases} \quad (\text{III.69})$$

Pour tracer ce diagramme :

- On considère les deux valeurs de s : $s = 1$ et $s = 1/2$
- Pour chacune des valeurs de s aura quatre valeurs de la vitesse de rotation : $\Omega_1(s = 1), \Omega_1(s = 1/2), \Omega_2(s = 1/2)$ et $\Omega_2(s = 1/2)$, ces valeurs sont des abscisses
- A chacune des quatre valeurs précédentes de Ω correspond une ordonnée : $\omega_1(s = 1) = \Omega_1$, $\omega_1\left(s = \frac{1}{2}\right) = 0.5\Omega_1$, $\omega_2(s = 1) = \Omega_2$ et $\omega_2\left(s = \frac{1}{2}\right) = 0.5\Omega_2$
- A partir des deux points (Ω_1, Ω_1) ; $(\Omega_1, 0.5\Omega_1)$ on trace la droite passant par ces points
- On fait la même chose avec les points (Ω_2, Ω_2) ; $(\Omega_2, 0.5\Omega_2)$ et on trace la droite passant par ces points.
- On trace les droites $\omega = \Omega$ et $\omega = 0.5\Omega$

Appliquons les données du rotor choisi :

$m=22.56$

ω_2

$\alpha=0.96$

$k=5.97 \cdot 10^7$

$\omega_1 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm+\alpha)}}$ pour les deux points A(s=1) et C (s=0.5)

$\omega_2 = s \sqrt{\frac{k}{s(sm-\alpha)}}$ pour les deux points B(s=1) et D(s=0.5)

Mettons les résultats de calcul dans le tableau (Tab. III.4)

Les points	Fréquences naturelles	Vitesse de rotation critique
A	$\omega_1(1)=1593.19$ rad/s	$\Omega_{c1}(1)=1593.19$ rad/s
B	$\omega_2(1)=1662.49$ rad/s	$\Omega_{c2}(1)=1662.49$ rad/s
C	$\omega_1(0.5)=1561.64$ rad/s	$\Omega_{c1}(0.5)=3123.28$ rad/s
D	$\omega_2(0.5)=1700.71$ rad/s	$\Omega_{c2}(0.5)=3401.43$ rad/s

Tableau. III.4. Coordonnées des points pour construire le diagramme de Campbell.

