



MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ «Abbès LAGHROUR» KHENCHELA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
Département des Sciences de la Matière



N° de série :.....

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de Master2 (L.M.D)

Filière : Génie Civil
Spécialité: Structures

**Analyse du comportement hygro-thermomécanique
des Poutres en matériaux avancés**

Réalisé par : - M^{elle} Chekhab Imane.

Dirigé par : Prof. Menasria Abderrahmane.

Membres de jury :

-Belgacem Mamen

Professeur

Président

-Refrafi Salah

MCA

Examineur

Année universitaire : 2025/2026

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicace

À ceux qui furent la lumière de mes jours, la force de mes faiblesses et le refuge de mes inquiétudes...

À mes très chers parents, « FATEH CHEKHAB » et « SOUHILA ARROUF », Aucune plume ne saurait décrire l'étendue de vos sacrifices, ni aucun mot exprimer la profondeur de ma gratitude. Vous avez été la source de mon courage lorsque le doute m'envahissait, la lumière qui guidait mes pas lorsque le chemin semblait obscur, et le cœur qui battait pour mes rêves avant même qu'ils ne deviennent les miens.

Si aujourd'hui je récolte le fruit de mes efforts, c'est parce que vous avez semé en moi les valeurs du travail, de la patience et de la persévérance. Que Dieu vous accorde santé, bonheur et longue vie.

À ma chère « GRAND-MERE FATIMA », Pour tes prières silencieuses qui ont souvent fait plus que les plus grands discours, pour ta tendresse qui a réchauffé mon cœur dans les moments difficiles et pour ton amour inconditionnel qui m'accompagne chaque jour.

À la mémoire de « MON GRAND-PERE, LE MOUDJAHID KADA CHEKHAB »,

Toi qui nous as quittés mais dont l'âme demeure présente dans chacun de nos souvenirs. Ton courage, ton honneur et ton histoire resteront à jamais gravés dans mon cœur. Puisse Allah t'accorder Sa miséricorde et t'ouvrir les portes de Son vaste Paradis.

À mes frères et sœurs, « YOUSRA », « NESRINE », « RAHAF ET MAROUANE »,

Parce que les liens du sang sont parfois les plus beaux soutiens dans les moments de doute. Merci d'avoir partagé avec moi les joies comme les peines, les réussites comme les épreuves .

À mes chers collègues étudiants « Toufik Azizi ET Samiha Ledmi »,

Pour votre présence sincère, votre confiance, votre soutien et votre bienveillance. Vous avez été parmi les personnes qui ont rendu ce parcours plus léger et plus beau.

À tous ceux qui occupent une place dans mon cœur, à ceux qui ont cru en moi lorsque je doutais de moi-même, à ceux qui ont laissé une trace lumineuse dans mon existence. Je vous dédie ce travail avec tout mon amour, mon respect et mon éternelle reconnaissance.

«IMANE »



Remerciements

{ و ما توفيقي اءلا بالله عليه توكلت و اليه انيب }

Avant toute chose, je rends grâce à Allah, le Tout-Puissant, qui m'a accordé la force, la patience et la volonté nécessaires pour mener ce travail à son terme. Sans Sa miséricorde et Sa bénédiction, rien n'aurait été possible « Que cette expérience universitaire demeure une Source de motivation, guidant mes pas vers l'excellence, l'innovation et la réussite future ».

Au terme de cette aventure universitaire, riche en apprentissages, en défis et en sacrifices, il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

Ma reconnaissance la plus sincère s'adresse à mon encadreur, Professeur « ABDERRAHMANE MENASRIA », pour son accompagnement scientifique rigoureux, sa disponibilité constante, ses conseils précieux et la confiance qu'il m'a accordée. Son expérience, son professionnalisme et son sens de l'excellence ont constitué une véritable source d'inspiration.

J'adresse également mes plus vifs remerciements à la Docteure « BENACHI HAYAT », dont les qualités humaines et scientifiques forcent l'admiration. Je lui suis profondément reconnaissant pour ses orientations pertinentes, son soutien, ses encouragements et l'attention qu'elle a portée à mon travail.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à « Mohamed ALI RACHEDI » et à « BEANNADI EL HACHEMI », « Salah Refrafi », « Bouhadra Abdelhakim », « Thabet Mouhamed », « Belgacem Mamen » pour leurs conseils avisés, leurs encouragements et leur contribution à ma formation universitaire.

Mes remerciements s'étendent à « L'ENSEMBLE DES ENSEIGNANTS DU DEPARTEMENT » de Génie Civil, qui ont transmis leur savoir avec dévouement et passion. Grâce à eux, nous avons appris que la connaissance est la plus noble

des richesses et que la persévérance est la clé de toute réussite.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui, par une aide, un conseil, une parole

réconfortante ou une prière sincère, ont contribué

à l'aboutissement de ce travail.

À toutes et à tous, j'exprime mon profond respect, ma sincère gratitude

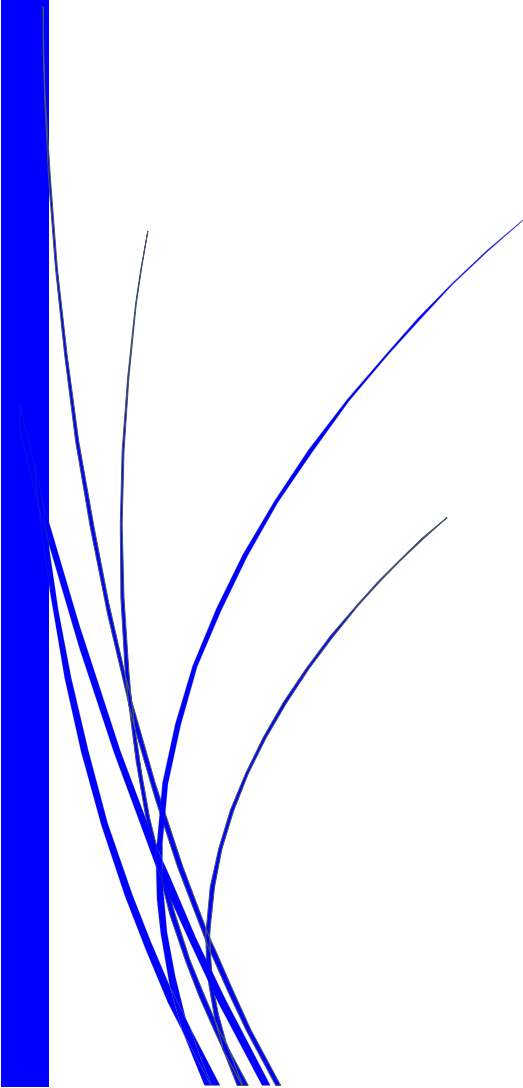
et ma reconnaissance éternelle.

« Louange à Allah, Seigneur des mondes ».



Résumé & Abstract &

الملخص



Résumé

Ce mémoire est consacré à l'analyse hygro-thermomécanique des poutres arquées sandwich en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) basée sur une théorie quasi-3D. Les structures sandwich FGM représentent une catégorie avancée de structures composites, constituées de couches externes et d'un noyau dont les propriétés varient progressivement à travers l'épaisseur, permettant d'améliorer les performances mécaniques et la résistance aux environnements sévères. L'objectif principal de cette étude est d'évaluer l'influence des effets couplés de la température, de l'humidité et des chargements mécaniques sur le comportement des poutres arquées sandwich FGM. Le modèle quasi-3D adopté prend en considération les effets du cisaillement transverse ainsi que l'étirement selon l'épaisseur, ce qui permet une description plus réaliste du comportement structural. Les équations gouvernantes sont établies à partir des principes de la mécanique des structures puis résolues numériquement afin d'étudier les déplacements, les contraintes et les réponses en flexion des poutres sous différentes conditions hygro-thermomécaniques. Une étude paramétrique est réalisée pour analyser l'effet de l'indice de gradation, de la configuration sandwich, de la géométrie arquée, de la température et de l'humidité sur la réponse globale de la structure. Les résultats montrent que les variations thermo-hygrométriques influencent fortement le comportement mécanique des poutres en arc sandwich FGM. L'augmentation de la température et de l'humidité entraîne une modification significative des déplacements et des contraintes, tandis que l'utilisation d'une configuration sandwich associée à une gradation fonctionnelle appropriée permet d'améliorer la rigidité, de réduire les concentrations de contraintes et d'optimiser les performances structurales.

Mots-clés : Poutres arquées sandwich, FGM, matériaux avancés, théorie quasi-3D, analyse hygro-thermomécanique, température, humidité, contraintes, déplacements, flexion.

Abstract

This thesis is devoted to the hygro-thermo-mechanical analysis of sandwich functionally graded material (FGM) curved beams based on a quasi-three-dimensional (quasi-3D) theory. Sandwich FGM structures represent an advanced class of composite structures composed of outer layers and a core whose material properties vary continuously through the thickness, thereby enhancing mechanical performance and resistance to severe environmental conditions. The main objective of this study is to investigate the influence of the coupled effects of temperature, moisture, and mechanical loading on the behavior of sandwich FGM curved beams. The adopted quasi-3D model takes into account transverse shear deformation as well as thickness stretching effects, providing a more realistic representation of the structural response. The governing equations are derived from the fundamental principles of structural mechanics and solved numerically to evaluate displacements, stresses, and bending responses under various hygro-thermo-mechanical conditions. A parametric study is conducted to examine the effects of the material gradation index, sandwich configuration, beam curvature, temperature variation, and moisture concentration on the overall structural behavior. The obtained results indicate that hygro-thermal environmental conditions significantly affect the mechanical behavior of sandwich FGM curved beams. An increase in temperature and moisture content leads to noticeable changes in displacement and stress distributions. Furthermore, the use of a sandwich configuration combined with an appropriate functional gradation improves structural stiffness, reduces stress concentrations, and enhances the overall structural performance.

Keywords: Sandwich curved beams, FGMs, advanced materials, quasi-3D theory, hygro-thermo-mechanical analysis, temperature, moisture, stresses, displacements, bending.

الملخص

تكرس هذه الأطروحة للتحليل الهيكروميكانيكي للروافد المنحنية المتدرجة وظيفيا (FGM) بناء على نظرية شبه ثلاثية الأبعاد (شبه ثلاثية الأبعاد). تمثل هياكل متدرجة وظيفيا في ساندويتش فئة متقدمة من الهياكل المركبة المكونة من طبقات خارجية ونواة تتغير خصائص مادتها باستمرار عبر السمك، مما يعزز الأداء الميكانيكي ومقاومة الظروف البيئية القاسية. الهدف الرئيسي من هذه الدراسة هو دراسة تأثير التأثيرات المترابطة لدرجة الحرارة والرطوبة والحمل الميكانيكي على سلوك عوارض FGM المنحنية. يأخذ النموذج شبه ثلاثي الأبعاد المعتمد في الاعتبار تشوه القص العرضي بالإضافة إلى تأثيرات شد السمك، مما يوفر تمثيلا أكثر واقعية للاستجابة الهيكلية. تشتق المعادلات الحاكمة من المبادئ الأساسية للميكانيكا الإنشائية ويتم حلها عدديا لتقييم الإزاحات والإجهادات واستجابات الانحناء تحت ظروف ميكانيكية رطوبة حرارية مختلفة. تجرى دراسة بارامترية لفحص تأثيرات مؤشر تدرج المادة، وتكوين السندويتش، وانحناء العارضة، وتقلب درجة الحرارة، وتركيز الرطوبة على السلوك البنيوي العام. تشير النتائج التي تم الحصول عليها إلى أن الظروف البيئية الرطبة-الحرارية تؤثر بشكل كبير على السلوك الميكانيكي لأشعة الساندويتش المنحنية لختان الإناء. يؤدي ارتفاع درجة الحرارة ومحتوى الرطوبة إلى تغييرات ملحوظة في الإزاحة وتوزيعات الإجهاد. علاوة على ذلك، فإن استخدام تكوين الساندويتش مع تدرج وظيفي مناسب يحسن الصلابة الهيكلية، ويقلل تركيزات الإجهاد، ويعزز الأداء الهيكلي العام.

الكلمات المفتاحية: عوارض منحنية على شكل ساندويتش، هياكل متدرجة وظيفيا، المواد المتقدمة، نظرية شبه ثلاثية الأبعاد، تحليل الرطوبة الحرارية الميكانيكية، درجة الحرارة، الرطوبة، الإجهادات، الإزاحات، الانحناء.



Table des Matieres

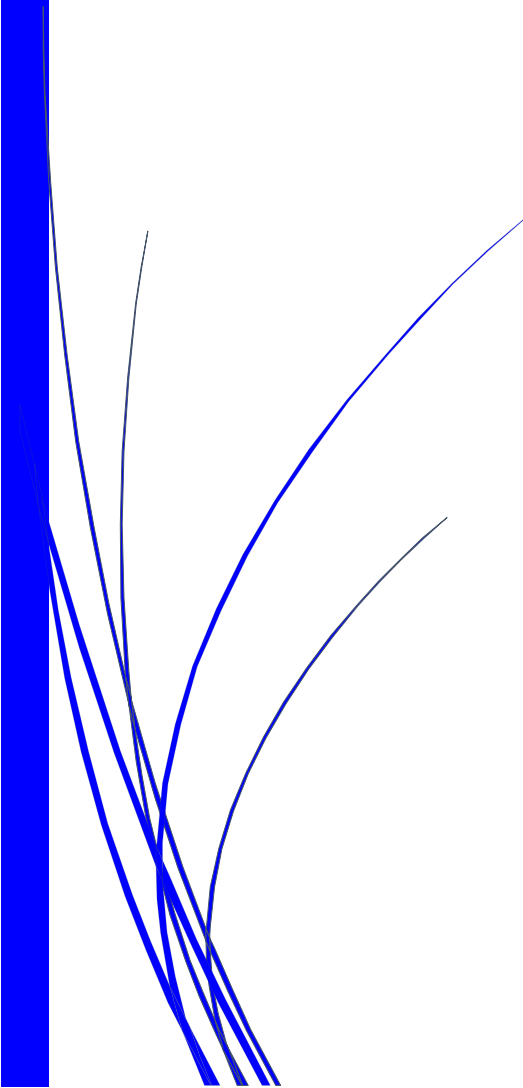
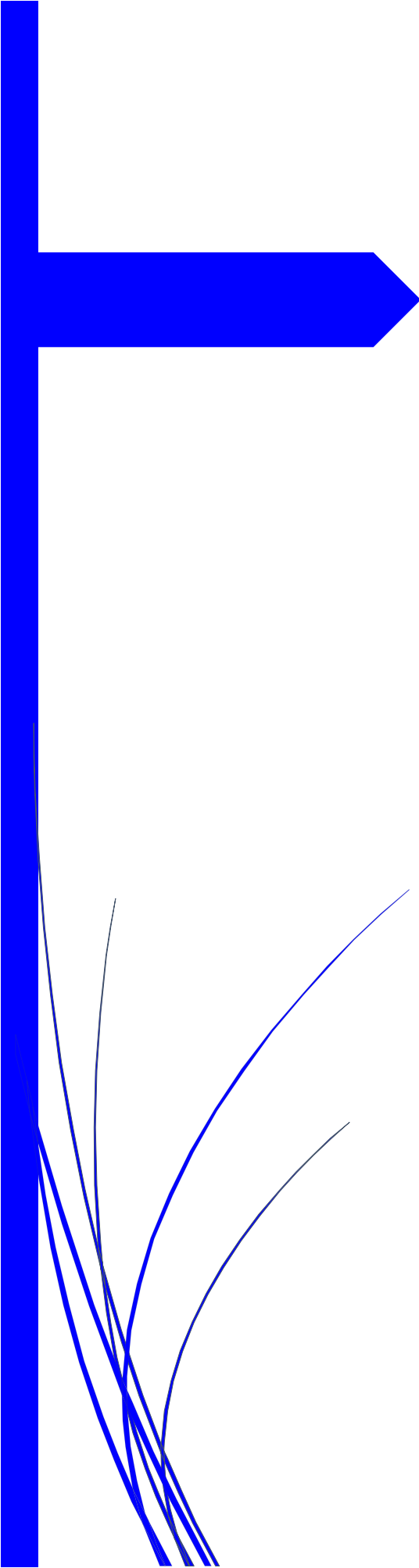


Table des matières

Dédicace.....	i
Remerciements	ii
Résumé.....	iii
Abstract.....	iv
ملخص.....	v
Table de matière	vi
Liste des tableaux	ix
Liste des figures.....	x
Liste de Notation	xi
Introduction	1
Chapitre I : Généralités Sur les matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)	3
I.1. Introduction.....	3
I.2. Composites	3
I.2.1. Définition d'un matériau composite.....	4
I.2.2. Les éléments constitutants d'un matériau composite.....	4
I.2.2.1. Les renforts	4
I.2.2.2. La Matrice	5
I.2.2.3. Interfaces.....	6
I.2.2.4. Charges- additifs.....	7
I.2.3. Les principales fibres	7
I.2.4. Classification des matériaux composites	8
I.2.4.1. Les composites à grande diffusion	8
I.2.4.2. Les composites hautes performances	8
I.2.5. Avantages des matériaux composites.....	8
I.2.6. Domaines d'application des matériaux composites	9
I.2.7. Les différentes architectures des renforts de composites	9
I.2.8. Les matériaux composites structuraux	10
I.2.8.1. Les monocouches	10
I.2.8.2. Les stratifiés	10
I.2.8.3. Les sandwichs.....	11
I.3. FGM comme solution.....	13
I.3.1. FGM dans la Nature	13
I.3.2. Définitions et concepts d'un matériau FGM.....	14
I.3.3. Classification des FGM.....	20
I.3.3.1. Classification basée sur le type de processus de dépôt	20
I.3.3.2. Selon la structure des FGM	21
I.3.3.3. Selon le type de gradient.....	21
I.3.3.4. Composition à gradient fonctionnel (FGC)	22
I.3.3.5. Porosité à gradient fonctionnel (FGP).....	22
I.3.3.6. microstructure à gradient fonctionnel (Micro Structural Gradient Materials-SGM).....	24

I.3.3.7.Selon l'échelle et les dimensions	25
I.3.3.8.Selon la nature du processus de gradation des FGM	25
I.3.3.9.Selon le coût du processus	26
I.3.4.Procédés de fabrication des matériaux à gradient de propriétés.....	26
I.3.4.1. Procédés de fabrication à l'état liquide	27
I.3.4.1.1.Coulage en bande (Tape Casting)	27
I.3.4.1.2.Coulage centrifuge (Centrifugal Casting).....	28
I.3.4.1.4.Méthode d'infiltration.....	29
I.3.4.2.Procédés de fabrication à l'état solide.....	30
I.3.4.2.1.Métallurgie des poudres (Powder Metallurgy).....	30
I.3.4.2.2.Méthodes de fabrication additive (Additive Manufacturing Method)	30
I.3.4.3.Procédés de dépôt.....	33
I.3.4.3.1.Méthodes de dépôt en phase vapeur (Vapor Phase Desposition Methods)	33
I.3.4.3.2.Dépôt par Electrophorèse (Electrophoretic Deposition).....	34
I.3.4.3.3.Procédé de projection thermique (Thermal Spraying Process)	35
I.3.5.Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)	35
I.3.5.1. Applications aérospatiales	36
I.3.5.2.Applications automobiles.....	36
I.3.5.3.Applications biomédicales.....	37
I.3.5.4.Applications de défense	37
I.3.5.5.Applications énergétiques	37
I.3.5.6.Applications électriques / électroniques	37
I.3.5.7.Applications marines.....	37
I.3.5.8.Applications en génie civil	37
I.3.6.Modélisation des propriétés matérielles effectives des FGM	38
I.3.6.1.Modèles micromécaniques (homogénéisation)	38
I.3.6.2. Modèle de Mori-Tanaka.....	40
I.3.6.4.Modèle de Reuss.....	41
I.3.6.6.Description par un élément de volume représentatif (RVE).....	42
I.4.Conclusion.....	46
Chapitre II : Théorie des Poutres & Recherche Bibliographique	47
II.1. Introduction	47
II.2. Historique des théories des poutres.....	48
II.3 Définition d'une poutre.....	48
II.4. Les modèles de la théorie des poutres.....	48
II.4.1. Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory – CBT).....	49
II.4.2. Modèle de poutre basé sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) (Timoshenko TBT).....	51
II.4.2.1.Facteur de correction de cisaillement (ks Shear Correction Factor).....	54
II.4.3 Modèle de poutre basé sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT –High Shear deformation Theory).....	55
II.5. Modèle de poutre avancé en cisaillement d'ordre élevé (RHSdT)	59

II.7. Modèle de poutre basé sur la théorie Quasi-3D	61
II.8. Études de recherche rapportées sur les poutres FG	62
II.8.1. Analyse statique des poutres FG	62
II.8.2 Analyse vibratoire des poutre FG	65
II.8.3 Analyse du flambage des poutres FG	67
II.9. Différents modèles de distributions hygrothermiques	69
II.9.1. Modèles de distribution polynomiale	70
II.9.2. Modèles de distribution d'élévation hygrothermique	71
II.10. Conclusion	73
Chapitre III : Analyse du Comportement Hygro-Thermo-Mécanique des Poutres Sandwich en Arc Fonctionnellement Gradué	74
III.1. Introduction	74
III.2. Formulation du problème	74
III.2.1. Configuration géométrique	75
III.2.2. Propriétés matérielles	76
III.3. Formulation théorique	78
III.3.1. Champs de déplacement et déformations	78
III.3.2. Relations constitutives	80
III.3.3. Équations d'équilibre	81
II.10. Conclusion	73
Chapitre IV : Résultats Numériques & Discussions	86
IV.1. Introduction	86
IV.2. Résultats et discussion	86
IV.2.1. Etude comparative	87
IV.2.2. Etude paramétrique	88
IV.3. Conclusion	98



Liste des tableaux

Liste des tableaux

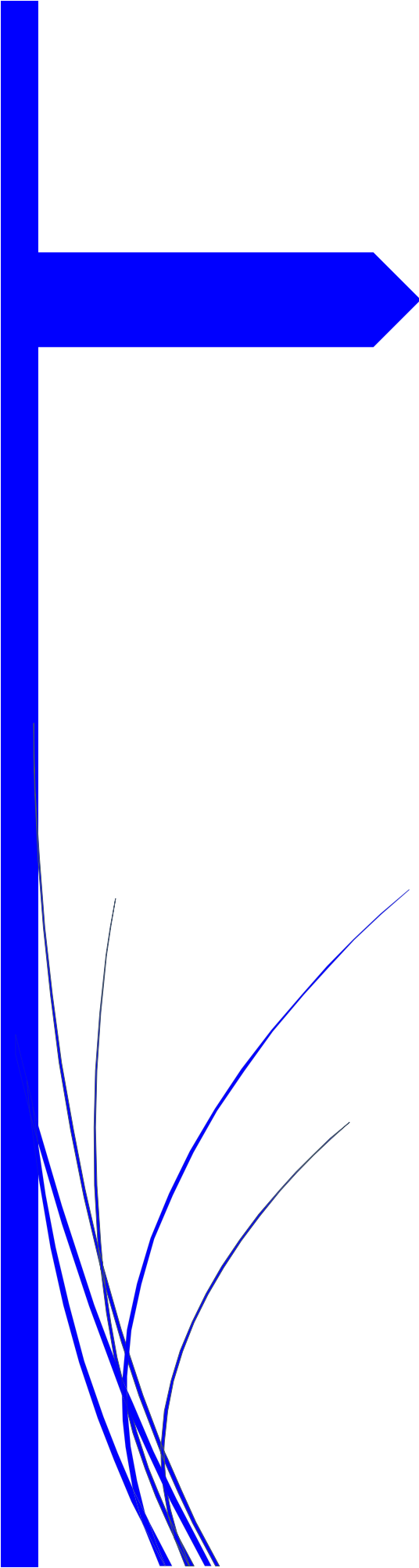
Tableau I.1: Caractéristiques mécaniques de quelques renforts de composites	7
Tableau III.1: Coefficients pour différentes distributions de température de la nano-plaque	80
Tableau IV.1: Les propriétés matérielles utilisées pour la poutre sandwich en FGM	86
Tableau IV.2: Comparaison des déplacements axiaux et déflexions adimensionnels de poutres en arc sandwich FG simplement appuyées soumises à des charges uniformes avec $R/h=20$	87
Tableau IV.3: Comparaison des contraintes axiales et de cisaillement adimensionnel des poutres courbes en sandwich FG simplement appuyées soumises à des charges uniformes avec $R/h=10$	88
Tableau IV.4: Déplacements axiaux et flèches adimensionnels de la poutre en arc sandwich FG simplement appuyée (2-1-2) soumise à des charges uniformes sous différentes distributions de température, avec : $L/h = 10$, $T = 10$, $C = 0$ avec $R/h=5$	89
Tableau IV.5: Le déplacement axial et la déflexion adimensionnels de la poutre courbe en sandwich FG simplement appuyée soumises à des charges uniformes sous différentes valeurs d'élévation de température appliquées (T) avec : $k=5$, $C=0$ et $R/h=5$	89
Tableau IV.6: Contraintes axiales et de cisaillement adimensionnelles de la poutre en arc sandwich FG simplement appuyée (2-1-2) soumise à des charges uniformes sous différentes distributions de température ($a/h=10$, $T=10$, $C=0$ et $R/h=10$).	90

Liste des Figures

Figure I.1: Constituants de base d'un matériau composite	4
Figure I.12: Les structures géométriques des renforts de composites à fibres longues, à fibres courtes et à particules	5
Figure I.3: Principaux matériaux de renforts	5
Figure I.4: Principaux familles de matrices	6
Figure I.5: Mécanisme d'adhérence entre fibre et matrice à l'interface (a) par enchevêtrement moléculaire ;(b) par attraction électrostatique ;(c) par réaction chimique ..	6
Figure I.6: Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites	7
Figure I.7: Les principales fibres : (a) fibres de verre, (b) fibres de carbone, (c) fibres d'aramide	8
Figure I.8: Domaines d'application des matériaux composites : a) Aéronautique b) Militaire c) Aérospatiale d) Nautique e) Sport f) Energie	10
Figure I.9: Différentes architectures des renforts de composites : a) mats de verre, b) tissu unidirectionnel (UD), c) tissu bidirectionnel.....	10
Figure I.10: Monocouches UD (Pli unidirectionnel).....	11
Figure I.11: Stratifié composé de plusieurs monocouches avec différentes orientations .	11
Figure I.12: Eléments constitutifs d'un sandwich	12
Figure I.13: Détaille les différents natures de renforts et des matrices utilisées Pour Constituer un matériau composite.....	13
Figure I.14: Matériaux composites stratifiés et matériaux à gradient fonctionnel (FGM).	14
Figure I.15: Exemples de gradient mécanique dans les bio-FGM par la voie structurale	15
Figure I.16 : Développement des matériaux vers les matériaux à gradient fonctionnel (FGM)	16
Figure I.17 : Premier exemple de FGM métallique au Japon	17
Figure I.18 : Variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur d'une plaque Stratifiée.....	17
Figure I.19 : Types de FGM (a) FGM continue et (b) FGM discontinue	18
Figure I.20 : Matériaux fonctionnellement gradués avec différentes formes de gradient..	18
Figure I.21 : Structures graduées (a) au niveau du joint et (b) en surface.....	19
Figure I.22 : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM.....	19
Figure I.23 : Distribution graduelle métal-céramique dans un matériau FGM.....	20
Figure I.24 : Les principaux avantages des matériaux à FGM par rapport aux	21
Figure I.25 : Classification des matériaux à gradient fonctionnel	22
Figure I.26: (a) FGM graduée en continu ; (b) FGM graduée par étapes [30]	23
Figure I.27: Classification des matériaux à gradient fonctionnel selon le type de gradient	23
Figure I.28: Exemples de combinaisons possibles de matériaux utilisées dans les FGM	24
Figure I.29: Schéma d'un FGM à porosité graduée	24
Figure I.30: Divisions typiques de composites poreux Source : Reproduit avec autorisations : Copyright.....	25

Figure I.31: (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores	25
Figure I.32: Exemples de structures poreuses FG typiques. Source : Reproduit avec autorisation [32]	26
Figure I.33: Les différents types de matériaux FGM. (A) Catégorisation, (B) Schéma représentant les différents types de gradients structuraux et chimiques des FGM [34]	26
Figure I.34: Classification des FGM selon la principale dimension	27
Figure I.35: Classification des FGM selon la méthode de gradation [29]	28
Figure I.35: Classification des FGM selon le coût du processus.....	29
Figure I.36: Méthodes de fabrication des FGMs (Saleh, 2020).....	29
Figure I.37: Schéma de principe du montage utilisé pour le coulage en bande (Saleh, 2020)	30
Figure I.38: Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée) (Saiyathi, 2015)	31
Figure I.38: processus de coulée en barbotine [29]	31
Figure I.39: Schéma du processus d'infiltration du FGM YSZ/SiC [42]	32
Figure I.40: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM (Surya, 2018)	33
Figure I.41: (a) : Illustration du procédé de frittage laser sélectif (SLS) (Saleh, 2020), ...	34
Figure I.42: Illustration du procédé de projection de matériau (Sireesha, 2018)	35
Figure I.43: Illustration du procédé de fabrication additive fil et arc : (a) Concept du procédé WAAM pour les produits FGM, (b) unités d'alimentation à double fil (Wang, 2018).....	35
Figure I.44: (a) : Le processus de dépôt physique en phase vapeur (PVD) (Saleh, 2020), (b) : Diagramme de l'installation pour la synthèse d'un SiC/C FGM par le biais du dépôt chimique en phase vapeur (CVD) (El-Galy, 2019).....	36
Figure I.45: Principe de l'installation d'EPD pour la production des FGM [43]	37
Figure I.46: Schéma illustratif du processus de pulvérisation thermique (Sulzer, 2013) ..	38
Figure I.47 : Les principaux domaines d'application des FGM [39]	39
Figure I.48: Courbes des caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [53]	41
Figure I.49: Module de Young efficace en fonction de la fraction volumique de la céramique pour plusieurs modèles micromécaniques	42
Figure I.50: Coefficient de Poisson effectif en fonction de la fraction volumique de céramique pour plusieurs modèles micromécaniques.....	43
Figure I.51 : Matériau FGM à deux phases présentant (a) une microstructure particulière et (b) une microstructure squelettique [15].....	44
Figure I.52 : Géométrie d'une poutre FGM [74]	46
Figure I.53 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM.....	47
Figure I.53 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur S-FGM.....	48
Figure I.54: Variation du module d'Young E à travers l'épaisseur E-FGM	49
Figure II. 1 : Schéma d'un élément de poutre.....	48

Figure II. 2 : Géométrie non déformée et déformée d'une poutre sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli (CBT) [86]	51
Figure II.3 : Evolution des théories classiques des poutres	52
Figure II.4 : Géométrie non déformée et déformée de la poutre de Timoshenko [86]	52
Figure II.5 : Illustration élémentaire d'une poutre en fonction de deux théories des poutres	53
Figure II.6 : La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT	54
Figure II.7 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé	56
Figure II. 8 : La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT	57
Figure II. 9 : Géométrie non déformée et déformée d'une poutre selon le CBT, FSDT et HSDT [86]	57
Figure II. 10 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	59
Figure II. 11 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur	60
Figure II. 12 : Distribution des contraintes de cisaillement selon trois théories (Tafla, 2007) a : FSDT (l'effet de cisaillement d'ordre un). b : HSDT (l'effet de cisaillement d'ordre élevé). c : RHSDT (l'effet de cisaillement d'ordre élevé par raffinement	61
Figure II. 13: Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur	62
Figure III.1 : Géométrie et système de coordonnées d'une poutre sandwich en arc fonctionnellement graduée	75
Figure III.2 : Variation de la fraction volumique $V_i(z)$ en fonction de l'indice matériel k pour différentes poutres sandwich FG en arc	77
Figure. IV.1 : Les flèches adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs de l'indice matériel k	91
Figure. IV.2 : Les flèches adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rayon R de la courbure	92
Figure. IV.3 : Les flèches adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs de la température T	93
Figure. IV.4 : Les déplacements adimensionnels d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rapport géométrique L/h	94
Figure. IV.5 : Les déplacements adimensionnels d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rayon R de la courbure	95
Figure. IV.6 : Les déplacements adimensionnels d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs de la température T	96
Figure. IV.7 : Les contraintes adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rapport géométrique L/h	97
Figure. IV.8 : Les contraintes adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rapport des couches	98



Liste de Notations

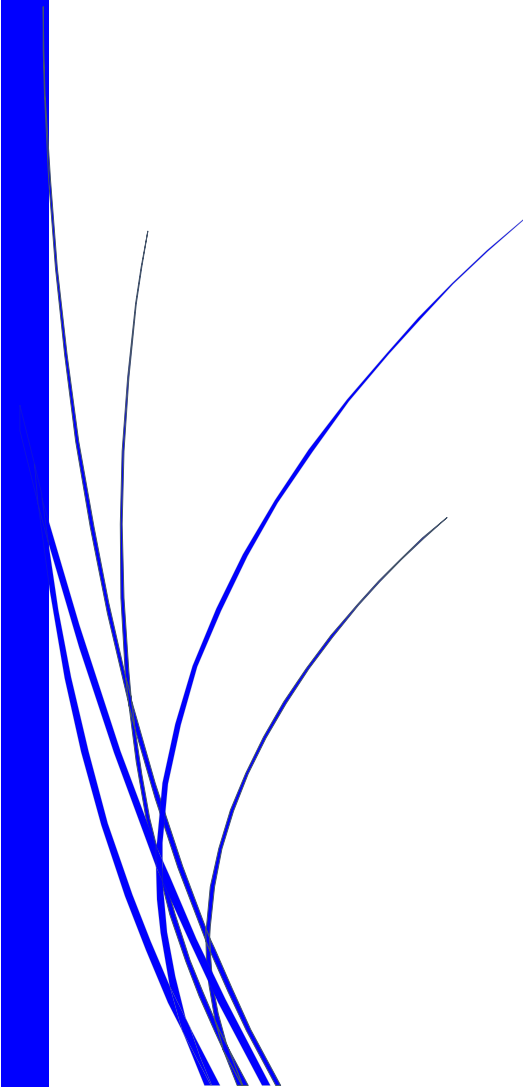
Liste des Notations

L	Longueur de la poutre
b	Largeur de la poutre
h	Epaisseur de la poutre
R	rayon de courbure
E	Module de Young
$E(z)$	Module de Young en fonction de « z »
E_c	Module de Young de la céramique
E_m	Module de Young de la métal
ν	Coefficient de Poisson
G	modules de cisaillement
k	le paramètre du matériau (ou indice de loi de puissance)
V_c	fraction volumique.
ρ_c	Masse volumique céramique
ρ_m	Masse volumique métal
K	modules de compressibilité
P_i, V_i	sont respectivement la propriété matérielle et la fraction volumique du constituant i des FGM
u	le déplacement axial,
w	le déplacement transversal
$u_o(x,t)$	représentent les inconnues de déplacements axial au niveau de l'axe neutre
$w_o(x,t)$	représentent les inconnues de déplacements transversal au niveau de l'axe neutre
w_b	Composante de la flèche due à la flexion
w_s	Composante de la flèche due au cisaillement
	les déformations normales et transversales
$\varepsilon_x, \varepsilon_z$	(Power-law Functionally Graded Material)
P-FGM	(Sigmoid Functionally Graded Material)
S-FGM	(Exponential Functionally Graded Material)
E-FGM	présente la rotation de la section transversale de la poutre
$\varphi(x,t)$	Fonction de gauchissement
$f(z)$	fonction de cisaillement transverse dus au l'effet d'étirement de l'épaisseur de la poutre
$g(z)$	Classical Beam Theory
CBT	High Shear deformation Theory
HSDT	First-Order Shear deformation Theory
FSDT	la rotation due à la flexion.
$\frac{\partial w_o}{\partial x}$	désigne la rotation autour de l'axe y
ϕ_x	Facteur de correction de cisaillement
K_s	l'effet de l'étirement de l'épaisseur
φ_{st}	représente la rotation de la section transversale autour de l'axe y .
$\theta(x)$	l'exposant hygrothermique
γ	coefficient de dilatation thermique
$\alpha(z)$	

$\beta(z)$	coefficients de concentration d'humidité
c_{ij}	Coefficients de rigidité
γ_{xz}	déformation de cisaillement transverse
$\Delta T(z)$	changement de température
T_0	température ambiante
$T_\Omega(x, z)$	distribution de température le long du domaine de surface Ω
T_1, T_2	les termes utilisés pour les charges thermiques
$T1, T2$	les termes utilisés pour le changement de concentration en humidité
$C1, C2$	sont associés à une température constante
$T1$	une température linéaire
$T2$	une température non linéaire
$T3$	la propriété matérielle effective du FGM de la couche n
$P(z) (n)$	alliage d'aluminium
Al	oxyde d'alumine
Al_2O_3	Uniform Temperature Distribution
UTD	Linear Increase
LI	Parabolic Increase
PI	Parabolic-Maximum at Centre
P-MAC	Parabolic-Maximum at ends
P-MAE	



Introduction Générale



Introduction Générale

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont des composites avancés à microstructure hétérogène. Généralement, ces matériaux sont fabriqués à partir de composants isotropes tels que les métaux et la céramique. On trouve des FGM dans la nature sous forme d'os, de dents, etc. La nature a conçu ces matériaux pour répondre aux exigences de service attendues. Cette idée est inspirée de la nature pour résoudre des problèmes d'ingénierie de la même manière que les réseaux neuronaux artificiels sont utilisés pour émuler le cerveau humain. Les FGM ont été initialement conçus au début des années 1980 par des scientifiques japonais, comme matériaux barrière thermique pour des applications structurelles aérospatiales et des réacteurs à fusion. Aujourd'hui, ils ont trouvé des applications dans diverses branches de l'ingénierie en tant qu'éléments structuraux tels que des poutres, des plaques, des coques, etc., Par exemple, dans les structures aérospatiales, les industries de production d'énergie, les pièces de machines, etc. Ces dernières années, ces nouvelles classes de matériaux ont suscité un intérêt considérable qui motive l'importance d'une compréhension approfondie de leur comportement.

Les poutres sandwich fonctionnellement graduées sont des éléments structuraux constitués de deux matériaux différents. En raison de leur faible poids et de leur grande rigidité, ces éléments sont couramment utilisés dans plusieurs industries telles que la construction, l'aérospatiale, les transports, l'aéronautique et la marine. La prévention des risques peut passer par la connaissance des caractéristiques mécaniques essentielles pour éviter la ruine précoce des structures par fatigue ou l'instabilité thermique par flambage, assurer une durée de vie satisfaisante de la structure. L'évolution continue des caractéristiques mécaniques de la surface inférieure vers la surface supérieure élimine l'interface entre les couches, zone d'accumulation et de concentration de contraintes.

Soucieux des effets occasionnés par les chargements couplés (mécaniques, thermiques et d'humidité) auxquels sont soumises les poutres sandwich FG dans de nombreux domaines d'application : aérospatial, automobile, aéronautique, génie civil, il est impératif d'étudier la flexion statique des poutres sandwich FG dans ces conditions de chargement. Dans ces applications, les sandwichs étaient, au début de leurs utilisations, constitués de couches isotropes. Avec le souci d'incorporer davantage de propriétés dans les infrastructures tout en assurant leur légèreté, les matériaux composites sont devenus incontournables pour améliorer et optimiser les propriétés requises.

L'avantage de l'utilisation de ces matériaux composites réside dans le bon rapport poids/rigidité qu'ils offrent, en plus de leur multifonctionnalité intégrée. En ce sens, les composites à fibre, au-delà de leur légèreté et leur bonne rigidité, offrent la possibilité de jouer sur l'orientation de leurs fibres, pour améliorer la résistance et les propriétés de

résistance des structures. Les structures composites sont conçues et adaptées aux domaines spécifiques et aux sollicitations auxquelles elles doivent faire face en service.

Mais aujourd'hui ce concept de matériaux à gradient de propriétés retrouve un regain d'intérêt dans l'ingénierie grâce à la flexibilité qu'il offre dans le contrôle de la microstructure et de la texture des composites. Avec ce nouveau concept, il est devenu plus simple d'adapter les propriétés du matériau aux sollicitations et proposer des modèles robustes pour étudier leur comportement. Cependant, les FGM possèdent des comportements complexes qui nécessitent l'emploi des méthodes analytiques et numériques sophistiqués pour leur analyse. La méthode de Navier s'est imposée ces dernières années comme une méthode puissante et efficace, ce qui lui permet d'être largement utilisée dans l'analyse du comportement complexe de ce type de matériaux.

Ce travail a pour but d'enrichir les théories existantes et de développer une nouvelle théorie de déformation de cisaillement élevé quasi-3D à quatre variables pour l'étude du comportement mécanique des poutres sandwich FG simplement appuyées, soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.

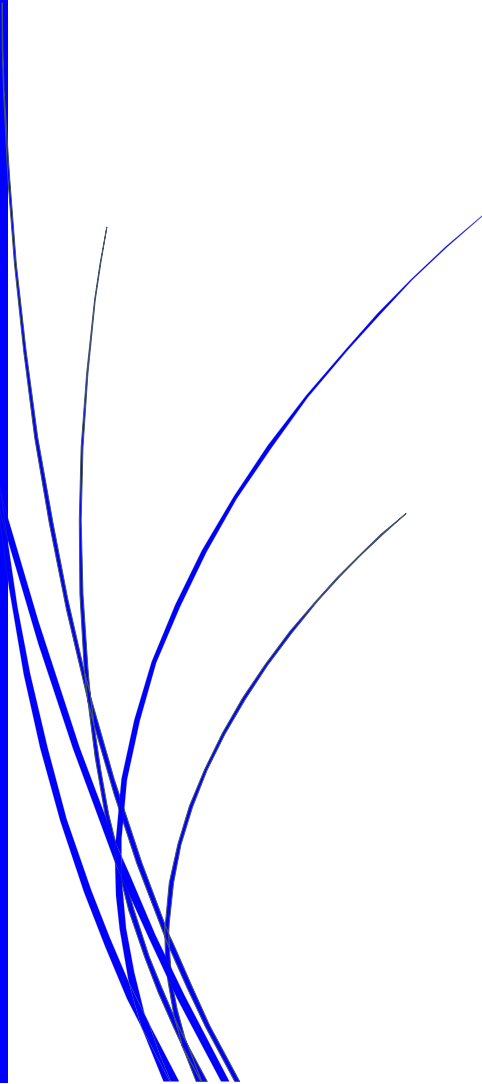
L présent mémoire est articulé autour de quatre chapitres :

- **Le premier chapitre** présente une description des matériaux fonctionnellement gradués, couvrant leurs caractéristiques, leur histoire de développement, des techniques de fabrication, les domaines d'application,
- **Le deuxième chapitre** présente, les modèles existants avec les différentes formulations de la théorie de l'élasticité ou des modèles théoriques qui en décrivent (théorie des poutres, des plaques et des coques) pour analyser le comportement mécanique et définir la conception de ces structures. La deuxième partie est consacrée aux travaux récents dans le domaine dédié aux comportements statique, vibratoires et de flambage des poutres FG. Une lecture générale de leurs principes de base et leurs hypothèses est aussi discutée.
- **Le troisième chapitre** est consacré à la modélisation de la formulation mathématique proposée, décrivant le comportement d'une poutre sandwich fonctionnellement graduée en arc, soumise à un chargement combiné hygro-thermo-mécanique non linéaire à l'aide d'une nouvelle théorie de déformation de cisaillement élevé quasi-3D, Afin d'étudier le comportement en flexion des poutres sandwich FG en arc simplement appuyées.
- **Le quatrième chapitre** est consacré à plusieurs exemples numériques concernant l'analyse de la flexion de poutre sandwich FG sous des sollicitations hygro-thermo-mécaniques combinées sont présentés et discutés afin de vérifier l'exactitude de la théorie proposée. Où nous avons obtenu des courbes représentant l'efficacité de cette théorie.

Enfin, une conclusion générale relative à la recherche effectuée.

Chapitre I

Généralités Sur les matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)



Chapitre I :**Généralités Sur les matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM)****I.1. Introduction**

Le développement des matériaux est le moteur principal du monde dans lequel nous vivons, car tous les domaines de l'activité humaine dépendent de ce développement pour leur performance. L'évolution des matériaux, du monolithique aux alliages, et le développement des composites reposent sur les limites d'une classe de matériaux qui nécessitent le développement d'autres classes. La plupart des applications nécessitent des matériaux aux propriétés contradictoires qui ne peuvent pas être obtenues avec un matériau monolithique. De plus, l'alliage de différents matériaux est limité par le comportement thermodynamique des constituants et par la limitation imposée par le degré auquel un matériau peut être mélangé avec d'autres. Les matériaux à gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials, FGM) ou les matériaux fonctionnellement gradués, sont capables de répondre aux exigences de ces applications. Ces matériaux composites avancés peuvent survivre dans des environnements de travail difficiles, sans perdre leurs propriétés ni subir de défaillance en cours d'utilisation.

Un FGM est caractérisé par un gradient de composition entre deux matériaux, ce qui le rend complètement différent des matériaux composites conventionnels. La nécessité de ce matériau est apparue suite à l'échec des composites conventionnels, incapables de résister à des conditions de travail difficiles. Cet échec est principalement dû à l'interface distincte et bien définie qui existe entre les couches de matériaux composites. Cette interface provoque une concentration de contraintes élevée qui favorise l'initiation des fissures et leur propagation éventuelle, ce qui conduit à la rupture ultime du composite. Ce processus est connu sous le nom de "délamination". Cette interface est systématiquement éliminée dans les FGM, en raison du changement progressif des fractions volumiques de leurs composants et, par conséquent, de leurs propriétés dans une direction spécifique.

Le concept réel des FGM a été acquis à partir de nature et utilisé pour résoudre des problèmes d'ingénierie de la même manière que la nature utilise de tels matériaux en fonction de leurs exigences d'application et de leurs domaines d'application.

Les FGM ont été initialement développés pour une application de barrière thermique. Aujourd'hui, l'application de ce matériau avancé important a été étendue et utilisée pour résoudre un certain nombre de problèmes d'ingénierie. Les applications aérospatiales, automobiles et biomédicales sont quelques-unes des zones qui bénéficient de ce nouveau matériau.

I.2. Composites

I.2.1. Définition d'un matériau composite

Un composite est l'assemblage de plusieurs matériaux non miscibles de nature différente et dont les qualités se complètent afin d'obtenir un matériau hétérogène dont les performances sont supérieures à celles de ses composants. Un matériau composite est constitué d'un renfort (ossature du matériau) qui assure la tenue mécanique et d'une matrice (enveloppe ou peau du matériau) qui est généralement polymérique (résine thermoplastique ou thermodurcissable) ou métallique, qui assure la cohésion de la structure et la retransmission des efforts vers le renfort, comme illustré à la **Figure I.1**.