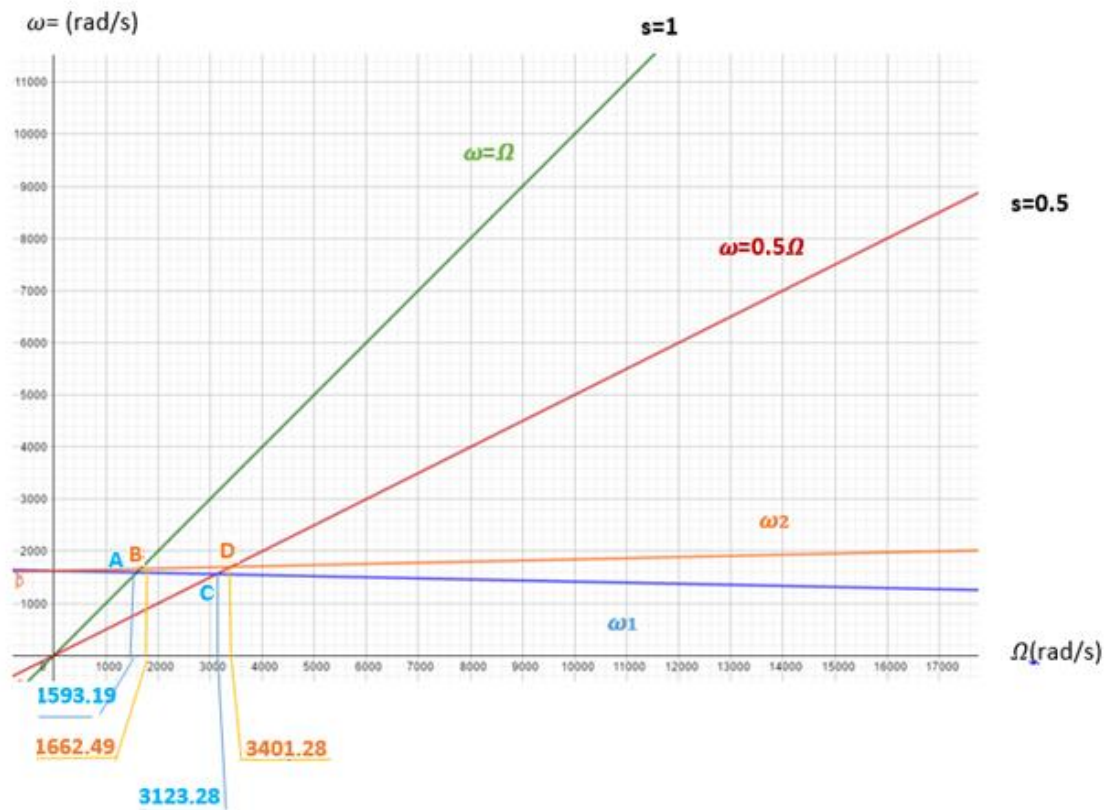


Figure.III.5. Diagramme de Campbell.

III.10. Réponse aux forces d'excitation

Dans cette partie on prend les forces centrifuges du balourd comme forces excitantes :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 - \alpha\Omega\dot{q}_2 + kq_1 = C\Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{q}_2 + \alpha\Omega\dot{q}_1 + kq_2 = C\Omega^2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{III.70})$$

Il faut trouver une solution particulière de ce système soit :

$$\begin{cases} q_{1p} = \overline{A}_1 \cos(\omega t + \Phi_{e1}) \\ q_{2p} = \overline{A}_2 \cos(\omega t + \Phi_{e2}) \end{cases} \quad (\text{III.71})$$

On peut se les écrire sous la forme aussi :

$$\begin{cases} q_{1p} = A_{e1} \exp(i\omega t) \\ q_{2p} = A_{e2} \exp(i\omega t) \end{cases} \quad (\text{III.72})$$

Avec

$$\begin{aligned} \overline{A}_{e1} &= A_{e1} \exp(i\Phi_{e1}) \\ \overline{A}_{e2} &= A_{e2} \exp(i\Phi_{e2}) \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

On insère (III.73) dans le système :

$$\begin{cases} m\ddot{q}_{1p} - \alpha\Omega\dot{q}_{2p} + kq_{1p} = C\Omega^2 \exp i(\Omega t - \pi/2) \\ m\ddot{q}_{2p} + \alpha\Omega\dot{q}_{1p} + kq_{2p} = C\Omega^2 \exp i(\Omega t) \end{cases} \quad (\text{III.74})$$

$$\begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & -i\alpha\Omega \\ i\alpha\Omega & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\Omega^2 \exp i(\Omega t - \pi/2) \\ C\Omega^2 \exp(i\Omega t) \end{bmatrix} \quad (\text{III.75})$$

Par la méthode de Cramer on trouve :

$$A_{e1} = \frac{\begin{vmatrix} C\Omega^2 \exp(-i\pi/2) & -i\alpha\Omega \\ i\alpha\Omega & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k - m\Omega^2 & -i\alpha\Omega \\ i\alpha\Omega & k - m\Omega^2 \end{vmatrix}} = \frac{C\Omega^2(k - m\Omega^2) \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right) + i\alpha C\Omega^4}{k - m\Omega^2 - \alpha\Omega^4} \quad (\text{III.76})$$

$$A_{e1} = \frac{-iC\Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \quad (\text{III.77})$$

De même pour A_{e2} :

$$A_{e2} = \frac{C\Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \quad (\text{III.78})$$

Si le système homogène on aura :

$$A_{e2} = A_{e1} = \frac{C\Omega^2}{k + (a - m)\Omega^2} \quad (\text{III.79})$$

Il ne faut pas le dénominateur égal à zéro c'est-à-dire :

$$k + (a - m)\Omega_c^2 = 0 \quad (\text{III.80})$$

On trouve :

$$\Omega_c^2 = \frac{k}{(m - a)} \quad (\text{III.81})$$

Finalement :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{k}{(m-a)}} \quad (\text{III.82})$$

Nous remarquons que la fonction $A_{e1}(\Omega)$ admet la valeur $\frac{c}{(m-a)}$ comme limite quand Ω tend vers l'infini

Application numérique :

$$A_{e2} = A_{e1} = \frac{2.71 \cdot 10^{-7} \Omega^2}{5.67 \cdot 10^7 - 21.6 \Omega^2} \quad (\text{III.83})$$

Avec la valeur de la vitesse critique :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{5.97 \cdot 10^7}{(22.56 - 0.96)}}$$

$$\Omega_c = 1662.49 \text{ rad/s} \quad (\text{III.84})$$

Quand Ω croit la valeur limite du déplacement est :

$$|A_{e2}| = |A_{e1}| = \left| \frac{c}{(a-m)} \right| = \left| \frac{2.71 \cdot 10^{-7}}{0.96 - 22.56} \right| = 1.25 \cdot 10^{-8} m \quad (\text{III.85})$$

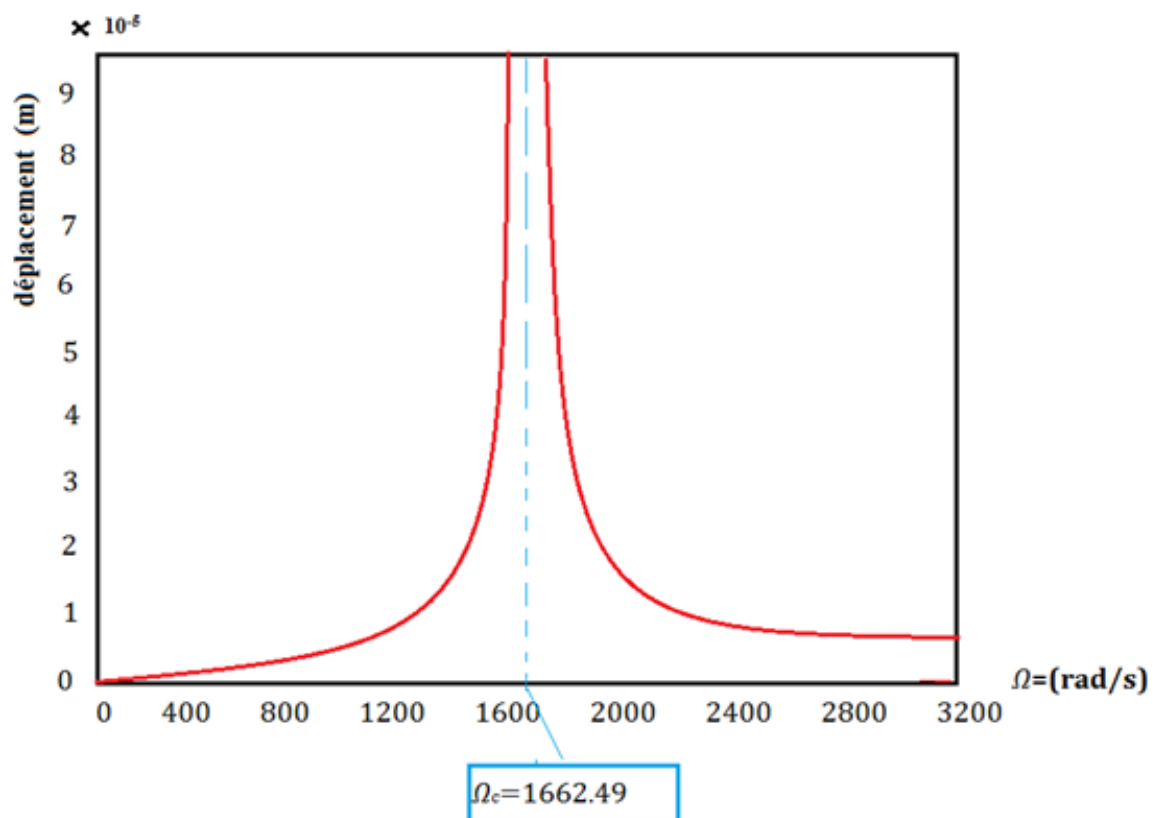


Figure .III.6. Réponse du balourd.