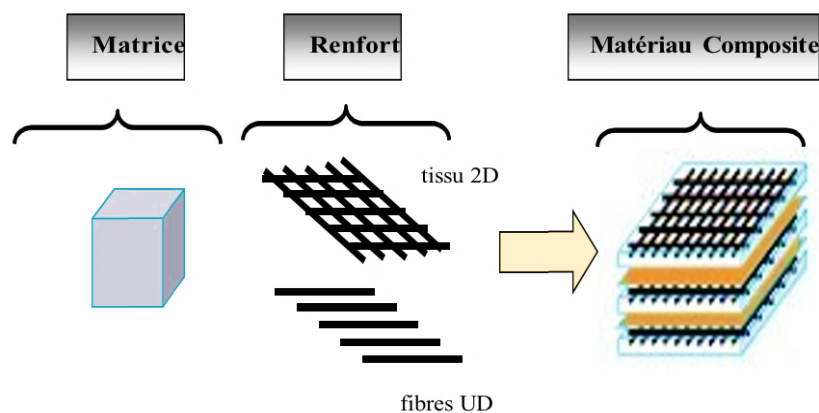


Figure I.1: Constituants de base d'un matériau composite

I.2.2. Les éléments constitutifs d'un matériau composite

I.2.2.1. Les renforts

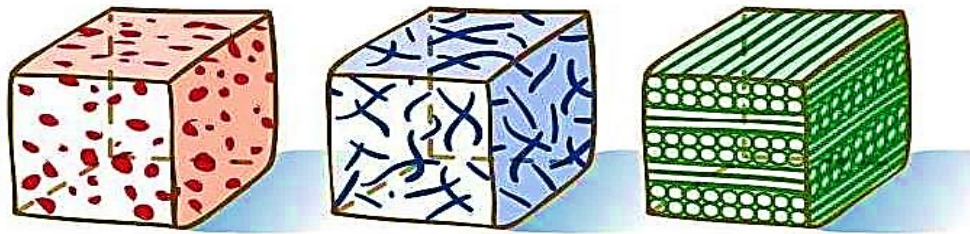
Le renfort est généralement composé de matériau plus dur que la résine, son rôle principal est d'assurer au matériau une grande résistance surtout à la traction, et qui se présente généralement sous forme de fibres (diamètres de 5 à 20 μm) (**Figure I.2**) :

- Fibres longues unidirectionnelles (carbone, verre)
- Fibres longues tissées (tissus 3D et 2D)
- Fibres courtes réparties aléatoirement sans directions privilégiées (mat)

Les fibres sont de type organique (fibres en polyamide, polyester, polypropylène ...) et inorganiques (fibres de verre, de carbone, ...) ou encore naturelles (cellulose) (**Figure I.3**). En général, elles présentent d'excellentes caractéristiques mécaniques. En fonction de la forme des renforts, on distingue deux types de composites :

1. les composites à fibres : constitués de fibres continues ou discontinues (fibres coupées ou courtes). Leur orientation permet de moduler les propriétés mécaniques du matériau et d'obtenir des matériaux isotropes ou anisotropes.

2. Les composites à particules : les particules sont généralement utilisées pour améliorer certaines propriétés des matériaux.



Composite
à particules

Composite
à fibres courtes

Composite
à fibre longues

Figure I.12: Les structures géométriques des renforts de composites à fibres longues, à fibres courtes et à particules

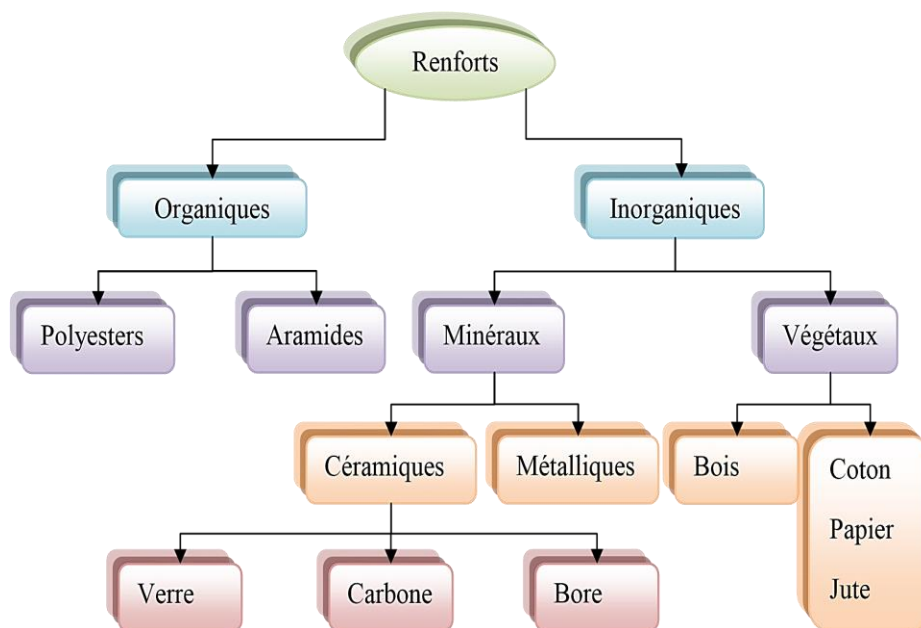


Figure I.3: Principaux matériaux de renforts [1]

I.2.2.2. La Matrice

Les matrices utilisées dans les matériaux composites désignent la matière solide qui entoure les renforts pour former une masse compacte, et ont pour rôle de transférer les sollicitations mécaniques aux fibres et de les protéger de l'environnement extérieur(**Figure I. 4**).

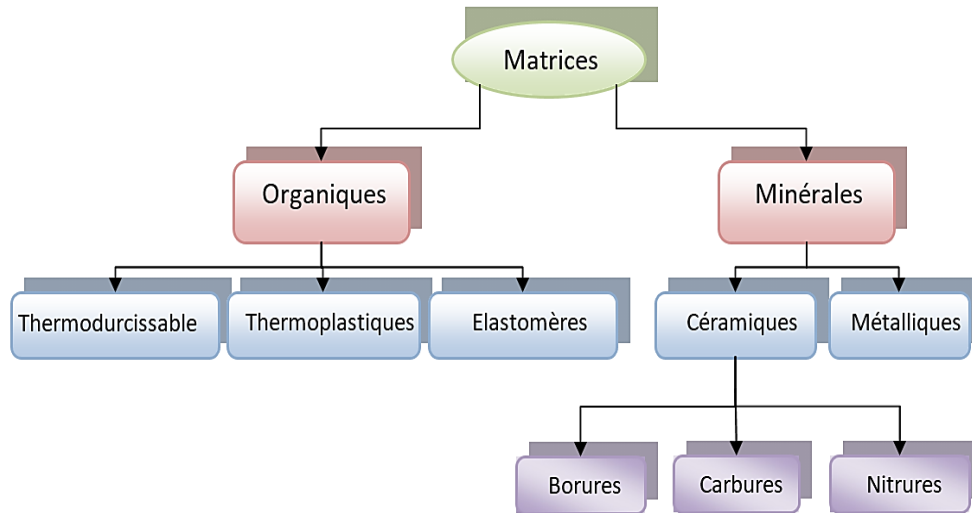


Figure I.4 : Principaux familles de matrices

I.2.2.3. Interfaces

Les composites étant des matériaux hétérogènes, ils possèdent des interfaces, c'est-à-dire des surfaces de contact entre la matrice et le renfort (**Figure I.5**). Tant que le composite est intact, les deux constituants adhèrent parfaitement l'un à l'autre, et l'interface ne joue donc aucun rôle particulier. Cependant, l'interface joue un rôle important lorsque le composite subit des dégradations mécaniques et commence à se fissurer suite à une surcharge, à la fatigue.

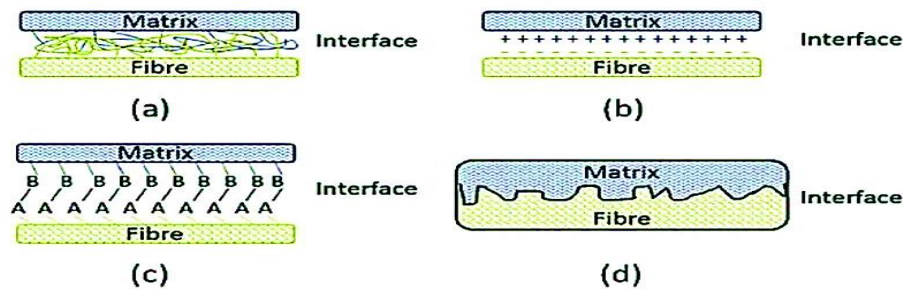


Figure I.5: Mécanisme d'adhérence entre fibre et matrice à l'interface (a) par enchevêtrement moléculaire ; (b) par attraction électrostatique ; (c) par réaction chimique ; (d) par inter-diffusion d'éléments

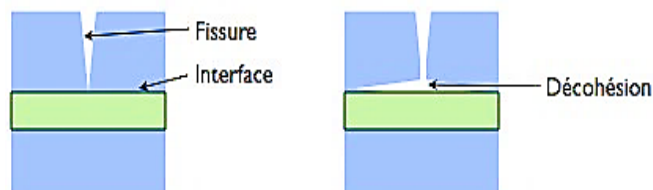


Figure I.6: Le rôle de l'interface sur la ténacité des composites lorsqu'une fissure atteint l'interface (a), elle est déviée (b)

I.2.2.4. Charges- additifs

Dans le domaine des matériaux composites on appelle communément une charge toute substance inerte, minérale ou végétale qui est ajoutée à un polymère de base qui permet de modifier de manière sensible les propriétés mécaniques, électriques ou thermiques et d'améliorer l'aspect de surface ou bien simplement de réduire le prix de revient du matériau modifié. Au contraire des matériaux thermoplastiques, les matériaux thermodurcissables ont toujours renfermé des charges à des taux souvent élevés pouvant atteindre 60 % en masse. Le choix d'une charge pour un polymère donné est caractérisé en fonction des modifications recherchées pour l'objet terminé. Mais d'une manière générale, les substances utilisables comme charges des matériaux plastiques devront avant tout satisfaire un certain nombre d'exigences à savoir : la compatibilité avec la résine de base, la mouillabilité, l'uniformité de qualité et de granulométrie, la faible action abrasive et le bas prix de revient.

I.2.3. Les principales fibres

Une fibre est un solide à une dimension dont la structure est fortement orientée. On définit une fibre par sa section moyenne dans la direction transversale. Elle est caractérisée par un diamètre moyen très faible, de l'ordre de 5 à 30 μm , sa longueur totale peut varier de 2 cm à plusieurs kilomètres. Parmi les différents types de fibres utilisées comme renforts on peut citer (**Figure I.7**) :

- Les fibres de verre
- Les fibres de carbone
- Les fibres d'aramide (Kevlar)



(a)



(b)



(c)

Figure I.7: Les principales fibres : (a) fibres de verre, (b) fibres de carbone, (c) fibres d'aramide

Les caractéristiques mécaniques de quelques renforts de composites sont présentées dans le Tableau I.1.

Tableau I.1: Caractéristiques mécaniques de quelques renforts de composites

Fibres	$\varnothing$ (μm)	ρ	E (MPa)	G (MPa)	ν	σ_{tr} (MPa)
Verre E	16	2.54	74 000	30 000	0,25	2 500
Verre R	10	2.48	86 000	/	0.2	3 200

Carbone HM	6.5	1. 80	390 000	20 000	0,35	2 500
Carbone HR	7	1 .75	230 000	50 000	0,3	3 200
Kevlar	12	1 .45	130 000	12 000	0,4	2 900

- Autres fibres

Il existe diverses autres fibres utilisées pour des applications particulières. Ces fibres sont généralement à faibles module et contrainte à la rupture. Généralement, leur utilisation est réservée à une recherche de produits à bas prix de revient, des produits à haute isolation thermique, des produits à bonne conductibilité thermique ou électrique et des produits à haute absorption acoustique. Parmi ces fibres nous avons :

- Les fibres minérales
- Les fibres animales
- Les fibres végétales

I.2.4. Classification des matériaux composites

Selon leur taux d'utilisation, les composites sont classés en deux grandes classes : les composites à grande diffusion et les composites hautes performances.

I.2.4.1. Les composites à grande diffusion

Ils occupent une portion de 95 % des composites utilisés. Ce sont en général des plastiques armés ou des plastiques renforcés, le taux de renfort est de 30 %. Dans 90 % des cas, l'anisotropie n'est pas maîtrisée car les renforts sont des fibres courtes. Les principaux constituants de bases sont les résines polyesters avec des fibres de verre. Dans ce cas le renfort et la matrice sont à des coûts voisins.

I.2.4.2. Les composites hautes performances

Ils sont principalement utilisés dans l'aéronautique et sont d'un coût élevé. Les renforts sont plutôt des fibres longues. Le taux de renfort est supérieur à 50%, et ce sont les renforts qui influent sur le coût. Les propriétés mécaniques (résistance mécanique et rigidité) sont largement supérieures à celles des métaux, contrairement aux composites à grande diffusion. Des méthodes de calculs de structures et d'homogénéisations ont été développées pour les composites hautes performances

I.2.5. Avantages des matériaux composites

Les matériaux composites disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels.

Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels :

- Maintenance réduite et liberté de formes

- Tenue aux chocs et au feu
- Isolation thermique et/ou phonique

I.2.6. Domaines d'application des matériaux composites

Le développement des composites modernes est dû essentiellement aux besoins de plus en plus poussés de l'industrie, surtout dans les secteurs (**Figure I.8**) :

- Aérospatial
- Aéronautique
- Défense
- Sport
- Biomécanique

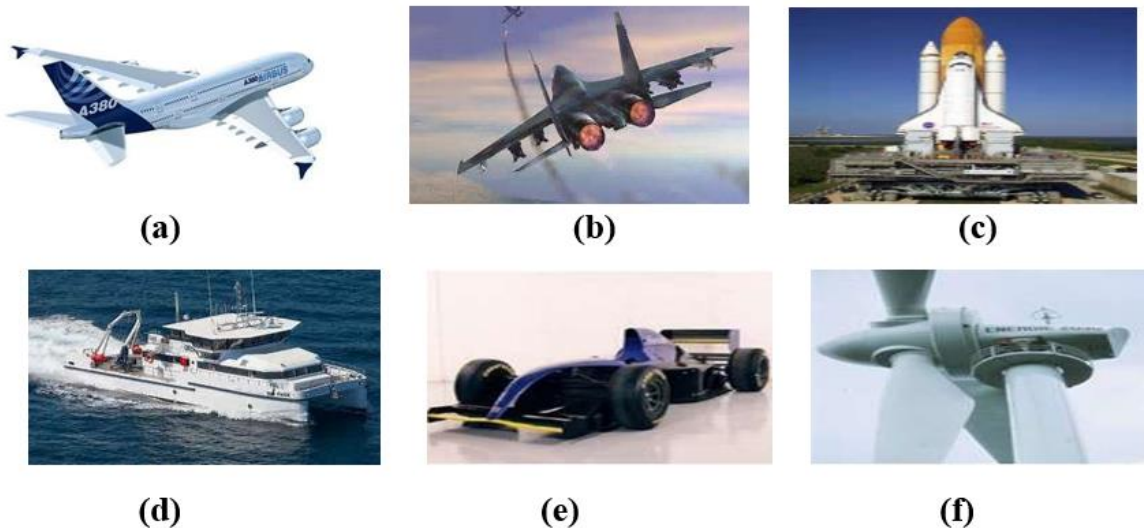


Figure I.8: Domaines d'application des matériaux composites : a) Aéronautique b) Militaire c) Aérospatiale d) Nautique e) Sport f) Energie

I.2.7. Les différentes architectures des renforts de composites

Les renforts sont assemblés dans le but de faciliter leur mise en forme. On peut distinguer cinq catégories de renforts : Les mats, tissus UD (unidirectionnels), les tissus bidirectionnels, les et les tissus multidirectionnels.

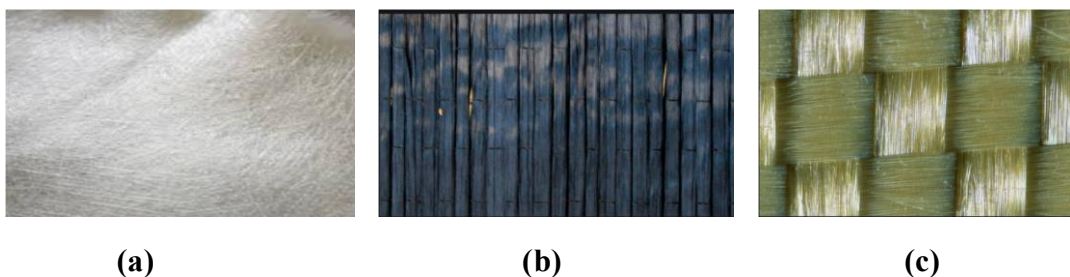


Figure I.9: Différentes architectures des renforts de composites : a) mats de verre, b) tissu unidirectionnel (UD), c) tissu bidirectionnel

I.2.8. Les matériaux composites structuraux

I.2.8.1. Les monocouches

Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les monocouches sont caractérisées par la forme du renfort. On distingue les monocouches à fibres longues (unidirectionnelles UD ou réparties aléatoirement, à fibres tissées (tissus de renfort) et à fibres courtes (**Figure I.10**).

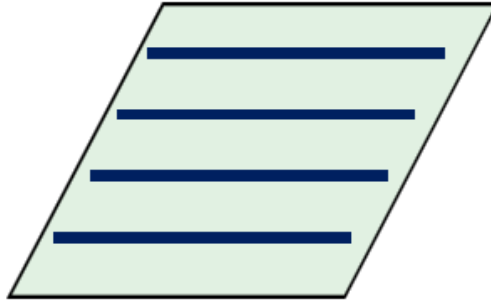


Figure I.10: Monocouches UD (Pli unidirectionnel)

I.2.8.2. Les stratifiés

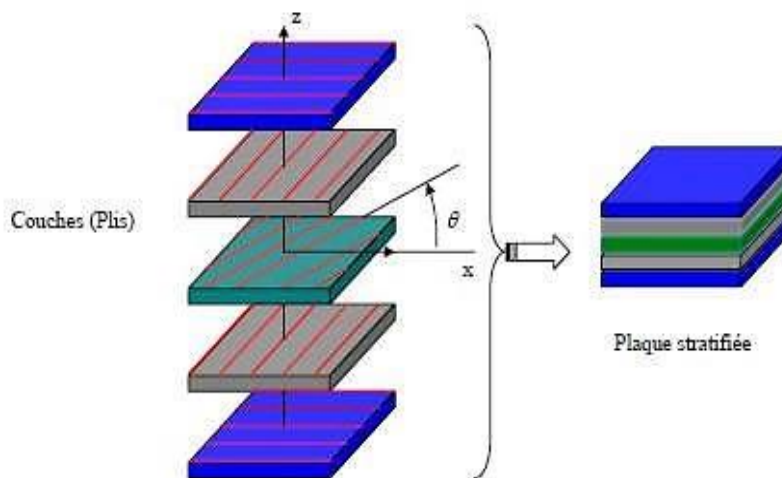


Figure I.11: Stratifié composé de plusieurs monocouches avec différentes orientations

Un stratifié résulte de la superposition de plusieurs monocouches (ou plis) de nappes unidirectionnelles ou de tissus ayant chacune une orientation propre par rapport à un repère commun aux couches et désigné par le référentiel du stratifié (**figure 1.11**). Les nappes successives sont en général orientées différemment (classiquement 0° , 45° , 90° , -45°). Il y a au minimum quelques couches, et jusqu'à 20 ou 30 couches, pour une épaisseur qui peut aller de 1 mm à plusieurs mm.

On appelle stratifié :

- 1- **Equilibré** : un stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction $+\theta$ que de couches orientées suivant la direction $-\theta$.
- 2- **Symétrique** : un stratifié comportant des couches disposées par rapport au plan moyen (miroir).
- 3- **Orthogonal (Croisé)** : un stratifié comportant autant de couches à 0° que de couches à 90° .
- 4- **Antisymétrique** : stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
- 5- **Hybride** : les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

1.2.8.3. Les sandwiches

Ce sont des matériaux composés de deux semelles (ou peaux) de grande rigidité et de faible épaisseur enveloppant une âme (ou cœur) de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. L'assemblage des peaux avec l'âme se fait généralement par collage, par soudage ou par polymérisations dans les moules dans le cas des composites plastiques. Les âmes peuvent être pleines (bois, mousse, ...etc.) ou creuse (alliages métalliques léger, papier, ...etc.). Les peaux sont généralement des stratifiées ou des feuilles d'alliage légers. Les âmes les plus utilisées sont de type nid d'abeilles, âme ondulée ou mousse (**figure 1.12**). Ces structures ont une grande rigidité en flexion et torsion. L'âme de la structure sandwich résiste principalement aux contraintes de cisaillement et de compression hors plan, les peaux inférieures et supérieures supportent quant à elles les efforts dans leur plan.

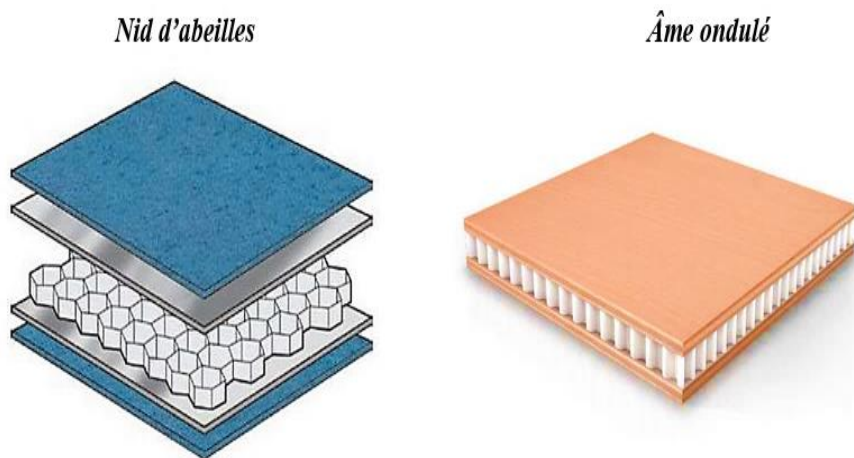


Figure 1.12:Eléments constitutifs d'un sandwich

I.2.8.3.1. Avantages des sandwiches

Les sandwichs sont caractérisés par une grande légèreté ; une excellente rigidité à la flexion et par de bonnes caractéristiques d'isolation.

I.2.8.3.2. Inconvénients des sandwichs

Malgré les atouts dont disposent les sandwichs ils présentent comme même des inconvénients : mauvais amortissement et isolation acoustique, tenue au feu moyenne, problèmes de décollement âme /peau et possibilité et risque de flambage par rapport aux autres structures.

Les matériaux composites occupent une place importante dans le domaine des matériaux avancés grâce à la diversité de leurs constituants et de leurs propriétés.

À cet effet, la (Figure I.13) suivant présente les principales classifications des composites selon la nature de la matrice et du renfort.

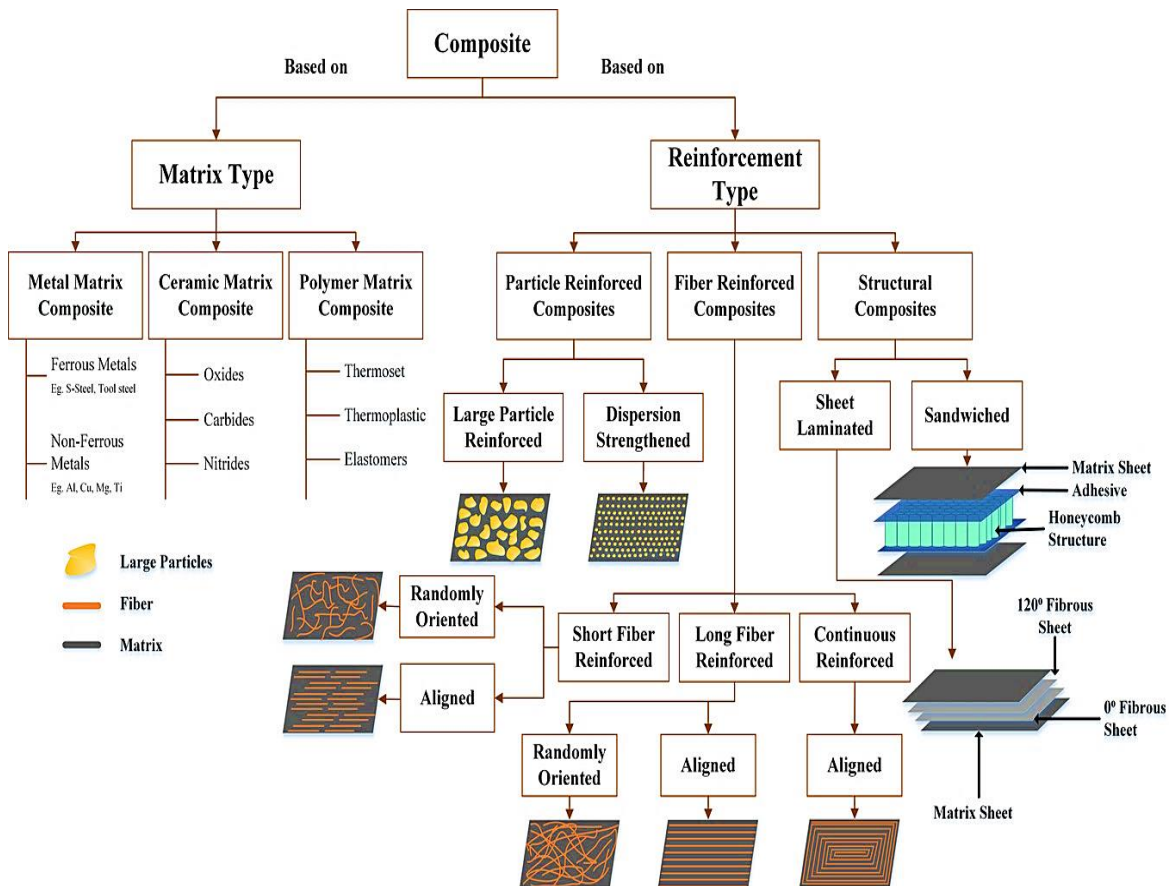
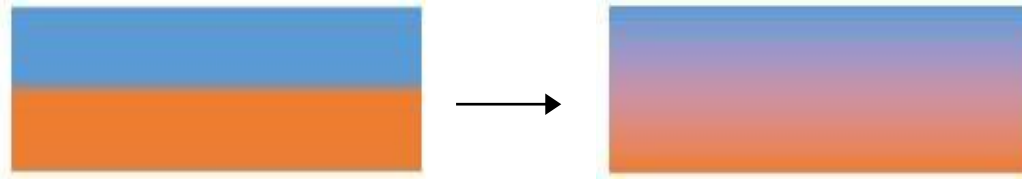


Figure I.13: Détaille les différents natures de renforts et des matrices utilisées Pour Constituer un matériau composite

I.3. FGM comme solution

Les matériaux composites présentent d'excellentes propriétés mécaniques et thermiques, cependant ils souffrent de plusieurs limitations liées à la présence d'interfaces

distinctes entre la couche. Cette discontinuité des propriétés peut provoquer des concentrations de contraintes, des fissurations ainsi que des phénomènes de délaminage, surtout sous des chargements thermiques élevés. Afin de surmonter ces problèmes, les chercheurs ont développé les Matériaux à Gradient fonctionnel (Functionally Graded Materials – FGM). Ces matériaux se caractérisent par une variation progressive et continue des propriétés matérielles (Figure I.14), permettant de réduire les contraintes interfaciales et d'améliorer la résistance thermique et mécanique des structures.



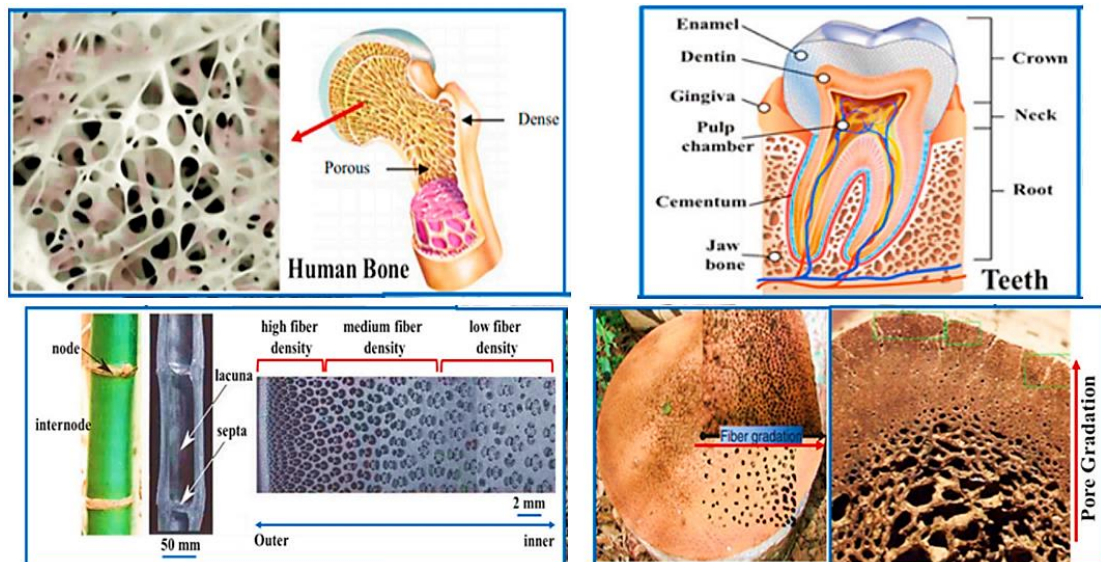
(a) Laminated composite

(b) FGM

Figure I.14: Matériaux composites stratifiés et matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

I.3.1. FGM dans la Nature

La nature a toujours été une source d'inspiration pour les scientifiques et les chercheurs qui ont résolu divers problèmes. La présence des matériaux gradués « MG » est visible dans la nature sous forme de bois, de dents, d'os, de bambou [2].



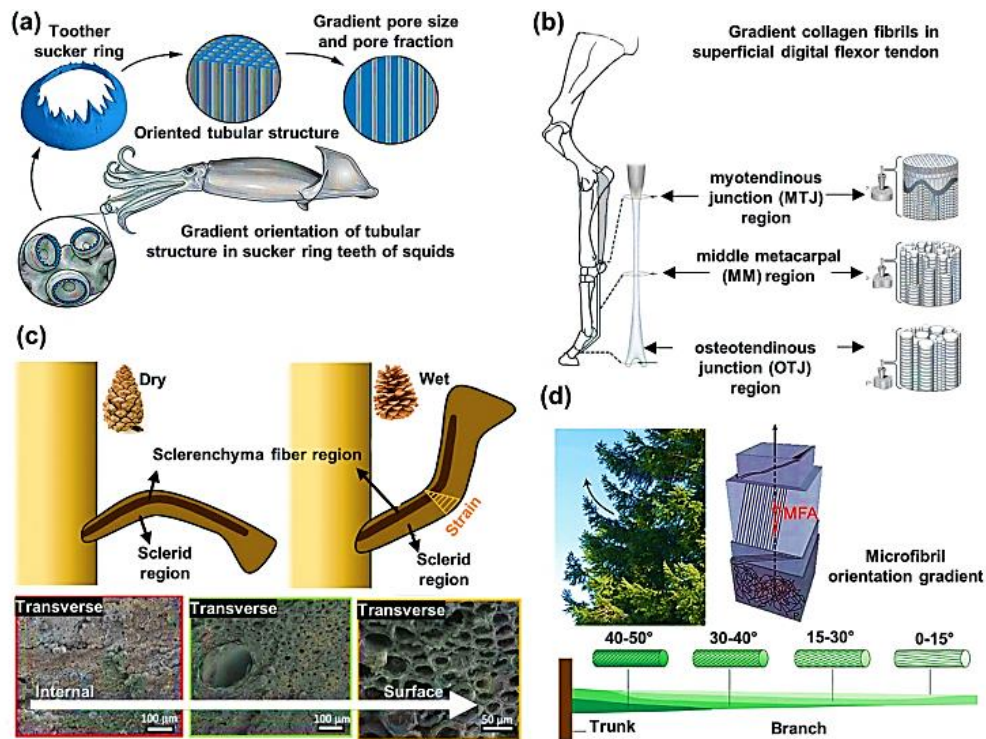


Figure I.15:Exemples de gradient mécanique dans les bio-FGM par la voie structurale [3]

I.3.2. Définitions et concepts d'un matériau FGM

Les matériaux à gradient fonctionnel, ou matériaux à gradient (FGM), représentent une nouvelle génération avancée de matériaux composites (**Figure I.16**), conçue pour atteindre des niveaux de performance supérieurs [4].

Le terme “Matériaux à Gradient Fonctionnel” contient deux mots importants : “fonctionnellement” et “gradués”. Le mot “fonctionnellement” modifie “gradués”. Ils ne se réfèrent pas seulement à des matériaux fonctionnels simples, mais aussi à des matériaux gradués [5].

Les matériaux fonctionnellement gradués sont une catégorie de matériaux composites qui peuvent être adaptés pour des propriétés, des fonctions et des applications spécifiques. Ces matériaux présentent un changement progressif soit dans leur composition/constituants, soit dans leurs microstructures (comme la taille des grains, la texture, la porosité, etc.) ou dans des directions spécifiques, ce qui entraîne des modifications correspondantes des propriétés du matériau [6], c'est-à-dire qu'ils sont non homogènes aux niveaux macroscopique et microscopique [7]. Par contre, les matériaux composites conventionnels sont soit des mélanges homogènes impliquant un compromis entre les propriétés des matériaux constitutifs, soit la combinaison de deux matériaux différents, comme c'est le cas pour les composites stratifiés, présente le diagramme schématique de (a) FGM et (b) le matériau composite stratifié conventionnel (classique).

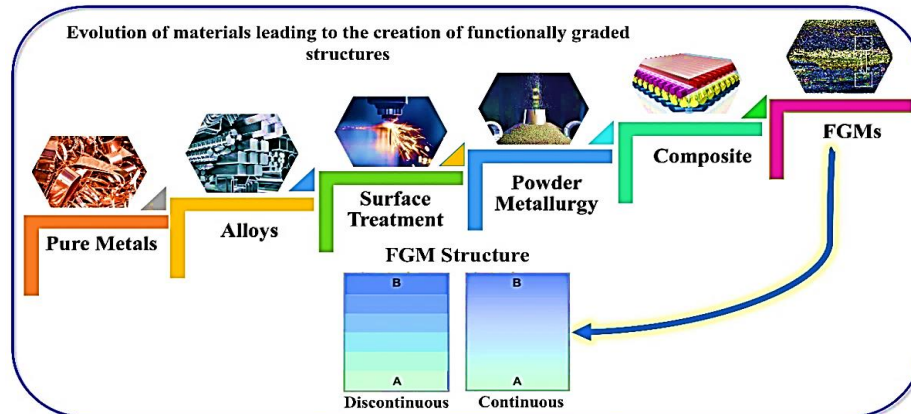


Figure I.16 : Développement des matériaux vers les matériaux à gradient fonctionnel (FGM)

Les FGM se caractérisent par l'absence de frontières ou d'interfaces clairement définies entre leurs différentes régions, contrairement aux matériaux composites classiques. Par conséquent, les FGM offrent une perspective prometteuse pour la réduction des contraintes mécaniques et thermiques dans de nombreuses composantes structurales, ce qui les rend adaptés à des applications spécifiques.

Les FGM ont été utilisés pour la première fois au Japon en 1984 lors d'un projet d'avion spatial pour l'application de barrières thermiques, où leur concept a été proposé pour la première fois (Koizumi, M et al. 1997) [8]. Le concept de ces matériaux a été introduit pour réduire les contraintes thermiques dans les matériaux composites stratifiés conventionnels développés pour les moteurs de fusées réutilisables (Koizumi, M et al. 1995) [9].

En résumé, le concept des FGM est de remplacer le changement soudain de composition à l'interface entre différents matériaux, par une transition graduelle de la composition, afin de réduire les concentrations de contraintes dans la structure.

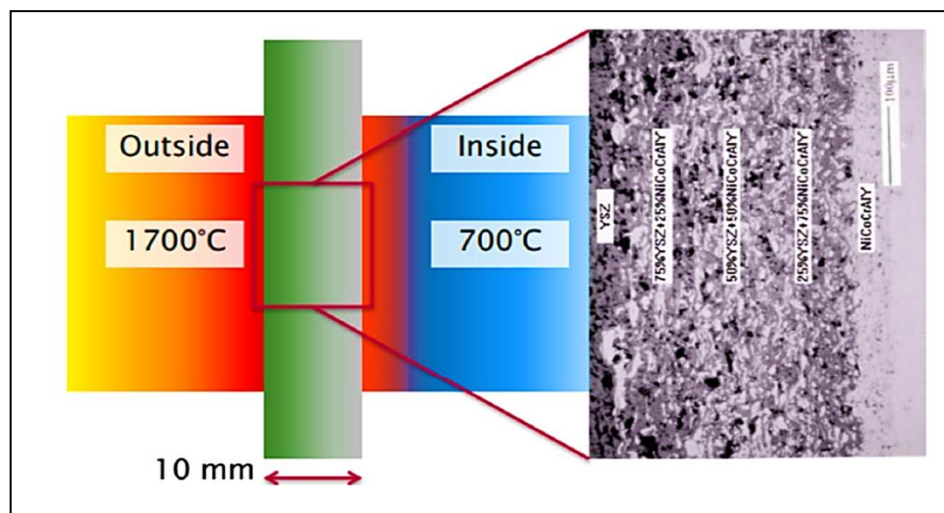


Figure I.17 : Premier exemple de FGM métallique au Japon [10]

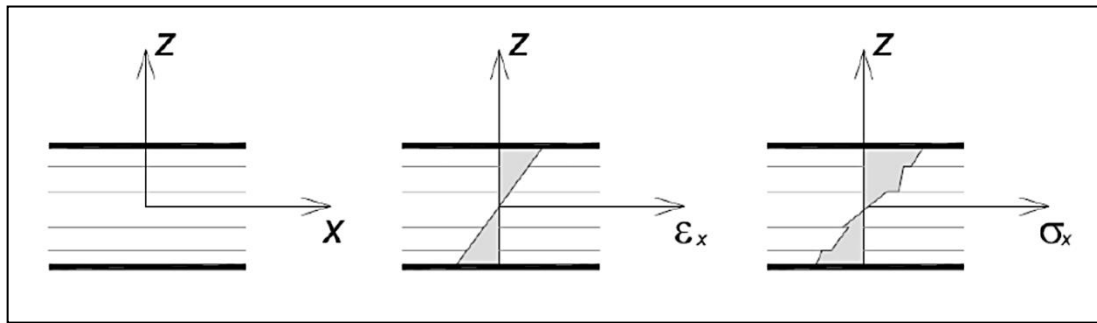


Figure I.18 : Variation des déformations et des contraintes à travers l'épaisseur d'une plaque Stratifiée [11]

Un FGM est généralement constitué de plusieurs matériaux aux propriétés différentes. Les propriétés globales des FGM sont uniques et distinctes de celles de chacun des constituants individuels. Dans certains cas, un FGM composé du même matériau mais présente des microstructures différentes. Les pores sont également des composants importants des FGM, une augmentation progressive de la distribution des pores de l'intérieur vers la surface peut conférer de nombreuses propriétés telles que la résistance aux chocs mécaniques, l'isolation thermique, l'efficacité catalytique et la relaxation des contraintes thermiques [6].

Les FGM peuvent être classés en matériaux à gradient continu et en matériaux à gradient discontinu, comme le montrent schématiquement les **Figure I.19.** (a) et (b) [12], respectivement. Dans les FGM continus, les ingrédients du matériau et/ou la microstructure changent de manière continue avec la position, sans qu'il soit possible d'observer des zones claires ou des lignes de séparation à l'intérieur du matériau pour distinguer les propriétés de chaque zone, alors que, dans les FGM discontinus, la microstructure et/ou la composition du matériau changent de manière progressive, ce qui entraîne une structure multicouche avec une interface située entre les couches discrètes [6, 12]. De même, les propriétés des matériaux peuvent varier d'une surface à une autre, soit de manière continue, soit de manière discontinue, comme le montrent les **Figure I.20.** (a) et (b) [10]. Il est important de noter que les ingrédients du matériau peuvent varier spatialement dans l'ensemble du volume du matériau, ou uniquement à un emplacement spécifique, tel que l'interface, un joint ou une surface, comme illustré dans la **Figure I.21.** [6, 13, 14].

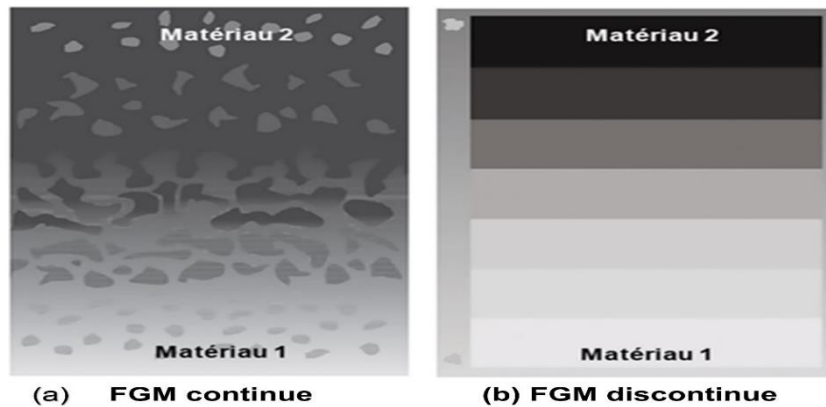


Figure I.19 :Types de FGM (a) FGM continue et (b) FGM discontinue [12]

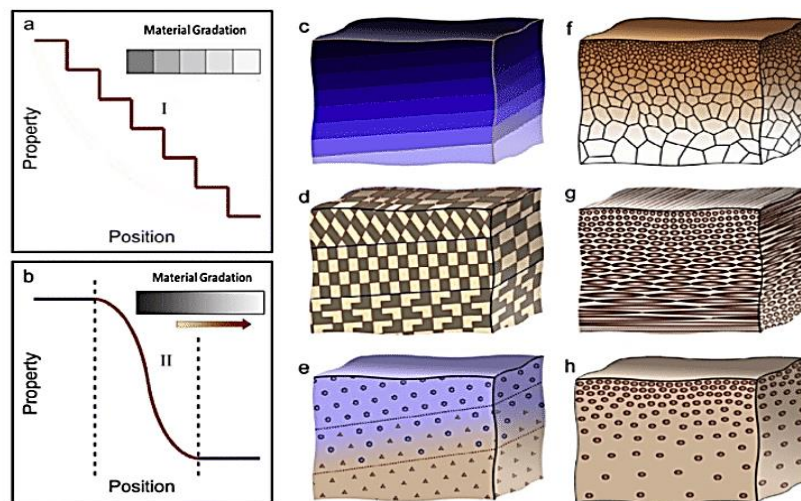


Figure I.20 : Matériaux fonctionnellement gradués avec différentes formes de gradient [45]
[15].

a) FGM discrètes/discontinues avec interface. b) FGM continues sans interface. c), f)
Gradient de composition. d), g) Gradient d'orientation. e), h) Gradient de fraction

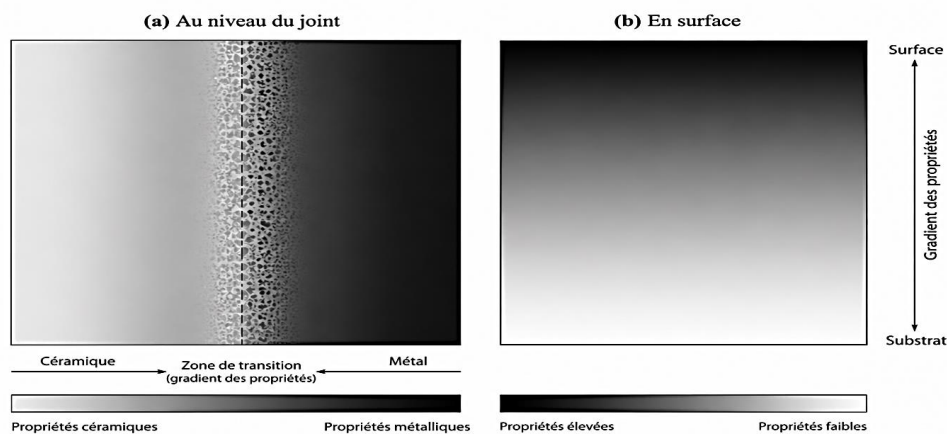
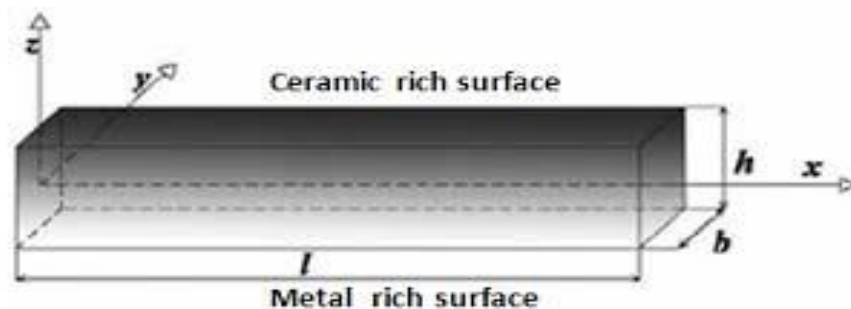
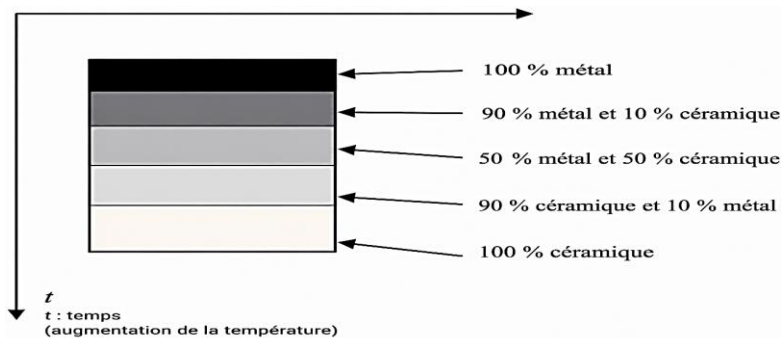


Figure I.21 : Structures graduées (a) au niveau du joint et (b) en surface [6]

Les matériaux FGM à base de céramique et métal (**Figure I.23**) sont les plus répandus dans l'industrie. Ils sont conçus pour résister à des températures élevées d'un côté tout en évitant le transfert de chaleur vers l'autre côté. Cette conception a donné naissance à des poutres FGM dont la face supérieure est composée à 100% de céramique et la face inférieure à 100% de métal, avec une couche intermédiaire qui varie graduellement à travers l'épaisseur limitée par les deux faces mentionnées, comme illustré dans la (**Figure I.22** [16]).