III.11. Conclusion

On conclure qu'en absence de forces extérieures le rotor n'atteint pas à le point de la rupture et en présence des forces d'excitation du balourd le rotor peut être cassé si la vitesse de rotation atteint la valeur critique

Chapitre IV

Chapitre IV : Calcul dynamique en torsion

IV.1. Introduction

Dans le chapitre précédant nous avons étudié le phénomène de Whirling qui a été une flexion de l'arbre causée par les forces d'inerties engendrées par les balourds. L'étude précédente a permis de déterminer les fréquences critiques lesquelles à éviter lors de la rotation du rotor. C'est dans ce même contexte qu'on continue à déterminer les fréquences critiques mais cette fois-ci en considérant la torsion du même rotor.

IV.2. Modèle de calcul

Dans cette partie de calcul on utilise le modèle des masses concentrées qui suppose que les dimensions transversales de l'arbre sont plus petites devant celles des disques.

D'après la théorie des poutres de Timoshenko le moment de torsion appliqué à un arbre, de diamètre d et de longueur L , est donné par l'expression suivante :

$$M_t = G \frac{\alpha}{L} I_s = k_t \alpha \quad (\text{IV.1})$$

Tel que :

G : Module d'élasticité transversale

α : Angle de torsion

I_{OS} : Moment quadratique polaire donné par :

$$I_s = \frac{\pi d^4}{32} \quad (\text{IV.2})$$

I_d : Moment d'inertie de disque

k_t : La raideur de l'arbre en torsion donnée par:

$$k_t = G \frac{I_s}{L} \quad (\text{IV.3})$$

Considérons le cas simple où le rotor possède un seul disque c.à.d. un système à un seul degré de liberté :

D'après la deuxième loi de Newton :

$$\sum M_{ext} = \ddot{\alpha} I_d \quad (\text{IV.4})$$

$$-k_t \alpha = \ddot{\alpha} I_{dy} \quad (\text{IV.5})$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{k_t}{I_{dy}} \alpha = 0 \quad (\text{IV.6})$$

Avec :

$$\omega_0^2 = \frac{k_t}{I_{dy}} \quad (\text{IV.7})$$

En introduisant (IV.3) dans (IV.7) :

$$\omega_0^2 = G \frac{I_s}{L I_{dy}} \tag{IV.8}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{I_s}{L I_{dy}}} \tag{IV.9}$$

ω_0 : représente la fréquence propre du rotor en torsion

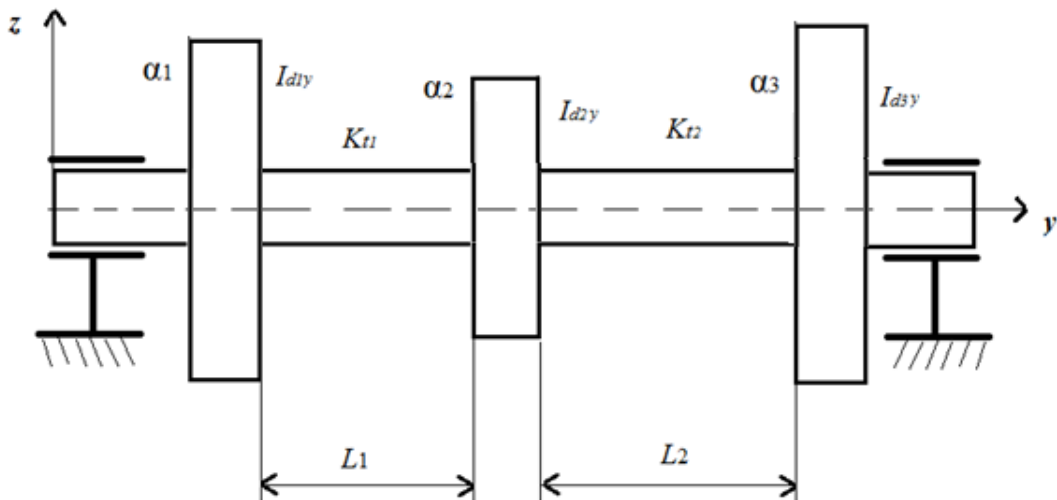


Figure .IV.1 Rotor simple à trois disques.