**Figure I.22** : Géométrie et coordonnées d'une poutre FGM [16]**Figure I.23** : Distribution graduelle métal-céramique dans un matériau FGM

De ce qui précède, il est possible de souligner plusieurs avantages (**Figure I.24**) et inconvénients offerts par les matériaux à gradient fonctionnel, que nous énumérons ici en quelques lignes.

➤ Avantages des FGM

- ✓ En raison de leurs interfaces graduelles, les FGM peuvent aider à réduire les concentrations de contraintes thermomécaniques, ce qui prévient la délamination dans les zones sujettes aux fissures et améliore la durabilité des structures soumises à des charges.
- ✓ Un FGM avec un gradient de porosité aide à amortir l'impact d'un côté à l'autre, offre une isolation thermique, améliore l'efficacité catalytique, et contribue également à atténuer les contraintes électriques et thermiques.

- ✓ Les FGM peuvent agir comme une couche d'interface qui relie deux matériaux incompatibles afin d'améliorer la résistance à la liaison, de réduire la force motrice des fissures développée à l'intérieur du matériau, de fournir une multifonctionnalité, c'est-à-dire la capacité de contrôler la déformation, la corrosion par l'usure, la réponse dynamique, etc. Les revêtements FGM réduisent les contraintes résiduelles internes.
- ✓ Les FGM métal-céramique éliminent la transition abrupte entre les coefficients de dilatation thermique, offrent une protection thermique/corrosion, et offrent une capacité de charge.
- ✓ Les FGM sont des matériaux composites à caractère non homogène macroscopiquement. Les changements continus dans leur microstructure distinguent les FGM par rapport aux matériaux composites classiques.

➤ **Inconvénients des FGM**

Le principal obstacle à une application plus large des FGM est leur processus de fabrication complexe en raison de l'inadéquation de différentes propriétés, par exemple la température de fusion, qui diffère en fonction d'autres facteurs, de la taille des particules, de la morphologie, etc. Un exemple type est un mélange d'un métal avec la température de fusion (T_1) et une céramique avec une température de fusion (T_2). Dans la plupart des cas, un tel couple est habituellement ($T_1 \ll T_2$). Ensuite, si la température de production est autour de T_1 , la céramique reste non fondue et la structure finale des particules céramiques n'est pas fondue dans une matrice métallique. Dans de nombreux cas, de telles structures présentent une porosité et une faible adhésion entre les différents composants, ce qui limite leur application générale. En effet, si la température de production est autour de T_1 , la céramique reste non fondue et la structure finale des particules céramiques n'est pas fondue dans une matrice.

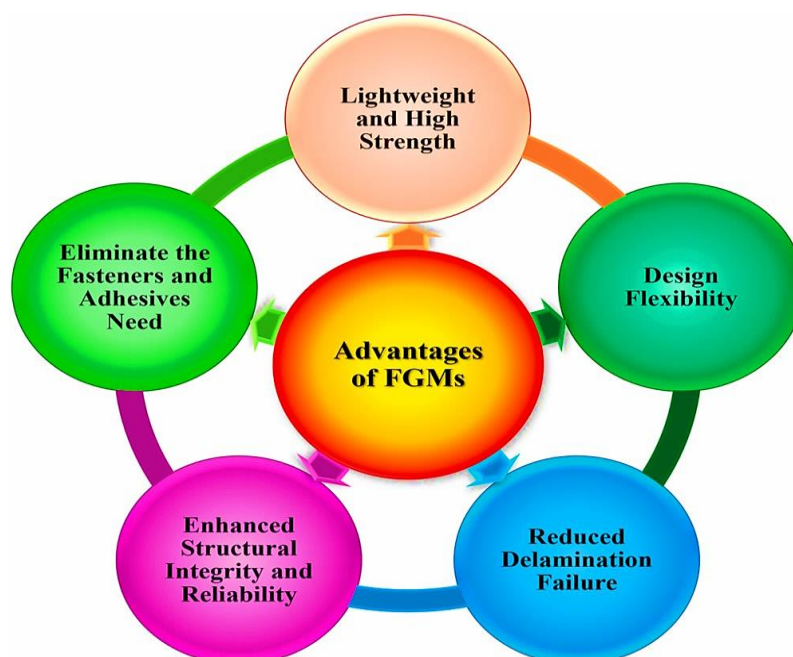


Figure I.24 : Les principaux avantages des matériaux à FGM par rapport aux Matériaux conventionnels et composites

I.3.3. Classification des FGM

Plusieurs facteurs, notamment la composition, le gradient des propriétés, le procédé de fabrication et l'application, peuvent être utilisés pour classer les FGM. Ces classifications offrent une structure permettant de comprendre la grande diversité des FGM et leurs utilisations.

Il est important de rappeler que de nombreux FGM peuvent appartenir à plus d'une catégorie, et que les critères utilisés pour les classer peuvent varier selon les conditions ou les objectifs du chercheur [17. 18].

Les classifications détaillées des FGM sont illustrées dans la(**Figure I.25**) Ces groupes typiques de FGM sont décrits comme suit:

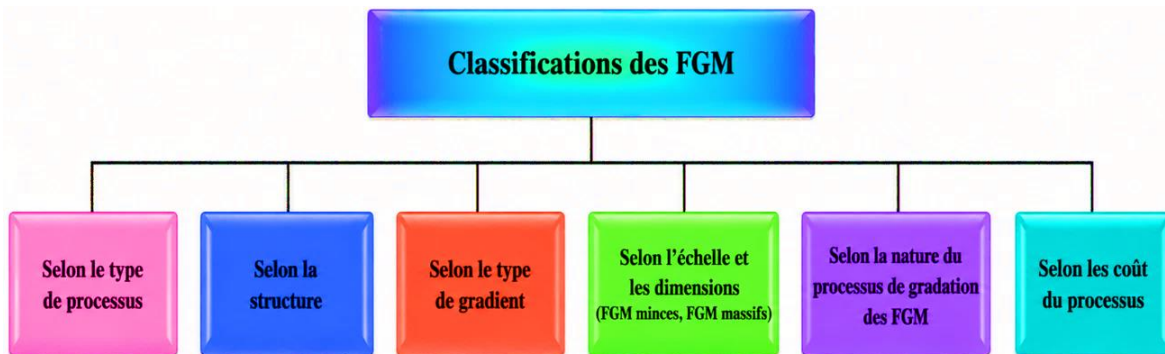


Figure I.25 : Classification des matériaux à gradient fonctionnel

I.3.3.1. Classification basée sur le type de processus de dépôt

En fonction de l'état du matériau pendant le traitement de fabrication des FGM, les méthodes peuvent être classées en trois grandes catégories : les procédés à l'état solide, les procédés à l'état liquide et les procédés par dépôt. Les procédés par dépôt représentent des technologies de pointe utilisées pour des produits de haute précision et de petite taille. Les FGM à l'état solide sont utilisés pour des composants thermomécaniques soumis à des contraintes élevées. Les procédés à l'état liquide sont généralement utilisés pour des produits de grande taille avec un contrôle des propriétés relativement moins précis.

I.3.3.2. Selon la structure des FGM

En fonction de leur structure, les FGM peuvent être classés en matériaux à gradient continu et discontinu. Dans le premier cas, la zone de séparation entre les différents matériaux n'est pas nette, tandis que dans le second, les constituants du matériau changent par gradation discontinue. Les matériaux à gradient continu et discontinu peuvent être classés en trois groupes, comme illustré dans la(**Figure I.26**).

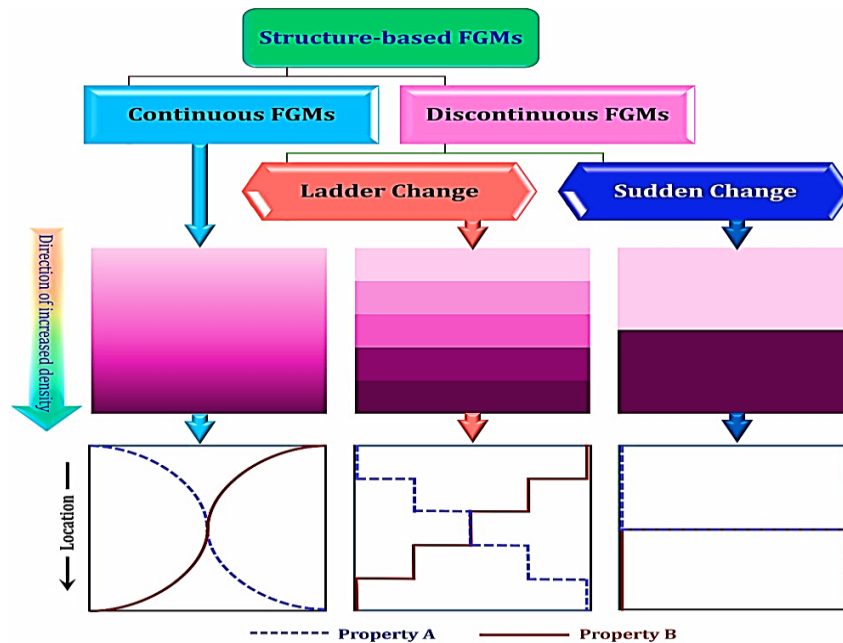


Figure I.26: (a) FGM graduée en continu ; (b) FGM graduée par étapes [19]

I.3.3.3. Selon le type de gradient

Les matériaux à gradient fonctionnel peuvent être classés en trois groupes, comme illustré dans la figure (**Figure I.27**).

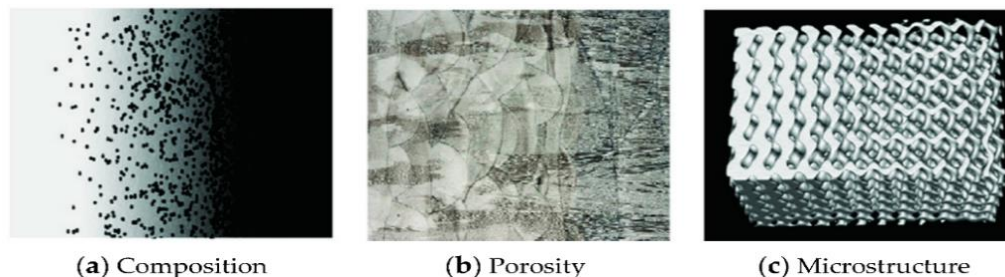


Figure I.27: Classification des matériaux à gradient fonctionnel selon le type de gradient

En fonction du type de gradient FGM : a) composition, b) porosité et c) microstructure [20]

I.3.3.4. Composition à gradient fonctionnel (FGC)

Dans le groupe des matériaux à gradient basé sur la composition chimique, la composition chimique varie progressivement selon la position spatiale dans le matériau (**Figure I.28**). La combinaison du gradient FGM dépend de la composition du matériau, qui varie d'une substance à l'autre et conduit à des phases distinctes aux structures chimiques diverses. Il peut s'agir d'un matériau monophasé ou multi-phasé. En général, dans les technologies modernes actuelles, l'utilisation de FGM monophasés est moins courante, bien que les FGM les plus couramment conçus et utilisés soient de compositions chimiques multi-phasées [20].

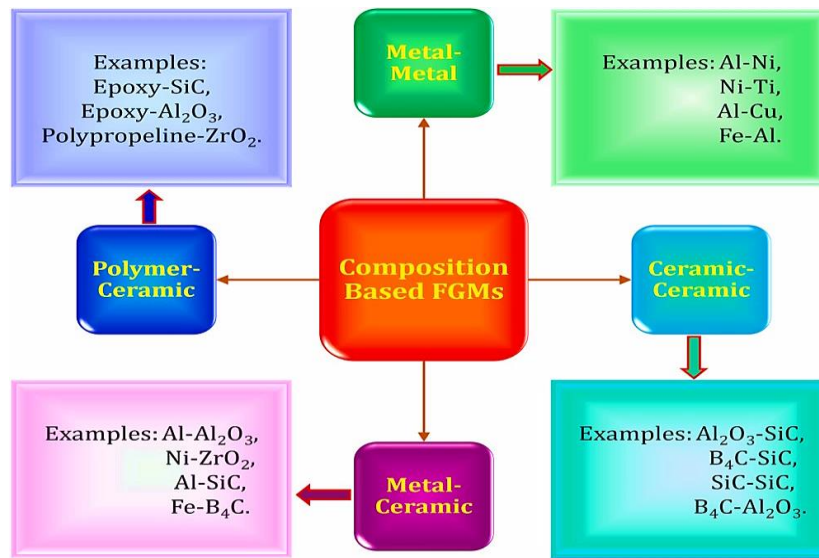


Figure I.28: Exemple de combinaisons possibles de matériaux utilisées dans les FGM [1]

I.3.3.5. Porosité à gradient fonctionnel (FGP)

Le matériau à gradient de porosité à variation fonctionnelle est un autre type de FGM, dans lequel la porosité du matériau est conçue pour varier en fonction du changement de position spatiale dans le matériau massif. La forme et la taille des pores sont conçus et modifiés en fonction des propriétés requises du matériau à gradient de fonctionnel. Le schéma d'un matériau à gradient de porosité typique est illustré à la (**Figure I.29**).

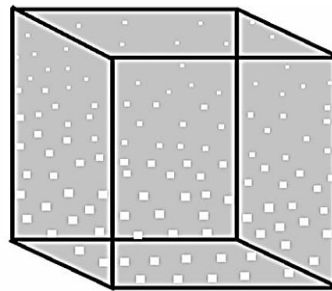


Figure I.29: Schéma d'un FGM à porosité graduée

Le gradient de porosité du FGM, quant à lui, est obtenu en faisant varier la taille ou la forme des pores, ou les deux (**Figure I.30**) et (**Figure I.31**).

Le gradient de porosité d'un FGM a également un effet sur la résistance à la traction et le module de Young du matériau. Plusieurs FGM à gradient de porosité ont été décrits dans la littérature pour des applications biomédicales.

Les caractéristiques les plus distinctives des composites poreux sont leurs géométries intéressantes et diverses, c'est-à-dire les distributions du matériau (de base), offrant une liberté unique dans la conception et l'optimisation des densités. La morphologie des pores internes est étroitement liée à des attributs mécaniques, thermiques, chimiques, biologiques et électroniques inhabituels, rendant cette nouvelle forme matérielle/structurale attrayante.

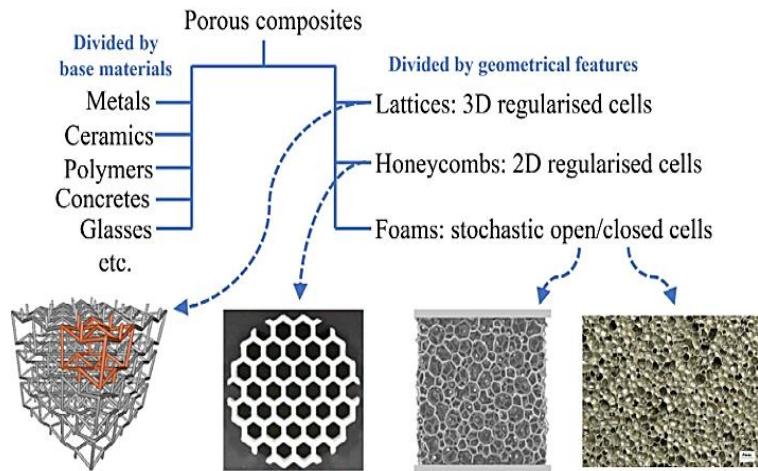


Figure I.30: Divisions typiques de composites poreux Source : Reproduit avec autorisations : Copyright [21]

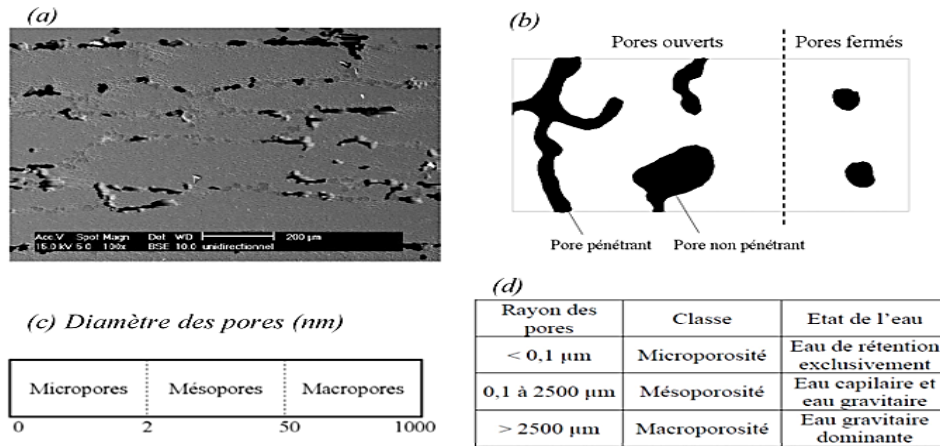


Figure I.31: (a) Micrographie MEB des porosités étudiées, (b) Schématisation des différents types de pores (c) et (d) Nomenclatures relatives à la taille des pores [22]

D. Chen, K. Gao, J. Yang et al.

Thin-Walled Structures 191 (2023) 111046

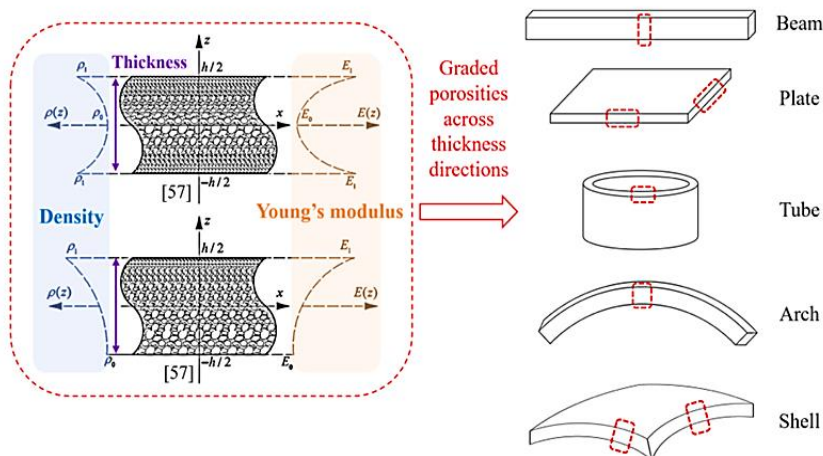


Figure I.32: Exemples de structures poreuses FG typiques. Source : Reproduit avec autorisation [21]

I.3.3.6. Microstructure à gradient fonctionnel (Micro Structural Gradient Materials-SGM)

Dans ce processus, les propriétés imposées sont obtenues par variation progressives des microstructures. La surface du matériau est soumise au phénomène de trempe pour que la gradation microstructurale se produise ou par un procédé de traitement thermique contrôlé. Ils sont appliqués dans l'acier cimenté, les cames ou les couronnes, les roulements et les turbines où des surfaces dures résistantes à l'usure et un noyau dur pour résister aux chocs importants pendant l'opération sont nécessaires, la **(Figure I.33)** suivante illustre les différents types de gradients structuraux et chimiques dans les FGM.

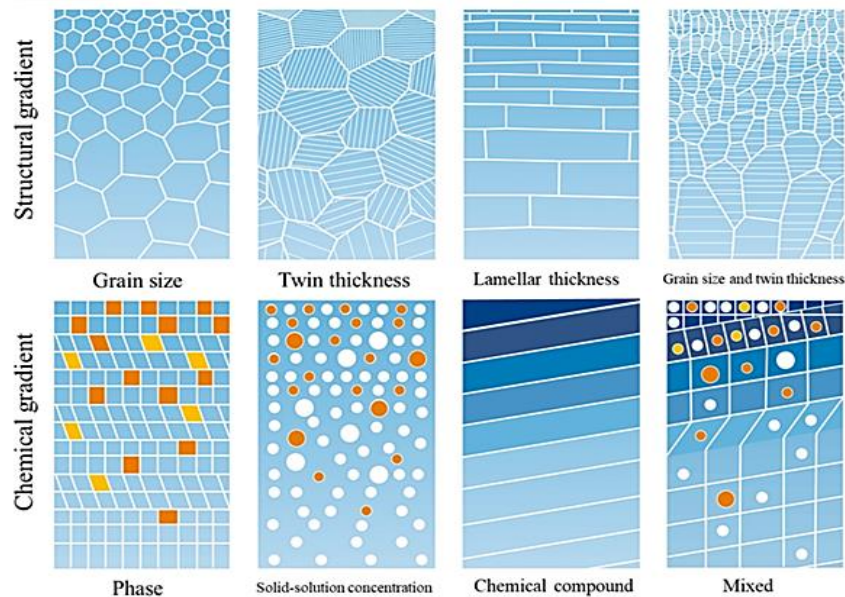


Figure I.33: Les différents types de matériaux FGM. (A) Catégorisation, (B) Schéma représentant les différents types de gradients structuraux et chimiques des FGM [18]

I.3.3.7. Selon l'échelle et les dimensions

En fonction de la géométrie et de la section transversale du matériau à produire, les FGM peuvent être classés en deux groupes principaux : les FGM minces et massifs.

I.3.3.7.1. FGM minces

Ceux-ci se présentent généralement sous forme de revêtement de surface et ont des sections transversales minces (**Figure I.34**). Le choix de la méthode de dépôt de surface utilisée dans la fabrication des FGM minces est dicté par les exigences de service du matériau. Diverses techniques de dépôt pour les FGM minces comprennent le dépôt en phase vapeur, la projection plasma, le dépôt de couches atomiques (ALD), l'électrodéposition, la SHS.

Les FGM minces ne conviennent généralement pas aux applications avec des conditions de service extrêmes.

I.3.3.7.2. FGM massifs

Les FGM massifs sont ceux dont l'épaisseur est supérieure à 1 mm et dont les propriétés fonctionnelles varient en fonction du profil de gradient du matériau(**Figure I.34**) . Les FGM massifs sont produits par différentes techniques telles que la fabrication additive (SFF), la métallurgie des poudres (PM), la fonderie (MC), entre autres.

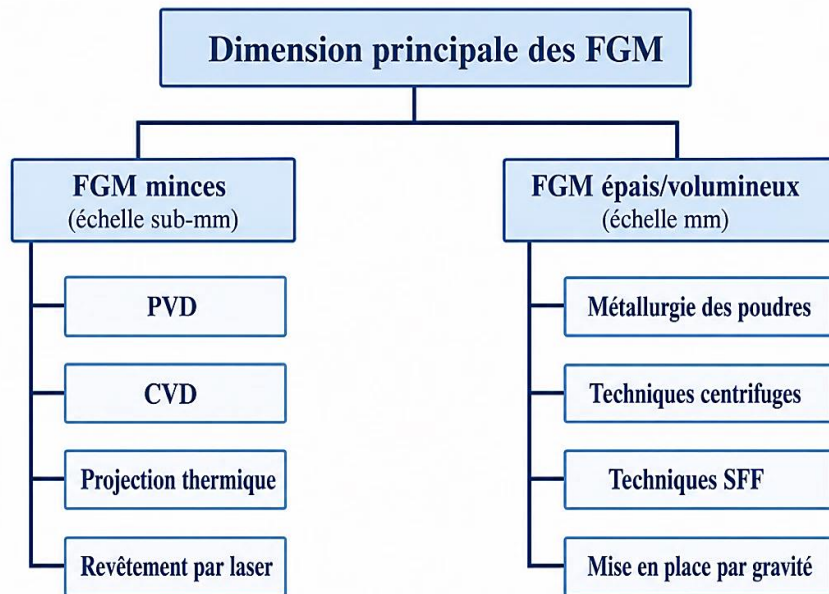


Figure I.34: Classification des FGM selon la principale dimension

I.3.3.8. Selon la nature du processus de gradation des FGM

Une autre classification du processus de gradation divise la production des Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGM) en deux catégories : les **processus constructifs** et les **processus de transport**.

La première catégorie implique une construction **couche par couche**, commençant par une distribution opposée où les gradients consécutifs sont précisément construits. Dans la seconde catégorie, les gradients au sein des structures dépendent de la physique de la **méthode de transport** (par exemple, l'écoulement de fluide, la diffusion ou la conduction thermique).

L'avantage des méthodes constructives réside dans leur capacité à fabriquer un nombre illimité de gradients. Les avancées dans la fabrication additive au cours des deux dernières décennies ont prouvé que les processus de gradation constructifs sont **technologiquement et économiquement réalisables**, en particulier(**Figure I.35**).

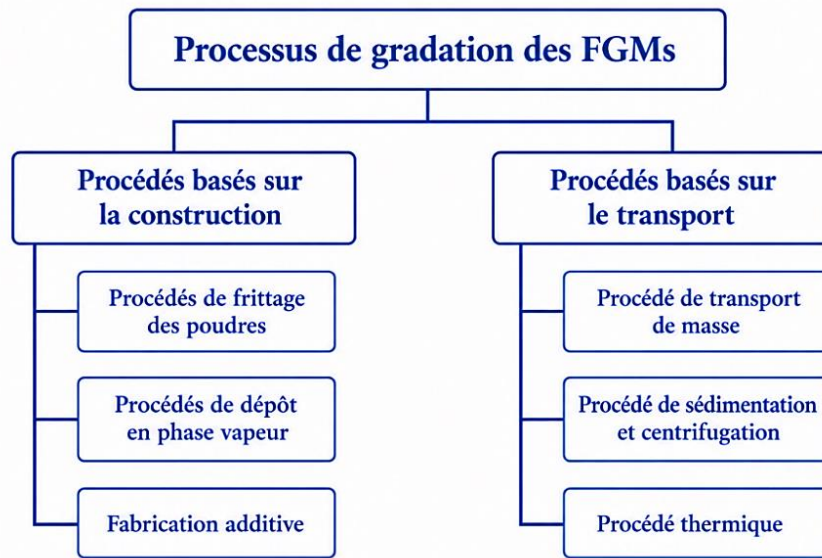


Figure I.35: Classification des FGM selon la méthode de gradation [20]

I.3.3.9. Selon le coût du processus

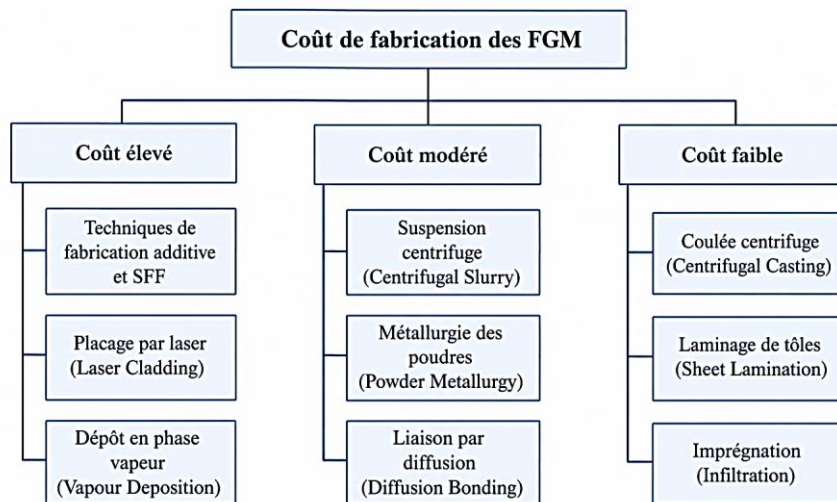


Figure I.35: Classification des FGM selon le coût du processus

I.3.4. Procédés de fabrication des matériaux à gradient de propriétés

Comme mentionné précédemment, il existe généralement trois façons de produire des FGM, y compris les procédés à base solide, à base de gaz et à base de liquide (El-Galy et al. 2019). Chacun d'eux a ses sous-ensembles et est utilisé en fonction du type de produits, des conditions économiques, des conditions de travail, du type de responsabilités et d'autres caractéristiques techniques (Miyamoto, 1999). Dans cette section, les procédures pour la fabrication de matériaux à gradient de propriétés seront expliqués (**Figure I.36**).

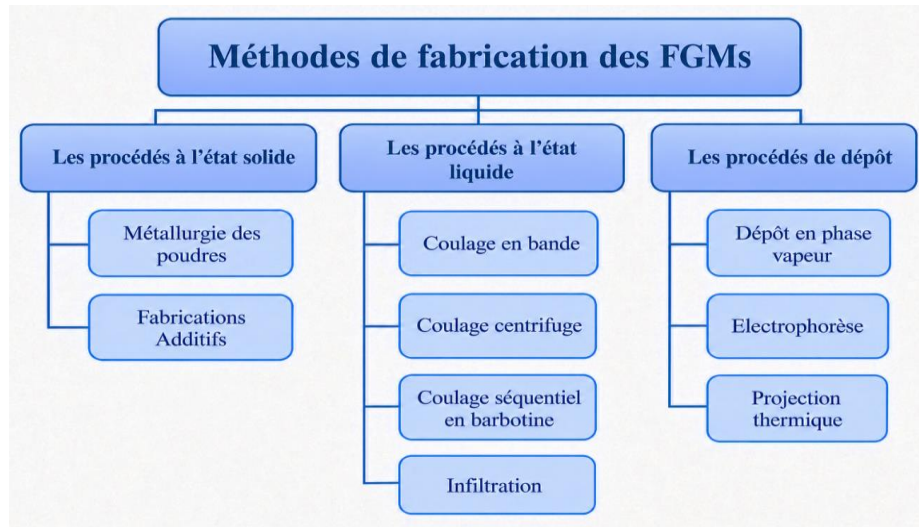


Figure I.36: Méthodes de fabrication des FGMs [10]

I.3.4.1. Procédés de fabrication à l'état liquide

Le coulage en bande, le coulage séquentiel en barbotine, l'infiltration et le coulage centrifuge sont des procédés de fabrication à l'état liquide.

I.3.4.1.1. Coulage en bande (Tape Casting)

Au milieu des années 1940, la technique de coulage en bande (TC) a été utilisée pour la première fois dans le cadre d'une tentative de production de matériaux piézoélectriques minces pendant la Seconde Guerre mondiale. Le processus de coulée en bande consiste à étaler la suspension sur une surface à l'aide d'une lame soigneusement contrôlée appelée racle. Comme le montre un schéma du processus de coulage en bande à la **Figure I.37** La poudre céramique est un élément essentiel de ce processus, qui est versé en continu sur une couche de support mobile composée d'un matériau plat non adhérent comme le téflon, qui contient un liant plastifiant pour étendre la flexibilité du système de ruban séché.

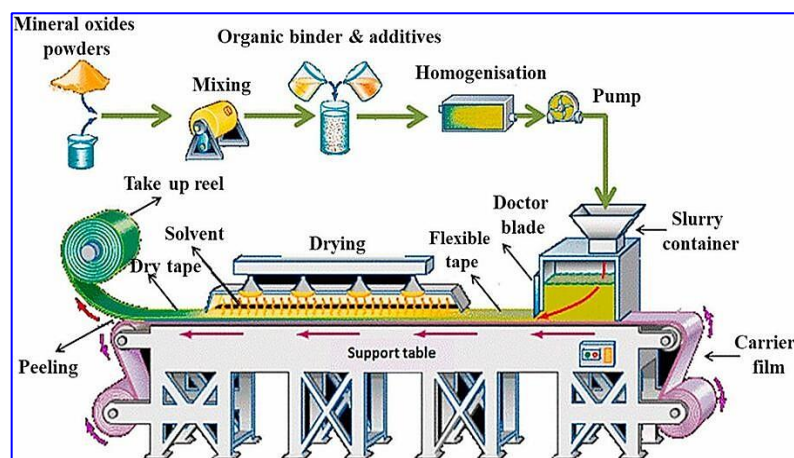


Figure I.37: Schéma de principe du montage utilisé pour le coulage en bande [10]

I.3.4.1.2. Coulage centrifuge (Centrifugal Casting)

Le procédé de coulée centrifuge (CC) est une technique de coulage spécialement adapté à la production de pièces cylindriques sans utiliser de noyau. Cette méthode est constituée de cinq étapes comprenant ; préparation de moules; coulée du métal en fusion instantanément dans le moule rotatif ; refroidissement qui commence immédiatement au niveau des parois du moule et se poursuit vers l'intérieur ; élimination de la coulée après refroidissement et solidification de la coulée et enfin finition (qui fait référence à l'usinage, au meulage ou au sablage afin de nettoyer et de lisser le diamètre intérieur de la pièce) comme illustré à la **Figure I.38**. Dans la fabrication de FGM, le procédé de coulée centrifuge a de bonnes caractéristiques de remplissage du moule, un gradient de composition contrôlé grâce à la force centrifuge et des différences de densité entre les matériaux. De plus, cette méthode présente deux inconvénients : la capacité à produire uniquement des FGM de forme cylindrique et une limite à laquelle le type de gradient peut être créé [7].

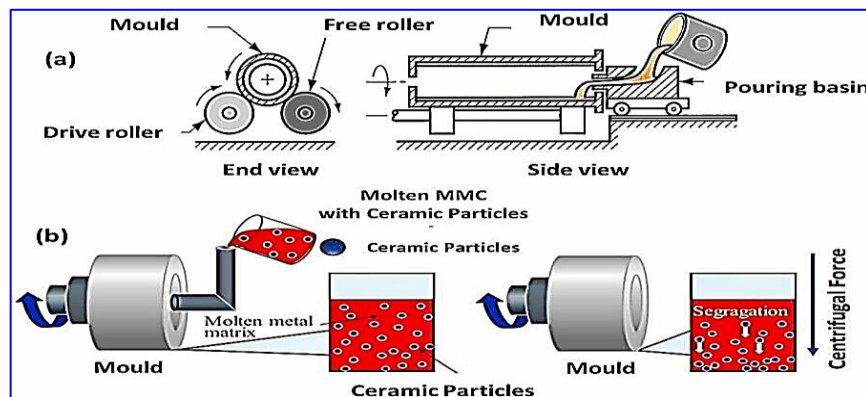


Figure I.38: Représentation schématique du : (a)- procédure de coulage centrifuge Horizontale (b)- Le produit final obtenu (Al : haute ténacité et SiC : résistance à l'usure élevée) [23]

I.3.4.1.3. Le coulage séquentiel en barbotine (Slip Casting)

Il s'agit dans cette méthode de disperser de fines particules (qui sont des suspensions de poudres) de céramique appelées barbotines dans un solvant, généralement aqueux que l'on transvase dans un moule creux et poreux, le plus souvent en plâtre ce qui permet l'extraction d'une partie du solvant par capillarité et la formation de structures de particules céramistes denses mais fragiles sur les parois. Cette technique permet de fabriquer des pièces complexes, à parois fines, ou de grande taille. Actuellement on a tendance à injecter la barbotine sous pression dans des moules poreux en métal ou résine plus résistants que le plâtre. (Le Syndicat des Industriels des Céramiques Techniques).

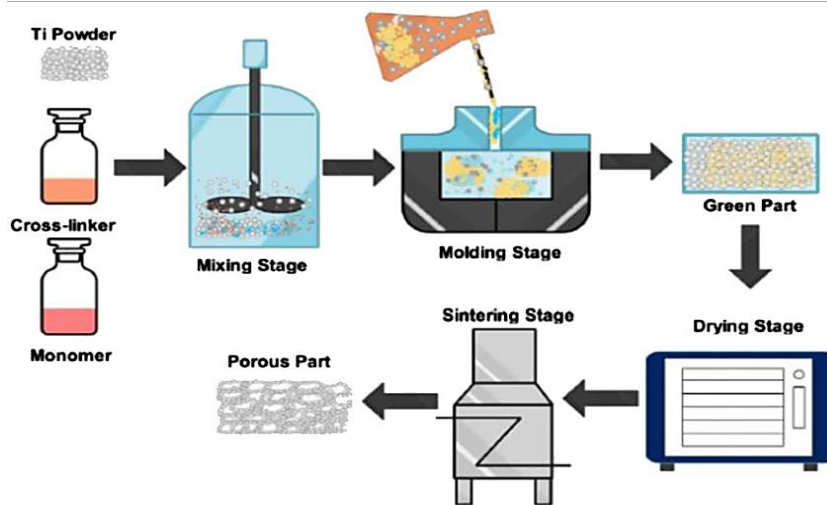


Figure I.38: processus de coulée en barbotine [20]

I.3.4.1.4. Méthode d'infiltration

L'infiltration, ou infiltration d'eau en termes scientifiques et hydrologiques, est le processus par lequel un fluide présent à la surface du sol pénètre dans le sol. Ce processus est régi par la capillarité ou la gravité. La vitesse d'infiltration dépend de la facilité d'entrée du fluide, de sa vitesse de transmission dans le sol et de la capacité de stockage du sol. La technique d'infiltration a été développée pour fabriquer la forme de certains FGM complexes. Ce procédé de fabrication nécessite une cinétique de réaction plus rapide et un retrait quasi nul. Il est difficile d'éviter un retrait global car le moulage se fait souvent en chauffant la poudre à une température supérieure à celle de la phase liquide [24].

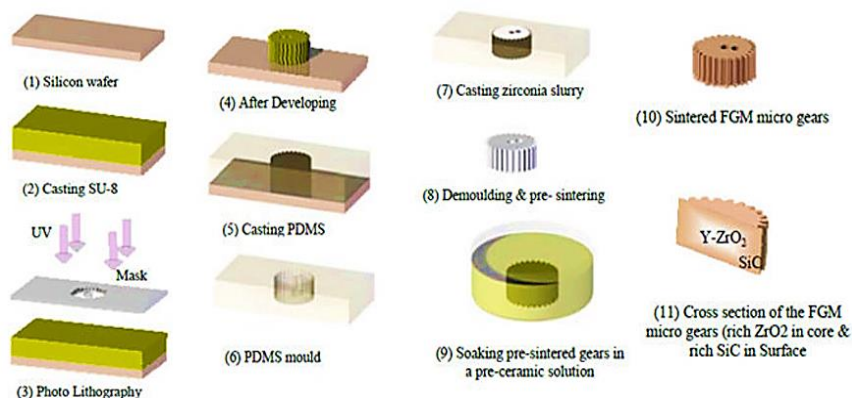


Figure I.39: Schéma du processus d'infiltration du FGM YSZ/SiC [24]

I.3.4.2. Procédés de fabrication à l'état solide

Les méthodes de fabrication à l'état solide, qui comprennent la compaction sèche des poudres et la fabrication additive, sont les plus prometteuses pour produire des matériaux à gradient fonctionnel.

I.3.4.2.1. Métallurgie des poudres (Powder Metallurgy)

La métallurgie en poudre (PM) est l'une des méthodes les plus anciennes pour la fabrication de composants d'ingénierie, mais elle est maintenant utilisée dans la production de FGM. Cette méthode est basée sur quatre étapes principales pour produire des matériaux à gradient fonctionnel :

- Pesée et mélange la poudre.
- L'empilage.
- Le compactage.
- Le frittage.

Suite au traitement des poudres (pesée et mélange de la poudre), la deuxième étape consiste à empiler le mélange successivement dans le moule en fonction de la répartition spatiale des matériaux. Ensuite, pour donner une résistance à la pièce, la poudre empilée est compactée et frittée, comme le montre la **Figure I.40**. Ce processus a plusieurs avantages, notamment : il est moins coûteux et facile à utiliser, il a un large contrôle de la composition et de la microstructure, il a peu d'énergie nécessaire à la combustion et il a un temps court pour produire les pièces finales.

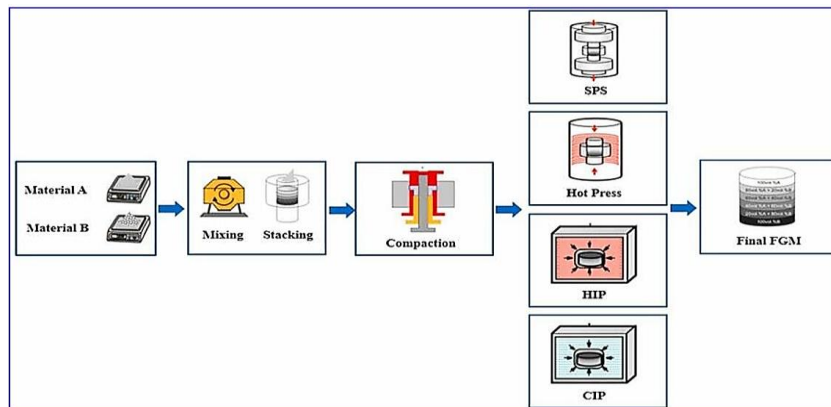


Figure I.40: Organigramme de technique de la métallurgie des poudres pour la production des FGM

I.3.4.2.2. Méthodes de fabrication additive (Additive Manufacturing Method)

La fabrication additive (FA) devenue la méthode la plus stratégique dans l'industrie moderne, qui change rapidement le mode de fabrication conventionnelle. Cette technique est basée sur le principe de l'empilement discret, qui génère de manière cumulative des entités tridimensionnelles grâce à l'empilement continu des couches physiques. La FA possède plusieurs avantages aux concepteurs tel que : la fabrication des pièces personnalisées très complexe, la réduction de temps de fabrication, l'élimination de la gestion de la chaîne d'approvisionnement et une réduction remarquable des besoins en énergie. Les technologies de fabrication additive sont utilisées pour produire des structures en FGM avec des multiples propriétés matérielles en modifiant le rapport des matériaux de

remplissage et des paramètres de processus de la couche d'accumulation. Actuellement, le procédé FA est le plus adopté pour fabriquer des structures en FGM. Il existe plusieurs techniques de FA, à savoir les méthodes basées sur le laser, méthode de projection de matériau et fabrication additive arc-fil (WAAM).

La technique FA au laser utilise un laser à haute énergie comme source de chaleur et un fil métallique ou une poudre comme matière première, empilant les matériaux couche par couche jusqu'à former directement des pièces complètes (**Figure I.41**). Selon les différentes méthodes d'approvisionnement en matière première, cette technique peut être divisée en dépôt d'énergie dirigé par laser (DED) (**Figure I.41.a**) et le frittage de laser sélectif (SLS) (**Figure I.41.b**). La technologie de dépôt d'énergie dirigée (DED) utilise un laser comme source de chaleur pour chauffer le matériau directement sur le site de dépôt. Cela provoque la fusion et l'assemblage des matières premières pour former des structures couche par couche lorsque le bain fondu subit une solidification instantanée dès que la source d'énergie est retirée de l'emplacement de dépôt.

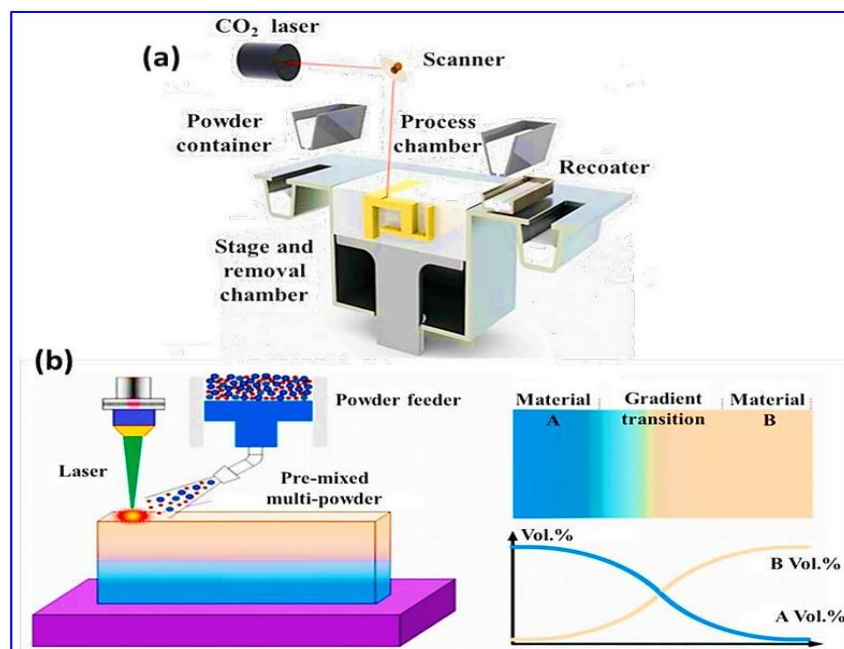


Figure I.41: (a) : Illustration du procédé de frittage laser sélectif (SLS) [10],

(b) : Illustration du procédé de dépôt d'énergie dirigé par laser (DED)

La méthode de projection de la matière (MJ) est une technologie d'impression 3D dans laquelle les matériaux sont éjectés pour former des gouttelettes et déposés sélectivement sur la plateforme. Cette technique dépose des gouttelettes de photopolymères liquides à partir de têtes d'impression piézo-thermiques. Ces gouttelettes déposées se solidifient par refroidissement rapide et forment la première couche. Les mêmes étapes sont répétées pour déposer les couches suivantes, qui s'accumulent progressivement pour construire une structure 3D. Comme illustré la **Figure I.42**.

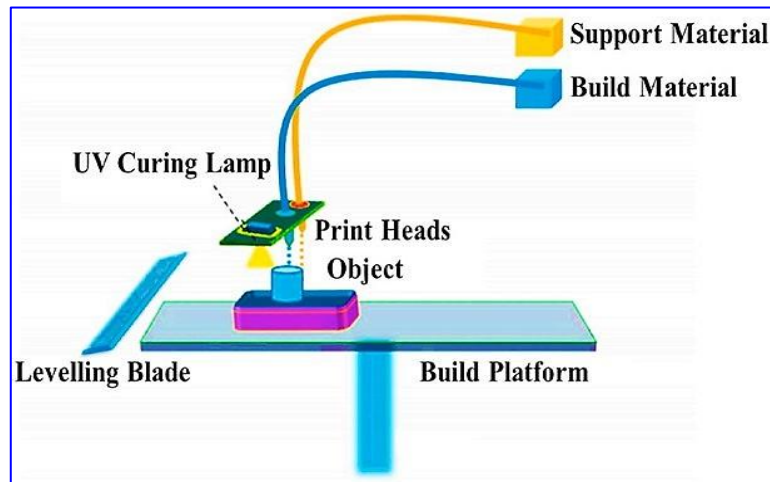


Figure I.42: Illustration du procédé de projection de matériau

La méthode de fabrication additive arc-fil (WAAM) est une nouvelle technique pour développer des pièces complexes, cette méthode utilise l'arc comme source de chaleur et la matière première sous la forme de fil métallique pour fabriquer des pièces métalliques couche par couche. Selon la forme de la source de chaleur à arc, une grande variété des techniques de fabrication additive est possible pour l'arc (plasma, TIG et MIG) comme le montre la **Figure I.43**. En raison de ses avantages en termes d'efficacité de production, du temps de fabrication et de coût de fabrication, la fabrication additive fil et arc (WAAM) est devenue l'une des méthodes de fabrication les plus prometteuses pour la préparation des structures épaisses en FGM.

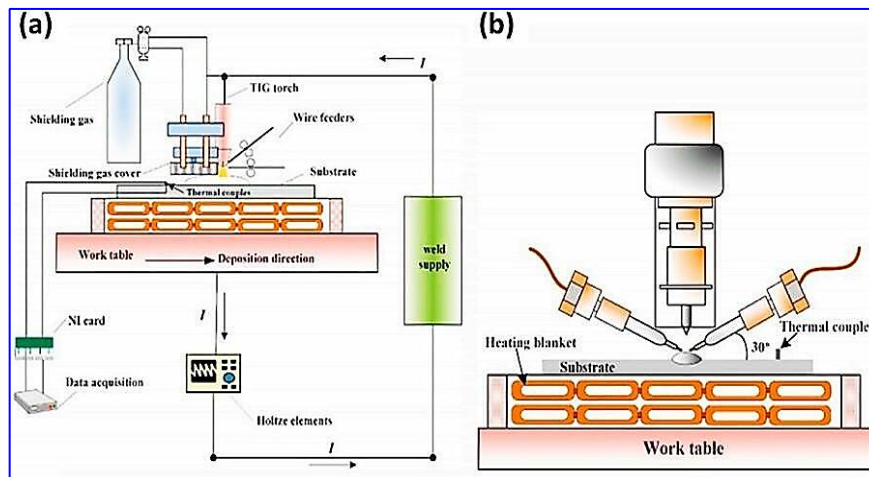


Figure I.43: Illustration du procédé de fabrication additive fil et arc : (a) Concept du procédé WAAM pour les produits FGM, (b) unités d'alimentation à double fil [25]

I.3.4.3. Procédés de dépôt

Les techniques les plus importantes pour créer des revêtements minces en matériaux de propriété fonctionnel à l'échelle microscopique sont les méthodes basées sur le dépôt, telles que le dépôt en phase vapeur, la projection thermique et le dépôt par électrophorèse.

Ces techniques peuvent être utilisées pour créer une couche graduée continue ou discontinue avec des propriétés de gradient dans une, deux ou trois directions.

I.3.4.3.1. Méthodes de dépôt en phase vapeur (Vapor Phase Desposition Methods)

L'une des méthodes les plus courantes pour produire une couche fine graduée est la méthode de dépôt en phase vapeur. Les dépôts en phase vapeur sont généralement classés en deux catégories : le dépôt chimique en phase vapeur (CVD) et le dépôt physique en phase vapeur (PVD). Pour créer des films et des revêtements fonctionnellement gradués, la méthode de dépôt chimique en phase vapeur est utilisée. À l'aide d'un système de dépôt sous vide, comme illustré à la **Figure I.44.b**, cette méthode peut produire des matériaux solides de haute qualité.

Le processus de dépôt physique en phase vapeur PVD est réalisé par la vaporisation du matériau à déposer, et le matériau vaporisé (matériau atomisé) est ensuite transféré sur la surface à revêtir comme montre la **Figure I.44.a**. Contrairement au CVD, dans le procédé PVD, l'évaporation du matériau source est le concept de base pour déposer des céramiques/métaux sur le substrat. À cause de ses nombreux avantages, tels que la possibilité de produire des films très minces de haute pureté avec des structures graduées, ce processus est considéré comme l'une des techniques les plus considérables pour produire des matériaux fonctionnellement gradués à faible épaisseur.

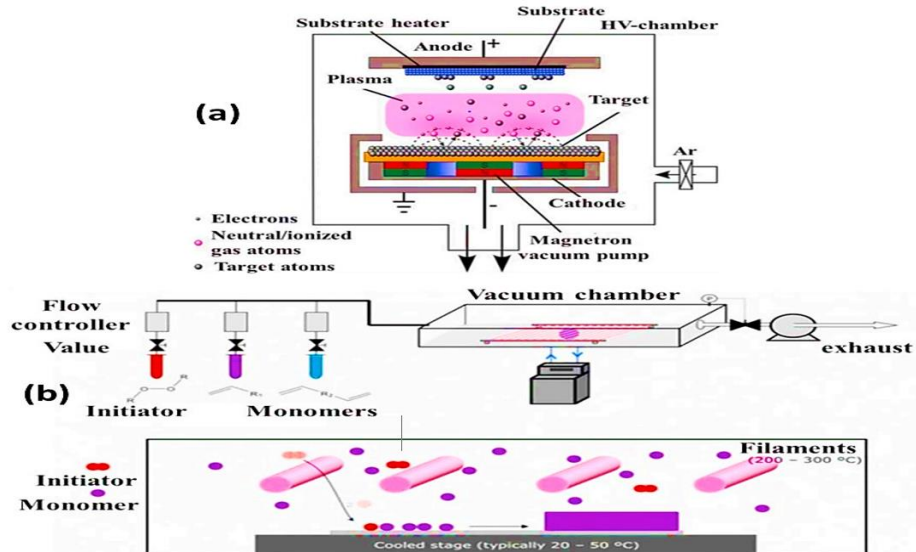


Figure I.44: (a) : Le processus de dépôt physique en phase vapeur (PVD) [10], (b) : Diagramme de l'installation pour la synthèse d'un SiC/C FGM par le biais du dépôt chimique en phase vapeur (CVD) [26]

I.3.4.3.2. Dépôt par Electrophorèse (Electrophoretic Deposition)

Le dépôt par électrophorèse "EPD", est un processus assez rapide à faible coût, capable de produire les matériaux à gradient de propriétés changeant sans interruption avec la géométrie complexe. EPD se compose de deux processus, c'est-à-dire le mouvement des

particules chargées en suspension dans un champ électrique entre deux électrodes "électrophorèse" et le dépôt de particules sur l'un des électrodes. EPD permet la conception des matériaux à gradient de propriétés en forme de plaque binaire en déposant d'une suspension de poudre à laquelle une deuxième suspension est sans interruption ajoutée pendant le processus [27]. Le dépôt est un contrat de poudre emballé étroit qui a besoin de l'agglomération pour réaliser les composants matériels entièrement denses.

Depuis lors, de nombreuses applications d'EPD ont été développées pour la fabrication de la céramique, y compris l'application des matériaux sans interruption à gradient de propriétés peut être obtenu tels que le céramique-céramique ZrO_2/Al_2O_3 et le céramique-métal, WC/Co puisque la composition des couches déposantes est déterminée par la suite composition de la suspension au moment du dépôt. Une installation générale de ce principe est illustrée sur la (Figure I.45).

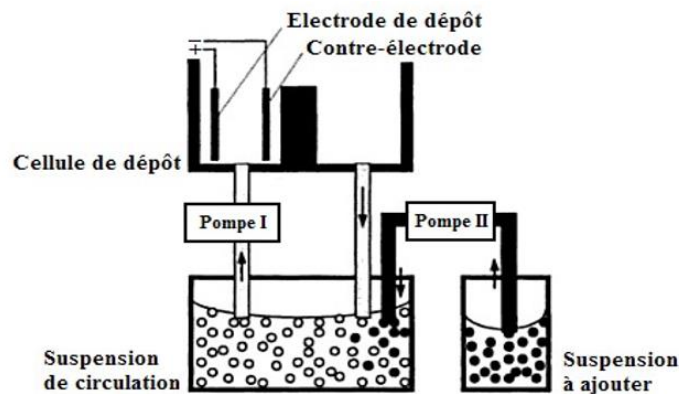


Figure I.45: Principe de l'installation d'EPD pour la production des FGM [28]

I.3.4.3.3. Procédé de projection thermique (Thermal Spraying Process)

Les procédés de revêtement utilisés pour déposer des revêtements métalliques ou non métalliques sont appelés procédés de projection thermique (TSP). Une source de chaleur est utilisée dans cette méthode pour chauffer le matériau de revêtement jusqu'à ce qu'il soit fondu ou semi-fondu, puis les gaz sont traités et pulvérisés sur un matériau de base. Ces matériaux fondus ou liquides sont poussés jusqu'à ce qu'ils se solidifient et forment une couche solide, comme illustré à la Figure I.46.

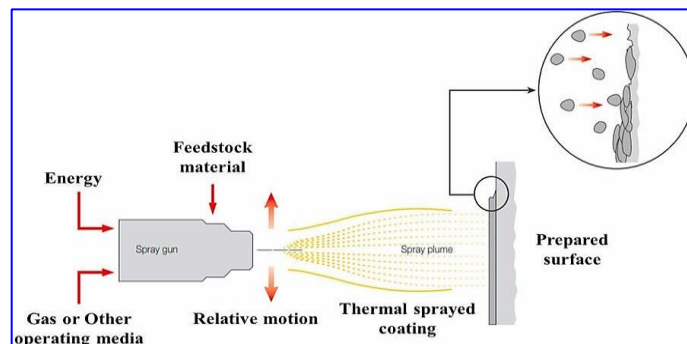


Figure I.46: Schéma illustratif du processus de pulvérisation thermique

I.3.5. Domaines d'applications des matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

De nos jours, compte tenu de la flexibilité de la production de matériaux composites selon les exigences de l'application et de la pertinence fonctionnelle, la portée de l'utilisation des matériaux à gradients fonctionnels est exceptionnellement large. La **Figure I.47** résume les différentes zones d'application des FGM. Les matériaux fonctionnellement gradués offrent de grandes perspectives dans les applications soumises à des conditions de fonctionnement difficiles ou des applications très sensibles [29]. Certaines de ces applications, telles que l'aérospatiale, l'automobile, le biomédical, la défense et le secteur militaire, l'énergie, l'industrie marine, le génie civil et le sport, sont présentées dans les sous-sections suivantes.

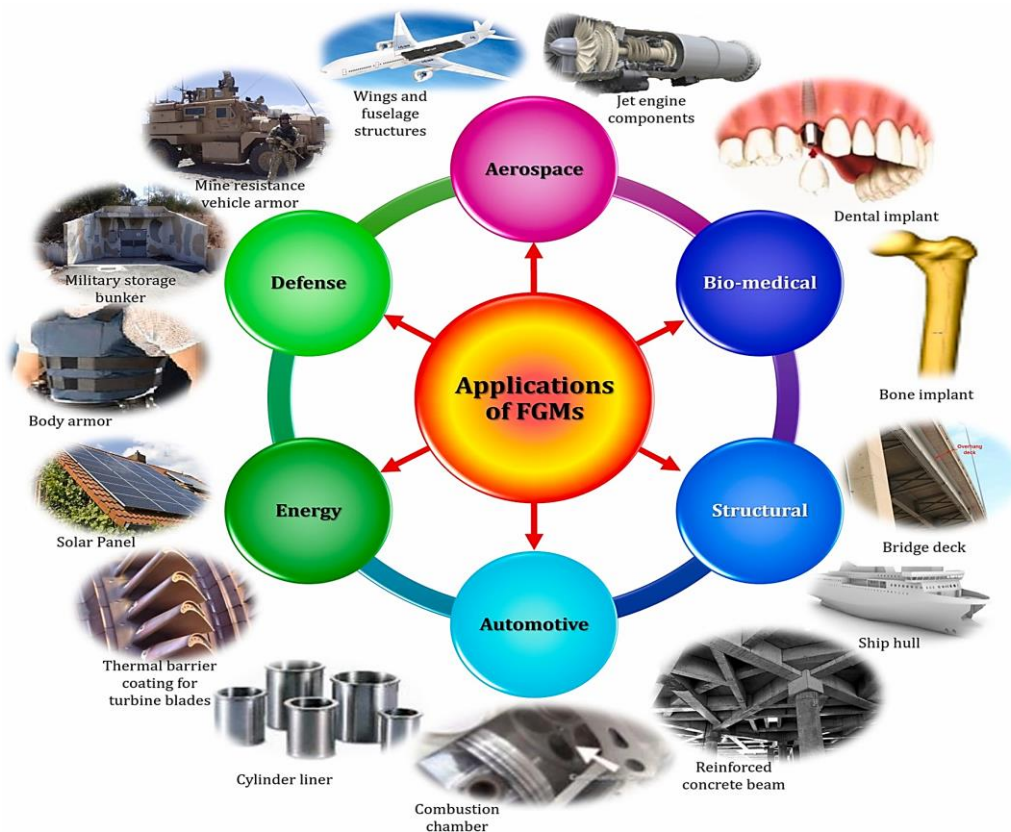


Figure I.47 : Les principaux domaines d'application des FGM [29].

I.3.5.1. Applications aérospatiales

Les FGM ont été utilisés pour la première fois dans les vaisseaux spatiaux pour réduire les contraintes thermiques entre les surfaces extérieures et intérieures. Au fil des années, l'utilisation de ces matériaux s'est étendue à diverses applications aérospatiales. La plupart des composants des avions et des engins spatiaux sont désormais fabriqués à partir de FGM, tels que les réflecteurs, les panneaux d'échange thermique, les panneaux solaires, les roues de turbine, le nez des avions spatiaux, la couche de protection de la chambre de combustion, les composants de la structure, les composants du moteur de fusée, le boîtier de la caméra, et le bord d'attaque des missiles et des navettes spatiales, etc. [30, 15] comme illustré dans

la **Figure I.47** [29]. Les matériaux fonctionnellement gradués sont également utilisés pour créer une barrière thermique au niveau de la paroi d'un avion (structure d'avion spatial), pour résister à la chaleur générée à la surface extérieure de l'avion en raison de la friction de l'air.

I.3.5.2. Applications automobiles

En raison de leur coût élevé [31], l'utilisation des FGM est limitée dans les applications automobiles. Ils sont exclusivement employés dans les parties critiques de la voiture telles que les pistons et les chemises de cylindre du moteur diesel, les chambres de combustion, les freins de voiture de course, les arbres de transmission et les volants, comme illustré dans la **Figure I.47**. Les FGM peuvent également être utilisées dans les revêtements de carrosserie automobile [29].

I.3.5.3. Applications biomédicales

Les tissus humains, tels que les os et les dents, sont des FGM naturels. Ces tissus peuvent parfois être endommagés de manière irréparable, nécessitant leur remplacement. Pour remplacer ces tissus, il est nécessaire d'utiliser un matériau compatible capable de remplir la fonction du tissu biologique d'origine. Le candidat idéal pour cette application est le matériau à gradients de fonctionnalités. Les FGM ont trouvé une large gamme d'applications dans les domaines dentaires [32] et orthopédiques pour le remplacement des dents et des os [33]. La **Figure I.47** présente une vue schématique d'un implant dentaire à gradients de fonctionnalité avec une composition de matériaux graduée.

I.3.5.4. Applications de défense

La capacité à empêcher la propagation des fissures est l'une des caractéristiques les plus importantes des matériaux à gradient de fonctionnalités, ce qui les rend utiles dans les applications de défense et le secteur militaire, en tant que matériaux résistants à la pénétration utilisés pour les plaques de blindage et les gilets pare-balles [34]. Une autre application importante des FGM est dans les carrosseries de véhicules blindés **Figure I.47**.

I.3.5.5. Applications énergétiques

Les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés dans le secteur de l'énergie pour obtenir de bonnes barrières thermiques et des revêtements protecteurs sur les pales de turbine des moteurs à gaz. Les FGM sont également utiles dans les générateurs thermoélectriques, les dispositifs de conversion d'énergie, les cellules solaires **Figure I.47**, les capteurs, etc. [35, 36].

I.3.5.6. Applications électriques / électroniques

Les matériaux fonctionnellement gradués sont utilisés dans l'industrie électrique et électronique de diverses manières, notamment pour la relaxation des contraintes de champ dans l'interface électrode-espaceur, dans les diodes, dans les semi-conducteurs, pour les isolants, et dans la production de capteurs. Les éléments de protection thermique dans la

microélectronique sont également fabriqués à partir de matériaux à gradients de fonctionnalités à base de nanotubes de carbone **Figure I.47**.

I.3.5.7.Applications marines

Les matériaux fonctionnellement gradués ont également des applications dans l'industrie marine et sous-marine, notamment pour les arbres d'hélices, les cylindres de plongée, les dômes sonar, les systèmes de tuyauterie composites et les coques de pression cylindriques **Figure I.47**.

I.3.5.8. Applications en génie civil

La gradation fonctionnelle des éléments en béton permet d'aligner la composition interne des composants structurels avec des exigences de performances structurelles et thermiques spécifiques. Cet alignement est rendu possible en modifiant continuellement les caractéristiques du matériau, notamment sa porosité, sa résistance ou sa rigidité, dans jusqu'à trois dimensions spatiales. Ce principe peut être appliqué pour minimiser la masse de l'élément et créer des propriétés multifonctionnelles. La minimisation de la porosité améliore les caractéristiques structurelles du béton, tandis que la maximisation de la porosité renforce ses propriétés d'isolation thermique. La **Figure I.48** montre les courbes des caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [37].

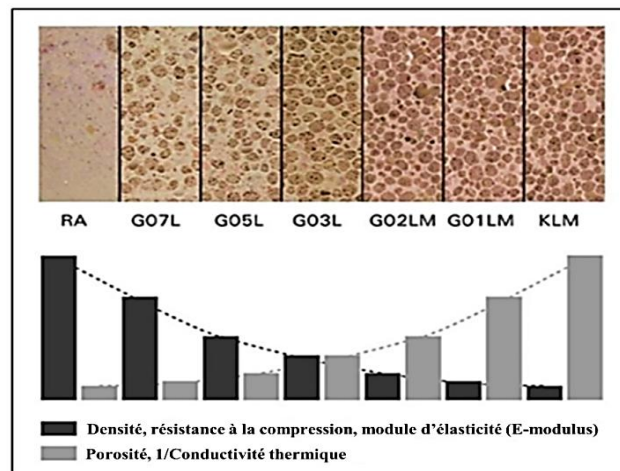


Figure I.48 : Courbes des caractéristiques du béton durci en fonction d'une augmentation progressive de la porosité [37]

I.3.6. Modélisation des propriétés matérielles effectives des FGM

I.3.6.1. Modèles micromécaniques (homogénéisation)

Les estimations du module d'Young et du coefficient de Poisson d'un composite biphasé renforcé de particules, à l'aide des six modèles micromécaniques susmentionnés, sont comparées aux figures I.4/5. Le composite biphasé considéré est un composite à matrice métallique constitué d'une matrice d'aluminium et d'inclusions céramiques sphériques

parfaitement liées. Les résultats estimés sont représentés en fonction de la fraction volumique des inclusions (céramique).

Il convient de mentionner que le groupement de particules (agglomération), l'état d'interface de la matrice et des particules, et la taille des particules pourraient affecter les propriétés multifonctionnelles des composites renforcés de particules. Comme observé dans, ces paramètres ont des effets significatifs sur la déformation plastique ainsi que dans les composites contenant des particules nanométriques. L'influence de l'agrégation des particules, des paramètres inter faciaux et de l'effet de la taille sur les propriétés élastiques efficaces est négligée.

Comme le montrent la **Figure I.49**, les approximations de Voigt et de Reuss tracent les limites supérieures et inférieures pour l'estimation du module de Young. Alors que l'estimation de Reuss pour le module de Young pourrait être 48% inférieure à l'estimation de Voigt pour la fraction volumique de $V = 0,5$, les limites de Hashin-Shtrikman fournissent une capture de bande d'estimation réduite par les limites supérieure et inférieure. Par exemple, l'estimation du module de Young en utilisant la borne inférieure (LB) Hashin-Shtrikman est 30% inférieure à son homologue utilisant la borne supérieure

(UB) Hashin-Shtrikman. Comme le montre la **Figure I.50**, les estimations faites par SCM, LRVE et Tamura ($q_T = -100\text{GPa}$) se situent dans les limites de Hashin-Shtrikman.

Il est à noter que les estimations de Tamura dépendent fortement de la valeur de q_T . La figure 1.4 révèle que le coefficient de Poisson n'obéit pas à la règle du mélange de type Voigt ou Reuss qui est cohérente avec les résultats de Zimmerman.

Bien que les FGMs soient généralement considérées comme des combinaisons de métal et de céramique en fait, elles peuvent être fabriquées par tout autre matériau différent. Ici, les variations de matériaux sont supposées être dans le sens de l'épaisseur de la micro poutre.

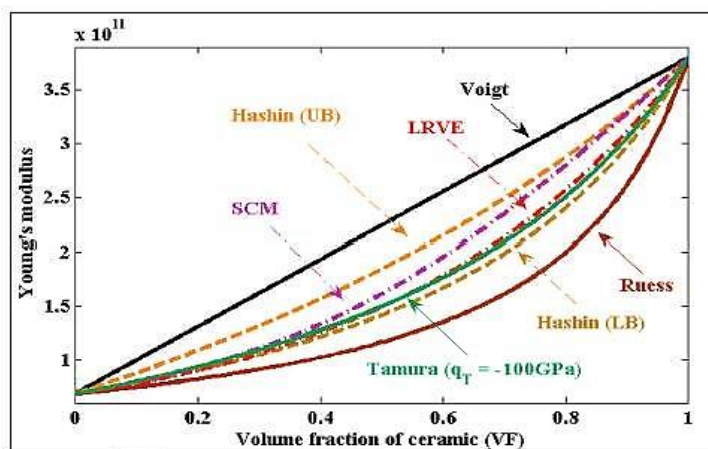


Figure I.49: Module de Young efficace en fonction de la fraction volumique de la céramique pour plusieurs modèles micromécaniques

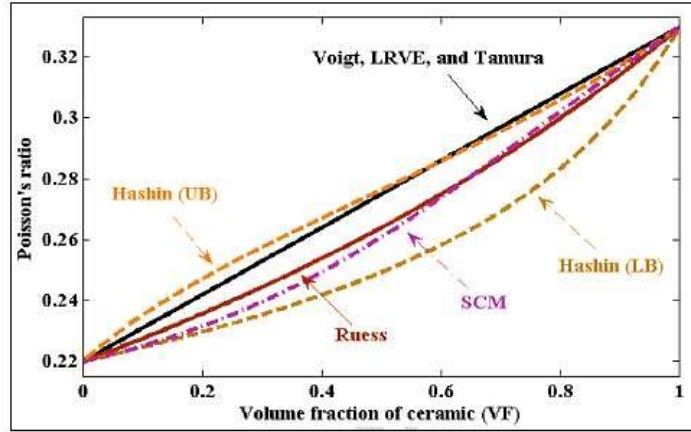


Figure I.50: Coefficient de Poisson effectif en fonction de la fraction volumique de céramique pour plusieurs modèles micromécaniques

I.3.6.2. Modèle de Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka (1973) [38] (Tanaka, 1997) est utilisé pour estimer les modules effectifs du matériau. Il prend en compte approximativement l'interaction entre les inclusions voisines et est généralement applicable aux régions de la microstructure graduée qui présentent une matrice continue bien définie et une phase particulière discontinue, comme illustré dans la **Figure I.51** [39]. Cette méthode suppose que la phase matricielle, désignée par l'indice 1, est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière, désignée par l'indice 2.

Mori et Tanaka [38] ont développé une méthode pour calculer la contrainte interne moyenne dans la matrice du matériau. Cette méthode a été reformulée par Benveniste [72] [40] pour être utilisée dans le calcul des propriétés effectives des matériaux composites. Selon le modèle de Mori-Tanaka, les modules de cisaillement (G) et les modules de compressibilité (K) peuvent être exprimés sous la forme [41] .

$$G = G_1 + \frac{V}{\frac{1}{G_2 - G_1} + \frac{6(K_1 + 2G_1)(1-V)}{5G_1(3K_1 + 4G_1)}} \quad (I.1)$$

$$K = K_1 + \frac{V}{\frac{1}{K_2 - K_1} + \frac{3(1-V)}{(3K_1 + 4G_1)}} \quad (I.2)$$

Où V représente la fraction volumique des particules. À l'aide des modules de cisaillement et des modules de compressibilité, le module d'Young effectif (E) et le coefficient de Poisson (ν) sont ensuite exprimés comme suit.

$$E = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (I.3)$$

$$\nu = \frac{9GK}{G + 3K} \quad (I.4)$$



Figure I.51 : Matériau FGM à deux phases présentant (a) une microstructure particulaire et (b) une microstructure squelettique [39]

I.3.6.3. La règle des mélanges (modèle de Voigt)

Le modèle de Voigt, initialement introduit par Voigt en 1889 [42], est un modèle d'homogénéisation bien connu et généralement utilisé pour prédire les propriétés élastiques effectives des matériaux composites. L'idée de Voigt était de définir ces propriétés en faisant la moyenne des contraintes sur toutes les phases avec l'hypothèse d'une uniformité des déformations [43]. Par souci de simplification, le schéma de Voigt est le modèle le plus populaire et le plus couramment utilisé pour estimer les propriétés des FGM.

Selon cette règle, une propriété matérielle arbitraire P du FGM est supposée varier progressivement le long d'une direction (généralement la direction de l'épaisseur), en fonction des fractions volumiques et des propriétés des matériaux constitutifs. Cette propriété peut être exprimée comme suit :

$$P = \sum_{i=1}^n P_i * V_i \quad (I.5)$$

P peut représenter, par exemple, le module d'Young (E), le coefficient de Poisson (ν) et la densité (ρ) etc. P_i et V_i sont respectivement la propriété matérielle et la fraction volumique du constituant i des FGM. Les fractions volumiques de tous les matériaux constitutifs doivent être égales à unité 1, de sorte que :

$$\sum_{i=1}^n V_i = 1 \quad (I.6)$$

I.3.6.4. Modèle de Reuss

La première hypothèse de ce modèle a été proposée par Reuss [30]

Également connu sous le nom de règle inverse de Voigt, il considère le matériau homogène à l'échelle macroscopique sous une contrainte uniforme.

$$E_{(z)} = \frac{E_c E_m}{E_c (1 - V_c) + E_m V_c} \quad (I.7)$$

Où :

E_c Et E_m sont respectivement les modules de Young de la céramique et du métal.

V_c Est la fraction volumique.

la fraction volumique de la céramique pour plusieurs modèles micromécaniques

I.3.6.5. Modèle de Tamura

Le modèle de Tamura, développé pour la règle de mélange linéaire, introduit un paramètre d'ajustement empirique appelé "transfert contrainte-déformation" [28]

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (I.8)$$

Le modèle de Tamura dépend de la valeur de q . Les FGM ont généralement une plage de valeurs pour q , ce qui fait que les propriétés effectives varient selon l'épaisseur. Le module de Young est alors calculé par :

$$E(z) = \frac{(1 - V_c) E_m (q - E_c) + V_c E_c (q - E_m)}{(1 - V_c)(q - E_c) + V_c E_c (q - E_m)} \quad (I.9)$$

Pour $q = 0$, on retrouve la règle de Reuss et pour $q = 100$, la règle de Voigt. Le modèle reste invariant à la considération de la phase matricielle et de la phase de renfort.

Où :

E_c et E_m sont respectivement les modules de Young de la céramique et du métal.

V_c est la fraction volumique.

I.3.6.6. Description par un élément de volume représentatif (RVE)

On obtient des éléments de volume représentatifs locaux (RVE) en supposant que la microstructure des matériaux hétérogènes est connue. Le module de Young est alors exprimé par la méthode RVE comme suit [15] :

$$E(z) = E_m \left(1 + \frac{V_c}{F E - \sqrt[3]{V_c}} \right) \quad ; \quad F_E = \frac{1}{1 - \frac{E_m}{E_c}} \quad (I.10)$$

Où :

E_c Et E_m : sont respectivement les modules de Young de la céramique et du métal.

v_c : Est la fraction volumique.

Le modèle utilise des éléments de volume représentatifs locaux (RVE) qui se basent sur une échelle de longueur "mésoscopique", bien plus grande que l'échelle caractéristique des particules (inhomogénéités) mais plus petite que l'échelle caractéristique d'un échantillon macroscopique [31]. Les données d'entrée pour le RVE dans le cadre micromécanique déterministe sont généralement des moyennes de volume ou d'ensemble des descripteurs des microstructures.

I.3.6.7. Lois régissant la variation des propriétés matérielles des FGM

La variation de la propriété souhaitée d'un FGM dans n'importe quelle direction peut être conçue en fonction des besoins en considérant diverses lois de gradation. Les lois de puissance, les lois exponentielles et sigmoïdes sont couramment utilisées par les chercheurs pour décrire les fractions volumiques, et elles sont présentées dans les sections suivantes.

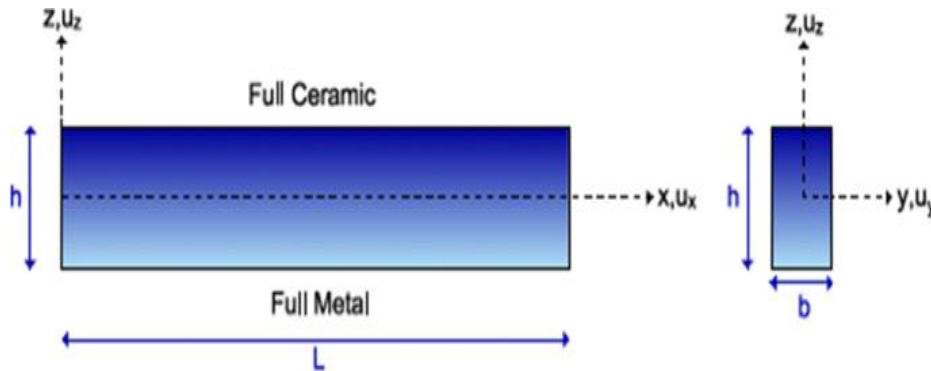


Figure I.52 : Géométrie d'une poutre FGM [44]

Le plan de la poutre est défini par les coordonnées (x) et (y) , tandis que l'axe (z) indique la direction de l'épaisseur (**Figure I.52**). Les propriétés du matériau, dont le module de Young et le coefficient de Poisson, sur les faces supérieure et inférieure, sont différentes. Ils varient de façon continue, suivent l'épaisseur (l'axe z), soit :

$$E=E(z) \quad \text{et} \quad \nu=\nu(z) \quad (\text{I.11})$$

Jin et Batra [45], Ziou et al [44] ont indiqué que l'effet du coefficient de Poisson sur les déformations est négligeable comparativement à celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson peut être supposé comme constant. Cependant, le module de Young dans la direction de l'épaisseur de la poutre FGM varie en fonction des lois de gradation.

I.3.6.7.1. Propriétés matérielles de la poutre P-FGM

La loi de puissance pour la gradation des matériaux a été introduite pour la première fois par Wakashima et al. [46]. De plus, cette loi est largement utilisée par de nombreux chercheurs et est plus courante dans l'analyse des contraintes des FGM [47]. Si une poutre FG d'épaisseur uniforme ' h ', comme illustré dans la **Figure I.52**, est utilisée pour l'analyse,

alors selon cette loi, la propriété matérielle effective $P(z)$ dans une direction spécifique (le long de z) peut être déterminée par :

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2)V(z) \quad (I.12)$$

P représente chaque propriété matérielle effective (E , α et β). P_1 et P_2 sont les propriétés matérielles aux surfaces supérieure ($z = +h/2$) et inférieure ($z = -h/2$) de la poutre, respectivement. On peut observer que les propriétés matérielles dépendent de la fraction volumique V des FGM, qui suit la loi de puissance comme suit :

$$V(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^k \quad (I.13)$$

Où, k ($0 \leq k \leq \infty$) est le paramètre du matériau (ou indice de loi de puissance).

La **Figure I.53** montre la variation de la fraction volumique dans la direction de l'épaisseur de la poutre. On peut observer sur la figure que la fraction volumique diminue rapidement près de la surface inférieure pour $k < 1$ et augmente rapidement près de la surface supérieure pour $k > 1$.

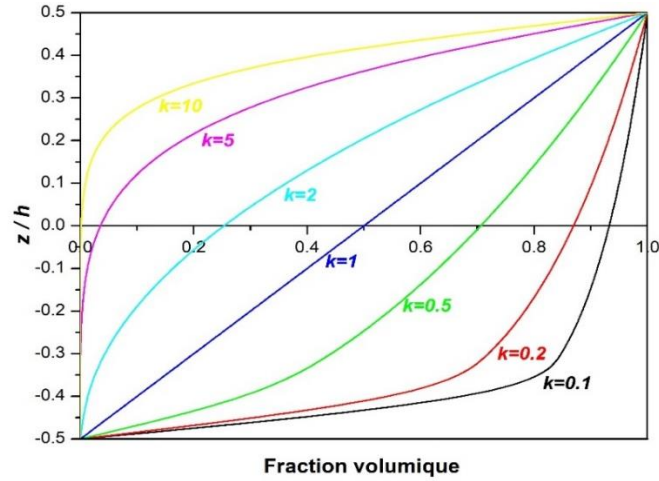


Figure I.53 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur P-FGM

I.3.6.7.2. Propriétés matérielles de la poutre S-FGM

Lorsqu'une seule fonction de loi de puissance FGM est ajoutée au composite multicouche, les concentrations des contraintes apparaissent aux interfaces où le matériau est continu mais change rapidement. Par conséquent, Chung et Chi [48]. ont développé une autre loi appelée loi sigmoïde, qui est une combinaison de deux fonctions de loi de puissance, afin d'assurer une distribution régulière des contraintes entre toutes les interfaces. Cette loi est également utilisée pour réduire les facteurs d'intensité des contraintes dans les structures fissurées [49]. Les deux fonctions de loi de puissance sont définies par :

$$V_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour } -h/2 \leq z \leq 0 \quad (I.14a)$$

$$V_2(z) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \quad \text{Pour} \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.14b})$$

En utilisant la loi des mélanges, les propriétés effectives du S-FGM peuvent être calculées par :

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{h/2 + z}{h/2} \right)^k \right) \quad \text{Pour} \quad -h/2 \leq z \leq 0 \quad (\text{I.15a})$$

$$P(z) = P_2 + (P_1 - P_2) \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h/2 - z}{h/2} \right)^k \right) \quad \text{Pour} \quad 0 \leq z \leq h/2 \quad (\text{I.15b})$$

La **Figure I.53** montre que la variation de la fraction volumique définie par les équations (I.14a) et (I.14b) représente les distributions sigmoïdes, et cette poutre FGM est appelée (Poutre S-FGM).

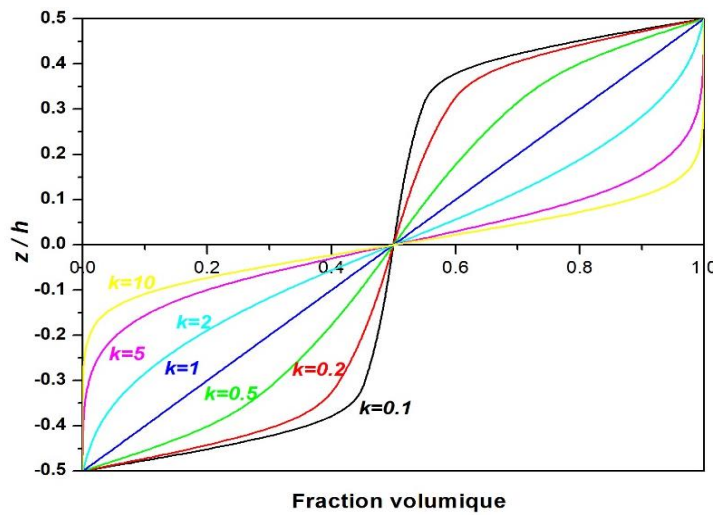


Figure I.53 : Variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur S-FGM

I.3.6.7.3. Propriétés matérielles de la poutre E-FGM

La loi exponentielle est généralement utilisée pour traiter les problèmes liés au mécanisme de rupture des FGM. Elle a été proposée par Kim et Paulino [50] et Zhang et al. [51]. La distribution des propriétés des poutres FG dans l'épaisseur selon la loi exponentielle est la suivante.

$$P(z) = p_2 e^{\frac{1}{h} \left(\ln \frac{p_1}{p_2} \right) \left(z + \frac{h}{2} \right)} \quad (\text{I.16})$$

La distribution des matériaux (par exemple, la distribution du module d'Young E) dans la direction de l'épaisseur des poutres E-FGM est représentée dans la Figure I.54.

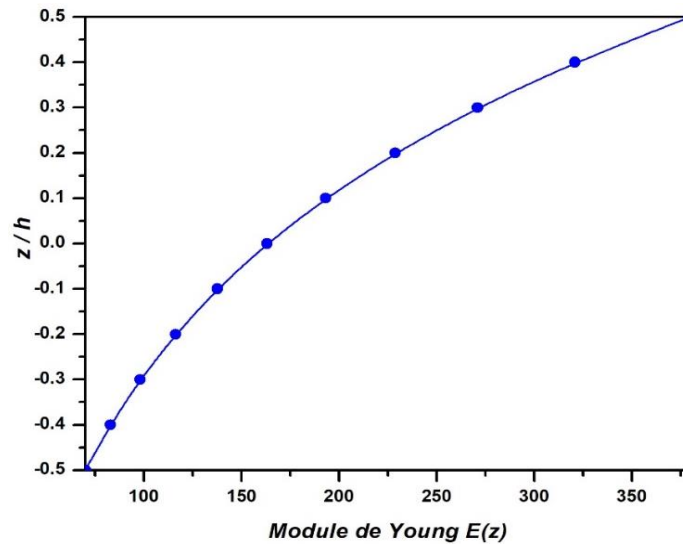


Figure I.54: Variation du module d'Young E à travers l'épaisseur E-FGM

L'effet du coefficient de Poisson sur la déformation a été rapporté par Delale et Erdogan (1983) [52] comme étant beaucoup moins important que celui du module de Young. Par conséquent, le coefficient de Poisson des poutres est supposé constant.

I.4. Conclusion

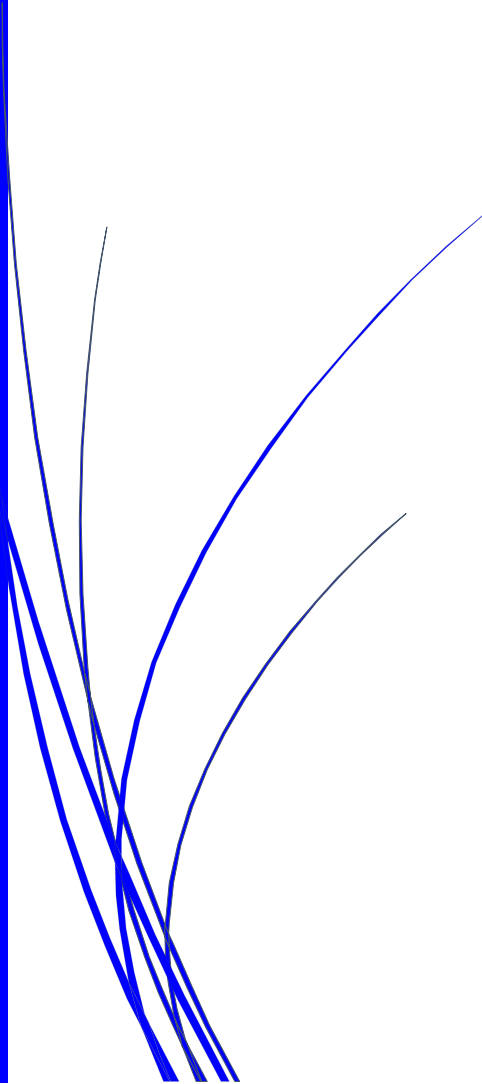
Les Matériaux à Gradient Fonctionnel (FGMs) ont été introduits dans ce chapitre. Les chercheurs japonais ont été confrontés au problème de la rupture des composites par délamination lorsqu'ils ont essayé de développer un matériau composite adapté à un environnement de travail difficile dans un projet spatial. Les FGM se distinguent de manière différente des composites conventionnels. Certaines caractéristiques fondamentales des FGM ont donc été mises en évidence. Un bref historique de la recherche et du développement des FGM a également été présenté. Les FGM sont utilisées comme revêtements de surface (revêtements minces) et comme matériaux en bloc (massifs) en fonction de l'application prévue. Les techniques de fabrication des FGM pour le revêtement mince et les matériaux en bloc ont été discutées. Les FGM ont évolué depuis leur application thermique initiale, pour laquelle elles ont été développées, et sont actuellement utilisées pour d'autres applications. Certaines de ces applications ont été présentées. À la fin du chapitre, une considération approfondie est accordée à la description des modèles de micromécanique et des lois de gradation utilisés pour décrire les propriétés effectives des FGM.

En raison de l'applicabilité plus large des FGM, il est nécessaire d'étudier leur comportement. Ainsi, pour prédire avec précision le comportement des structures FG, plusieurs théories et méthodes analytiques et numériques sont rapportées dans la littérature. Le chapitre suivant présente les différentes théories utilisées pour l'analyse des poutres FG et résume les études basées sur le comportement statique, vibratoire et de flambage des poutres FG.



Chapitre II

Théorie des Poutres & Recherche Bibliographique



Chapitre II :

Théorie des Poutres & Recherche Bibliographique

II.1. Introduction

Les Matériaux Fonctionnellement Gradués (FGM) sont de plus en plus utilisés dans le domaine de l'ingénierie en tant qu'éléments structuraux tels que des poutres, des plaques, des coques, etc. Dans une poutre FG classique, les propriétés des matériaux sont adaptées en mélangeant deux matériaux distincts, par exemple, la céramique et le métal. Les FGM sont capables de réduire les contraintes thermiques, de résister aux environnements à haute température et de prévenir la corrosion. Dans le cas des poutres sandwich FG, deux types de sandwich sont couramment utilisés : (a) une poutre sandwich avec un noyau FG et deux faces isotropes ; (b) une poutre sandwich avec un noyau isotrope et deux faces FG. Pour les utiliser efficacement, une bonne compréhension de leur comportement en flexion, dynamique et en flambage est nécessaire.

Les théories de poutre en 2D les plus couramment utilisées sont :

- La théorie classique des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT), qui néglige les effets de cisaillement transversal et n'est adaptée qu'aux poutres fines.
- La théorie du premier ordre de déformation par cisaillement (FSDT), également appelée théorie de Timoshenko, qui inclut les effets de cisaillement transversal et est dédiée aux poutres modérément épaisses.
- Les théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé (HSDT), qui sont dédiées aux poutres de plus grande épaisseur.

Ces modèles sont basés sur des hypothèses concernant les déformations ou contraintes à travers l'épaisseur de la poutre, permettant ainsi de réduire un problème 3D à un problème 2D.

Puisqu'elles ont été largement utilisées dans la modélisation des poutres FG, les théories mentionnées ci-dessus sont brièvement décrites dans ce chapitre. En outre, une revue des études rapportées sur les analyses statiques, vibratoires et de flambage des poutres FG est présentée.

II.2. Historique des théories des poutres

La paternité de la théorie des poutres est attribuée à Galilée, mais des études récentes indiquent que Léonard De Vinci l'aurait précédé. De Vinci avait supposé que la déformation varie de manière linéaire en s'éloignant de la surface neutre, mais il ne put finaliser ses

calculs car il ne connaissait pas la loi de Hooke. De son côté, Galilée était parti sur une hypothèse incorrecte il supposait que la contrainte était répartie uniformément en flexion), et c'est Antoine Parent qui obtint la distribution correcte.

Ce sont Leonard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers les années 1750, alors que Daniel Bernoulli, le neveu du précédent, écrivit l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. A cette époque, le génie mécanique n'était pas reconnu comme une science, et on ne considérait pas que les travaux d'une académie des mathématiques puissent avoir des applications pratiques, et on continua à bâtir les ponts et les bâtiments de manière empirique. Ce n'est qu'au XIX siècle, avec la Tour Eiffel et les grandes roues, qu'on démontra la validité de la théorie à grande échelle.

II.3 Définition d'une poutre

Les poutres sont des éléments structuraux qui ont un rapport longueur/hauteur très élevé (par exemple, $L/h > 10$) et sont soumises à des forces à la fois dans le plan et transversales au plan qui ont tendance à se plier autour d'un axe perpendiculaire à leur longueur Figure II. 1. Ces éléments sont connus sous le nom d'éléments structuraux et leur étude constitue la mécanique des structures. Les poutres ont une grande variété d'applications pratiques dans de nombreuses structures en génie civil, génie mécanique et aérospatial ainsi qu'en nano ingénierie. La théorie des poutres est basée sur certaines hypothèses telles que l'hypothèse de Navier, l'hypothèse d'Euler-Bernoulli et l'hypothèse de Timoshenko, qui permettent de modéliser le comportement des poutres sous l'effet de charges externes.

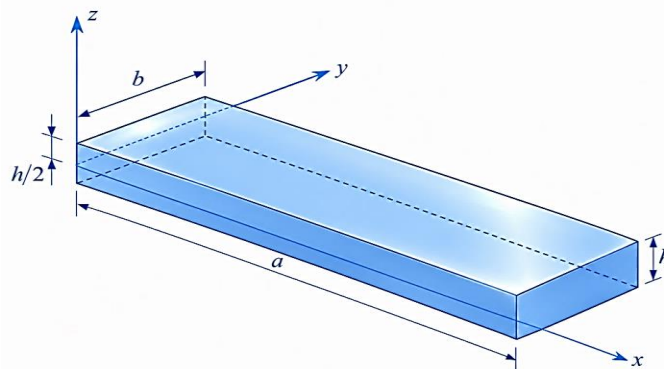


Figure II. 1 : Schéma d'un élément de poutre

II.4. Les modèles de la théorie des poutres :

Les théories des poutres impliquent essentiellement à la réduction d'un problème tridimensionnel de la théorie de l'élasticité à un problème unidimensionnel. Étant donné que la dimension d'épaisseur est beaucoup plus petite que la dimension longitudinale. En général, les théories des poutres sont utilisées les séries de Taylor dans le développement du champ des déplacements qui peut être exprimée comme suit :

$$u(x, z, t) = u^0(x, t) + z\phi^{(1)}(x, t) + z^2\phi^{(2)}(x, t) + z^3\phi^{(3)}(x, t) + z^4\phi^{(4)}(x, t) + \dots \quad (\text{II.1})$$

De nombreux chercheurs n'aiment pas cette technique à cause de son coût de calcul élevé. Dans ce cas, plusieurs techniques de simplification ont été proposées pour diminuer le nombre des inconnues de déplacement. L'une de ces simplifications consiste à éliminer les derniers termes de la série de Taylor et remplacer par une fonction appelée fonction de forme, qui est illustrée dans l'équation suivante :

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + f(z) \phi_x(x, t) \quad (\text{II.2a})$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t) \quad (\text{II.2b})$$

Où u le déplacement axial, w le déplacement transversal d'un point matériel situé en (x, z) dans la poutre.