IV.3. Données de calcul

Le rotor considéré pour l'étude est composé d'un arbre et trois disques c'est-à-dire le système possède 3 degrés de liberté. Les degrés de liberté ou coordonnées généralisées sont les angles de torsion respectivement: α_1 ; α_2 et α_3

Pour faciliter l'écriture des équations différentielles régissant le mouvement, isolons les 3 disques (Fig. IV.2)

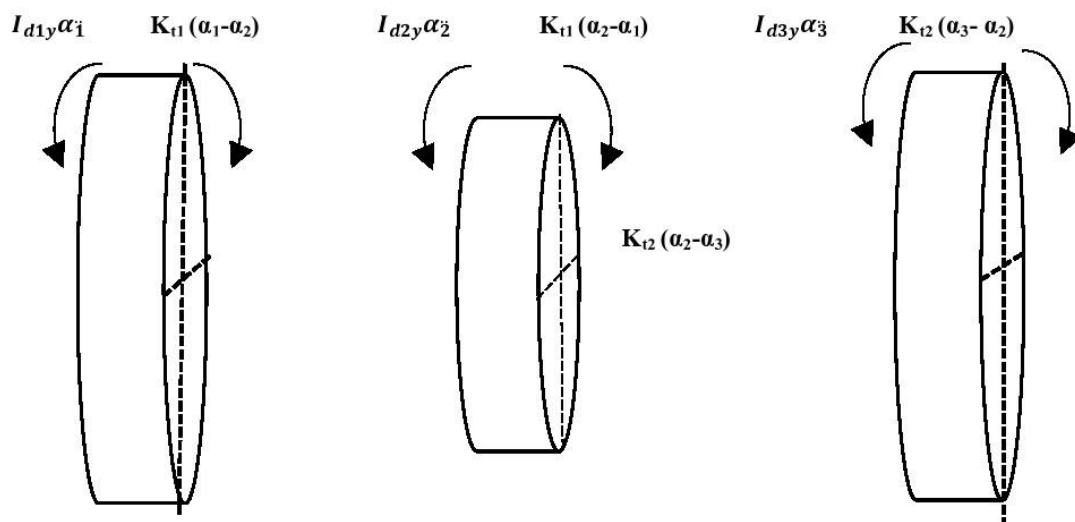


Figure .IV.2. Isolation des trois disques.

Les données de calculs sont mises dans le tableau (Tab. IV.1):

$I_{d1y}=I_{d3y}$	$6.48*10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	K_{t1}	122240 N/m
I_{d2y}	$3.047*10^{-4} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$	K_{t2}	50933 N/m
I_{os}	$3.82 * 10^{-8} \text{ m}^4$	L_1	0.025 m
d	0.025 m	L_2	0.06 m
G	$8*10^{10} \text{ Pa}$		

Tableau .IV.1. Les caractéristiques du rotor.

Le calcul des raideurs de torsion donne :

$$k_{t1} = G \frac{I_s}{L_1} = 122240 \text{ N/m} \quad (\text{IV.10})$$

$$k_{t2} = G \frac{I_s}{L_2} = 50933 \text{ N/m} \quad (\text{IV.11})$$

IV.3.1. Equations de mouvement

En considérant chaque disque à part et après application de la 2^{ème} loi de newton on trouve :

$$\begin{cases} I_{d1y}\ddot{\alpha}_1 + K_{t1}(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \\ I_{d2y}\ddot{\alpha}_2 + K_{t1}(\alpha_2 - \alpha_1) + K_{t2}(\alpha_2 - \alpha_3) = 0 \\ I_{d3y}\ddot{\alpha}_3 + K_{t2}(\alpha_3 - \alpha_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

On peut l'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} I_{d1y} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d3y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 \\ \ddot{\alpha}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{t1} & -K_{t1} & 0 \\ -K_{t1} & K_{t1} + K_{t2} & -K_{t2} \\ 0 & -K_{t2} & K_{t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.13})$$

Application numérique :

$$\begin{cases} 6.48 * 10^{-4} \ddot{\alpha}_1 + 122240(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \\ 3.047 * 10^{-4} \ddot{\alpha}_2 + 122240(\alpha_2 - \alpha_1) + 50933(\alpha_2 - \alpha_3) = 0 \\ 6.48 * 10^{-4} \ddot{\alpha}_3 + 50933(\alpha_3 - \alpha_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.14})$$

Pour trouver les fréquences propres (naturelles) écrivons :

$$\begin{cases} \alpha_1 = A_1 \sin \omega t \\ \alpha_2 = A_2 \sin \omega t \\ \alpha_3 = A_3 \sin \omega t \end{cases} \quad (\text{IV.15})$$

Nous remplaçons cette expression dans (IV.13):

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} I_{d1y} & 0 & 0 \\ 0 & I_{d2y} & 0 \\ 0 & 0 & I_{d3y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{t1} & -K_{t1} & 0 \\ -K_{t1} & K_{t1} + K_{t2} & -K_{t2} \\ 0 & -K_{t2} & K_{t2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.16})$$

Application numérique :

$$\begin{bmatrix} K_{t1} - \omega^2 I_{d1y} & -K_{t1} & 0 \\ -K_{t1} & K_{t1} + K_{t2} - \omega^2 I_{d2y} & -K_{t2} \\ 0 & -K_{t2} & K_{t2} - \omega^2 I_{d3y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.17})$$

En évitant la solution triviale du système (IV.16) qui est:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \neq 0 \quad (\text{IV.18})$$

C'est à dire le déterminant de (IV.16) doit être nul:

Donc :

$$\begin{vmatrix} 122240 - 6.48 * 10^{-4} \omega^2 & -122240 & 0 \\ -122240 & 173173 - 3.047 * 10^{-4} \omega^2 & -50933 \\ 0 & -50933 & 50933 - 6.48 * 10^{-4} \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

On obtient l'équation suivante :

$$\omega_0^2 [\omega_0^4 - 8.356 * 10^8 \omega_0^2 - 7.789 * 10^{16}] = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Les racines de cette équation sont :

$$\omega_{01}^2 = 0 \quad (\text{IV.21})$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{8.356 * 10^8 + \sqrt{(8.356 * 10^8)^2 + 4 * 7.789 * 10^{16}}}{2} = 9.202 * 10^8 \text{ rad/s} \quad (\text{IV.22})$$

$$\omega_{03}^2 = \frac{8.356 * 10^8 - \sqrt{(8.356 * 10^8)^2 + 4 * 7.789 * 10^{16}}}{2} = 2.268 * 10^7 \text{ rad/s} \quad (\text{IV.23})$$

$\omega_{03}^2 < 0$ est à ne pas considérer cela veut dire à cette vitesse de rotation il n'y aurait pas de torsion car les dimensions données du rotor ne le permettent pas.

Donc seulement deux modes de vibration à considérer :

- 1^{er} mode propre :

$$\omega_{01}^2 = 0$$

Alors :

$$\begin{bmatrix} 122240 & -122240 & 0 \\ -122240 & 173173 & -50933 \\ 0 & -50933 & 50933 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.24})$$

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{A_2}{A_1} = 1 \quad \text{Alors :}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 \quad (\text{IV.25})$$

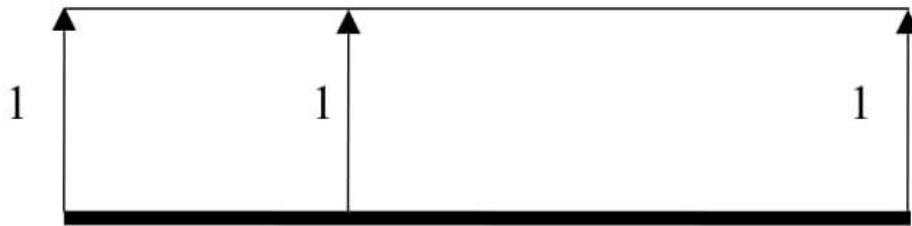


Figure .IV.3. 1^{er} mode propre de vibration.