$u_0(x, t)$, $w_0(x, t)$ représentent les inconnues de déplacements ; axial et transversal au niveau de l'axe neutre, respectivement.

$\phi(x, t)$ présente la rotation de la section transversale de la poutre.

$f(z)$: la fonction de forme et $f'(z)$ la fonction qui décrit les distributions non linéaires de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre.

L'analyse du comportement des poutres sous l'effet de charges externes attirent l'attention de la plupart des chercheurs. Dans la littérature ouverte, différentes théories des poutres ont été proposées par les chercheurs pour analyser la réponse des éléments de la poutre en temps réel. Certaines de ces théories sont discutées ci-dessous:

II.4.1. Modèle d'Euler Bernoulli (Classical Beam Theory – CBT)

La théorie classique des poutres (Classical Beam Theory – CBT) se base sur les hypothèses d'Euler-Bernoulli. La plus ancienne et la plus simple a été développée en 1888 par Love [53] en utilisant des hypothèses proposées par Kirchhoff en 1850 [54]. Qui elles-mêmes ont inspiré des hypothèses de Gustav Kirchhoff pour les plaques, ou « théorie des plaques minces ». La théorie d'Euler-Bernoulli est basée sur la théorie élémentaire de flexion des poutres, qui ne tient pas compte des effets de la déformation de cisaillement. Il est également connu qu'elle n'est applicable qu'aux poutres fines. Dans cette théorie, le modèle est basé sur une distribution linéaire des déplacements suivant l'épaisseur de la poutre (Reissner, 1961) [55], (Yang, 1966) [56].

Les hypothèses fondamentales de cette théorie (CBT) sont :

- Les sections planes initialement perpendiculaires à la ligne moyenne, restent planes et perpendiculaires à la ligne moyenne après déformation, Figure II.2 [57]. De manière analogue aux plaques, cette hypothèse implique que l'effet des déformations de cisaillement transversal est négligeable (pas de cisaillement sur la hauteur de la poutre). La déformation de la poutre est donc associée principalement aux contraintes de flexion.

Par conséquent, la déformation normale transversale, ε_z , résultant du chargement transversal peut être négligée.

- La contrainte normale transversale, σ_z , est petite comparée aux autres composantes de contrainte de la poutre et, par conséquent, peut être négligée.
- La fonction qui décrit la répartition des déplacements suivant l'épaisseur de la poutre, est nulle :

$$f(z) = 0 \quad (\text{II.3})$$

Pour la grande majorité des problèmes des poutres, le CBT donne des résultats précis qui ne diffèrent pas significativement de ceux obtenus à l'aide de la théorie de l'élasticité en 3D. Pour le cas des poutres élancées et d'après la théorie classique des poutres (CBT), sous les hypothèses mentionnées ci-dessus, le champ de déplacement d'un point M est donné par les deux composantes suivantes [57 , 58] :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \quad (\text{II.4a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{II.4b})$$

Avec : u, w Les déplacements suivant les directions x, z respectivement.

u_0, w_0 Sont les composantes de déplacement le long des axes x, z à la mi-hauteur ($z=0$).

$\frac{\partial w_0}{\partial x}$ C'est la rotation due à la flexion.

Sous ces hypothèses, les sections droites de la poutre ne subissent aucun glissement, en effet :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.5})$$

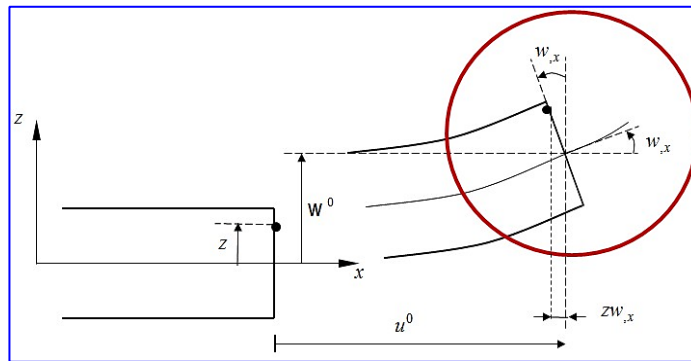


Figure II. 2 : Géométrie non déformée et déformée d'une poutre sous les hypothèses d'Euler-Bernoulli (CBT) [57]

Puisque l'effet du cisaillement transversal n'est pas pris en compte dans cette théorie, les résultats pour les poutres (en particulier les poutres composées de matériaux composites avancés) seront inexacts. Dans ce but, la théorie de la déformation par cisaillement du premier ordre a été développée.

II.4.2. Modèle de poutre basé sur la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) (Timoshenko TBT)

La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre, également appelée théorie de Timoshenko (Timoshenko, 1972) [59] Figure II.3, est plus riche et plus générale que la théorie élémentaire des poutres au prix d'une fonction supplémentaire. Elle s'applique pour le cas des poutres courtes. Cette théorie est analogue à la théorie de Mindlin-Reissner (Reissner, 1945 [60] ; Mindlin, 195 [61]) ou la théorie des plaques de Mindlin. La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre a prolongé la théorie classique des poutres en tenant compte de l'effet de cisaillement transverse. Selon cette théorie, la section plane reste plane, mais elle perd sa perpendicularité par rapport à la ligne moyenne de la poutre. Ceci est dû au cisaillement transversal découvert par Timoshenko sur l'épaisseur de la poutre, Figure II.4 [57]. Par conséquent, les déformations de cisaillement transversal sont constantes à travers l'épaisseur, la fonction $f(z)$ est égale à z . De plus, cette théorie suppose que la contrainte normale transversale, σ_z , est nulle.

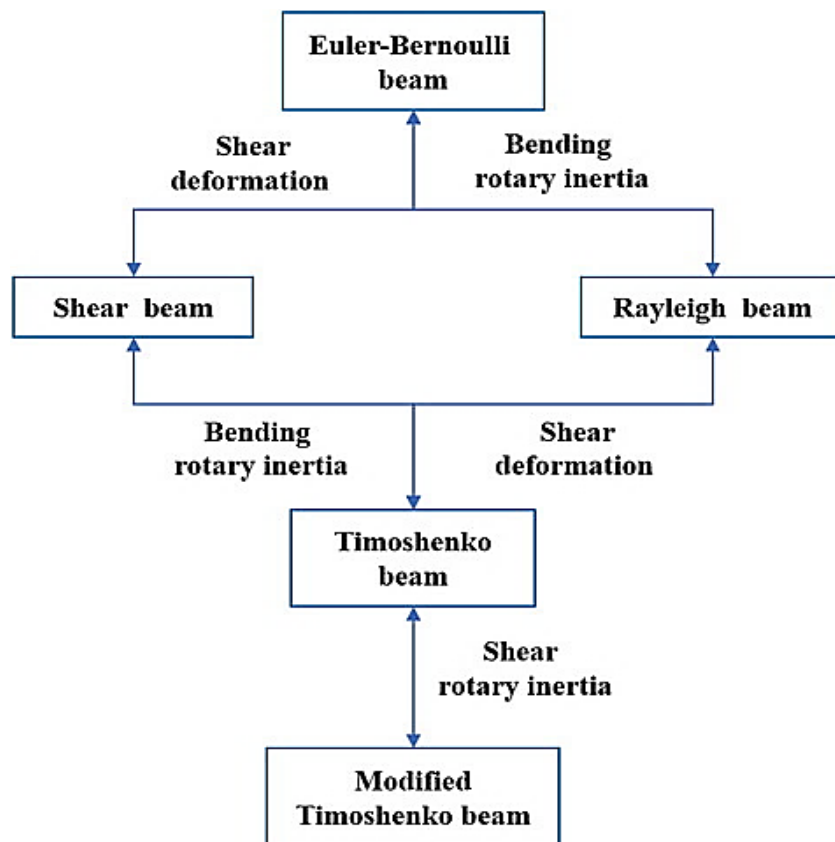


Figure II.3 : Evolution des théories classiques des poutres

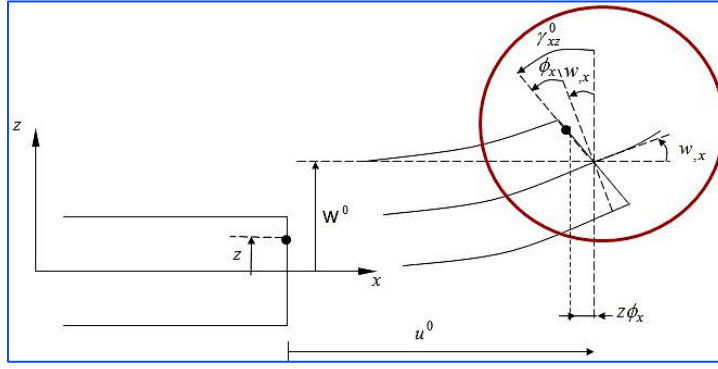


Figure II.4 : Géométrie non déformée et déformée de la poutre de Timoshenko [57]

Le champ de déplacement pour un point M (x, z) quelconque s'exprime en fonction de ces inconnues comme suit [[57] , [58]] :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + z \phi_x \quad (\text{II.6a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{II.6b})$$

Où (u_0, w_0) et (ϕ_x) sont les déplacements dans la surface moyenne ($z=0$) et la rotation autour de l'axe y, respectivement.

Si on veut calculer la contrainte de cisaillement :

$$\tau_{xz} = \gamma_{xz} \cdot G \quad (\text{II.7})$$

Avec : $\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x$, et G : Le module de cisaillement transverse.

La TBT est donc une extension de la cinématique de la CBT par une déformation de cisaillement transversale de la poutre dans leur hypothèse cinématique (Figure II.5).

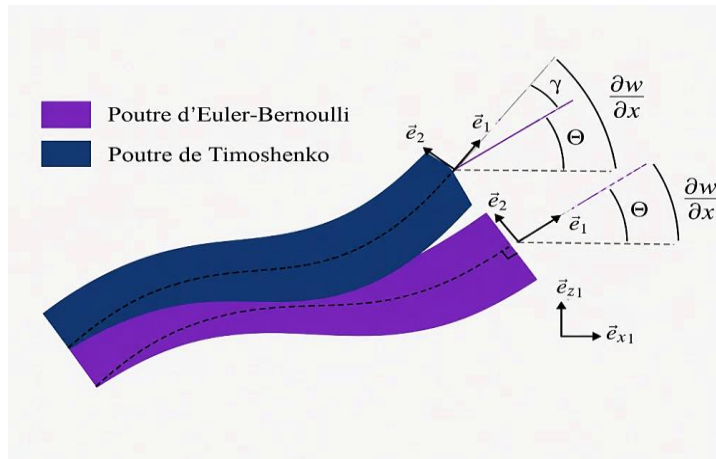


Figure II.5 : Illustration élémentaire d'une poutre en fonction de deux théories des poutres

Puisque les déformations de cisaillement transversal sont constantes à travers l'épaisseur de la poutre (Figure II.6), il s'ensuit que la contrainte de cisaillement transversal sera également constante. En général, la contrainte de cisaillement varie de manière parabolique à travers l'épaisseur de la poutre, et donc un **facteur de correction de cisaillement** est requis dans la FSDT pour compenser la variation parabolique réelle de la contrainte de cisaillement et satisfaire les conditions aux limites de contrainte de cisaillement nulles sur les surfaces de la poutre (c'est-à-dire que la contrainte de cisaillement doit être égale à zéro au niveau des surfaces supérieure et inférieure de la poutre).

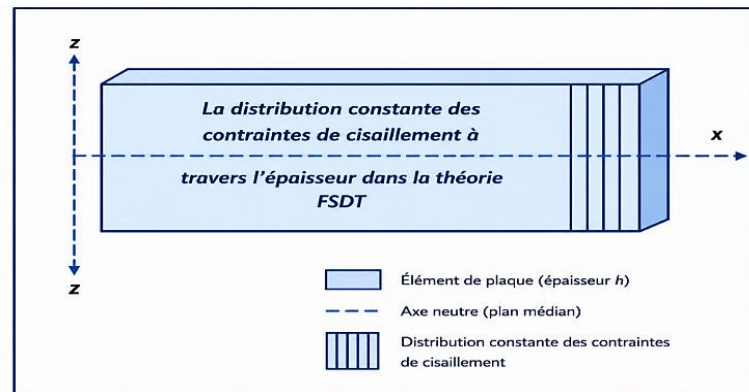


Figure II.6 : La distribution constante des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie FSDT

II.4.2.1. Facteur de correction de cisaillement (k_s Shear Correction Factor)

Le facteur de correction de cisaillement ajuste la rigidité au cisaillement transversal et, par conséquent, l'exactitude des résultats de la FSDT dépendra significativement du coefficient de correction « k_s » [62]. Afin d'améliorer la FSDT, de nombreuses études ont été menées par de nombreux chercheurs en utilisant différentes approches pour calculer les coefficients « k_s » pour des plaques homogènes et composites, de manière analogue aux poutres. Le premier concept de ce coefficient pour des plaques homogènes isotropes a été présenté par Reissner [60]. Où il a proposé une valeur de $5/6$ en utilisant une méthode de calcul basée sur l'équilibre statique et des considérations d'équivalence énergétique. Mindlin [61] a été le premier à prédire le facteur de correction basé sur l'analyse dynamique, où il a proposé une valeur de $\pi^2/12$ en égalant la fréquence approximative de la première vibration asymétrique d'épaisseur - cisaillement à la solution exacte. Lorsqu'on applique la FSDT aux poutres - plaques composites, la difficulté à évaluer précisément les facteurs de correction de cisaillement représente un inconvénient. Pour les plaques sandwich, Yu [63] a donné une analyse précise du coefficient de correction de cisaillement « k_s » en comparant les fréquences fondamentales obtenues par la théorie de l'élasticité et par le modèle FSDT de la structure. Il a été démontré que pour une plaque sandwich typique, la valeur de ce facteur se rapproche de l'unité. Chow [64] a adopté une procédure basée sur la comparaison des énergies de déformation de cisaillement pour obtenir le coefficient de correction de cisaillement d'un stratifié orthotrope symétrique. Cette procédure a été étendue par Whitney [65] aux stratifiés orthotropes non symétriques. Et la précision de la méthode a été démontrée en comparant la solution de flexion statique pour diverses plaques stratifiées aux

solutions obtenues en satisfaisant la théorie exacte de l'élasticité dans chaque pli ainsi qu'aux conditions de continuité de l'interface. De plus, Whitney [66] a dérivé une expression pour le coefficient «ks» en considérant la flexion cylindrique autour de la longueur et de la largeur de la plaque, et des valeurs discrètes de facteurs de correction de cisaillement ont été présentées pour les plaques stratifiées symétriques/asymétriques et les plaques sandwich. L'auteur a discuté de la variation du coefficient de correction « ks» en fonction du nombre de couches du stratifié, et il a été démontré que ce facteur ne rapproche pas de la valeur classique pour les plaques homogènes lorsque le nombre de couches augmente. Des procédures de prédiction-correction ont été proposées par Noor et al [67, 68] Pour corriger les coefficients de correction « ks» en utilisant le processus d'itération. Les facteurs de correction de cisaillement obtenus par cette méthode dépendent des conditions aux limites, de la géométrie de la plaque et des conditions de chargement, et, par conséquent, ils ne peuvent pas être directement appliqués à d'autres configurations de plaques.

$$K_s = \frac{\int \tau_{xz \text{ réel}} \gamma_{xz} dv}{\tau_{xz} \gamma_{xz} dv} \quad (\text{II.8})$$

(coefficients sont déterminés en fonction de la géométrie spécifique de la poutre étudiée)

Pour de nombreuses applications des FGM dans les structures des poutres-plaques, le facteur de correction de cisaillement est supposé constant et égal à 5/6 (pour une section rectangulaire) et 2/3 (pour une section Circulaire). Cependant, Cette valeur n'est pas appropriée pour les analyses des plaques FG en raison de la variation continue des propriétés des matériaux [69] . Efraim et Eisenberger [70] ont proposé une formule pour le facteur de correction de cisaillement en fonction du coefficient de Poisson et des fractions volumiques des deux gradients dans une plaque FG. De plus, Nguyen et al. [71] ont déterminé les coefficients de correction « ks» pour les FGM en comparant les énergies de déformation des contraintes de cisaillement moyennes à celles obtenues par l'équilibre. Ils ont supposé une flexion cylindrique autour de l'axe y et ont négligé l'effet des termes faibles sur les contraintes de cisaillement. Les auteurs ont démontré que les facteurs de correction de cisaillement pour les plaques FG ne sont pas les mêmes que pour les plaques homogènes. En fait, ils ont montré que le facteur de correction de cisaillement dépend du rapport entre les modules d'élasticité des constituants et de la distribution des matériaux à travers les modèles. De plus, Nguyen et al. [72] ont identifié les facteurs de correction de cisaillement pour les modèles FSDT composés de FGMs en utilisant une méthode d'équivalence énergétique. Une nouvelle formule pour les facteurs de correction de cisaillement, utilisée dans la théorie des plaques de Mindlin, est obtenue pour les plaques FG par Hosseini-Hashemi et al [73] .

En outre, pour éviter les difficultés liées à la correction du cisaillement, des théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé pour les poutres ont été développées.

II.4.3 Modèle de poutre basé sur la théorie de déformation en cisaillement d'ordre élevé (HSDT –High Shear deformation Theory)

Pour surmonter les limitations du CBT et du FSDT (c'est-à-dire pour obtenir la variation réaliste des contraintes et des déformations par cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la poutre et éviter l'utilisation des facteurs de correction de cisaillement « ks »), plusieurs théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé ont été développées [74-75]. Ces modèles sont basés sur l'hypothèse d'une variation non linéaire des contraintes à travers l'épaisseur Figure II. 8. La distribution des champs de déplacement est également non linéaire selon l'épaisseur de la poutre. Cette théorie est plus précise que la théorie du premier ordre puisqu'elle introduit une fonction qui tient compte du phénomène de « gauchissement ». Cette fonction est conçue pour satisfaire les conditions aux limites sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre, permettant ainsi une meilleure correspondance entre les modèles structuraux et les analyses élastiques en trois dimensions. Les postulats de base de l'élaboration des théories d'ordre supérieur stipulent que les sections planes perpendiculaires à l'axe central ne demeurent pas nécessairement planes et perpendiculaires à l'axe central lors de la déformation (Figure II.7). Ce phénomène apparaît lorsque la section transversale de la poutre perd sa planéité, comme illustré dans la Figure II.9 [57] . La fonction $f(z)$ représente le gauchissement et sa dérivée $f'(z)$ le cisaillement.

Ces théories sont bien adaptées à la modélisation du comportement des plaques ou des poutres épaisses , où la déformation transversale joue un rôle important. La plupart de ces modèles sont basés sur le développement en série de Taylor des champs de déplacement pour approcher la théorie 3D [76] . Le déplacement est donc supposé être sous la forme suivante :

$$u_i(x, y, z) = u_i(x, y) + z\phi_i^{(1)}(x, y) + z^2\phi_i^{(2)}(x, y) + \dots + z^j\phi_i^{(j)}(x, y) \quad (\text{II.9})$$

Où $i = 1, 2, 3$, et j définit l'ordre utilisé dans la théorie.

La théorie du premier ordre ou théorie de Timoshenko, Reissner-Mindlin, correspond au développement en série de Taylor jusqu'à l'ordre $j=1$ et $\phi_3^{(1)} = 0$. Dans le cas où un modèle de premier ordre ne permet pas d'approcher correctement un problème donné, il sera nécessaire de passer à un modèle d'ordre supérieur (2ème ordre, 3ème ordre...etc.), dans le développement en série des déplacements.

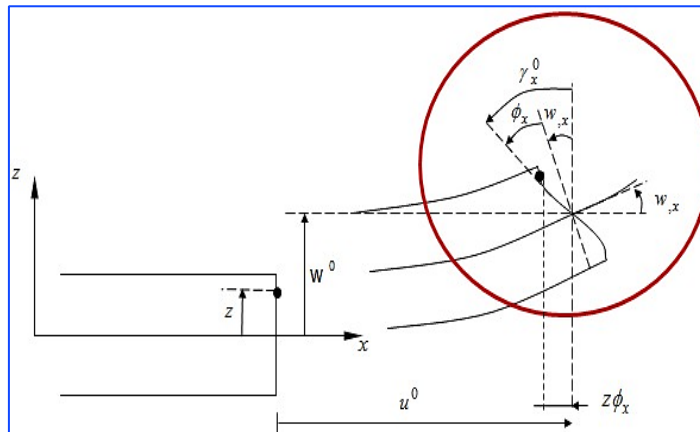


Figure II.7 : Cinématique de la théorie d'ordre élevé

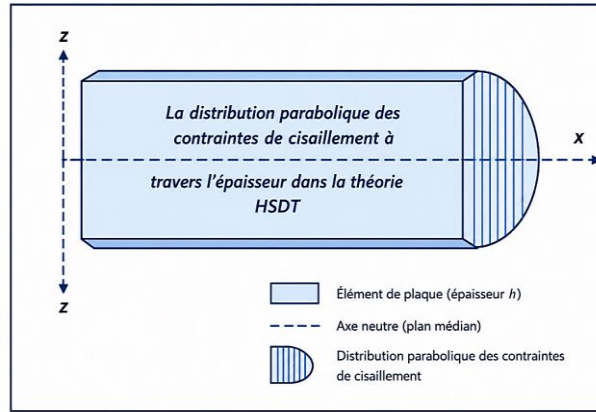


Figure II. 8 : La distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur dans la théorie HSDT

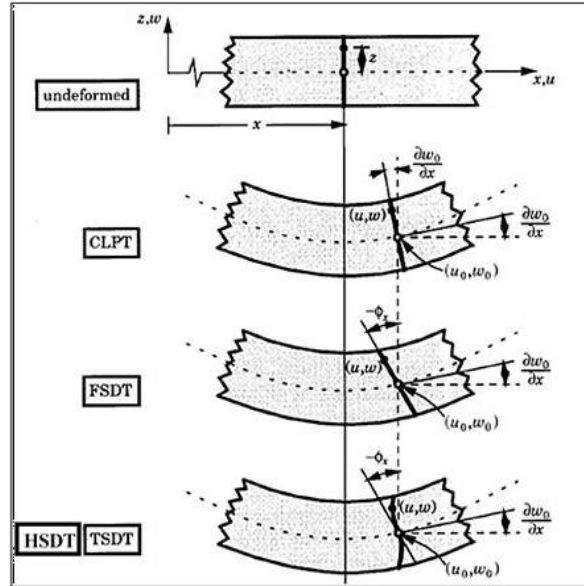


Figure II. 9 : Géométrie non déformée et déformée d'une poutre selon le CBT, FSDT et HSDT [57]

Les théories de déformation par cisaillement du second ordre (SCSDT) [77] donnent des résultats légèrement meilleurs que ceux du FSDT, mais souffrent des mêmes inconvénients à savoir qu'elles nécessitent des facteurs de correction « ks ». Le champ de déplacement de ces théories peut généralement être décrit comme suit :

$$u(x, z) = u_0(x, z) + z\phi_x(x, z) + z^2\psi_x(x, z) \quad (\text{II.10a})$$

$$w(x, z) = w_0(x, z) + z\phi_z(x, z) + z^2\psi_z(x, z) \quad (\text{II.10b})$$

Où les paramètres ψ_x , ψ_z sont des fonctions du second ordre.

Plusieurs théories de déformation par cisaillement du troisième ordre (TSDT), également connues sous le nom de théorie de déformation parabolique du cisaillement, ont

été proposées par de nombreux chercheurs [10678-79]. Le champ de déplacement du TSDT de Reddy [108] est donné par :

$$u(x, z) = u_0(x, z) + z\phi_x(x, z) + z^2\psi_x(x, z) + z^3\zeta_x(x, z) \quad (\text{II.11a})$$

$$w(x, z) = w_0(x, z) \quad (\text{II.11b})$$

Où les paramètres ψ_x, ζ_x sont des fonctions d'ordre élevé.

Avec l'augmentation de l'ordre d'expansion, le nombre de paramètres supplémentaires augmente, ce qui est souvent difficile à interpréter. Des simplifications ont été faites pour réduire les paramètres de déplacement. Ces simplifications consistent à raccourcir les derniers termes de la série de Taylor en introduisant une « fonction de cisaillement ». Suite à ces simplifications, la forme du champ de déplacement est proposée comme suit :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z)\theta_x(x) \quad (\text{II.12a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (\text{II.12b})$$

Où $f(z)$ est la fonction de cisaillement qui détermine la distribution des contraintes et des déformations de cisaillement transversal à travers l'épaisseur de la poutre h , et

$\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x$, avec ϕ_x désigne la rotation autour de l'axe y .

Selon l'équation (2.9), le champ de déplacement du CBT est obtenu en fixant $f(z) = 0$, et celui du FSDT est obtenu en fixant $f(z) = z$. De plus, le champ de déplacement du TSDT de Reddy [57, 79] est obtenu en utilisant la fonction suivante.

$$f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^2} \quad (\text{II.13})$$

Cette théorie permet une distribution parabolique de la contrainte de cisaillement transversal et satisfait les conditions de surface sans contrainte de cisaillement sur les surfaces supérieure et inférieure de la poutre (c'est-à-dire $f'(z) = 0$ pour $z = \pm h/2$). Elle fournit ainsi une bonne approximation des contraintes de cisaillement transversal par rapport à la solution de l'élasticité tridimensionnelle. Selon l'expression de la frontière de cisaillement $f(z)$, quelques modèles d'ordre supérieur se sont distingués dans la littérature :

Une HSDT différente a été proposée par Touratier [80], basée sur une fonction trigonométrique sinusoïdale, appelée **la théorie de déformation en cisaillement sinusoïdal (SSDT)**. Cette théorie est un exemple fondamental de la famille des HSDT trigonométriques et est mise en œuvre en définissant :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (\text{II.14})$$

Les contraintes de cisaillement transversal déterminées par le modèle sinus prennent une forme cosinusoidale dans l'épaisseur de la poutre. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

Une théorie de déformation en cisaillement hyperbolique (HSDT) a été proposée par Soldatos [81], elle est obtenue en prenant :

$$f(z) = h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - z \cosh \frac{1}{2} \quad (\text{II.15})$$

La théorie de déformation en cisaillement exponentiel (ESDT) développée par Karama et al. [82] est obtenue en prenant :

$$f(z) = ze^{-2(z/h)^2} \quad (\text{II.16})$$

Les Figures suivantes présentent la variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur et la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$, en fonction de l'épaisseur de la poutre.

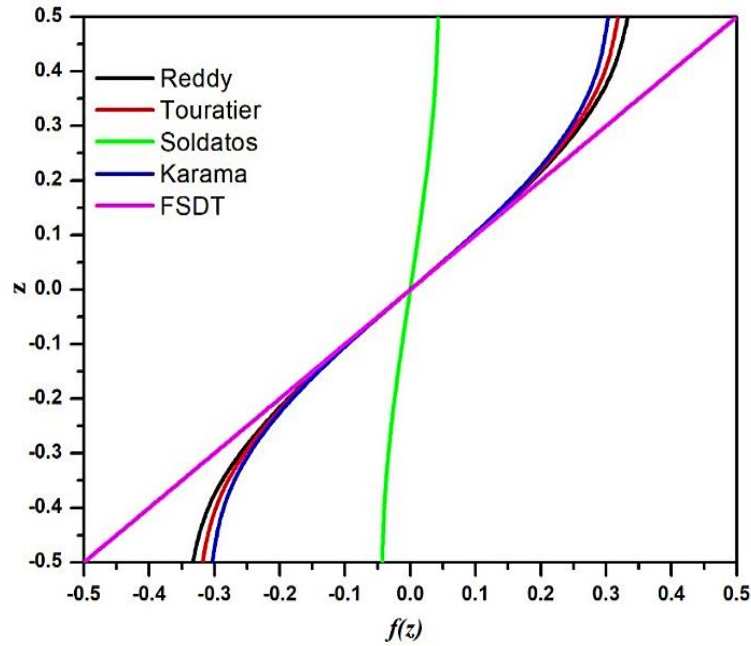


Figure II. 10 : Variation de la fonction de forme $f(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur.

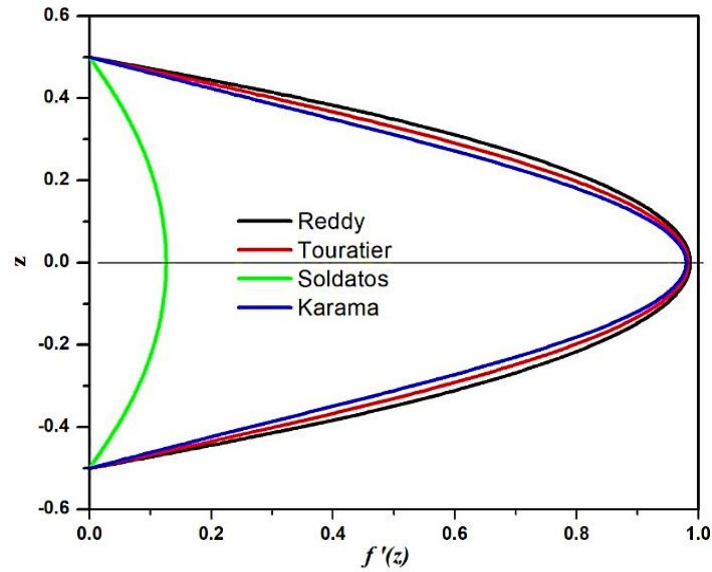


Figure II. 11 : Variation de la dérivée de la fonction de forme $f'(z)$ des différents modèles en fonction de l'épaisseur

II.5. Modèle de poutre avancé en cisaillement d'ordre élevé (RHSdT)

Le modèle de poutre basé sur la théorie raffinée de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (RHSdT) s'appuie sur la décomposition du déplacement transversal en deux parties, une partie liée à la flexion et une autre au cisaillement. Cette théorie a été initiée pour la première fois par le chercheur Shimpi [115], dans le but d'étudier les plaques isotropes et de réduire le nombre total de variables par rapport aux théories d'ordre supérieur existantes. Contrairement aux autres théories, la RHSdT n'a pas besoin de facteur de correction de cisaillement et fournit une distribution parabolique de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre. En outre, cette théorie présente plusieurs similarités avec la théorie des poutres classique (CBT). Plusieurs chercheurs ont confirmé la validité de cette théorie. Par exemple, Thai et Vo [140] ont appliqué cette théorie pour étudier la flexion et la vibration libre des poutres FGM basées sur plusieurs théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Nguyen et Nguyen [147] ont utilisé cette théorie dans l'analyse statique, dynamique et du flambage des poutres sandwichs en FGM. Ces études ont montré que la RHSdT est une approche efficace et précise pour modéliser les structures en poutre avec des propriétés variées.

Sur la base de cette théorie, le champ de déplacement est écrit comme suit :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_b(x)}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s(x)}{\partial x} \quad (\text{II.17a})$$

$$w(x, z) = w_b(x) + w_s(x) \quad (\text{II.17b})$$

$u_0(x, t)$: représentent l'inconnues de déplacements axial au niveau de l'axe neutre.

$w_b(x,t)$, $w_s(x,t)$: représentent les inconnues de déplacements transversal; dus à la flexion et au cisaillement, respectivement.

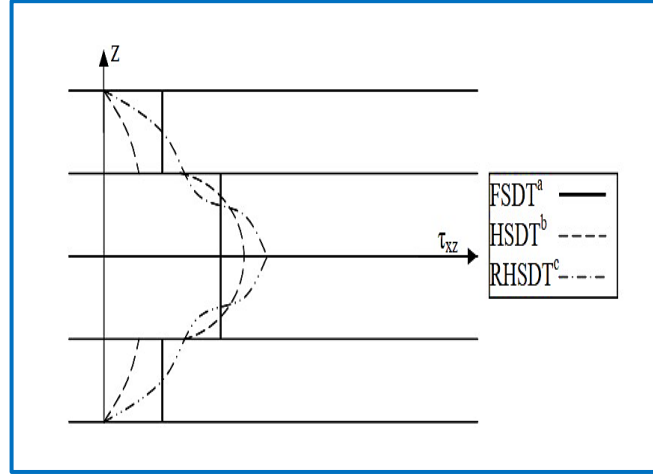


Figure II. 12 : Distribution des contraintes de cisaillement selon trois théories a : FSDT (l'effet de cisaillement d'ordre un). b : HSDT (l'effet de cisaillement d'ordre élevé). c : RHSDT (l'effet de cisaillement d'ordre élevé par raffinement)

II.7. Modèle de poutre basé sur la théorie Quasi-3D:

Même si les théories de déformation en cisaillement d'ordre supérieur ont livré de bons résultats dans l'analyse des poutres relativement épaisses, elles omettent entièrement l'effet d'étirement de l'épaisseur de la poutre (**en anglais stretching effect c'est-à-dire $\varepsilon_z = 0$**) (Figure II. 13), ce qui peut significativement influencer la précision des résultats. Pour pallier à ce problème et optimiser la précision, la théorie de déformation quasi-3D a été introduite. Cette méthode de modélisation des poutres prend en compte les effets de la déformation de cisaillement transversal sans recourir à des calculs coûteux liés à la modélisation en trois dimensions. Cette théorie repose sur une approche multicouche, chaque couche étant modélisée comme une poutre mince. Les couches sont interconnectées par des conditions de continuité adéquates, ce qui permet une représentation précise de la déformation de cisaillement transversal dans la poutre. En effet, dans la théorie quasi-3D, le déplacement transversal est subdivisé en trois composantes distinctes : la flexion, le cisaillement et l'effet d'étirement de l'épaisseur de la poutre.

La théorie quasi-3D de déformation est donc plus précise que les théories basées sur des modèles monocouches équivalentes, car elle prend en compte les effets de cisaillement transversal, qui peuvent avoir une influence significative sur le comportement global de la poutre épaisse et multicouche. Cette méthode est également plus rapide et moins coûteuse que la modélisation tridimensionnelle complète, tout en restant suffisamment précise pour de nombreuses applications industrielles.

Le champ de déplacement de la théorie quasi-3D FSDT est donné ci-dessous par :

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + f(z) \varphi_x(x) \quad (\text{II.18a})$$

$$w(x, z) = w_0(x) + g(z) \varphi_z(x) \quad (\text{II.18b})$$

Où u_0 , w_0 , φ_x et φ_z sont les quatre déplacements inconnus du plan médian de la poutre. Et $g(z)$ et $f(z)$ sont des fonctions de cisaillement.

$g(z)$: est la fonction de cisaillement transverse dus au l'effet d'étirement de l'épaisseur de la

poutre, avec : $g(z) = \frac{df(z)}{dz}$

Plusieurs travaux ont effectuées sur ce type de théorie tel que Belabed et al (Belabed, 2014) a été développée une théorie de la déformation normale et du cisaillement d'ordre supérieur simple et efficace pour la vibration statique et libre des plaques FG en utilisant le schéma d'homogénéisation de Mori-Tanaka. Mantari (Mantari, 2014) a mis au point une théorie quasi-3D à quatre variables inconnues, qui intègre à la fois l'effet de cisaillement et l'effet d'étirement du déplacement transversal grâce à une fonction hyperbolique. Parallèlement, Bourada et al (Bourada, 2015) ont élaboré une nouvelle théorie trigonométrique du cisaillement et des déformations normales pour les poutres fonctionnellement gradées (FG). Les conclusions de ces recherches ont démontré que la théorie de déformation quasi-3D est une approche efficace pour modéliser les poutres épaisses et multicouches avec un niveau de précision satisfaisant tout en réduisant les temps de calcul en comparaison avec les modèles en trois dimensions.

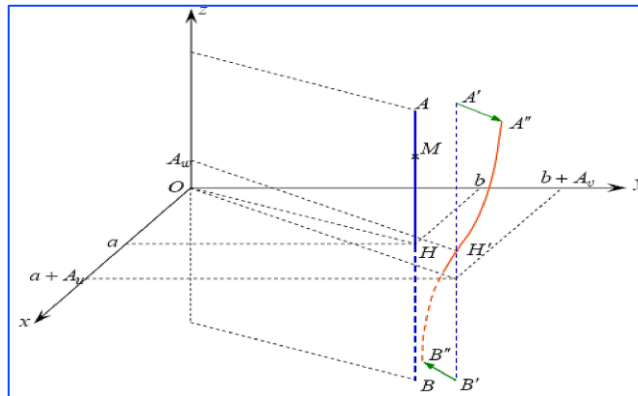


Figure II. 13: Présentation de l'effet de l'étirement à travers l'épaisseur

II.8. Études de recherche rapportées sur les poutres FG

En raison de leur efficacité structurelle inhérente, il y a eu un grand intérêt pour l'analyse des structures fabriquées à partir de matériaux composites à gradient fonctionnel (FGMs). Dans cette section, nous avons cherché de fournir une revue des travaux réalisés à ce jour pour l'analyse des poutres FG. La revue est principalement axée sur l'analyse statique, vibratoire et de flambage des poutres FG monocouches et sandwich. L'objectif ici est de montrer l'étendue du champ de recherche dans le contexte des FGMs et qu'il reste encore beaucoup à faire dans ce domaine de recherche.

II.8.1. Analyse statique des poutres FG

La compréhension du comportement statique des poutres FG est l'un des problèmes les plus importants pour la conception de ces types de structures. Par conséquent, plusieurs chercheurs se sont consacrés à l'étude du comportement statique des poutres FG monocouches et sandwich en utilisant différentes théories de poutres ainsi que diverses méthodes analytiques et numériques. Quelques-uns des articles sélectionnés dans la littérature sont présentés dans cette section.

Dans le cas de l'analyse de flexion des poutres FG, Sankar [83] a proposé une solution d'élasticité pour calculer les déplacements, les contraintes normales et tangentielles, ainsi que le moment de flexion des poutres FG soumises à des charges transversales. Une loi de distribution exponentielle a été utilisée pour décrire les variations des propriétés des matériaux à travers l'épaisseur de la poutre. Les équations du mouvement des poutres FG ont été dérivées sur la base de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Murin et Kutis [120] ont introduit un nouvel élément fini de poutre Euler-Bernoulli 3D pour l'analyse des poutres avec une variation graduelle et continue à travers la section transversale. Un nouvel élément de poutre basé sur la théorie du premier ordre (la théorie de Timoshenko) a été développé pour étudier le comportement élastique des poutres FGM par Chakraborty et al [84,85]. Ils ont employé la fonction de loi de puissance et la fonction exponentielle pour décrire la distribution des propriétés matérielles des structures FGM. Kadoli et al [86] ont proposé un modèle précis d'élément fini basé sur une approximation de déplacement axial de troisième ordre et un déplacement transversal constant pour l'analyse statique des poutres FGM en métal-céramique soumises à une charge uniformément répartie dans un environnement thermique. La fraction volumique des composants était supposée varier selon une fonction de loi de puissance. Shi et al [87] ont présenté l'élément fini quasi-conforme pour l'analyse de flexion des poutres composites à l'aide des théories d'ordre élevé. Kutis et al [88] ont présenté une procédure d'éléments finis pour modéliser une poutre FGM avec une variation spatiale des propriétés matérielles. Pindera et Dunn [89] ont évalué la théorie d'ordre élevé en effectuant une analyse détaillée des éléments finis en FGM. Ils ont constaté que les résultats (HOTFGM : Higher-Order Theory for Functionally Graded Materials) coïncident bien avec les résultats des éléments finis. Aussi, Reddy [90] a conçu un modèle d'élément fini super convergent pour les problèmes statiques des poutres de Timoshenko.

Huang et al [91] ont fourni une solution analytique basée sur des formulations élémentaires en utilisant l'hypothèse de contrainte plane. L'équation de compatibilité et les conditions aux limites ont été appliquées pour déterminer la fonction de contrainte avant de l'utilisées pour obtenir les solutions des contraintes normales et tangentielles, du moment de flexion et de déplacement. Ying et al [92] ont présenté la solution exacte de l'analyse de flexion et de vibration libre des poutres FG reposant sur une fondation élastique de type Winkler-Pasternak. Les paramètres importants tels que l'indice de gradient, les rapports d'aspects et les paramètres de la fondation ont été pris en compte. Dans l'étude de Lu et al [93], les propriétés des matériaux des poutres FG étaient supposées varier de manière exponentielle le long de l'épaisseur et des directions longitudinales. Les poutres FG

bidirectionnelles ont été choisies pour analyser la flexion sous un environnement thermique en utilisant la méthode de quadrature différentielle basée sur l'espace d'état. Selon l'étude, il a été constaté que la réduction des contraintes thermiques peut être obtenue en sélectionnant des matériaux appropriés, dont les propriétés face aux charges thermiques sont faibles et distribuées uniformément. Dans l'étude de Benatta et al [94], les effets de gauchissement et de déformation par cisaillement des poutres courtes à gradient fonctionnel sous flexion à trois points ont été étudiés. Dans cette étude, des théories de flexion d'ordre élevé ont été utilisées pour formuler les équations gouvernantes basées sur le principe du travail virtuel. Dans certaines situations réalistes, les poutres soumises à des chargements de grande amplitude présentent souvent des comportements non linéaires dus à la géométrie et aux matériaux. Kang et Li [95] ont étudié le comportement mécanique d'une poutre en porte-à-faux en matériau à gradient fonctionnel non linéaire sous l'action d'une force d'extrémité en utilisant des théories de petites et grandes déformations.

D'après la revue de littérature précédente, la majorité des chercheurs ont utilisé des modèles analytiques pour étudier le comportement des poutres sandwich en FG. Cependant, les solutions analytiques (2D/3D) étaient limitées à des géométries simples, certains types de gradation des propriétés des matériaux (par exemple, une distribution exponentielle ou en loi de puissance), des cas de chargement spécifiques et des types de conditions aux limites particulières [[96], [97]]. Frostig et al [[98], [99]] ont développé une nouvelle théorie d'ordre élevé basée sur des principes variationnels pour analyser le comportement en flexion d'une poutre sandwich avec un noyau flexible en transversalité. Apetre et al. [100] ont réalisé une étude comparative entre la FOSDT et la HOSDT (troisième ordre) pour l'analyse de flexion des poutres sandwich en FGM. Yarasca et al. [101] ont réalisé une analyse de flexion des poutres sandwich en FGM. Karamanli [102] a réalisé une analyse de flexion des poutres sandwich en FGM bidirectionnelles. Nguyen et Nguyen [103] ont proposé une théorie de déformation par cisaillement inverse hyperbolique pour l'analyse statique des poutres sandwich en FGM à loi de puissance. Li et al. [104] ont proposé une nouvelle théorie de déformation par cisaillement d'ordre élevé basée sur les conditions d'équilibre et un élément de poutre mixte pour l'analyse statique des poutres sandwich en FGM simplement appuyées, encastrées et en porte-à-faux. Kurtaran [105] a utilisé la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQM) pour étudier le comportement en flexion et transitoire d'une poutre courbée FG modérément épaisse. Basée sur la méthode itérative variationnelle, Eroglu [106] a étudié la grande déformation des poutres planes courbes en FG. La réponse en flexion d'une poutre multicouche courbée avec une courbure constante a été étudiée par Thurnherr et al. [107] en utilisant un modèle de poutre d'ordre élevé. Plus récemment, Sayyad et Avhad [108] ont étudié les poutres sandwich en FGM en utilisant la théorie de déformation par cisaillement hyperbolique (HSDT) en négligeant les effets de déformation transversale. Koutoati et al [109] ont réalisé une analyse des poutres sandwich en FGM en utilisant la HOSDT, dans laquelle la contrainte normale transversale a été négligée lors de la formulation. Un élément fini à deux nœuds avec huit degrés de liberté par nœud a été utilisé pour l'analyse. Avhad et Sayyad [110], ainsi que Sayyad et Ghugal [111] ont réalisé

une analyse de flexion des poutres courbées sandwich en FGM en utilisant la solution de Navier.

De nombreux chercheurs ont étudié le comportement en flexion des structures FG exposées à des charges thermo-mécaniques non linéaires. Ching et Chen [112] ont étudié la réponse thermo-mécanique d'une poutre composite FG élastique linéaire soumise à des charges thermiques en utilisant la méthode locale de Petrov-Galerkin sans maillage. Ils ont également employé des modèles micromécaniques pour évaluer les propriétés dépendantes de la température. L'analyse a porté sur l'influence de la variation de température sur ces propriétés et sur les réponses thermo-mécaniques des poutres FG. Arbind et al. [113] ont établi une théorie actualisée comprenant la théorie du troisième ordre de Reddy, la théorie d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko comme cas particuliers. Selon cette théorie, une méthodologie non linéaire dépendante de la microstructure, basée sur la théorie des contraintes modifiées avec des déformations non linéaires de Von Kármán, a été développée pour étudier le déplacement transversal maximal de la poutre FG. Zhou et al. [114] ont proposé des analyses thermiques de poutres FG 2D avec une source de chaleur interne en utilisant la méthode purement sans maillage (meshless weighted least squares MWLS). La méthode de Mori-Tanaka a également été utilisée pour estimer les propriétés matérielles effectives indépendantes de la température. Akbas [115] a analysé le problème de la charge mobile d'une poutre fonctionnellement graduée axialement soumise à une augmentation de température en utilisant la première théorie de la poutre de cisaillement. Les matériaux dépendants de la température varient le long de la direction axiale. L'influence de l'augmentation de la température, de la graduation des matériaux et de la vitesse de la charge mobile sur la réponse dynamique est discutée en détail.

D'autres études sur l'analyse vibratoire des poutres FG monocouches et sandwich sont présentées dans la section suivante.

II.8.2 Analyse vibratoire des poutre FG

Dans cette section, une brève revue des différentes théories de déformation par cisaillement et des techniques d'analyse appliquées à l'analyse des vibrations des poutres FG monocouches et sandwich est présentée. Le modèle de poutre le plus ancien est celui de la théorie d'Euler-Bernoulli, largement connu sous le nom de Théorie classique de la poutre (CBT).

Sur la base de la théorie d'Euler-Bernoulli, certains auteurs ont étudié la vibration des poutres FGM par différentes approches analytiques et numériques. Alshorbagy et al [116] ont étudié la vibration libre d'une poutre FGM par la méthode des éléments finis. Il a été montré que ce modèle est efficace pour comparer la poutre conique à largeur ou profondeur variable linéairement avec les poutres graduées de non-homogénéité polynomiale particulière. Şimşek et Kocatürk [117] ont étudié la réponse dynamique d'une poutre FGM sous une charge concentrée, en analysant les effets du gradient de matériau, de la vitesse de la charge harmonique mobile et de la fréquence d'excitation. Le même problème a également été étudié par Khalili et al [118] en utilisant une méthode mixte (Ritz-différentielle en quadrature). Pradhan et Murmu [119] ont présenté une recherche numérique sur la

vibration thermomécanique d'une poutre sandwich simplement appuyée avec deux couches de surface en FGM, reposant sur une fondation élastique variable axialement et soumise à une température non uniforme transversalement en utilisant la méthode de quadrature différentielle (DQM). En supposant que les propriétés du matériau changent dans la direction de l'épaisseur. Plus récemment, Shahba et Rajasekaran [120] ont utilisé la méthode des éléments de transformation différentielle (DTEM) et la méthode des éléments de quadrature différentielle (DQEM) d'ordre inférieur pour déterminer les fréquences transversales et longitudinales des poutres FGM d'Euler-Bernoulli. Les résultats montrent que la DTEM est rapide par rapport à la DTM (méthode de transformation différentielle) et que les résultats obtenus sont plus précis. Liu et Shu [121] ont présenté une solution analytique pour la vibration libre de poutres avec les propriétés matérielles changeant continuellement à travers l'épaisseur selon une fonction exponentielle (E-FGM) avec une simple délamination. Pour surmonter la limitation de la CBT, de nombreuses théories de déformation par cisaillement ont été proposées. La théorie de la poutre de Timoshenko, connue sous le nom de première théorie de la poutre (FOBT), qui est le modèle le plus simple prenant en compte l'effet de cisaillement et attire beaucoup l'attention des chercheurs.

En utilisant la théorie de la déformation de cisaillement du premier ordre, d'autres chercheurs ont étudié la réponse dynamique des poutres FGM. Aydogdu et al [122] ont présenté la solution de Navier pour les fréquences naturelles des poutres FG. Su et Banerjee [123, 124] ont développé la méthode de rigidité dynamique pour l'analyse des vibrations libres des poutres FG en utilisant la CBT et la FOBT (First-order beam theory). Sina et al [125] ont utilisé une nouvelle théorie des poutres différente de la théorie traditionnelle de déformation de cisaillement du premier ordre pour analyser la vibration libre des poutres FGM, en introduisant une nouvelle fonction permettant de découpler les équations gouvernantes. Li [126] a présenté des solutions analytiques pour la flexion et la vibration libre des poutres FGM. Paradhan et Chakraverty [127] ont utilisé la méthode de Rayleigh-Ritz pour examiner la vibration libre des poutres d'Euler et Timoshenko en FGM. L'objectif de ce travail était d'étudier les effets des fractions volumiques des constituantes, des rapports d'élancement et des théories des poutres sur les fréquences propres. La vibration libre et forcée d'une poutre FGM stratifiée d'épaisseur variable sous contrainte thermique initiale a été étudiée par Xiang et Yang [128] en utilisant la méthode différentielle en quadrature (DQM). Shahba et al ont analysé la vibration libre des poutres coniques de Timoshenko en FGM. Les résultats montrent que la fréquence propre diminue avec l'augmentation du rapport de conicité. Li et al [129] ont également étudié la vibration libre des poutres FGM basée sur les théories des poutres classiques et du premier ordre. Pour surmonter certaines limitations, la théorie des poutres d'ordre supérieur (HOBT : Higher-order beam theory) a été développée pour analyser plus précisément le comportement des poutres sans utiliser de facteur de correction de cisaillement.

Afin d'obtenir une plus grande précision dans la prise en compte de la déformation de cisaillement transverse, des études sur la vibration libre des poutres FGM ont été effectuées sur la base de la théorie des poutres à déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Aydogdu et Taskin [130] ont étudié la vibration libre d'une poutre FGM simplement appuyée

et ont obtenu des fréquences naturelles en utilisant la méthode de la solution de Navier, basée sur les théories des poutres de déformation de cisaillement parabolique et exponentielle. Şimşek [131 , 132] a étudié les réponses dynamiques des poutres FGM basées sur différentes théories de déformation de cisaillement, dans lesquelles des équations de mouvement ont été dérivées en utilisant les équations de Lagrange. Mahi et al [133] ont analysé la vibration libre des poutres FGM avec des propriétés du matériau dépendant de la température. Les effets de la contrainte thermique initiale sur les fréquences naturelles ont également été discutés. Thai et Vo [134] ont présenté une solution analytique sous forme de séries trigonométriques pour la flexion statique et la vibration libre des poutres FGM simplement appuyées en utilisant diverses théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Des résultats numériques ont été fournis pour examiner les effets des différentes théories sur les réponses statiques et dynamiques. Plus récemment, Vo et al [135 , 136] ont étudié la flexion statique, le flambement et la vibration libre des poutres FGM en se basant sur la théorie de déformation de cisaillement raffiné en utilisant la méthode des éléments finis. Shen et Wang [137] ont réalisé des analyses géométriques non linéaires pour la vibration, la flexion et le flambement thermique des poutres FGM reposant sur une fondation élastique dans un environnement thermique basé sur la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur. Hadji et al [138] ont développé diverses théories des poutres de déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour la propagation des ondes dans des poutres FGM. Il a été discuté en détail de l'effet des distributions de fractions volumiques sur la propagation des ondes d'une poutre FGM. D'après les recherches de Fang et ses collègues [139] , il a été conclu que le paramètre d'échelle de longueur et la variation du gradient de matériau jouent un rôle essentiel dans la déformation des micropoutres FGM en rotation en fonction de leur taille. La réponse dynamique d'une poutre épaisse multicouche en FG sous un chargement dynamique général a été étudiée par Eltaher et Akbas [140] . Gupta et Chalak [141] ont étudié les comportements en flexion et en vibration libre de différentes poutres sandwich FGM en utilisant la théorie en zigzag d'ordre supérieur basée sur les éléments finis. Les lois sigmoïdales et de puissance ont été utilisées pour représenter la gradation des matériaux le long de la direction d'épaisseur de la poutre. Du et al [142] ont utilisé la méthode des éléments finis à frontière échelonnée pour examiner les réponses en vibration libre, en flexion et en flambage des poutres en matériau à gradient fonctionnel. L'efficacité de calcul a été améliorée en utilisant un élément spectral d'ordre supérieur discrétisé.

II.8.3 Analyse du flambage des poutres FG

Le comportement de flambage est l'un des facteurs de conception critiques pour les poutres soumises à des efforts de compression. De nombreuses recherches ont été menées sur l'analyse du flambage des poutres isotropes et sandwichs FG afin de prédire les charges critiques de flambage sous diverses conditions aux limites et de chargement.

En raison de l'importance et de l'étendue des applications techniques des matériaux fonctionnellement gradués, plusieurs chercheurs ont abordé le problème du flambement thermique des poutres à gradations fonctionnelles. Shahsiah et al [143] ont proposé une solution analytique pour la stabilité des poutres à gradient fonctionnel soumises à une

température uniforme et axiale en utilisant la méthode variationnelle, basée sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Kiani et Eslami [144,145] ont présenté une solution analytique pour le flambement thermique de poutres à gradient fonctionnel sous trois types de charges thermiques. Ils ont également utilisé la théorie des poutres de Timoshenko pour étudier le flambement des poutres à gradations fonctionnelles sous chargement thermomécanique avec différents types de conditions aux limites. Kiani et al [146,147] ont analysé le problème du flambement des poutres FGM avec des couches piézoélectriques qui sont soumises à une charge thermique et à une tension constante en utilisant la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. L'analyse du flambement des poutres FGM de Timoshenko avec ou sans couches piézoélectriques soumises à une charge thermique et à une tension constante a également été rapportée par le même auteur. Fu et al [148] ont utilisé la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli et le concept de surface neutre physique pour étudier le flambement, la vibration libre et la stabilité dynamique des poutres FGM piézoélectriques dans un environnement thermique. Wattanasakulpong et al [149] ont utilisé la théorie de la déformation de cisaillement du troisième ordre pour étudier le flambement thermique et la vibration des poutres FGM pour divers types de conditions d'extrémités immobiles, en tenant compte des propriétés des matériaux dépendantes et indépendantes de la température. Ghiasian et al [150] ont analysé le flambement statique et dynamique de poutres FGM reposant sur une fondation élastique et soumises à une charge thermique uniforme et à une compression uniforme en tenant compte de l'imperfection initiale de la poutre. Le même auteur [151] a présenté une analyse du flambement dynamique non linéaire et de la sensibilité à l'imperfection d'une poutre FGM soumise à une température uniforme et reposante sur une fondation élastique. Tounsi et al [152] ont développé une théorie des poutres d'ordre supérieur pour le flambement thermique des nanopoutres. She et al [153] ont présenté des solutions approximatives pour le flambement thermique des poutres FGM avec des actionneurs piézoélectriques basées sur le concept de surface neutre physique et la théorie de la déformation d'ordre élevé. Le même auteur [154] a examiné le flambement thermique d'une poutre FGM sous une température uniforme en utilisant une méthode de perturbation en deux étapes. Ebrahimi et Barati [155] ont utilisé la théorie des poutres d'ordre supérieur et la théorie de l'élasticité non locale d'Eringen pour analyser le flambement thermique des poutres FGM magnéto-électro-thermo-élastiques sous divers types de charges thermiques. Basées sur les théories d'Euler-Bernoulli, Timoshenko et diverses théories des poutres d'ordre supérieur.

Kahya et Turan [156] ont utilisé la méthode des éléments finis dans le cadre de la théorie des déformations de cisaillement du premier ordre (FOSDT) pour l'analyse du flambage de poutres sandwichs en FGM, où les degrés de liberté de l'élément dépendent du nombre de couches. Nguyen et al [157] ont introduit une nouvelle théorie de déformation par cisaillement qui répartit la contrainte de cisaillement transversale dans les poutres sandwichs en FGM de manière hyperbolique. Les résultats obtenus à travers cette nouvelle théorie prennent en compte la charge de flambement critique en considérant des paramètres tels que l'indice de loi de puissance, le rapport portée /profondeur et l'épaisseur de la peau à l'âme et correspondent à d'autres théories existantes, respectivement. Liu et al [158] ont utilisé la

théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur pour l'analyse du flambage de poutres sandwichs poreuses en matériaux composites à gradient fonctionnel soumises à des charges thermomécaniques. Les auteurs ont inclus le concept de plan neutre physique dans lequel les effets de couplage de flexion disparaissent pendant l'analyse. Al-Shujairi et Mollamahmutoglu [159] ont utilisé la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur basée sur la quadrature différentielle pour l'analyse du flambage de poutres sandwichs en matériaux composites à gradient fonctionnel. La théorie du gradient de contrainte non local a également été appliquée en conjonction avec la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Des chercheurs tels que Lanc et ses collègues [160] ont mené une étude sur le flambement des poutres en sandwichs en FGM en prenant en compte diverses conditions aux limites. Leurs résultats ont montré que la diminution de la charge critique de flambement critique dans toutes les conditions aux limites est directement liée au rapport d'épaisseur peau-cœur-peau de la poutre en caisson. En outre, la distribution des matériaux dans le volume d'une poutre en caisson joue un rôle important dans la charge la charge critique de flambement. Huang et al [161] ont étudié le flambement des poutres FGM axiales en utilisant la théorie de Timoshenko. Les résultats ont montré que la charge critique de flambement est influencée par le gradient et les paramètres géométriques de la poutre. Heydari et al [162] et Shafiei et Kazemi [163], à travers plusieurs recherches, ont constaté que l'effet de l'indice de puissance de la poutre poreuse FGM est plus important lorsqu'il varie dans la direction de l'axe plutôt que dans la direction de l'épaisseur. En outre, la charge de flambement non-dimensionnelle diminue avec l'augmentation de la fraction volumique. Enfin, Li et al [164] ont étudié le flambement des poutres à gradation fonctionnelle axiale en utilisant la théorie du gradient de déformation non locale. Ils ont constaté que la charge critique de flambement est directement liée au paramètre d'échelle de longueur et inversement liée au paramètre non local. De plus, en fonction du paramètre dépendant de la taille, les poutres FGM axiales peuvent produire un effet d'assouplissement ou de durcissement de la rigidité sur la charge critique de flambement. Dans leur étude, Nguyen et al [165] ont examiné le flambement latéral des poutres FGM à sections ouvertes. Les résultats de leur analyse ont montré que les paramètres de flambement dépendent de la variation de l'indice de fraction volumique. Ils ont également expliqué que le rapport du moment final et le noyau céramique ont un effet important sur la capacité de flambement. Babaei et al [166] ont réalisé l'analyse du flambage thermique et post-flambement de poutres P-FGM géométriquement imparfaites en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre troisième (TBT) et les théories du plan neutre physique par une méthode de perturbation en deux étapes. Les caractéristiques de vibration thermomécanique des poutres FGM en matériau poreux soumises à diverses charges thermiques ont été étudiées par Ebrahimi et Jafari [167] en utilisant la solution de Navier et la TBT. Mirjavadi et al [168] ont présenté une étude sur le comportement de flambement thermique de poutres poreuses micro-échelonnées FGM imparfaites en deux dimensions dans le cadre de la théorie classique des poutres et basée sur la méthode généralisée de quadrature différentielle. Ziane et al [169] ont prédit le flambement thermique des poutres en caisson en P-FGM par une méthode analytique et des hypothèses d'Euler-Bernoulli. Aria et al [170] ont proposé un modèle non local d'élément fini de Timoshenko pour étudier le

flambement thermo-élastique et le comportement vibratoire de nanopoutres en P-FGM incorporées dans la fondation de Pasternak.

II.9. Différents modèles de distributions hygrothermiques

Les structures fonctionnellement graduées sont conçues pour répondre de manière optimale aux contraintes mécaniques et environnementales dans des conditions complexes. Dans ce contexte, l'analyse hygrothermique des poutres fonctionnellement graduées joue un rôle essentiel pour prédire et comprendre leur comportement lorsqu'elles sont soumises simultanément à des gradients de température et à des variations d'humidité. En général, les propriétés des matériaux dans les FGM varient de manière continue à travers l'épaisseur de la poutre, tandis qu'elles restent homogènes dans le plan. Par conséquent, les variations de température et d'humidité sont généralement supposées se produire uniquement dans le sens de l'épaisseur. Ces variations peuvent être décrites à l'aide de divers modèles de distribution hygrothermiques, qui intègrent la variation progressive des propriétés des matériaux, telles que le module d'élasticité et le coefficient de dilatation thermique, la concentration d'humidité et la conductivité thermique, afin de minimiser les contraintes thermiques et hygroscopiques. Différentes approches, allant des formulations analytiques aux simulations numériques, ont été développées pour modéliser ces distributions avec précision.

Pour améliorer la précision dans la prédiction du comportement des matériaux fonctionnellement gradués (FGM) à haute température, les recommandations de Touloukian [171] préconisent l'utilisation de propriétés des matériaux dépendantes de la température, comme suit :

$$P_i(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (\text{II.19})$$

Où

$$T = T_0 + \Delta T(z) \quad (\text{II.20})$$

Où i = céramique, métal. $\Delta T(z)$ Le changement de température et T_0 est la température ambiante. $P_j (j = -1, 1, 0, 1, 2, 3)$ Sont les coefficients de température du matériau.

Le champ de température $T(x, y, z)$ peut être écrit sous la forme suivante.

$$T(x, y, z) = T(z)T_\Omega(x, z) \quad (\text{II.21})$$

Où $T_\Omega(x, z)$ est la distribution de température le long du domaine de surface Ω .

Certaines des modèles les plus utilisés dans la littérature sont discutés dans les sections suivantes :

II.9.1. Modèles de distribution polynomiale

Grace à des études récentes, le profil de température et la concentration d'humidité dans le sens de l'épaisseur a été défini en fonction de la description graduelle du champ de déplacement. Les termes d'ordre élevé du champ de déplacement sont également inclus pour

saisir l'effet de la distribution non linéaire. La forme polynomiale de la variation de température d'humidité à travers l'épaisseur de la plaque peut être exprimée par (Zenkour et al [172]) :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{1}{h} \Psi(z) T_3(x, y) \quad (\text{II.22a})$$

$$C(x, y, z) = C_1(x, y) + \frac{z}{h} C_2(x, y) + \frac{1}{h} \Psi(z) C_3(x, y) \quad (\text{II.22b})$$

Où T_1 , T_2 et T_3 sont les termes utilisés pour les charges thermiques, et C_1 , C_2 et C_3 sont les termes utilisés pour le changement de concentration en humidité. Les termes T_1 sont associés à une température constante, les termes T_2 à une température linéaire, et T_3 à une température non linéaire. Des notations similaires sont utilisées pour la concentration en humidité.

Où $\Psi(z)$ est une fonction de cisaillement transverse :

- Dans le cas d'une distribution de température sinusoïdale.

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right)$$

- $\Psi(z) = \frac{z}{h} \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right)$ Dans le cas d'une distribution de température cubique.
- $\Psi(z) = \frac{z}{h} e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}$ Dans le cas d'une distribution de température exponentielle.

Akbarzadeh et al. [173] a considéré la forme polynomiale du champ de température avec quatre variables de charge thermique basé sur la théorie de déformation de cisaillement de troisième ordre (TSDT) sous la forme suivante :

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \left(\frac{z}{h}\right)^2 T_3(x, y) + \left(\frac{z}{h}\right)^3 T_4(x, y) \quad (\text{II.23})$$

II.9.2. Modèles de distribution d'élévation hygrothermique

Les matériaux fonctionnellement gradués sont conçus pour résister à une forte élévation de température et d'humidité, de sorte que le changement de température et de l'humidité sera très différent des deux côtés des structures de FGM. Ce type de l'effets de l'élévation hygrothermiques ont été utilisé par plusieurs chercheurs en considérant différentes distributions hygrothermiques, uniforme, linéaire, et non linéaire à travers l'épaisseur. Chaque type de distribution hygrothermique est décrit avec précision ci-dessous :

❖ Distribution hygrothermique uniforme (UHR)

Dans le premier type, La température et l'humidité sont supposées uniformes dans la poutre et augmentent à partir d'une référence T_0 et C_0 . Ainsi, leurs valeurs actuelles de température et d'humidité sont :

$$T = T_0 + \Delta T \quad (\text{II.24a})$$

$$C = C_0 + \Delta C \quad (\text{II.24b})$$

Où T_0 et C_0 représentent respectivement la température et l'humidité de référence, supposées être situées à la surface inférieure de la poutre.

❖ Distribution hygrothermique linéaire (LHR)

Le deuxième type de distribution hygrothermique est linéaire et peut être présenté sous la forme suivante (Kiani et Eslami [174]) :

$$T(z) = (T_t - T_b) \left(\frac{2z+h}{2h} \right) + T_b \quad (\text{II.25a})$$

$$C(z) = (C_t - C_b) \left(\frac{2z+h}{2h} \right) + C_b \quad (\text{II.25b})$$

Où T_t et T_b représentent les températures, ainsi que C_t et C_b représentent les teneurs en humidité aux surfaces supérieure et inférieure de la poutre.

❖ Distribution hygrothermique non linéaire (NHR)

Dans ce cas, la distribution de température et d'humidité à travers l'épaisseur a été donnée selon les approches suivantes:

- Dans le premier cas, la température de l'humidité de la surface supérieure est (T_t, C_t) et on considère qu'elle varie de (T_t, C_t) à (T_b, C_b) dans laquelle la plaque se déforme, selon la variation de la loi de puissance à travers l'épaisseur, jusqu'à la l'hygrothermique de surface inférieure (T_b, C_b) dans laquelle la plaque se déforme. Par conséquent, l'augmentation d'hygrothermique à travers l'épaisseur est donnée par Zenkour [175] :

$$T(z) = \Delta T \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^\gamma + T_b \quad (\text{II.26a})$$

$$C(z) = \Delta C \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^\gamma + C_b \quad (\text{II.26b})$$

Où γ est l'exposant hygrothermique, $1 < \gamma < \infty$. L'élévation d'hygrothermique linéaire est obtenue comme un cas particulier en fixant $\gamma = 1$.

- Dans le second cas, l'équation de Fourier unidimensionnelle de la conduction thermique doit être résolu, Zhang [176] :

$$-\frac{d}{dz} \left[k(z, T) \frac{dT(z)}{dz} \right] = 0 \quad (\text{II.27})$$

En se basant sur les conditions thermiques continues entre les surfaces supérieure et inférieure, cela conduit à :

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{1}{k(z, T)} dz}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{k(z, T)} dz}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.28})$$

L'équation (2.26) est résolue à l'aide d'une approche d'expansion en série polynomiale :

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \frac{D_1(z)}{D_0(z)}, \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (\text{II.29a})$$

$$D_j(z) = \sum_{i=0}^r \left(\frac{k_m - k_c}{k_m} \right)^i \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h} \right)^{(in+1)j}}{in+1} \quad (\text{II.29b})$$

Où r représente le numéro des termes de la série.

- Dans le troisième cas, la température et l'humidité varient de manière non linéaire selon une loi sinusoïdale [177] comme suit :

$$T(z) = (T_t - T_b) \left[1 - \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right) \right] + T_b \quad (\text{II.30a})$$

$$C(z) = (C_t - C_b) \left[1 - \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2z+h}{2h} \right) \right] + C_b \quad (\text{II.30b})$$

II.10. Conclusion

Dans ce chapitre, les théories des poutres les plus couramment utilisées pour la modélisation et l'analyse des poutres FG ont été présentées. La théorie classique (CBT) est la plus ancienne et la plus simple disponible. Cependant, cette théorie néglige les effets de déformation transversale par cisaillement et prédit donc efficacement uniquement le comportement des poutres fines. La théorie de cisaillement du premier ordre (FSDBT) suppose un champ de déplacement transversal constant à travers l'épaisseur de la poutre. Les modèles basés sur cette théorie prédisent des contraintes de cisaillement transversales constantes à travers l'épaisseur. En réalité, les contraintes de cisaillement transversales sont paraboliques à travers l'épaisseur. Pour définir avec précision les contraintes transversales, un facteur de correction de cisaillement est nécessaire. Ce facteur dépend de divers paramètres tels que les conditions aux extrémités, les propriétés des matériaux, le profil d'épaisseur, etc. Dans le cas des théories de déformation par cisaillement d'ordre élevé HSDBT (PSDBT, SSDBT, ESDBT), le champ de déplacement en plan est développé comme

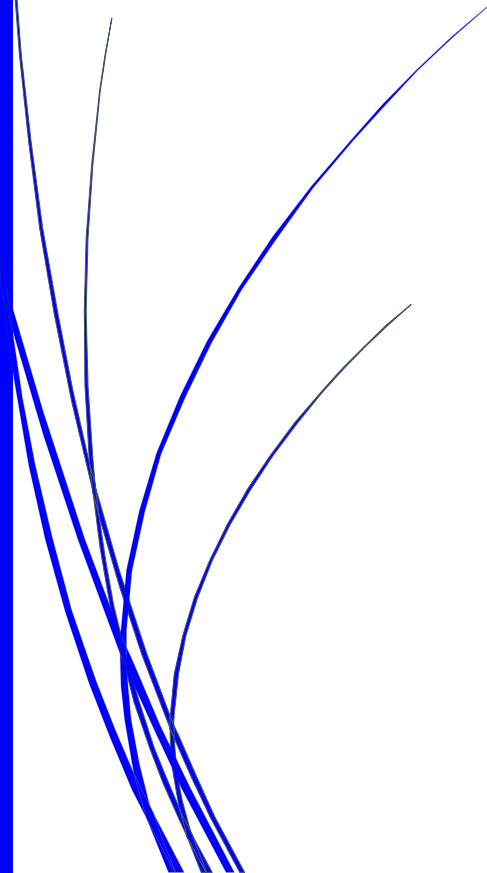
une variation d'ordre supérieur par rapport à la coordonnée d'épaisseur. En ce qui concerne la théorie de déformation de cisaillement quasi-3D, elle fera l'objet de la présente étude qui prend en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur pour analyser la flexion des différentes poutres sandwichs.

Nous avons présenté une revue des différentes recherches menées dans la littérature existante sur l'analyse statique, vibratoire et de flambage des poutres FG. Plusieurs théories et différentes méthodes analytiques et numériques ont été utilisées pour décrire le comportement des poutres FG, ainsi que différents modèles de distributions hygrothermiques (la température et l'humidité).

Suite à cette revue, on constate que les études réalisées à l'aide des méthodes numériques sur ce sujet sont encore moins nombreuses que celles menées analytiquement. La motivation derrière cette thèse est d'étudier les comportements statiques des poutres FG monocouches et sandwich dans un milieu hygro-thermo-mécanique à l'aide d'une méthode analytique basée sur une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi-3D.

Chapitre III

Analyse du Comportement Hygro- Thermo-Mécanique des Poutres Sandwich en Arc Fonctionnellement Gradué



Chapitre III :**Analyse du Comportement Hygro-Thermo-
Mécanique des Poutres Sandwich en Arc
Fonctionnellement Gradué****III.1. Introduction**

Les poutres sandwich en arc à gradient fonctionnel (FGM) représentent une innovation majeure en génie civil, alliant la performance géométrique de l'arc à la transition continue des propriétés matérielles. Contrairement aux multicouches classiques, l'absence d'interfaces discrètes élimine les concentrations de contraintes et les risques de délaminage. Cette architecture hybride permet de combiner résistance thermique et ténacité mécanique, offrant ainsi une solution structurelle légère et rigide, particulièrement adaptée aux environnements extrêmes et aux infrastructures de haute précision. La caractérisation précise de leur comportement statique est donc un impératif scientifique, d'autant que la maîtrise des protocoles de fabrication permet désormais de moduler les lois de distribution des phases pour optimiser spécifiquement la rigidité et la réponse mécanique de ces éléments face à des environnements opérationnels complexes.

Dans ce chapitre, nous proposons une nouvelle approche tridimensionnelle pour examiner les effets des chargements combinés d'humidité et de température sur la flexion des poutres sandwiches FG en arc. Cette approche prend en compte l'effet d'étirement de l'épaisseur (Stretching effect) de la poutre, tout en limitant le nombre de variables à quatre. Les faces de la poutre sandwich sont considérées comme ayant une variation de matériau isotrope à deux constituants (métal-céramique) à travers l'épaisseur, où le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et les coefficients de concentrations d'humidité varient selon une loi de puissance en fonction de la fraction volumique des constituants. La couche centrale reste homogène, constituée d'un matériau céramique isotrope. Les équations gouvernantes pour l'étude de la flexion hygro-thermo-mécanique sont déterminées en appliquant le principe des travaux virtuels. Les solutions analytiques de type Navier sont ensuite utilisées pour les poutres sandwiches fonctionnellement graduées soumises à un chargement hygro-thermo-mécanique, dans des conditions aux limites simplement appuyées.

III.2. Formulation du problème

Considérons une poutre FG de dimensions $a \times b$ et d'épaisseur uniforme h avec un rayon de courbure R , soumise aux conditions de l'environnement. Le système de

coordonnées cartésiennes x, y, z , est le plan qui coïncide avec la surface médiane de la poutre, et (z) est l'axe suivant l'épaisseur ($z \in [-h/2, h/2]$).

La poutres sandwich FG en arc est constituée par des faces externes (peaux) en matériau fonctionnellement gradué (FGM), et un noyau (cœur) homogène constitué d'un matériau purement céramique isotrope.

III.2.1. Configuration géométrique

La poutre sandwich en arc simplement appuyée considérée de longueur (a), largeur (b), épaisseur (h) et un rayon de courbure (R), est constituée d'un matériau composite à gradient fonctionnel et soumise à des charges couplées hygro-thermo-mécaniques variable (uniforme, linéaire et non-linéaire), voir Figure III.1. Les caractéristiques mécaniques sont progressivement et variant en continu à travers l'épaisseur de la surface inférieure à la surface supérieure, ($z = \pm h/2$).

La poutre sandwich en arc est composée de trois couches (métal-céramique, céramique pure et céramique-métal) : deux couches de surface (peaux) en matériau FG et une couche centrale homogène en céramique. Le noyau céramique homogène est également utilisé dans d'autres domaines, tels que le contrôle ou les environnements thermiques. Les constituants matériels de la peau inférieure varient d'une surface purement en métal ($z = h_0$) à une surface purement en céramique ($z = h_1$), tandis que ceux de la peau supérieure varient d'une surface purement en céramique ($z = h_2$) à une surface purement en métal ($z = h_3$), voir Figure III.1.

Où $h_0 = -h/2$, h_1 , h_2 et $h_3 = h/2$ sont les positions verticales de la surface inférieure, des deux interfaces entre les couches, et de la surface supérieure, respectivement.

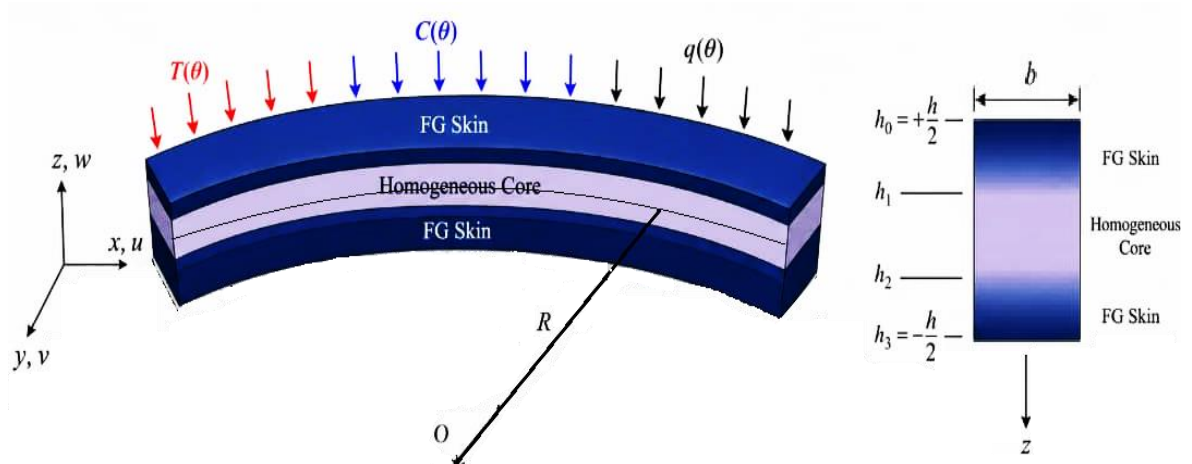
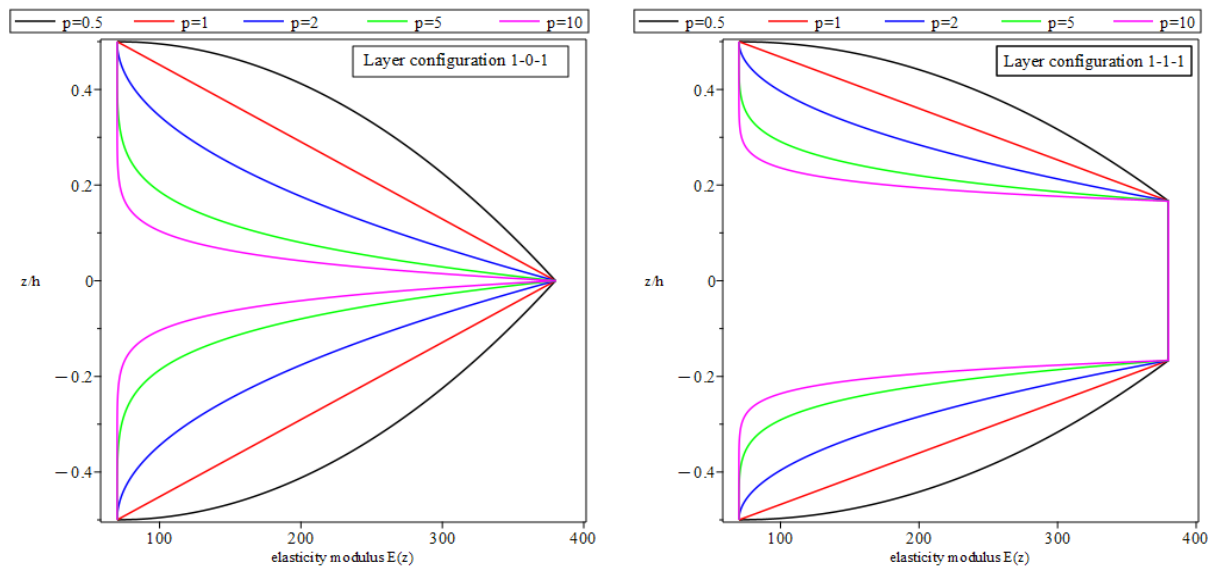


Figure III.1 : Géométrie et système de coordonnées d'une poutre sandwich en arc fonctionnellement graduée

Pour plus de concision, le rapport d'épaisseur de chaque couche du bas vers le haut est représenté par une combinaison de trois nombres, à savoir (1-0-1), (1-1-1), (1-2-1), (2-1-2) et (2-2-1).

Dans le présent travail, nous avons considéré différents schémas de sandwich donnés par :

- Poutre sandwich FG (1-0-1) : la poutre est symétrique et contient deux couches FG (il n'y a pas de couche de noyau). Dans ce cas, nous avons : $h_1=h_2=0$.
- Poutre sandwich FG (1-1-1) : Ici, la poutre est symétrique et composée de trois couches d'épaisseur égale. Dans ce cas, nous avons : $h_1=-h/6$, $h_2=h/6$.
- Poutre sandwich FG (1-2-1) : la poutre est symétrique, où l'épaisseur du noyau est égale à la somme des épaisseurs des faces. Donc, on obtient : $h_1=-h/4$, $h_2=h/4$.
- Poutre sandwich FG (2-1-2) : la poutre est symétrique, où l'épaisseur du noyau est la moitié des épaisseurs des faces. Donc, on obtient : $h_1=-h/10$, $h_2=h/10$.
- Poutre sandwich FG (3-1-3) : la poutre est symétrique, où l'épaisseur du noyau est le tiers des épaisseurs des faces. Donc, on obtient : $h_1=-h/14$, $h_2=h/14$.
- Poutre sandwich FG (1-4-1) : la poutre est symétrique, où la somme des épaisseurs des faces est la moitié de l'épaisseur du noyau. Donc, on obtient : $h_1=-h/3$, $h_2=h/3$.



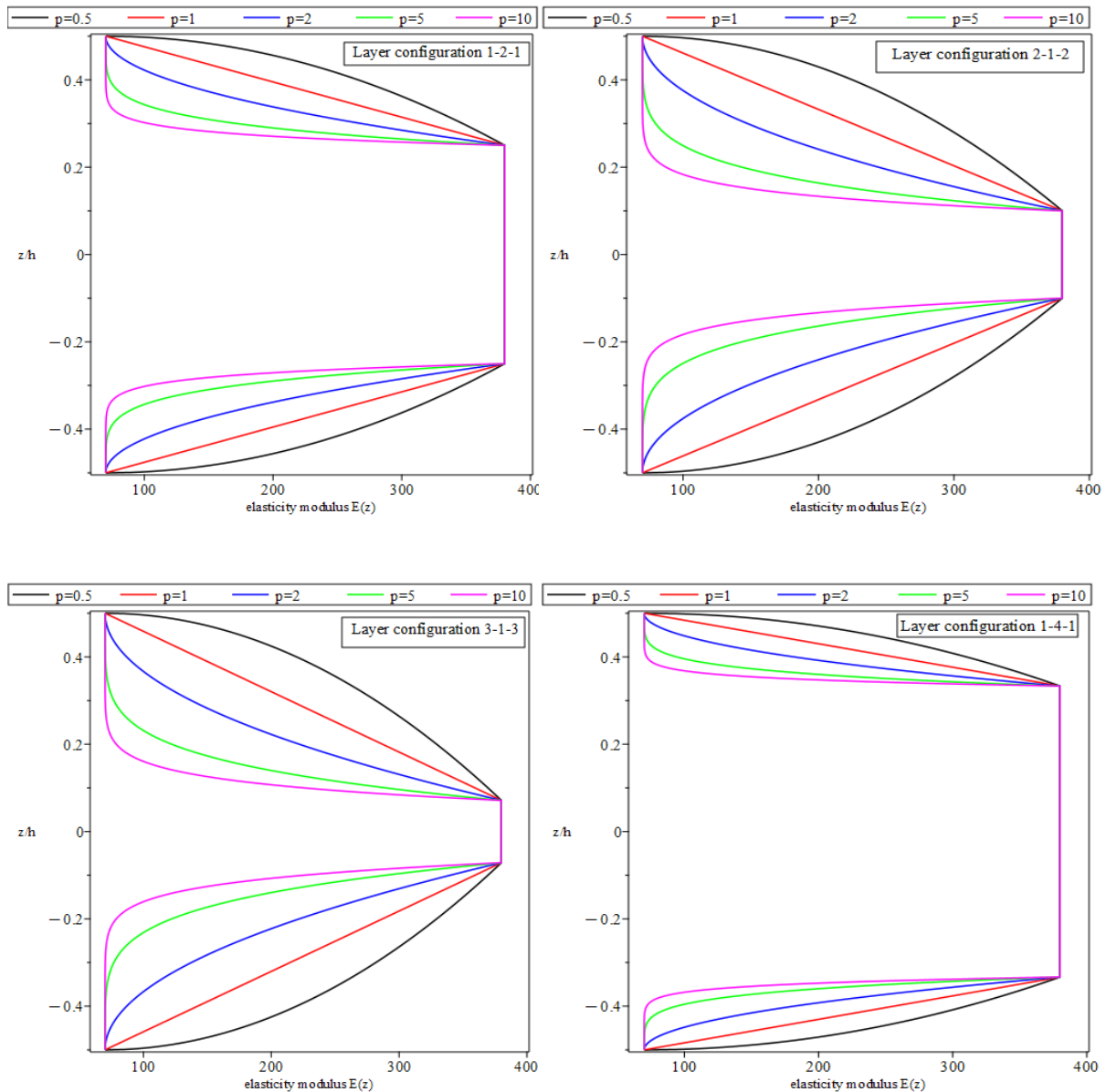


Figure III.2 : Variation de la fraction volumique $V_i(z)$ en fonction de l'indice matériel k pour différentes poutres sandwich FG en arc

III.2.2. Propriétés matérielles

La poutre FG en arc est soumise à un chargement mécanique transversal $q(x, z)$, à un champ de température $T(x, z)$, ainsi qu'à une concentration d'humidité $C(x, z)$. Les propriétés de FGM sont variables de façon continue du fait de la modification progressive de la fraction volumique des matériaux constitutifs, le plus souvent dans le sens de la hauteur seulement. La fonction de la loi de puissance est utilisée pour décrire les variations de propriétés des matériaux :

$$\left\{ \begin{array}{ll} V^{(1)}(z) = \left(\frac{z - h_0}{h_1 - h_0} \right)^k & h_0 \leq z \leq h_1 \\ V^{(2)}(z) = 1 & h_1 \leq z \leq h_2 \\ V^{(3)}(z) = \left(\frac{z - h_3}{h_2 - h_3} \right)^k & h_2 \leq z \leq h_3 \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

Où $V^{(n)}$, ($n=1, 2, 3$) désigne la fonction de fraction volumique pour la poutre sandwich FG de la couche n ; k est l'indice de la loi de puissance qui détermine la gradation de la fraction volumique, prenant des valeurs supérieures ou égales à zéro ($k \geq 0$). La valeur de ($k=0$) représente une poutre entièrement céramique, tandis que ($k=\infty$) indique une poutre entièrement métallique.

Les propriétés matérielles effectives pour chaque couche, telles que le module de Young $E(z)$, le coefficient de dilatation thermique $\alpha(z)$, et les coefficients de concentration d'humidité $\beta(z)$, sont supposées varier de manière continue à travers l'épaisseur avec une distribution de loi de puissance. Selon la règle des mélanges de Voigt, comme suit :

$$\begin{aligned} P(z)^{(n)} &= P_m + (P_c - P_m)V^{(n)} \\ P &= E, \alpha, \beta \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Où $P(z)^{(n)}$ est la propriété matérielle effective du FGM de la couche n . P_c et P_m sont respectivement les propriétés de la céramique et du métal.

Pour simplifier, le coefficient de Poisson de la poutre est supposé constant car son effet sur la déformation est bien moindre que celui du module de Young.

III.3. Formulation théorique

III.3.1. Champs de déplacement et déformations

En considérant les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est considéré comme suit :

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \left(1 + \frac{z}{R} \right) u_0(x) - z \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x) dx \\ w(x, z) &= w_0(x) + g(z) \varphi_{st}(x) \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Où u_0 est le déplacement axial d'un point sur le plan médian de la poutre le long de l'axe x , w_0 est le déplacement transversal, et φ_{st} est l'effet de l'étirement de l'épaisseur, et $\theta(x)$ représente la rotation de la section transversale autour de l'axe y .

L'intégrale indéterminée dans l'équation (III.3) doit être résolue par une solution de Navier et peut être exprimée comme suit :

$$\int \theta(x) dx = A' \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (\text{III.4})$$

Les coefficients k_I et A' sont définis comme :

$$k_I = \lambda^2 \quad \text{et} \quad A' = -\frac{1}{\lambda^2} \quad (\text{III.5})$$

Où

$$\lambda = \frac{m\pi}{a} \quad (\text{III.6})$$

Dans la présente théorie à quatre variables, les fonctions de forme $f(z)$ et $g(z)$ sont utilisées comme suit :

$$f(z) = \frac{z}{\pi^{4\pi}} + \frac{h \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)}{\pi} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (\text{III.7})$$

La fonction de déformation de cisaillement transverse est une fonction paire qui est la première dérivation de la fonction de gauchissement ($g(z) = f'(z)$). Par conséquent, la fonction de gauchissement actuelle satisfait les conditions de nullité sur les faces supérieure et inférieure de la poutre.

De plus, sur la base de la théorie de l'élasticité, les composants de déformations linéaires non nulles sont obtenus à partir du champ des déplacements de l'équation (III.3) comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{w}{R} = \varepsilon_x^0 + z\varepsilon_x^1 + f(z)\varepsilon_x^2 + g(z)\varepsilon_x^3 \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial Z} = g'(z)\varepsilon_z^0 \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} - \frac{u_0}{R} = g(z)\gamma_{xz}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Où ε_x et ε_z sont les déformations normales et transversales, γ_{xz} est la déformation de cisaillement transverse.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial X} + \frac{w_0}{R}, \quad \varepsilon_x^1 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}, \quad \varepsilon_x^2 = k_I A \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad \varepsilon_x^3 = \frac{\varphi_z}{R} \\ \gamma_{xz}^0 &= k_I A \frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial \varphi_z}{\partial X}, \quad \varepsilon_z^0 = \varphi_z \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

III.3.2. Relations constitutives

En se limitant à un comportement élastique linéaire, et basées sur le champ de déplacement 3D exprimé dans l'équation (III.4), les équations constitutives élastiques linéaires avec l'effet hygrothermique en un point sont énoncées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^n = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{13} & 0 \\ C_{13} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix}^n \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha T(x,z) - \beta C(x,z) \\ \varepsilon_z - \alpha T(x,z) - \beta C(x,z) \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^n \quad (\text{III.10})$$

Où $(\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz})$ et $(\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz})$ sont les composantes des contraintes et des déformations respectivement. En utilisant les propriétés matérielles définies dans l'équation (III.2), les coefficients de rigidité élastique $Q_{ij}^{(n)}$ sont donnés par l'expression suivante :

$$C_{11}^n = C_{33}^n = \frac{E^n(z)}{1 - (v^n)^2}, \quad C_{55}^n = \frac{E^n(z)}{2(1 + v^n)}, \quad C_{13}^n = \frac{v^n E^n(z)}{1 - (v^n)^2} \quad (\text{III.11})$$

E , α et β sont respectivement le module de Young, la dilatation thermique et les coefficients de concentration d'humidité, et n correspond au numéro de la couche.

Dans les applications pratiques, la distribution thermique est rarement uniforme. Elle est souvent affectée par des facteurs tels que le chauffage localisé, le refroidissement inégal et le rayonnement thermique. Ces influences entraînent des variations de température notables dans les nano-poutres. Des études expérimentales [178] ont montré que la position de la source de chaleur joue un rôle clé dans la détermination de la façon dont la chaleur se propage à l'intérieur d'une structure. Les différentes distributions hygrothermiques peuvent être décrites comme suit :

$$\Delta\Theta(z) = \Delta\Theta_{\max} \left\{ \alpha \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^2 + \beta \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) + \gamma \right\}; \quad \text{with: } \Delta\Theta_{\max} = (\Theta_{\max} - \Theta_0) \quad (\text{III.12})$$

$$\Theta(z) = \begin{cases} T(z) & \text{if } \gamma = \alpha \\ C(z) & \text{if } \gamma = \beta \end{cases}$$

Les valeurs de α , β et γ sont listées dans le tableau suivant :

Tableau III.1 : Coefficients pour différentes distributions de température de la nano-plaque

Type de distribution de température	α	β	γ
Répartition uniforme de la température (UTD)	0	0	1
Répartition linéaire (LI)	0	1	0
Distribution non-linéaire parabolique (PI)	1	0	0
Distribution non-linéaire parabolique au centre (P-MAC)	-4	4	0

Distribution non-linéaire parabolique aux extrémités (P-MAE)	4	-4	1
--	---	----	---

III.3.3. Équations d'équilibre

Pour dériver rigoureusement les équations d'équilibre et les conditions aux limites associées au comportement d'une poutre sandwich à gradient fonctionnel (FGM), le principe des travaux virtuels (PTV) est adopté comme fondement variationnel. Cette approche stipule que l'équilibre d'un système est réalisé lorsque la somme algébrique du travail virtuel des efforts internes (énergie de déformation) et du travail des sollicitations extérieures est nulle pour tout déplacement virtuellement admissible. Appliqué à l'analyse de la flexion sous couplage hygro-thermomécanique, ce principe permet de traduire les interactions complexes entre les champs de contraintes et les gradients environnementaux en un système d'équations différentielles cohérent régissant la réponse structurelle de l'élément.

$$\int_V (\delta U + \delta V) dV = 0 \quad (\text{III.13})$$

Où δU est l'énergie de déformation virtuelle et δV est le travail virtuel externe sous l'effet d'un chargement externe appliqué à la poutre.