- 2^{ème} mode propre :

En remplaçant la deuxième valeur critique ω_{02}^2 dans l'expression (IV.17) on trouve :

$$(K_{t1} - \omega_{02}^2 I_{d1y})A_1 - K_{t1}A_2 = 0 \quad (\text{IV.26})$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{K_{t1} - \omega_{02}^2 I_{d1y}}{K_{t1}} \quad (\text{IV.27})$$

Application numérique :

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{122240 - 9.202 \cdot 10^8 \cdot 6.48 \cdot 10^{-4}}{122240} = -3.87 \quad (\text{IV.28})$$

En considérant la 2^{ème} équation du système (IV.17) :

$$-K_{t1}A_1 + [(K_{t1} + K_{t2}) - \omega_{02}^2 I_{d1y}]A_2 - K_{t2}A_3 = 0 \quad (\text{IV.29})$$

En remplaçant (IV.28) dans (IV.29) on trouve :

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\omega_{02}^4 I_{d1y} I_{d2y} - \omega_{02}^2 [(I_{d1y} + I_{d2y})K_{t1} + I_{d1y}K_{t2}] + K_{t1}K_{t2}}{K_{t1}K_{t2}} \quad (\text{IV.30})$$

Application numérique :

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{(9.202 \cdot 10^8)^2 \cdot 1.97 \cdot 10^{-7} - 9.202 \cdot 10^8 [116.49 + 33.004] + 6.226 \cdot 10^9}{6.226 \cdot 10^9} = 5.69 \quad (\text{IV.31})$$