En utilisant le principe du déplacement virtuel, les quatre équations d'équilibre gouvernantes cohérentes variationnelles sont développées suivante :

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dV \\ \delta U &= \int_0^a (N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x^b \delta \varepsilon_x^1 + M_x^s \delta \varepsilon_x^2 + Q_x \delta \varepsilon_x^3 + Q_z \varepsilon_z^0 + Q_{xz} \delta \gamma_{xz}^0) dx \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Où a représente la portée de la poutre, et N , M et Q sont, respectivement, les résultantes des efforts dans le plan, les résultantes des moments, et les résultantes des contraintes de cisaillement transversal ; les formules suivantes déterminent toutes ces grandeurs.

$$\begin{aligned} (N_x, M_x^b, M_x^s, Q_x) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (1, z, f(z), g(z)) \sigma_x^{(n)} dz \\ Q_z &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} g'(z) \sigma_z^{(n)} dz, \quad Q_{xz} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} g(z) \tau_{xz}^{(n)} dz \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

L'expression pour la variation du travail externe est la suivante :

$$\delta V = - \int_A q \delta w dA = - \int_A q (\delta w_0(x) + g(z) \delta \varphi_z(x)) dA \quad (\text{III.16})$$

Substituant les expressions de contrainte et de contrainte des égalisations. (III.8), (III.9) et (III.10) dans l'équation (III.13), suivies d'une intégration par les parties et du regroupement des termes de δu_0 , δw_0 , $\delta \theta$ et $\delta \varphi_{st}$, donnent les quatre équations différentielles gouvernantes.

$$\begin{aligned}
 \delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} &= 0 \\
 \delta w_0 : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} - \frac{N_x}{R} + q &= 0 \\
 \delta \theta : -k_1 M_x^s + k_1 A \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} &= 0 \\
 \delta \varphi_{st} : \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{Q_x}{R} - Q_z &= 0
 \end{aligned} \tag{III.17}$$

Les efforts et les moments $N_x^0, M_x^{b0}, M_x^{s0}, \theta = T, C$; résultant de la charge hygrothermique sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} N_x^\Theta \\ M_x^{b\Theta} \\ M_x^{s\Theta} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} Q_{ij} \Upsilon^n \Theta(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \tag{III.18}$$

Où

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x^b \\ M_x^s \\ Q_x \\ Q_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ A_2 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 \\ A_3 & A_7 & A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_4 & A_8 & A_{11} & A_{14} & A_{15} \\ A_5 & A_9 & A_{12} & A_{15} & A_{16} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_x^3 \\ \varepsilon_z^0 \end{Bmatrix} \tag{III.19a}$$

$$Q_{xz} = A_{13} \gamma_{xz}^0$$

$$\begin{aligned}
 (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} C_{11}^{(n)} (1, z, f(z), g(z), z^2) dz \\
 (A_7, A_8, A_{10}, A_{11}, A_{14}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} C_{11}^{(n)} (z f(z), z g(z), f^2(z), f(z)g(z), g^2(z)) dz \\
 (A_5, A_9, A_{12}, A_{15}) &= \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} C_{13}^{(n)} (g'(z), z g'(z), f(z)g'(z), g(z)g'(z)) dz
 \end{aligned} \tag{III.19b}$$

$$A_{13} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} C_{55}^{(n)} g^2(z) dz \quad (III.19c)$$

$$A_{16} = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} C_{33}^{(n)} (g'(z))^2 dz$$

$$(A_1^T, A_2^T, A_3^T, A_4^T, A_5^T) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (C_{11}^{(n)} + C_{13}^{(n)}) (\alpha T(z), z\alpha, f(z)\alpha, g(z), g'(z)\alpha) dz \quad (III.19d)$$

$$(A_1^C, A_2^C, A_3^C, A_4^C, A_5^C) = \sum_{n=1}^3 \int_{h_n}^{h_{n+1}} (C_{11}^{(n)} + C_{13}^{(n)}) (\beta C(z), z\beta, f(z)\beta, g(z), g'(z)\beta) dz$$

Où h_n et h_{n-1} sont les coordonnées suivant z du haut et du bas de la n ème couche.

Les équations différentielles déterminantes (III.20a) – (III.20d) en termes de variables de déplacement inconnues sont obtenues en remplaçant les équations (III.18) et (III.19a) – (III.19c) dans les équations (III.17) comme suit :

$$\delta u_0 : -A_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{A_1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - k_1 A_3 \frac{\partial \theta}{\partial x} - \left(\frac{A_4}{R} + A_5 \right) \frac{\partial \varphi_z}{\partial x} + A_1^T \frac{\partial T(x)}{\partial x} + A_1^C \frac{\partial C(x)}{\partial x} = 0 \quad (III.20a)$$

$$\begin{aligned} \delta w_0 : & -A_2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{A_1}{R} \frac{\partial u_0}{\partial x} - 2 \frac{A_2}{R} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + A_6 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{A_1}{R^2} w_0 - k_1 A_7 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k_1 \frac{A_3}{R} \theta \\ & - \left(\frac{A_8}{R} + A_9 \right) \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + \left(\frac{A_4}{R^2} + \frac{A_5}{R} \right) \varphi_z - \frac{A_1^T}{R} T(x) - \frac{A_1^C}{R} C(x) - A_2^T \frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - A_2^C \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} - q = 0 \end{aligned} \quad (III.20b)$$

$$\begin{aligned} \delta \theta : & k_1 A_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_1 \frac{A_3}{R} w_0 - k_1 A_7 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - (k_1 A_1)^2 A_{13} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k_1^2 A_{10} \theta \\ & - k_1 A_1 A_{13} \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + k_1 \left(\frac{A_{11}}{R} + A_{12} \right) \varphi_z - A_3^T T(x) - A_3^C C(x) = 0 \end{aligned} \quad (III.20c)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi_z : & \left(\frac{A_4}{R} + A_5 \right) \frac{\partial u_0}{\partial x} - \left(\frac{A_8}{R} + A_9 \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left(\frac{A_4}{R^2} + \frac{A_5}{R} \right) w_0 - k_1 A_1 A_{13} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \\ & - A_{13} \frac{\partial^2 \varphi_z}{\partial x^2} + \left(\frac{k_1 A_{11}}{R} + k_1 A_{12} \right) \theta + \left(\frac{A_{14}}{R^2} + 2 \frac{A_{15}}{R} + A_{16} \right) \varphi_z - \frac{A_4^T}{R} T(x) - A_5^T T(x) \\ & - \left(\frac{A_4^C}{R} + A_5 \right) C(x) - q \cdot g(z) = 0 \end{aligned} \quad (III.20d)$$

Pour une poutre sandwich FG simplement appuyée à $x=0$ et $x=a$, les conditions aux limites sont exprimées comme suit :

$$w_0 = N_x = M_x^b = M_x^s = \varphi_z = 0 \quad (III.21)$$

En suivant le processus Navier pour résoudre ce problème, les solutions suivantes sont adaptées pour u_0, v_0, w_0, θ and ϕ_z , qui satisfait les conditions aux limites données par :

$$\begin{Bmatrix} u_0(x) \\ w_0(x) \\ \theta(x) \\ \phi_z(x) \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_m \cos(\lambda x) \\ W_m \sin(\lambda x) \\ \theta_m \sin(\lambda x) \\ \phi_m \sin(\lambda x) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

Où U_m, W_m, θ_m et ϕ_m sont des paramètres arbitraires à déterminer.

La charge mécanique transversale q est supposée avoir la forme d'une série double de Fourier et s'exprime par :

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin(\lambda x) \quad (\text{III.23})$$

$$q_m = \frac{4q_0}{m\pi} \quad (m=1, 3, 5 \dots \infty)$$

La substitution des équations (III.22) et (III.23) dans les équations (III.20 (a)-(e)) montre que les solutions analytiques du cas présent peuvent être établies par :

$$[S_{ij}] \{\delta\} = \{P\} \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \text{ \& } 4. \quad (\text{III.24})$$

Dans lequel

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_m \\ \theta_m \\ \phi_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Avec

$$\begin{aligned} P_1 &= -(A_1^T \cdot t_3 + A_1^T \cdot c_3) \cdot \alpha \\ P_2 &= q_n + \frac{A_1^T}{R} \cdot t_3 + \frac{A_1^C}{R} \cdot c_3 + A_2^T \cdot t_3 \cdot \alpha^2 + A_2^C \cdot c_3 \cdot \alpha^2 \\ P_3 &= (A_3^T \cdot t_3 + A_3^C \cdot c_3) \cdot k_1 \\ P_4 &= \left(\frac{A_4^T}{R} + A_5^T\right) \cdot t_3 + \left(\frac{A_4^C}{R} + A_5^C\right) \cdot c_3 \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Et

$$\begin{aligned}
S_{11} &= A_1 \alpha^2, \quad S_{12} = \alpha \cdot \left(-\frac{A_1}{R} - A_2 \alpha^2 \right) \\
S_{13} &= -k_1 A_3 \alpha, \quad S_{14} = -\alpha \left(A_5 + \frac{A_4}{R} \right) \\
S_{21} &= S_{12}, \quad S_{22} = \left(\frac{2 \cdot A_2}{R} + A_6 \alpha^2 \right) \cdot \alpha^2 + \frac{A_1}{R^2} \\
S_{23} &= k_1 A_7 \alpha^2 + \frac{k_1 \cdot A_3}{R}, \quad S_{24} = \frac{A_4}{R^2} + \left(\frac{A_8}{R} + A_9 \right) \alpha^2 + \frac{A_5}{R} \\
S_{31} &= S_{13}, \quad S_{32} = S_{23} \\
S_{33} &= k_1^2 \cdot (A_{10} + A^2 A_{13} \alpha^2), \quad S_{34} = k_1 \left(A_{12} + A' A_{13} \alpha^2 \right) + \frac{k_1 \cdot A_{11}}{R} \\
S_{41} &= S_{14}, \quad S_{42} = S_{24}, \quad S_{43} = S_{34} \\
S_{44} &= \frac{A_{14}}{R^2} + \frac{2 \cdot A_{15}}{R} + A_{16} + A_{13} \alpha^2
\end{aligned} \tag{27}$$

III.4. Conclusion

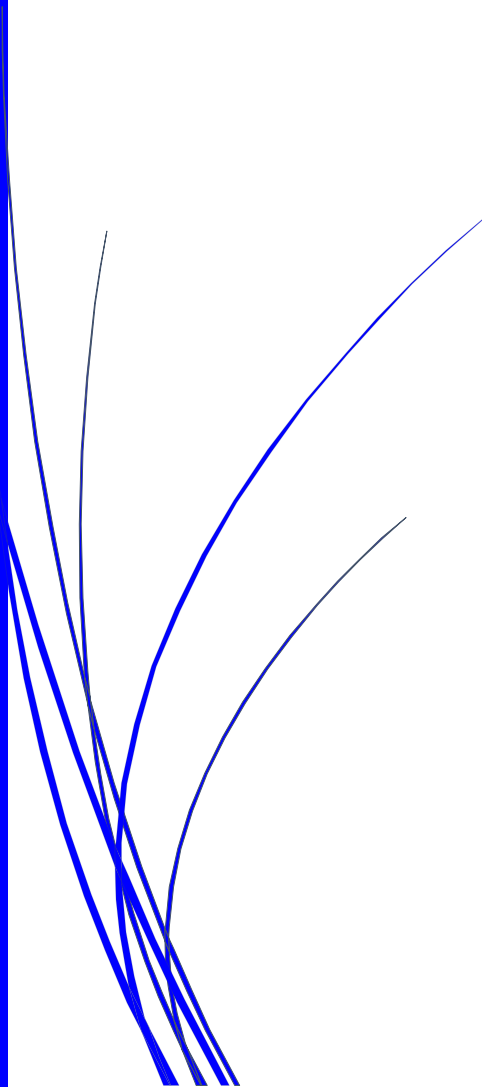
Dans ce chapitre, nous avons présenté les différentes étapes de l'étude analytique du comportement hygro-thermo-mécanique en flexion des poutres sandwiches en arc fonctionnellement gradués. En utilisant une nouvelle théorie de déformation de cisaillement quasi 3D, le nombre d'inconnus et des équations d'équilibre a été réduit à quatre. Les propriétés matérielles de la poutre ont été considérées comme variant selon l'épaisseur, suivant une simple loi de puissance.

La théorie permet d'obtenir une distribution parabolique des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur de la poutre et satisfait les conditions de nullité de la contrainte de cisaillement sur les faces supérieure et inférieure de celle-ci. Les propriétés matérielles telles que le module de Young, le coefficient de dilatation thermique et les coefficients de concentration d'humidité.



Chapitre VI

Résultats Numériques & Discussions



Chapitre IV :

Résultats Numériques & Discussions

IV.1. Introduction

Ce travail vise à développer une théorie originale de déformation par cisaillement élevé quasi- 3D pour étudier le comportement en flexion des poutres sandwich en arc, avec des peaux en matériau fonctionnellement gradué, simplement appuyées sous chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire en prenant en compte l'influence de l'étirement. Le modèle proposé adopte un nouveau champ de déplacement, qui comprend des variables intégrales indéterminées. Les équations d'équilibre sont déterminées en utilisant le principe du travail virtuel et résolues en utilisant la technique de Navier. Nous présenterons une série de résultats dérivés de l'exécution du programme de calcul Maple (Maple Soft 2015.1), en mettant en évidence les performances en flexion d'une poutre sandwich FG simplement appuyée, soumise à un chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire.

IV.2. Résultats et discussion

Dans cette section, nous présentons les résultats de l'analyse de flexion sous chargement hygro-thermo-mécanique non linéaire des différentes configurations symétriques et asymétriques de poutres sandwich en arc, avec des matériaux à gradation fonctionnelle (FG) dans les peaux des poutres sandwich fonctionnellement graduées (FGSB). Les résultats actuels sont calculés en utilisant la nouvelle théorie de déformation de cisaillement élevé quasi-3D avec seulement quatre inconnues. La théorie est formulée de telle sorte que l'influence de l'étirement de l'épaisseur est considérée.

L'analyse hygro-thermo-mécanique en flexion est conduite pour des combinaisons de métal et de céramique. Le métal utilisé est un alliage d'aluminium (*Al*) et une céramique de type oxyde d'alumine (*Al₂O₃*). Pour simplifier les calculs, on supposera que le coefficient de poisson est constant en tout point de l'épaisseur de la poutre. Les propriétés matérielles correspondantes sont énumérées dans le tableau IV.1.

Tableau IV.1 : Les propriétés matérielles utilisées pour la poutre sandwich en FGM.

Matériaux	Propriétés			
	$E(GPa)$	$\alpha(10^{-6} / ^\circ C)$	β	ν
Métal (<i>aluminium, Al</i>)	70	23	0.44	0.3
Céramique (<i>alumina, Al₂O₃</i>)	380	7	0.001	0.3

Les résultats numériques du déplacement axial, de la flèche et des contraintes sont présentés dans des formules adimensionnelles comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{u}\left(0, -\frac{h}{2}\right) &= \frac{100 E_m h^3 u}{q_0 a^4}, & \bar{w}\left(\frac{a}{2}, 0\right) &= \frac{100 E_m h^3 w}{q_0 a^4} \\ \bar{\sigma}_x\left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right) &= \frac{h \sigma_x}{q_0 a}, & \bar{\sigma}_z\left(\frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right) &= \frac{h \sigma_z}{q_0 a}, & \bar{\tau}_{xy}(0, 0) &= \frac{h \tau_{xy}}{q_0 a} \end{aligned} \quad \text{IV.1}$$

IV.2.1. Etude comparative

Le tableau IV.2 montre une très bonne concordance entre les résultats de la présente étude et ceux de Kada et al.[179] pour les déplacements axiaux u et les flèches w adimensionnels des poutres en arc sandwich FG simplement appuyées soumises à une charge uniforme. Les écarts restent faibles pour toutes les valeurs de k , de L/h et pour les différents empilements (1-1-1, 2-1-2 et 1-2-1), ce qui valide la précision de la formulation adoptée. On observe aussi que l'augmentation de k entraîne une amplification marquée de $\bar{u}$ et $\bar{w}$, traduisant l'influence du gradient matériel sur la réponse mécanique. De plus, le cas des poutres minces $L/h = 20$ présente globalement des réponses plus faibles que les poutres épaisses $L/h = 5$, ce qui met en évidence l'effet de la géométrie sur la rigidité globale de la poutre.

Tableau IV.2 : Comparaison des déplacements axiaux et déflexions adimensionnels de poutres en arc sandwich FG simplement appuyées soumises à des charges uniformes avec $R/h=20$.

	k	theory	L/h=5			L/h=20		
			2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1
$\bar{u}$	0	Kada et al.[179]	1.1710	1.1710	1.1710	1.1334	1.1334	1.1334
		present	1.1704	1.1704	1.1704	1.1317	1.1317	1.1317
	5	Kada et al.[179]	5.0671	4.3071	3.2546	4.9948	4.2434	3.1964
		present	5.0614	4.3046	3.2549	4.9860	4.2362	3.1921
	10	Kada et al.[179]	5.6135	4.8275	3.6013	5.5356	4.7611	3.5421
		present	5.6054	4.8229	3.6015	5.5258	4.7523	3.5369
$\bar{w}$	0	Kada et al.[179]	3.1396	3.1396	3.1396	2.8946	2.8946	2.8946
		present	3.1357	3.1357	3.1357	2.8906	2.8906	2.8906
	5	Kada et al.[179]	13.080	11.117	8.4267	12.748	10.830	8.1588
		present	13.055	11.102	8.4233	12.7259	10.812	8.1479
	10	Kada et al.[179]	14.492	12.445	9.3092	14.129	12.1516	9.0411
		present	14.458	12.423	9.3030	14.104	12.1294	9.0277

Le Tableau IV.3 expose une analyse comparative des contraintes axiales (σ_{xx}) et de cisaillement (τ_{xz}) adimensionnelles au sein de poutres courbes en sandwich FG ($R/h=10$). La confrontation des résultats du présent modèle avec ceux de Kada et al. [179] révèle une

très bonne concordance, confirmant la fiabilité de l'approche numérique proposée pour l'évaluation des champs de contraintes.

L'évolution de l'indice de gradient matériel (k) affecte significativement l'état de contrainte. L'introduction de la gradation fonctionnelle modifie la distribution de la rigidité, influençant directement les niveaux de contraintes locales. De plus, la configuration géométrique des couches dicte la distribution des efforts : la disposition 1-2-1 présente systématiquement les contraintes les plus faibles (σ_{xx}) et (τ_{xz}), confirmant son efficacité structurelle optimale. Enfin, l'influence du rapport d'élancement est majeure, les poutres minces ($L/h=20$) développant des contraintes normales bien plus sévères que les poutres épaisses ($L/h=5$).

Tableau IV.3 : Comparaison des contraintes axiales et de cisaillement adimensionnel des poutres courbes en sandwich FG simplement appuyées soumises à des charges uniformes avec $R/h=10$.

	k	Theorie	L/h=5			L/h=20		
			2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1
σ_{xx}	0	Kada et al.[179]	3.8134	3.8134	3.8134	15.070	15.070	15.070
		present	3.8433	3.8434	3.8433	15.190	15.190	15.190
	5	Kada et al.[179]	3.0817	2.6189	1.9750	12.280	10.431	7.8532
		present	3.1061	2.6448	1.9986	12.387	10.542	7.9525
	10	Kada et al.[179]	3.4147	2.9373	2.1876	13.612	11.707	8.7047
		present	3.4374	2.9631	2.2130	13.711	11.819	8.8123
τ_{xz}	0	Kada et al.[179]	0.7213	0.7213	0.7213	0.7401	0.7401	0.7401
		present	0.7438	0.7438	0.7438	0.7656	0.7656	0.7656
	5	Kada et al.[179]	1.1625	0.9916	0.8771	1.1912	1.0170	0.8955
		present	1.1643	1.0020	0.8944	1.1960	1.0292	0.9178
	10	Kada et al.[179]	1.2823	1.0453	0.8965	1.3137	1.0717	0.9185
		present	1.2772	1.0499	0.9140	1.3112	1.0786	0.9383

IV.2.1. Etude paramétrique

Le Tableau IV.4 évalue l'impact de diverses distributions de température sur les flèches ($\bar{w}$) et les déplacements axiaux ($\bar{u}$) adimensionnels d'une poutre en arc sandwich FG (configuration 2-1-2) sous charges uniformes.

L'élévation de l'indice matériel (k) (allant de la céramique pure $k=0$ au métal pur $k=\infty$) induit un accroissement systématique de $\bar{u}$ et $\bar{w}$. Cette augmentation traduit l'affaiblissement de la rigidité flexionnelle dû à l'incorporation de la phase métallique, plus ductile et sensible aux sollicitations thermomécaniques. De surcroît, le profil thermique joue un rôle déterminant : les distributions non uniformes (notamment LI et PI) maximisent les déformations structurelles par rapport à la distribution uniforme (UTD). Ce comportement met en évidence l'effet des gradients thermiques sévères, qui génèrent des contraintes de dilatation thermiques asymétriques, exacerbant ainsi la flexion et le déplacement axial de l'arc.

Tableau IV.4 : Déplacements axiaux et flèches adimensionnels de la poutre en arc sandwich FG simplement appuyée (2-1-2) soumise à des charges uniformes sous différentes distributions de température, avec : $L/h = 10$, $T = 10$, $C = 0$ avec $R/h=5$.

	Distribution	k
--	--------------	---

$\bar{w}$		0	1	5	10	∞
	UTD	9.0291	12.7790	15.2141	15.5327	15.7466
	LI	13.4125	18.4863	21.4637	21.8397	22.0871
	PI	13.3992	18.4740	21.4497	21.8251	22.0717
	P-MAC	9.08236	12.8558	15.3035	15.6231	15.8359
	P-MAE	8.97584	12.7298	15.1584	15.4742	15.6849
$\bar{u}$	UTD	0.8472	2.7129	3.9196	4.0089	3.9826
	LI	9.6831	13.978	16.094	16.303	16.391
	PI	10.634	15.102	17.326	17.558	17.665
	P-MAC	2.8098	4.8776	6.2442	6.3970	6.4679
	P-MAE	4.6506	7.2244	8.8549	9.0237	9.0780

Le Tableau IV.5 présente une analyse thermomécanique comparative des déplacements axiaux ($\bar{u}$) et les flèches ($\bar{w}$) adimensionnels d'une poutre en arc sandwich FG ($k=5$, $C=0$, $R/h=5$). L'étude examine l'effet combiné de l'élévation de température ($T=5$, 20), du mode de distribution thermique, du rapport d'élancement ($L/h=5$, 20) et de l'anisotropie morphologique des couches (2-1-2, 1-1-1 et 1-2-1).

L'élévation de l'intensité thermique de $T=5$ à $T=20$ induit une augmentation drastique de la déflexion ($\bar{w}$), imputable à la dégradation thermique du module d'élasticité global et à l'accentuation des moments de flexion thermique. Ce phénomène est particulièrement exacerbé sous l'effet des distributions non uniformes (LI et PI), qui génèrent des gradients thermiques transversaux sévères par rapport au profil uniforme (UTD).

En matière de rigidité structurelle, le rapport des couches 1-2-1 se distingue par une minimisation optimale des déplacements, validant sa capacité à stabiliser la structure face aux distorsions thermiques. Enfin, l'influence géométrique révèle un comportement bimodal : pour la poutre épaisse ($L/h=5$), la structure est dominée par le cisaillement et s'avère hautement sensible aux profils thermiques non uniformes, tandis que pour une poutre mince ($L/h=20$), les déplacements se stabilisent, reflétant une réponse typique des structures minces régies par la théorie des poutres élancées.

Tableau IV.5 : Le déplacement axial et la déflexion adimensionnels de la poutre courbe en sandwich FG simplement appuyée soumise à des charges uniformes sous différentes valeurs d'élévation de température appliquées (T) avec : $k=5$, $C=0$ et $R/h=5$.

	T	Distribution	L /h=5			L /h=20		
			2-1-2	1-1-1	1-2-1	2-1-2	1-1-1	1-2-1
$\bar{w}$	5	UTD	15.8960	15.2968	14.2353	15.0634	14.5333	13.5050
		LI	28.3436	27.4936	25.8807	15.8454	15.2992	14.2359
		PI	28.3154	27.4683	25.8576	15.8437	15.2976	14.2345
		P-MAC	16.0775	15.4748	14.4922	15.0746	14.5442	13.5152
		P-MAE	15.7829	15.1958	14.1431	15.0565	14.5271	13.4994
	20	UTD	15.6907	15.0657	14.0177	15.0508	14.5191	13.4917
		LI	65.4811	63.8530	60.5992	18.1788	17.5828	16.4152
		PI	65.3681	63.7520	60.5071	18.1719	17.5766	16.4096
		P-MAC	16.4166	15.7778	14.6766	15.0954	14.5628	13.5322
		P-MAE	15.2385	14.6617	13.6490	15.0231	14.4943	13.4690
$\bar{u}$	5	UTD	-19.565	-18.618	-17.840	18.098	17.466	16.222
		LI	17.328	17.531	17.189	19.622	18.956	17.648

		PI	22.293	22.291	21.714	19.695	19.027	17.714
		P-MAC	-10.464	-9.989	-9.658	18.253	17.616	-63.941
		P-MAE	0.3025	0.43552	0.2517	18.398	17.751	16.497
	20	UTD	-106.49	-101.65	-96.667	16.724	16.151	14.973
		LI	41.104	42.920	43.477	22.818	22.109	20.674
		PI	60.958	61.974	61.554	23.119	22.397	20.949
		P-MAC	-70.077	-67.146	-63.941	17.351	16.746	15.536
		P-MAE	-26.995	-25.448	-24.293	17.931	17.309	16.074

Le Tableau IV.6 présente une analyse thermomécanique des contraintes axiales (σ_{xx}) et de cisaillement (τ_{xz}) adimensionnelles au sein d'une poutre en arc sandwich FG (configuration 2-1-2) soumise à des charges uniformes, en évaluant l'influence de l'indice de gradient (k) et de diverses distributions de la température.

Le passage d'une structure purement céramique ($k=0$) à un milieu gradué ($k=1$) modifie profondément la distribution des contraintes. On observe initialement une baisse des contraintes axiales (σ_{xx}) à $k=1$, suivie d'une augmentation progressive à mesure que k croît vers 50. Cette tendance traduit la redistribution des efforts internes liée à la variation asymétrique de la rigidité et à l'introduction d'une phase métallique plus ductile.

Par ailleurs, les profils de température influencent drastiquement le comportement : les distributions non uniformes, notamment LI et PI, génèrent des contraintes de cisaillement transversales (τ_{xz}) négatives et extrêmement élevées par rapport à la distribution uniforme (UTD). Ce phénomène met en évidence le rôle majeur des gradients thermiques non linéaires, qui induisent des distorsions de cisaillement localisées et des effets de couplage thermomécanique sévères au droit des interfaces des couches de la poutre sandwich FG en arc.

Tableau IV.6 : Contraintes axiales et de cisaillement adimensionnelles de la poutre en arc sandwich FG simplement appuyée (2-1-2) soumise à des charges uniformes sous différentes distributions de température ($a/h=10$, $T=10$, $C=0$ et $R/h=10$).

Contraintes	Distribution	k				
		0	1	5	10	50
σ_{xx}	UTD	19.4973	13.9066	15.7554	16.0704	16.3751
	LI	19.4725	14.6465	16.4135	16.6432	16.8310
	PI	17.4917	13.3207	14.9619	15.1684	15.3328
	P-MAC	15.5365	11.4483	13.1245	13.3652	13.5555
	P-MAE	11.5739	8.6032	9.9491	10.1711	10.3781
τ_{xz}	UTD	0.7584	0.5738	0.6296	0.6801	0.7739
	LI	-30.4865	-29.0952	-31.1239	-32.3393	-34.4156
	PI	-30.6471	-29.2115	-31.2480	-32.4720	-34.5623
	P-MAC	1.40068	1.29942	1.42658	1.5005	1.6233
	P-MAE	0.1160	0.1087	0.1333	0.1493	0.1864

La Figure IV.1 illustre la distribution de la flèche adimensionnelle ($\bar{w}$) le long de la portée normalisée (x/L) d'une poutre en arc sandwich FG (2-1-2) sous chargement thermomécanique ($L/h=10$, $R=5$, $T=10$, $C=0$, distribution de la température PI), pour diverses valeurs de l'indice matériel (k).

Sur le plan mécanique, le profil parabolique rigoureusement symétrique par rapport au milieu de l'arc ($x/L=0.5$) valide la cinématique de la structure et la conformité des conditions aux limites d'appuis simples ($\bar{w}=0$ aux extrémités). L'analyse montre qu'une élévation de l'indice k (de 0 à 10) engendre un accroissement monotone de l'amplitude maximale de déflexion. Ce phénomène s'explique par l'augmentation de la fraction volumique de la phase métallique, moins rigide et plus ductile que la céramique. Cette transition microstructurale réduit la rigidité flexionnelle globale de l'arc, exacerbant sa sensibilité aux déformations induites par le couplage thermomécanique.

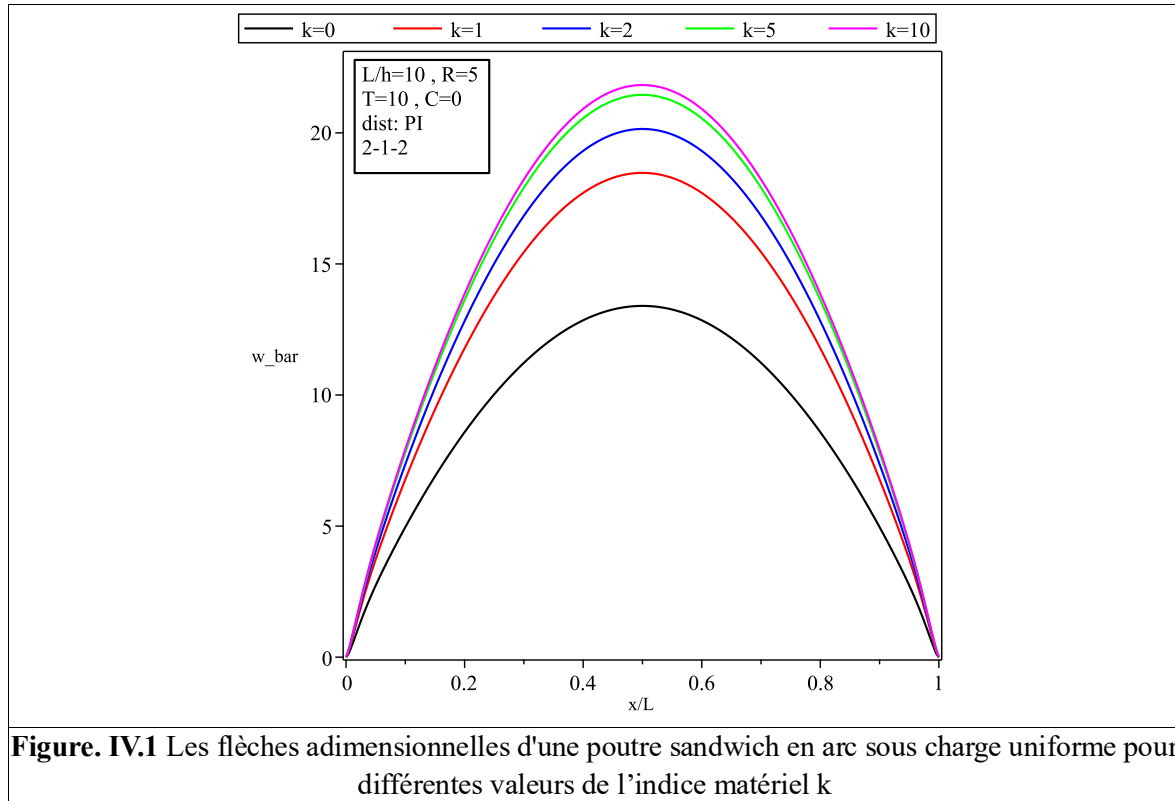


Figure. IV.1 Les flèches adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs de l'indice matériel k

La Figure IV.2 analyse la distribution de la flèche adimensionnelle ($\bar{w}$) le long de la portée normalisée (x/L) d'une poutre en arc sandwich FG (2-1-2) sous chargement thermomécanique ($k=5$, $L/h=10$, $T=10$, $C=0$ et la distribution de la température PI), pour différentes valeurs du rayon de courbure ($R=5, 10, 20$ et ∞).

Sur le plan mécanique, le profil parabolique rigoureusement symétrique par rapport à la mi-portée ($x/L=0.5$) confirme la validité cinématique du modèle et le respect des conditions aux limites d'appuis simples aux extrémités. L'analyse du zoom au sommet montre qu'une augmentation du rayon de courbure R (évoluant vers une poutre droite pour $R=\infty$), engendre une élévation monotone de la déflexion maximale.

Ce phénomène structurel s'explique par la géométrie de l'arc : un rayon de courbure plus faible ($R=5$) confère un effet de voûte prononcé, convertissant une partie des efforts de flexion en efforts de membrane (compression axiale bénéfique). À l'inverse, l'augmentation de R estompe cette raideur de courbure, augmentant la flexibilité de la structure qui se

comporte davantage comme une poutre droite, plus vulnérable à la flexion thermomécanique.

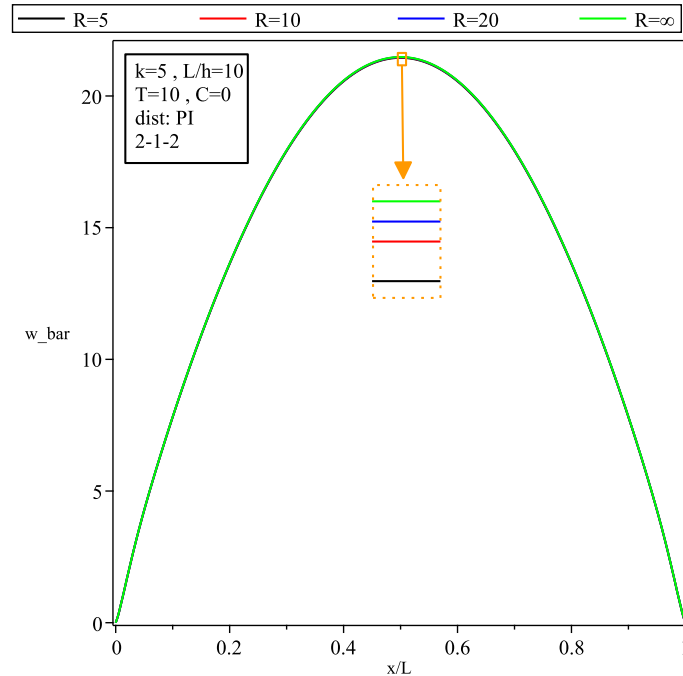


Figure. IV.2 : Les flèches adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rayon R de la courbure

La **Figure IV.3** illustre la distribution de la flèche adimensionnelle ($\bar{w}$) le long de la portée normalisée (x/L) d'une poutre en arc sandwich FG (2-1-2) sous chargement thermomécanique ($k=5$, $L/h=10$, $R=5$, $C=0$, distribution PI), pour différentes valeurs d'élévation de température ($T=0$, 5, 10 et 20).

Le profil parabolique et parfaitement symétrique par rapport à la mi-portée ($x/L=0.5$) confirme la validité physique du modèle et le strict respect des conditions aux limites d'appuis simples aux extrémités ($\bar{w}=0$). L'analyse montre qu'une hausse de la température de $T=0$ à $T=20$ engendre un accroissement substantiel et monotone de l'amplitude maximale de la déflexion au centre de l'arc.

Ce phénomène s'explique par deux facteurs physiques conjugués. D'une part, l'élévation thermique induit une dégradation thermique des propriétés mécaniques des constituants (métal et céramique), réduisant la rigidité flexionnelle globale de la structure. D'autre part, le profil thermique non uniforme de type PI génère un gradient thermique transversal sévère. Ce gradient donne naissance à des moments de flexion thermiques et à des contraintes de dilatation asymétriques qui amplifient l'effet de flèche, rendant l'arc d'autant plus flexible que la sollicitation thermique est intense.

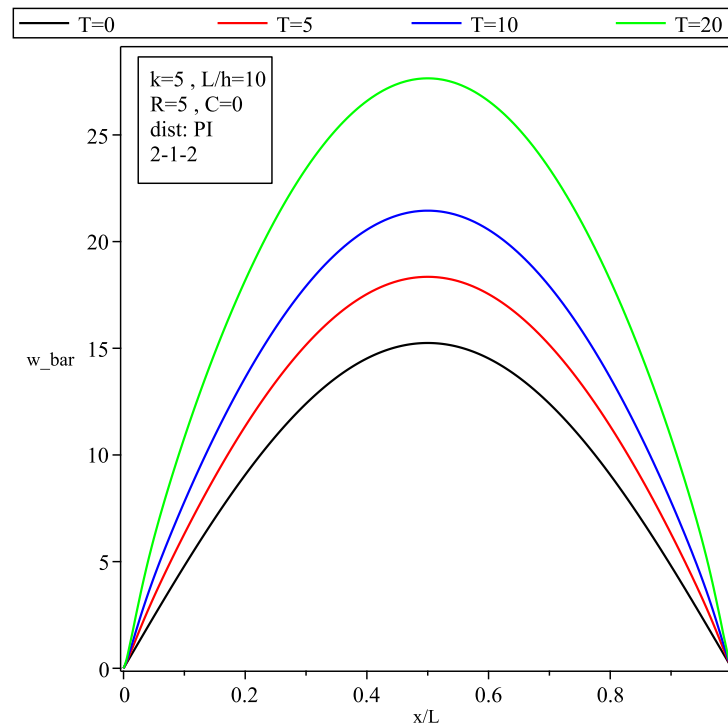


Figure. IV.3 Les flèches adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs de la température T

La Figure IV.4 illustre la distribution du déplacement axial adimensionnel ($\bar{u}$) le long de la portée normalisée (x/L) d'une poutre en arc sandwich FG (configuration 2-1-2) sous chargement thermomécanique combiné ($k=5$, $R=5$, $T=10$, $C=0$, distribution PI), pour différentes valeurs du rapport géométrique d'élancement ($L/h=20, 30, 40$ et 50).

Le profil présente une distribution rigoureusement antisymétrique par rapport au centre de l'arc ($x/L=0.5$), où le déplacement axial s'annule identiquement. Ce comportement cinématique traduit parfaitement l'effet d'expansion et de glissement induit par le couplage flexion-extension au sein d'une structure courbe simplement appuyée.

D'un point de vue physique, l'augmentation du rapport d'élancement a/h (évolution vers des structures de plus en plus minces) engendre une amplification substantielle des amplitudes maximales de ($\bar{u}$) aux extrémités de la poutre. Ce phénomène s'explique par la réduction drastique de la rigidité de la section transversale à mesure que l'épaisseur h diminue. Les arcs minces ($L/h=50$) manifestent ainsi une sensibilité géométrique accrue aux sollicitations thermomécaniques, traduisant d'importants déplacements de membrane pour accommoder les gradients de température et les charges appliquées.

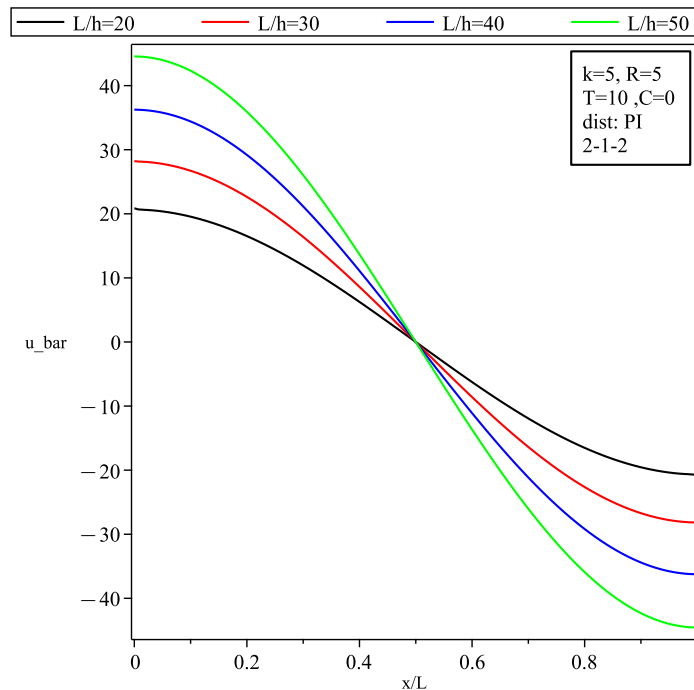


Figure. IV.4 : Les déplacements adimensionnels d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rapport géométrique L/h

La Figure IV.5 illustre la distribution longitudinale du déplacement axial adimensionnel ($\bar{u}$) le long de la portée normalisée (x/L) d'une poutre en arc sandwich FG sous l'effet combiné d'un chargement thermomécanique uniforme, pour différentes valeurs du rayon de courbure ($R = 5, 10, 20$ et ∞).

Le profil affiche une distribution rigoureusement antisymétrique par rapport au centre de la structure ($x/a=0.5$), point où le déplacement axial s'annule identiquement. Cette signature cinématique traduit le phénomène d'expansion et de glissement différentiel lié au couplage flexion-extension inhérent aux géométries courbes simplement appuyées.

L'analyse met en évidence qu'une diminution du rayon de courbure R (accentuation de l'effet de voûte) amplifie considérablement l'amplitude maximale de ($\bar{u}$) aux extrémités. À l'inverse, l'augmentation de R , tendant vers une configuration de poutre droite ($R = \infty$), atténue cette réponse de membrane. Ce comportement s'explique par la géométrie initiale : un arc plus prononcé ($R=5$) convertit davantage les sollicitations de flexion en déplacements axiaux pour accommoder les déformations induites, tandis qu'une poutre droite dissipe l'essentiel de l'énergie en déflexion pure.

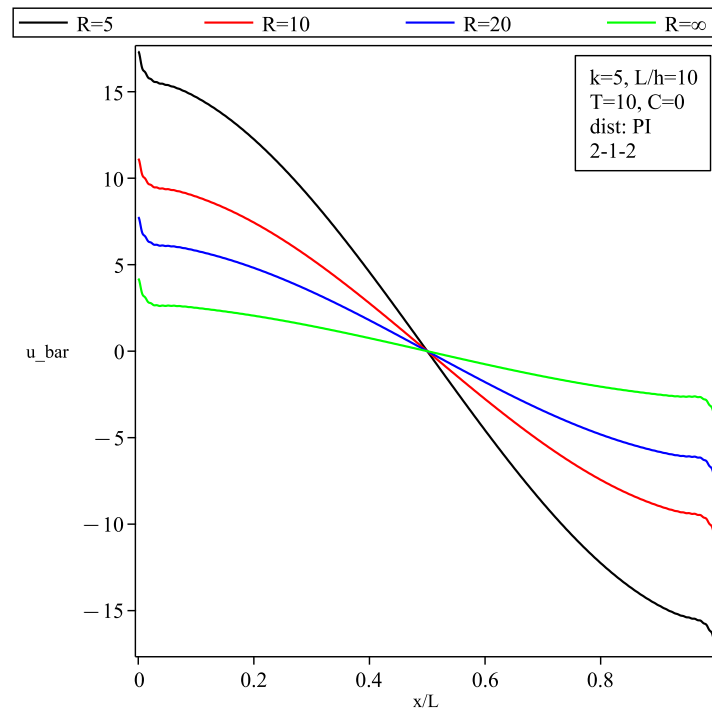


Figure. IV.5 : Les déplacements adimensionnels d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rayon R de la courbure

La Figure IV.6 illustre la distribution longitudinale du déplacement axial adimensionnel ($\bar{u}$) le long de la portée normalisée (x/L) d'une poutre en arc sandwich FG (configuration 2-1-2) sous l'effet combiné d'un chargement uniforme et de diverses intensités thermiques ($k=5$, $L/h=10$, $R=5$, $C=0$, distribution PI), pour $T=0, 5, 10$ et 20 .

Les profils adoptent une distribution rigoureusement antisymétrique par rapport au centre de l'arc ($x/L=0.5$), point d'inflexion où le déplacement axial s'annule. Cette signature cinématique traduit le phénomène d'expansion et de glissement différentiel lié au couplage flexion-extension inhérent aux géométries courbes simplement appuyées.

D'un point de vue physique, une élévation de la température de $T=0$ à $T=20$ amplifie de manière substantielle et monotone l'amplitude des déplacements axiaux, particulièrement aux voisinages des supports ($x/L=0$ et 1). Ce comportement découle de la dilatation thermique des phases constitutives et de la dégradation de la rigidité matricielle globale sous l'effet de la chaleur. Le profil thermique non uniforme (PI) génère un gradient transversal sévère qui exacerbe les efforts de membrane, forçant la structure à se déplacer axialement pour accommoder l'expansion thermique asymétrique.

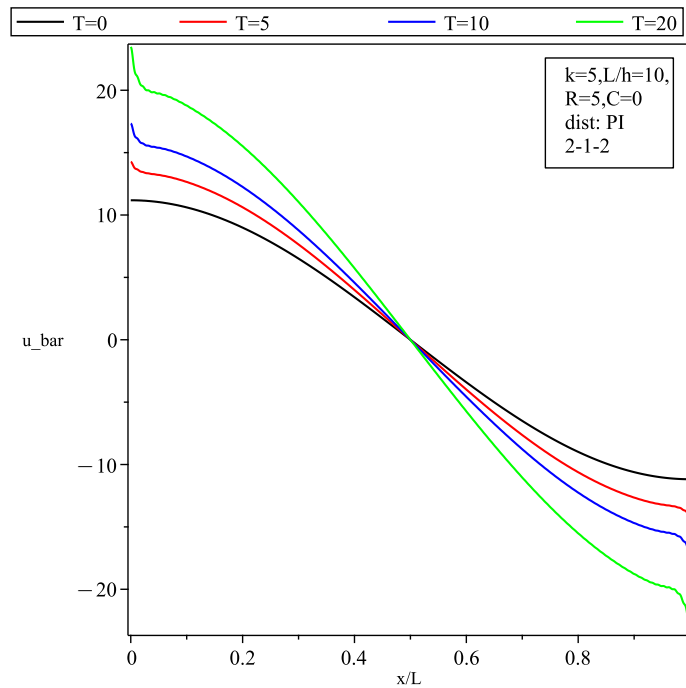


Figure. IV.6 : Les déplacements adimensionnels d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs de la température T

La Figure IV.7 illustre la distribution de la contrainte axiale adimensionnelle (σ_{xx}) à travers l'épaisseur normalisée (z/h) au niveau de la section médiane d'une poutre en arc sandwich FG (configuration 2-1-2) sous chargement thermomécanique ($k=5$, $R=5$, $T=10$, $C=0$, distribution PI), pour différents rapports géométriques d'élancement ($L/h=20$, 30 , 40 et 50).

Le profil met en évidence une distribution antisymétrique quasi-linéaire par rapport à l'axe neutre ($z/h=0$), caractérisée par des contraintes de compression en zone inférieure ($z/h < 0$) et de traction en zone supérieure ($z/h > 0$). Les ruptures de pente observées aux interfaces ($z/h = \pm 0.2$) traduisent parfaitement la discontinuité des propriétés mécaniques entre le cœur et les peaux de la structure sandwich graduée.