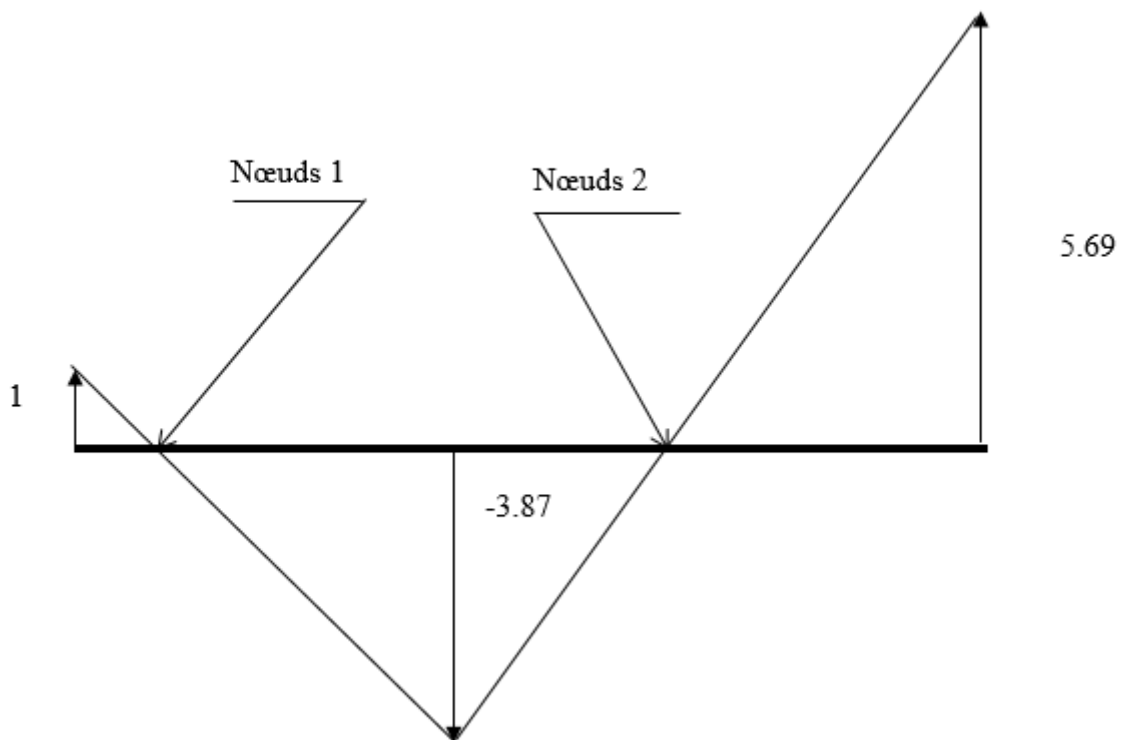


Figure. IV.4. 2^{ème} mode propre de vibration.

IV.4. Conclusion

Ce chapitre a permis de déterminer les fréquences propres du rotor vibrant en torsion, donc la vitesse de rotation de l'arbre ne doit pas coïncider avec les valeurs de fréquences calculées précédemment.

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude de comportement dynamique d'un arbre de transmission d'un tour, Il comprend trois chapitres :

- Le premier chapitre a été consacré à la présentation du modèle analytique de calcul du phénomène de tournoiement.
- Le deuxième traite surtout la modélisation du rotor choisi par Solidworks bien sûr à partir des caractéristiques dimensionnelles des éléments et tout ça dans le but de déterminer les propriétés inertielles de chaque élément.
- Dans le troisième on a réalisé les calculs nécessaires en appliquant les données dimensionnelles et inertielles
- Le dernier est réservé au calcul des vibrations en.

En conclusion, ce travail nous a permis de :

- Bien comprendre le modèle de calcul du phénomène du whirling ;
 - Rappeler et appliquer des notions vues pendant notre cursus ;
 - L'usage et l'exploitation de SolidWorks
-

Références

- [1] TOUAHRI Abdelghani, Contribution à la dynamique des machines tournantes : application aux arbres moteurs, MEMOIRE DE FIN D'ETUDE MASTER, Université de M'sila, 2015 / 1016
- [2] Aimeur Noureddine, Etude dynamique d'un rotor par éléments finis, UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA, 2018/2019
- [3] David Demailly, Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel — Application au dynamique rotor, Ecole Centrale de Lyon, 2003. Français, submitted on 19 Apr 2011
- [4] [http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/Arbre%20\(m%C3%A9canique\)/fr-fr/](http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/Arbre%20(m%C3%A9canique)/fr-fr/)
- [5] KHABTANE Sara, Modélisation de l'effet du tournoiement -Application à un arbre de transmission, mémoire fin d'études Pour l'obtention du diplôme master. p 22/74, 2019-2020
MASTER (LMD)
- [6] Simulation par la Méthode des Eléments Finis du Comportement Vibratoire d'un Rotor, Département D'électromécanique, Faculté Polytechnique, Université de Lubumbashi, République Démocratique du Congo, tresorkanyiki@gmail.com
- [7] LOIS DE COMPORTEMENT NON LINEAIRES, ECOLE DES MINES DE PARIS, MASTERE COMADIS, 24 janvier 2005
- [8] <https://www.amazon.com/NSK-Bearing-Clearance-Rotational-Capacity/dp/B007Z2UX58>
- [9] DJEFFAL Selman, Etude de l'influence de paramètres géométriques et mécaniques sur l'évolution des fréquences propres et des vitesses critiques par le diagramme de Campbell, Université Larbi Ben M'hidi Oum El-Bouaghi, 05 Juin 2016
- [10] GHARBI Radouane, ANALYSE DES PHENOMENES VIBRATOIRES EN DYNAMIQUE DES ROTORS
MODELISATION ET EXPERIMENTATION, MEMOIRE PRESENTE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MAGISTRE EN MÉCANIQUE UNIVERSITÉ DE BATNA, 2013/2014
- [11] Tayseer Almatrar, Learn SOLIDWORKS 2020, November 2019