D'un point de vue physique, l'augmentation du rapport d'élancement L/h (évolution vers un arc de plus en plus mince) accentue de manière drastique les amplitudes des contraintes axiales extrêmes. Pour $L/h=50$, la réduction d'épaisseur diminue la rigidité de section, ce qui exacerbe les contraintes de flexion de membrane et accentue la sensibilité de l'arc mince face aux sollicitations combinées de la charge uniforme et du gradient thermique sévère (PI).

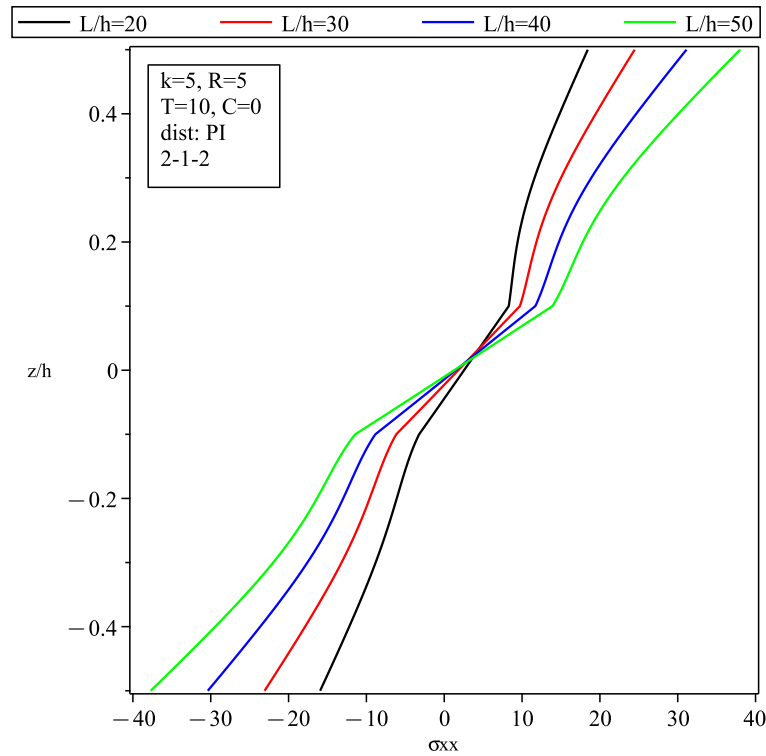


Figure. IV.7 : Les contraintes adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rapport géométrique L/h

La Figure IV.8 met en évidence le profil de la contrainte axiale adimensionnelle (σ_{xx}) à travers l'épaisseur normalisée (z/h) au niveau de la section médiane d'une poutre en arc sandwich FG sous chargement thermomécanique ($k=5$, $a/h=10$, $R=5$, $T=10$, distribution PI), en comparant différentes configurations de couches (2-1-2, 1-1-1, 1-2-1 et 1-4-1).

D'un point de vue mécanique, la distribution affiche un comportement antisymétrique global par rapport à la surface neutre ($z/h=0$), induisant des contraintes de compression dans la moitié inférieure ($z/h < 0$) et de traction dans la moitié supérieure ($z/h > 0$). La caractéristique majeure de ce graphique réside dans la présence de sauts et de fortes ruptures de pente aux interfaces des couches ($z/h = \pm 0.2$ et ± 0.3 selon la configuration). Ces discontinuités traduisent graphiquement les sauts de rigidité et la variation de la fraction volumique entre les peaux et l'âme de la poutre sandwich.

L'analyse montre que la configuration 1-4-1, caractérisée par un cœur plus épais, subit les perturbations locales et les concentrations de contraintes les plus sévères aux interfaces sous l'effet du gradient thermique PI. En revanche, les configurations à couches plus équilibrées (comme la configuration 1-2-1) lissent plus favorablement le champ de contraintes, minimisant les risques de délaminage interfacial.

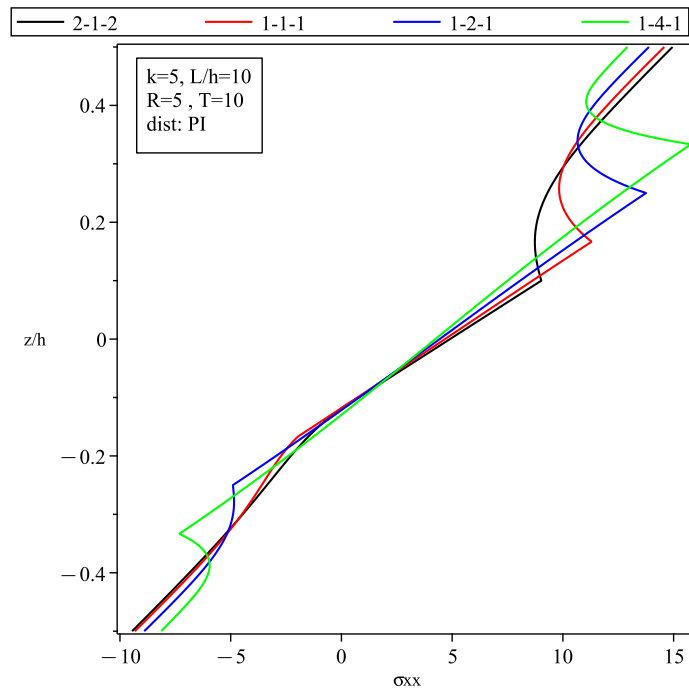


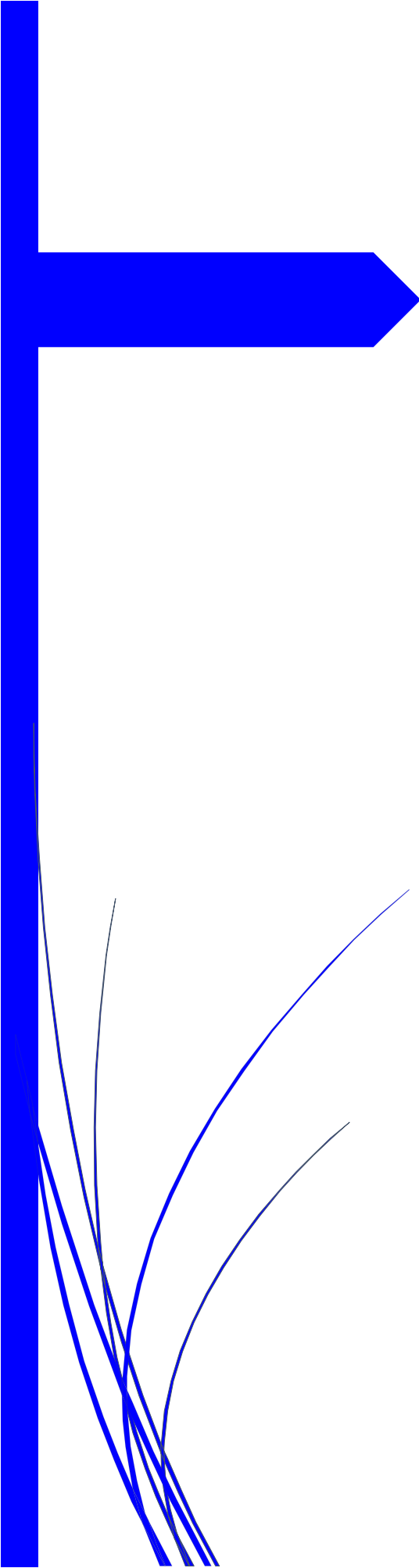
Figure. IV.8 : Les contraintes adimensionnelles d'une poutre sandwich en arc sous charge uniforme pour différentes valeurs du rapport des couches

IV.3. Conclusion

Ce chapitre a été dédié à la présentation, à l'analyse et à la discussion des résultats numériques issus de l'application de la nouvelle théorie de déformation par cisaillement élevé quasi-3D. Les investigations approfondies menées sur le comportement en flexion hygro-thermo-mécanique des poutres sandwich en arc à gradient fonctionnel (FG) permettent de dégager les conclusions majeures suivantes :

- **Validation du modèle cinématique :** La confrontation systématique de nos résultats avec les données de la littérature (notamment les travaux de Kada et al.[179]) révèle une excellente concordance. Cette convergence rigoureuse valide non seulement la précision de la théorie quasi-3D à seulement quatre inconnues, mais confirme également l'efficacité du programme de calcul développé.
- **Influence de la microstructure (indice material 'k') :** L'augmentation de l'indice matériel entraîne un accroissement monotone de la déflexion transversale ($\bar{w}$) et du déplacement axial ($\bar{u}$). Ce phénomène s'explique par la transition microstructurale d'une phase purement céramique (hautement rigide) vers une phase enrichie en métal, réduisant la rigidité flexionnelle globale de l'arc.
- **Effet géométrique de la courbure (Rayon R) :** Les résultats mettent en évidence l'importance fondamentale de l'effet de voûte. Un rayon de courbure faible ($R=5$) confère une raideur structurelle supérieure en convertissant une partie des efforts de flexion en efforts de membrane bénéfiques, limitant ainsi la déflexion par rapport à la configuration de poutre droite ($R=\infty$).

- **Sensibilité géométrique (Élancement L/h)** : L'augmentation du rapport d'élancement accentue de manière drastique les déplacements axiaux ainsi que les amplitudes extrêmes des contraintes axiales (σ_{xx}). Les structures minces manifestent une vulnérabilité géométrique accrue face aux couplages flexion-extension.
- **Sévérité des profils thermiques et configurations sandwich** : L'analyse des gradients de température met en relief la sévérité de la distribution de type PI, qui exacerbe les flèches et induit de fortes concentrations de contraintes aux interfaces des couches. À cet égard, les configurations sandwich présentant des couches équilibrées (telles que le pli 1-2-1) lissent plus favorablement le champ de contraintes axiales, minimisant ainsi les risques de délaminage interfacial comparativement aux structures à âme épaisse (type 1-4-1).



Conclusion Générale

Conclusion Générale

Le développement rapide des matériaux avancés et des méthodes modernes de modélisation a ouvert de nouvelles perspectives dans le domaine de l'analyse des structures soumises à des environnements complexes. Dans ce contexte, la compréhension du comportement hygro-thermomécanique des poutres constitue un enjeu scientifique majeur, compte tenu de l'interaction étroite entre les effets mécaniques, thermiques et hygriques qui influencent directement les performances et la durabilité des structures.

Le présent mémoire a été consacré à l'analyse du comportement hygro-thermomécanique des poutres en matériaux avancés. L'objectif principal était de contribuer à une meilleure compréhension de l'influence des paramètres environnementaux sur la réponse mécanique des structures et de mettre en évidence les mécanismes physiques gouvernant leur comportement sous l'action combinée des charges mécaniques, de la température et de l'humidité.

Dans un premier temps, une étude bibliographique approfondie a permis de présenter les matériaux avancés, leurs principales caractéristiques ainsi que leur intérêt croissant dans les applications d'ingénierie modernes. Une attention particulière a été accordée aux matériaux composites et aux matériaux à gradient fonctionnel, qui représentent aujourd'hui une alternative prometteuse aux matériaux conventionnels grâce à leurs propriétés mécaniques et thermiques améliorées.

Par ailleurs, les principales théories des poutres ont été étudiées afin d'identifier les approches les plus adaptées à la modélisation des structures en matériaux avancés. Cette analyse a mis en évidence l'importance des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé dans la description précise du comportement structural.

L'étude réalisée a montré que les effets hygrothermiques jouent un rôle déterminant dans la réponse globale des poutres. Les variations de température et d'humidité entraînent des modifications importantes des champs de déplacements, des déformations et des contraintes internes, pouvant affecter significativement la rigidité, la stabilité et les performances mécaniques de la structure.

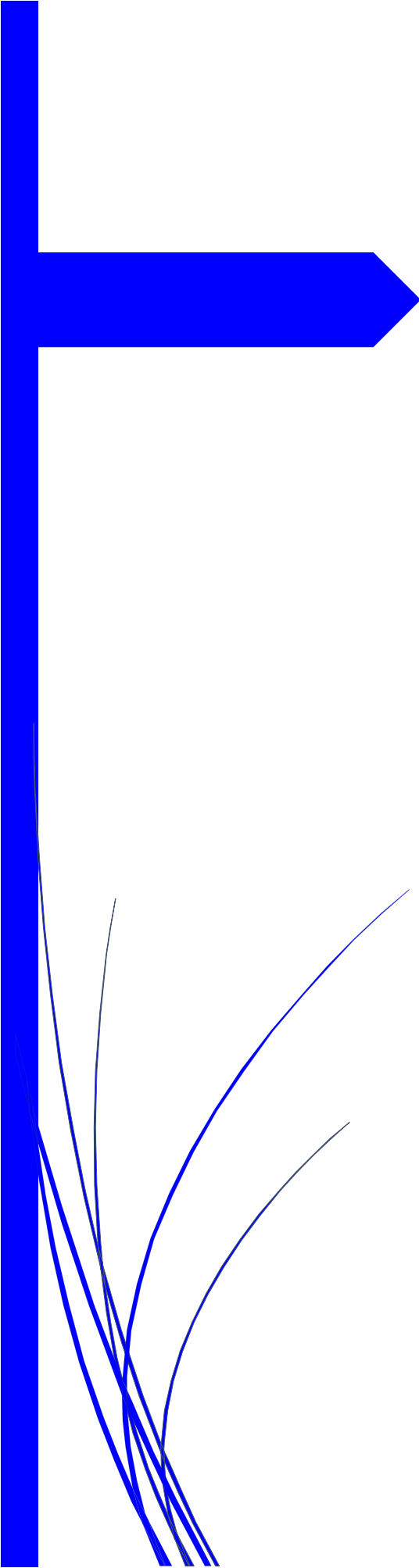
Ainsi, cette étude constitue une contribution au domaine de la mécanique des structures en matériaux avancés et apporte des éléments de compréhension utiles à l'analyse des poutres soumises à des environnements multiphysiques.

Perspectives :

- Étude de nouvelles générations de matériaux avancés.
- Intégration des effets non linéaires géométriques et matériels.
- Développement de modèles numériques par éléments finis.
- Analyse des vibrations et du flambement sous effets thermo-hygriques.

- Extension de l'étude aux plaques, coques et structures courbes.
- Prise en compte du vieillissement et de l'endommagement des matériaux.

En conclusion, l'analyse du comportement hygro-thermomécanique des poutres en matériaux avancés demeure un domaine de recherche stratégique au cœur des défis actuels de l'ingénierie moderne.



Références

-
- [1] Put, S., Vleugels, J., & Van der Biest, O. (2001). Functionally graded WC–Co materials produced by electrophoretic deposition. *Scripta materialia*, 45(10), 1139-1145. [https://doi.org/10.1016/S1359-6462\(01\)01126-5](https://doi.org/10.1016/S1359-6462(01)01126-5).
- [2] Uchida, Y. (2004). Properties of functionally graded materials, Manufactured by progressive lamination method for applications. *Aichi Inst. Technol. Res. Rep*, 39-51. <https://core.ac.uk/download/pdf/227968827.pdf>.
- [3] Cannillo, V., Lusvarghi, L., Manfredini, T., Montorsi, M., Siligardi, C., & Sola, A. (2007). Glass-alumina functionally graded materials produced by plasma spraying. *Key Engineering Materials*, 333, 227-230. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/KEM.333.227>.
- [4] Ebrahimi, F, *Advances in Functionally Graded Materials and Structures*. (INTECH Open, Croatia, 2016). <https://dx.doi.org/10.5772/62612>.
- [5] Somiya, S. (2013). *Handbook of advanced ceramics: materials, applications, processing, and properties*. Academic press. <https://doi.org/10.1016/C2010-0-66261-4>.
- [6] Miyamoto, Y., Kaysser, W. A., Rabin, B. H., Kawasaki, A., & Ford, R. G. (Eds.). (1999). *functionally graded materials: design, processing and applications* (Vol. 5). Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5301-4>.
- [7] Watanabe, Y., & Sato, H. (2011). Review fabrication of functionally graded materials under a centrifugal force. *Nanocomposites with unique properties and applications in medicine and industry*, 133, 150. DOI: 10.5772/20988.
- [8] Koizumi, M. F. G. M. (1997). FGM activities in Japan. *Composites Part B: Engineering*, 28(1-2), 1-4. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00016-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00016-9).
- [9] Koizumi, M., & Niino, M. (1995). Overview of FGM research in Japan. *Mrs Bulletin*, 20(1), 19-21. <https://doi.org/10.1557/S0883769400048867>.
- [10] Saleh, B., Jiang, J., Ma, A., Song, D., Yang, D., & Xu, Q. (2020). Review on the influence of different reinforcements on the microstructure and wear behavior of functionally graded aluminum matrix composites by centrifugal casting. *Metals and Materials International*, 26, 933-960. <http://dx.doi.org/10.1007/s12540-019-00491-0>.
- [11] Elishakoff, I. E., Pentaras, D., & Gentilini, C. (2015). *Mechanics of functionally graded material structures*. World scientific. <https://doi.org/10.1142/9505>.

-
- [12] Sarangi, S. K. (2021). Modeling and Analysis of Smart Functionally Graded Structures. In *Functionally Graded Materials (FGMs)* (pp. 139-168). CRC Press.
- [13] Liu, Z., Meyers, M. A., Zhang, Z., & Ritchie, R. O. (2017). Functional gradients and heterogeneities in biological materials: Design principles, functions, and bioinspired applications. *Progress in Materials Science*, 88, 467-498. <https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2017.04.013>.
- [14] Zhang, C., Chen, F., Huang, Z., Jia, M., Chen, G., Ye, Y & Lavernia, E. J. (2019). Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A*, 764, 138209. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138209>.
- [15] Marin, L. (2005). Numerical solution of the Cauchy problem for steady-state heat transfer in two-dimensional functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 42(15), 4338-4351. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.01.005>.
- [16] Chikh, A. (2019). Analysis of static behavior of a P-FGM Beam. *Journal of Materials and Engineering Structures «JMES»*, 6(4), 513-524. <https://orcid.org/0000-0002-5753-7090>.
- [17] R. Mahamood, TC Jen, S. Akinlabi, S. Hassan, M. Shatalov, E. Murashkin, E. Akinlabi. (2021) *Functionally Graded Materials: An Introduction*. In *Functionally Graded Materials (FGMs) Fabrication, Properties, Applications, and Advancements*, 1-10. CRC Press.
- [18] R.M. Mahamood, E.T. Akinlabi, M. Shukla, S. Pityana (2014). Evolutionary additive Manufacturing: an overview. *Lasers in Engineering* 27, 161–178. <https://hdl.handle.net/10210/13128>.
- [19] Shahrjerdi, A., Mustapha, F., Bayat, M., Sapuan, S. M., & Majid, D. L. A. (2011). Fabrication of functionally graded hydroxyapatite-titanium by applying optimal sintering procedure and powder metallurgy. *Int. J. Phys. Sci*, 6(9), 2258-2267. 10.5897/IJPS11.223.
- [20] Dumont, A. L., Bonnet, J. P., Chartier, T., & Ferreira, J. M. (2001). MoSi₂/Al₂O₃ FGM: elaboration by tape casting and SHS. *Journal of the European Ceramic Society*, 21(13), 2353-2360. 10.1016/S0955-2219(01)00198-4.
- [21] Katayama, T., Sukenaga, S., Saito, N., Kagata, H., & Nakashima, K. (2011, October). Fabrication of Al₂O₃-W functionally graded materials by slipcasting method. In *IOP*

-
- Conference Series: Materials Science and Engineering (Vol. 18, No. 20, p. 202023). IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/18/20/202023>.
- [22] Yeo, J. G., Jung, Y. G., & Choi, S. C. (1998). Design and microstructure of ZrO₂/SUS316 functionally graded materials by tape casting. *Materials Letters*, 37(6), 304-311. [https://doi.org/10.1016/S0167-577X\(98\)00111-6](https://doi.org/10.1016/S0167-577X(98)00111-6).
- [23] Saiyathibrahim, A., Nazirudeen, M. S. S., & Dhanapal, P. (2015, August). Processing techniques of functionally graded materials—a review. In *International Conference on Systems, Science, Control, Communication, Engineering and Technology* (Vol. 1, pp. 98-105).
- [24] Mahamood, R. M., & Mahamood, R. M. (2018). Introduction to Laser Metal Deposition Process. *Laser Metal Deposition Process of Metals, Alloys, and Composite Materials*, 1-9. https://doi.org/10.1007/978-3-319-64985-6_1.
- [25] Fang, J., Gu, J., & Wang, H. (2018). Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 136, 188-199.
- [26] El-Galy, I. M., Saleh, B. I., & Ahmed, M. H. (2019). Functionally graded materials classifications and development trends from industrial point of view. *SN Applied Sciences*, 1, 1-23. <https://doi.org/10.1007/s42452-019-1413-4>.
- [27] Watanabe, Y., Sato, H., & Miura-Fujiwara, E. (2015). Functionally graded metallic biomaterials. *Advances in Metallic Biomaterials: Processing and Applications*, 181-209. https://doi.org/10.1007/978-3-662-46842-5_9.
- [28] Loh, G. H., Pei, E., Harrison, D., & Monzón, M. D. (2018). An overview of functionally graded additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 23, 34-44. <https://doi.org/10.1016/j.addma.2018.06.023>.
- [29] Kawasaki, A., & Watanabe, R. (1997). Concept and P/M fabrication of functionally gradient materials. *Ceramics international*, 23(1), 73-83. [https://doi.org/10.1016/0272-8842\(95\)00143-3](https://doi.org/10.1016/0272-8842(95)00143-3).
- [30] Miteva, A., & Bouzekova-Penkova, A. (2021). Module for wireless communication in aerospace vehicles. *Aerospace Research in Bulgaria*, 33, 195-209. https://ui.adsabs.harvard.edu/link_gateway/2021ARBL...33..195M/doi:10.3897/arb.v33.e14.
- [31] Udupa, G., & Gangadharan, K. V. (2012, March). Future applications of carbon nanotube reinforced functionally graded composite materials. In *IEEE-international*
-

-
- conference on advances in engineering, science and management (ICAESM-2012) (pp. 399-404). IEEE. <https://idr.nitk.ac.in/jspui/handle/123456789/8114>.
- [32] MATSUO, S., WATARI, F., & OHATA, N. (2001). Fabrication of a functionally graded dental composite resin post and core by laser lithography and finite element analysis of its stress relaxation effect on tooth root. *Dental materials journal*, 20(4), 257-274. <https://doi.org/10.4012/dmj.20.257>.
- [33] Watari, F., Yokoyama, A., Omori, M., Hirai, T., Kondo, H., Uo, M., & Kawasaki, T. (2004). Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application. *Composites Science and Technology*, 64(6), 893-908. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2003.09.005>.
- [34] Chen, W. W., Rajendran, A. M., Song, B., & Nie, X. (2007). Dynamic fracture of ceramics in armor applications. *Journal of the American Ceramic Society*, 90(4), 1005-1018. <https://doi.org/10.1111/j.1551-2916.2007.01515.x>.
- [35] Niino, M., Kisara, K., & Mori, M. (2005, April). Feasibility study of FGM technology in space solar power systems (SSPS). In *Materials Science Forum* (Vol. 492, pp. 163-170). Trans Tech Publications Ltd. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.492-493.163>.
- [36] Mueller, E., Drašar, Č., Schilz, J., & Kaysser, W. A. (2003). Functionally graded materials for sensor and energy applications. *Materials Science and Engineering: A*, 362(1-2), 17-39. [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00581-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00581-1).
- [37] Herrmann, M., & Sobek, W. (2017). Functionally graded concrete: Numerical design methods and experimental tests of mass-optimized structural components. *Structural Concrete*, 18(1), 54-66. <https://doi.org/10.1002/suco.201600011>.
- [38] Mori, T., & Tanaka, K. (1973). Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metallurgica*, 21(5), 571-574. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(73\)90064-3](https://doi.org/10.1016/0001-6160(73)90064-3).
- [39] Jha, D. K., Kant, T., & Singh, R. K. (2013). A critical review of recent research on functionally graded plates. *Composite structures*, 96, 833-849. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.09.001>.
- [40] Benveniste, Y. (1987). A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials. *Mechanics of materials*, 6(2), 147-157. [https://doi.org/10.1016/0167-6636\(87\)90005-6](https://doi.org/10.1016/0167-6636(87)90005-6).
-

-
- [41] Karami, B., Shahsavari, D., Janghorban, M., & Li, L. (2019). Influence of homogenization schemes on vibration of functionally graded curved microbeams. *Composite Structures*, 216, 67-79. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.089>.
- [42] Voigt, W. (1889). Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Annalen der physik*, 274(12), 573-587. <https://doi.org/10.1002/andp.18892741206>.
- [43] Nemati, A. R., & Mahmoodabadi, M. J. (2020). Effect of micromechanical models on stability of functionally graded conical panels resting on Winkler–Pasternak foundation in various thermal environments. *Archive of Applied Mechanics*, 90(5), 883-915. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00419-019-01646-6>.
- [44] Ziou, H., Guenfoud, H., & Guenfoud, M. (2016). Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. *International Journal of Structural Engineering*, 7(3), 239-261. <https://doi.org/10.1504/IJSTRUCTE.2016.077719>.
- [45] Jin, Z. H., & Batra, R. C. (1996). Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock. *Journal of thermal stresses*, 19(4), 317-339. <https://doi.org/10.1080/01495739608946178>.
- [46] Wakashima, K., Hirano, T., & Niino, M. (1990). Functionally Gradient Materials (Fgm) Architecture: A New Type of Ceramic-Metal Assemblage Designed for Hot Structural Components.
- [47] S. Suresh, A. Mortensen (1998). *Fundamentals of functionally graded materials*. 1sted. London: IOM Communications.
- [48] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2006). Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 43(13), 3657-3674. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.04.011>.
- [49] Chi, S. H., & Chung, Y. L. (2002). Cracking in sigmoid functionally graded coating. *J Mech*, 18(2002), 41-53p.
- [50] Kim, J. H., & Paulino, G. H. (2002). Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8), 1903-1935. <https://doi.org/10.1002/nme.364>.
-

-
- [51] Zhang, C., Savaidis, A., Savaidis, G., & Zhu, H. (2003). Transient dynamic analysis of a cracked functionally graded material by a BIEM. *Computational materials science*, 26, 167-174. [https://doi.org/10.1016/S0927-0256\(02\)00395-6](https://doi.org/10.1016/S0927-0256(02)00395-6).
- [52] Delale, F., & Erdogan, F. (1983). The crack problem for a nonhomogeneous plane. *ASME Journal of Applied Mechanics* 50, 609–614. <https://doi.org/10.1115/1.3167098>.
- [53] Love, A. E. H. (2013). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge university press. 978-1-107-61809-1.
- [54] Kirchhoff, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1850(40), 51-88. <http://eudml.org/doc/147439>.
- [55] Reissner, E., & Stavsky, Y. (1961). Bending and stretching of certain types of heterogeneous anisotropic elastic plates. <https://doi.org/10.1115/1.3641719>.
- [56] Yang, P. C., Norris, C. H., & Stavsky, Y. (1966). Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of solids and structures*, 2(4), 665-684. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(66\)90045-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(66)90045-X).
- [57] Reddy, J. N. (2003). *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press. <https://doi.org/10.1201/b12409>.
- [58] Reddy, J. N. (2006). *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press. <https://doi.org/10.1201/9780849384165>.
- [59] Timoshenko, S. P., & Gere, J. M. (1972). *Mechanics of materials*. Van nostrand Reinhold Company. New York. 9780442226374.
- [60] Reissner, E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. <https://doi.org/10.1115/1.4009435>.
- [61] Mindlin, R. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. of Appl. Mech*, 18(1), 31-38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>.
- [62] Khandan, R., Noroozi, S., Sewell, P., & Vinney, J. (2012). The development of laminated composite plate theories: a review. *Journal of Materials Science*, 47, 5901-5910. <http://dx.doi.org/10.1007/s10853-012-6329-y>.
- [63] Yu, Y. Y. (1959). Simple thickness-shear modes of vibration of infinite sandwich plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 26, 679–681. <https://doi.org/10.1115/1.4012138>.
-

-
- [64] Chow, T. S. (1971). On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. *Journal of Composite Materials*, 5(3), 306-319. <https://doi.org/10.1177/002199837100500302>.
- [65] Whitney, J. M. (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 40, 302–304. <https://doi.org/10.1115/1.3422950>.
- [66] Whitney, J. M. (1972). Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates. *Journal of Composite materials*, 6(3), 426-440. <https://doi.org/10.1177/002199837200600301>.
- [67] Noor, A. K., & Peters, J. M. (1989). A posteriori estimates for the shear correction factors in multi-layered composite cylinders. *Journal of engineering mechanics*, 115(6), 1225-1244. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(91\)90162-9](https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90162-9).
- [68] Noor, A. K., Burton, W. S., & Peters, J. M. (1990). Predictor-corrector procedures for stress and free vibration analyses of multilayered composite plates and shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 82(1-3), 341-363. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(90\)90171-H](https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90171-H).
- [69] Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2006). A Reissner-Mindlin Plate Model for Functionally Graded Materials. In *III European Conference on Computational Mechanics: Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering: Book of Abstracts* (pp. 564-564). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/1-4020-5370-3_564.
- [70] Efraim, E., & Eisenberger, M. (2007). Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates. *Journal of Sound and Vibration*, 299(4-5), 720-738. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.06.068>.
- [71] Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2007). Shear correction factors for functionally graded plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 14(8), 567-575. <http://dx.doi.org/10.1080/15376490701672575>.
- [72] Nguyen, T. K., Sab, K., & Bonnet, G. (2008). First-order shear deformation plate models for functionally graded materials. *Composite Structures*, 83(1), 25-36. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.03.004>.
- [73] Hosseini-Hashemi, S., Taher, H. R. D., Akhavan, H., & Omid, M. (2010). Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation

-
- plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34(5), 1276-1291. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2009.08.008>.
- [74] Reissner, E. (1963). On the derivation of boundary conditions for plate theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 276(1365), 178-186. <https://doi.org/10.1098/rspa.1963.0201>.
- [75] Kant, T. A. R. U. N., & Swaminathan, K. (2002). Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite structures*, 56(4), 329-344. [http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00017-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00017-X).
- [76] Ghugal, Y. M., & Shimpi, R. P. (2002). A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *Journal of reinforced plastics and composites*, 21(9), 775-813. <http://dx.doi.org/10.1106/073168402025748>.
- [77] Whitney, J. M., & Sun, C. T. (1973). A higher order theory for extensional motion of laminated composites. *Journal of Sound and Vibration*, 30(1), 85-97. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80052-5](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80052-5).
- [78] Levinson, M. (1980). An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7(6), 343-350. [https://doi.org/10.1016/0093-6413\(80\)90049-X](https://doi.org/10.1016/0093-6413(80)90049-X).
- [79] Reddy, J. N. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 51, 745-752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
- [80] Touratier, M. (1991). An efficient standard plate theory. *International journal of engineering science*, 29(8), 901-916. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(91\)90165-Y](https://doi.org/10.1016/0020-7225(91)90165-Y).
- [81] Soldatos, K. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94(3), 195-220. <https://doi.org/10.1007/BF01176650>.
- [82] Karama, M., Afaq, K. S., & Mistou, S. (2003). Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity. *International Journal of solids and structures*, 40(6), 1525-1546. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00647-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00647-9).
- [83] Sankar, B. V. (2001). An elasticity solution for functionally graded beams. *Composites Science and Technology*, 61(5), 689-696.
-

-
- [84] Chakraborty, A., & Gopalakrishnan, S. (2003). A spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, 40(10), 2421-2448.
- [85] Chakraborty, A., Gopalakrishnan, S., & Reddy, J. (2003). A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials. *International journal of mechanical sciences*, 45(3), 519-539.
- [86] Kadoli, R., Akhtar, K., & Ganesan, N. (2008). Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. *Applied mathematical modelling*, 32(12), 2509-2525.
- [87] Shi, G., Lam, K. Y., & Tay, T. E. (1998). On efficient finite element modeling of composite beams and plates using higher-order theories and an accurate composite beam element. *Composite Structures*, 41(2), 159-165.
- [88] Kutíš, V., Murín, J., Belak, R., & Paulech, J. (2011). Beam element with spatial variation of material properties for multiphysics analysis of functionally graded materials. *Computers & structures*, 89(11-12), 1192-1205.
- [89] Pindera, M. J., & Dunn, P. (1995). An evaluation of a coupled microstructural approach for the analysis of functionally graded composites via the finite-element method, NASA CR 195455. Lewis Research Center, Cleveland, OH.
- [90] Reddy, J. (1999). On the dynamic behaviour of the Timoshenko, beam finite elements. *Sadhana*, 24, 175-198.
- [91] Huang, D. J., Ding, H. J., & Chen, W. Q. (2007). Analytical solution for functionally graded anisotropic cantilever beam under thermal and uniformly distributed load. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, 8(9), 1351-1355.
- [92] Yang, J., & Chen, Y. (2008). Free vibration and buckling analyses of functionally graded beams with edge cracks. *Composite Structures*, 83(1), 48-60.
- [93] Lü, C. F., Chen, W. Q., Xu, R. Q., & Lim, C. W. (2008). Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams. *International Journal of Solids and Structures*, 45(1), 258-275.
- [94] Benatta, M. A., Mechab, I., Tounsi, A., & Bedia, E. A. (2008). Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. *Computational Materials Science*, 44(2), 765-773.

-
- [95] Kang, Y. A., & Li, X. F. (2009). Bending of functionally graded cantilever beam with power-law non-linearity subjected to an end force. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(6), 696-703.
- [96] Sharma, R., Jadon, V. K., & Singh, B. (2015). A review on the finite element methods for heat conduction in functionally graded materials. *Journal of the Institution of Engineers (India): Series C*, 96, 73-81.
- [97] Chareonsuk, J., & Vessakosol, P. (2011). Numerical solutions for functionally graded solids under thermal and mechanical loads using a high-order control volume finite element method. *Applied Thermal Engineering*, 31(2-3), 213-227.
- [98] Frostig, Y., & Baruch, M. (1990). Bending of sandwich beams with transversely flexible core. *AIAA journal*, 28(3), 523-531.
- [99] Frostig, Y. B. M. V. O. S. I., Baruch, M., Vilnay, O., & Sheinman, I. (1992). High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core. *Journal of Engineering Mechanics*, 118(5), 1026-1043.
- [100] Apetre, N. A., Sankar, B. V., & Ambur, D. R. (2008). Analytical modeling of sandwich beams with functionally graded core. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 10(1), 53-74.
- [101] Yarasca, J., Mantari, J. L., & Arciniega, R. A. (2016). Hermite–Lagrangian finite element formulation to study functionally graded sandwich beams. *Composite Structures*, 140, 567-581.
- [102] Karamanlı, A. (2017). Bending behaviour of two directional functionally graded sandwich beams by using a quasi-3d shear deformation theory. *Composite structures*, 174, 70-86.
- [103] Nguyen, T. K., & Nguyen, B. D. (2015). A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 17(6), 613-631.
- [104] Li, W., Ma, H., & Gao, W. (2019). A higher-order shear deformable mixed beam element model for accurate analysis of functionally graded sandwich beams. *Composite Structures*, 221, 110830.
- [105] Kurtaran, H. (2015). Large displacement static and transient analysis of functionally graded deep curved beams with generalized differential quadrature method. *Composite Structures*, 131, 821-831.
-

-
- [106] Eroglu, U. (2016). Large deflection analysis of planar curved beams made of functionally graded materials using variational iterative method. *Composite Structures*, 136, 204-216.
- [107] Thurnherr, C., Groh, R. M., Ermanni, P., & Weaver, P. M. (2016). Higher-order beam model for stress predictions in curved beams made from anisotropic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 97, 16-28.
- [108] Sayyad, A. S., & Avhad, P. V. (2019). On static bending, elastic buckling and free vibration analysis of symmetric functionally graded sandwich beams. *Journal of Solid Mechanics*, 11(1), 166-180.
- [109] Koutoati, K., Mohri, F., & Daya, E. M. (2021). Finite element approach of axial bending coupling on static and vibration behaviors of functionally graded material sandwich beams. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 28(15), 1537-1553
- [110] Avhad, P. V., & Sayyad, A. S. (2020). On the static deformation of FG sandwich beams curved in elevation using a new higher order beam theory. *Sādhanā*, 45(1), 188.
- [111] Sayyad, A. S., & Ghugal, Y. M. (2019). A sinusoidal beam theory for functionally graded sandwich curved beams. *Composite Structures*, 226, 111246.
- [112] Ching HK, Chen JK (2007) Thermal stress analysis of functionally graded composites with temperature-dependent material proper-ties. *J Mech Mater Struct* 2(4):633–653. <https://doi.org/10.2140/jomms.2007.2.633>
- [113] Arbind ARCHANA, Reddy JN, Srinivasa AR (2014) Modified couple stress-based third-order theory for nonlinear analysis of function-ally graded beams. *Latin Am J Solids Struct* 11:459–487. <https://doi.org/10.1590/S1679-78252014000300006>
- [114] Zhou HM, Zhang XM, Wang ZY (2019) Thermal analysis of 2D FGM beam subjected to thermal loading using meshless weighted least-square method. *Math Probl Eng*. <https://doi.org/10.1155/2019/2541707>
- [115] Akbas SD (2022) Moving-load dynamic analysis of AFG beams under thermal effect. *Steel Compos Struct* 42(5):649–655. <https://doi.org/10.12989/scs.2022.42.5.649>
- [116] Alshorbagy, A. E., Eltaher, M. A., & Mahmoud, F. (2011). Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied mathematical modelling*, 35(1), 412-425.
-

-
- [117] Şimşek, M., & Kocatürk, T. (2009). Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. *Composite Structures*, 90(4), 465-473.
- [118] Khalili, S. M. R., Jafari, A. A., & Eftekhari, S. A. (2010). A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. *Composite Structures*, 92(10), 2497-2511.
- [119] Pradhan, S. C., & Murmu, T. (2009). Thermo-mechanical vibration of FGM sandwich beam under variable elastic foundations using differential quadrature method. *Journal of Sound and Vibration*, 321(1-2), 342-362.
- [120] Shahba, A., & Rajasekaran, S. (2012). Free vibration and stability of tapered Euler–Bernoulli beams made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*, 36(7), 3094-3111.
- [121] Liu, Y., & Shu, D. W. (2014). Free vibration analysis of exponential functionally graded beams with a single delamination. *Composites Part B: Engineering*, 59, 166-172.
- [122] Aydogdu, M., & Taskin, V. (2007). Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Materials & design*, 28(5), 1651-1656.
- [123] Su, H., Banerjee, J. R., & Cheung, C. W. (2013). Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106, 854-862.
- [124] Su, H., & Banerjee, J. R. (2015). Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams. *Computers & Structures*, 147, 107-116.
- [125] Sina, S. A., Navazi, H. M., & Haddadpour, H. (2009). An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams. *Materials & Design*, 30(3), 741-747.
- [126] Li, X. F. (2008). A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. *Journal of Sound and vibration*, 318(4-5), 1210-1229.
- [127] Pradhan, K. K., & Chakraverty, S. (2013). Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method. *Composites Part B: Engineering*, 51, 175-184.
-

-
- [128] Xiang, H. J., & Yang, J. (2008). Free and forced vibration of a laminated FGM Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction. *Composites Part B: Engineering*, 39(2), 292-303.
- [129] Li, S. R., Wan, Z. Q., & Zhang, J. H. (2014). Free vibration of functionally graded beams based on both classical and first-order shear deformation beam theories. *Applied Mathematics and Mechanics*, 35(5), 591-606.
- [130] Aydogdu, M., & Taskin, V. (2007). Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. *Materials & design*, 28(5), 1651-1656.
- [131] Şimşek, M. (2010). Vibration analysis of a functionally graded beam under a moving mass by using different beam theories. *Composite structures*, 92(4), 904-917.
- [132] Şimşek, M. (2010). Fundamental frequency analysis of functionally graded beams by using different higher-order beam theories. *Nuclear Engineering and Design*, 240(4), 697-705.
- [133] Mahi, A., Bedia, E. A., Tounsi, A., & Mechab, I. (2010). An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions. *Composite structures*, 92(8), 1877-1887.
- [134] Thai, H. T., & Vo, T. P. (2012). Bending and free vibration of functionally graded beams using various higher-order shear deformation beam theories *International journal of mechanical sciences*, 62(1), 57-66.
- [135] Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., & Inam, F. (2014). Static and vibration analysis of functionally graded beams using refined shear deformation theory. *Meccanica*, 49, 155-168.
- [136] Vo, T. P., Thai, H. T., Nguyen, T. K., Maheri, A., & Lee, J. (2014). Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory. *Engineering structures*, 64, 12-22.
- [137] Shen, H. S., & Wang, Z. X. (2014). Nonlinear analysis of shear deformable FGM beams resting on elastic foundations in thermal environments. *International Journal of Mechanical Sciences*, 81, 195-206.
- [138] Hadji, L., Zouatnia, N., & Kassoul, A. (2017). Wave propagation in functionally graded beams using various higher-order shear deformation beams theories. *Structural Engineering and Mechanics, an Int'l Journal*, 62(2), 143-149.
-

-
- [139] Fang, J., Gu, J., & Wang, H. (2018). Size-dependent three-dimensional free vibration of rotating functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 136, 188-199.
- [140] Eltaher MA, Akba,s,SD (2020) Transient response of 2D function-ally graded beam structure. *Struct EngMech Int J* 75(3):357–367. <https://doi.org/10.12989/sem.2020.75.3.357>
- [141] Guptaa S, ChalakHD (2022) Bending and free vibration analysis of FG sandwich beams using higher-order zigzag theory. *Steel Compos Struct* 45(4):483 499. <https://doi.org/10.12989/scs.2022.45.4.483>
- [142] Du M, Liu J, Ye W, Yang F, Lin G (2022) A new semi-analytical approach for bending, buckling and free vibration analyses of power law functionally graded beams. *Struct Eng Mech* 81(2):179 194. <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.2.179>
- [143] Shahsiah, R., Nikbin, K. M., & Eslami, M. R. (2009). Thermal buckling of functionally graded beams. *Iranian Journal of Mechanical Engineering*10: 65–81.
- [144] Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2010). Thermal buckling analysis of functionally graded material beams. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6, 229-238.
- [145] Kiani, Y. A. S. S. E. R., & Eslami, M. R. (2013). Thermomechanical buckling of temperature-dependent FGM beams. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 10, 223-246.
- [146] Kiani, Y., Rezaei, M., Taheri, S., & Eslami, M. R. (2011). Thermo-electrical buckling of piezoelectric functionally graded material Timoshenko beams. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 7, 185-197.
- [147] Kiani, Y., Taheri, S., & Eslami, M. R. (2011). Thermal buckling of piezoelectric functionally graded material beams. *Journal of Thermal Stresses*, 34(8), 835-850.
- [148] Fu, Y., Wang, J., & Mao, Y. (2012). Nonlinear analysis of buckling, free vibration and dynamic stability for the piezoelectric functionally graded beams in thermal environment. *Applied Mathematical Modelling*, 36(9), 4324-4340.
- [149] Wattanasakulpong, N., Prusty, B. G., & Kelly, D. W. (2011). Thermal buckling and elastic vibration of third order shear deformable functionally graded beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 53(9), 734-743.
-

-
- [150] Ghiasian, S. E., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2013). Dynamic buckling of suddenly heated or compressed FGM beams resting on nonlinear elastic foundation. *Composite structures*, 106, 225-234.
- [151] Ghiasian, S. E., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2015). Nonlinear thermal dynamic buckling of FGM beams. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 54, 232-242.
- [152] Tounsi, A., Semmah, A., & Bousahla, A. A. (2013). Thermal buckling behavior of nanobeams using an efficient higher-order nonlocal beam theory. *Journal of Nanomechanics and Micromechanics*, 3(3), 37-42.
- [153] She, G. L., Shu, X., & Ren, Y. R. (2017). Thermal buckling and postbuckling analysis of piezoelectric FGM beams based on high-order shear deformation theory. *Journal of Thermal Stresses*, 40(6), 783-797.
- [154] She, G. L., Yuan, F. G., & Ren, Y. R. (2017). Thermal buckling and post-buckling analysis of functionally graded beams based on a general higher-order shear deformation theory. *Applied Mathematical Modelling*, 47, 340-357.
- [155] Ebrahimi, F., & Barati, M. R. (2017). Buckling analysis of smart size-dependent higher order magneto-electro-thermo-elastic functionally graded nanosize beams. *Journal of Mechanics*, 33(1), 23-33.
- [156] Kahya, V., & Turan, M. (2018). Vibration and stability analysis of functionally graded sandwich beams by a multi-layer finite element. *Composites Part B: Engineering*, 146, 198-212.
- [157] Nguyen, T. K., Nguyen, T. T. P., Vo, T. P., & Thai, H. T. (2015). Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 76, 273-285.
- [158] Liu, Y., Su, S., Huang, H., & Liang, Y. (2019). Thermal-mechanical coupling buckling analysis of porous functionally graded sandwich beams based on physical neutral plane. *Composites Part B: Engineering*, 168, 236-242.
- [159] Al-Shujairi, M., & Mollamahmutoğlu, Ç. (2018). Buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich micro-beams resting on elastic foundation by using nonlocal strain gradient theory in conjunction with higher order shear theories under thermal effect. *Composites Part B: Engineering*, 154, 292-312.
- [160] Lanc, D., VO, T. P., Turkalj, G., & Lee, J. (2015). Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams. *Thin-Walled Structures*, 86, 148-156.
-

-
- [161] Huang, Y., Zhang, M., & Rong, H. (2016). Buckling analysis of axially functionally graded and non-uniform beams based on Timoshenko theory. *Acta Mechanica Sinica*, 29(2), 200-207.
- [162] Heydari, A., Jalali, A., & Nemati, A. (2017). Buckling analysis of circular functionally graded plate under uniform radial compression including shear deformation with linear and quadratic thickness variation on the Pasternak elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*, 41, 494-507.
- [163] Shafiei, N., & Kazemi, M. (2017). Buckling analysis on the bi-dimensional functionally graded porous tapered nano-/micro-scale beams. *Aerospace Science and Technology*, 66, 1-11.
- [164] Li, X., Li, L., Hu, Y., Ding, Z., & Deng, W. (2017). Bending, buckling and vibration of axially functionally graded beams based on nonlocal strain gradient theory. *Composite Structures*, 165, 250-265.
- [165] Nguyen, T. T., Thang, P. T., & Lee, J. (2017). Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams. *Composite structures*, 160, 952-963.
- [166] Babaei, H., Eslami, M. R., & Khorshidvand, A. R. (2020). Thermal buckling and postbuckling responses of geometrically imperfect FG porous beams based on physical neutral plane. *Journal of Thermal Stresses*, 43(1), 109-131. doi:10.1080/01495739.2019.1660600.
- [167] Ebrahimi, F., & Jafari, A. (2016). A higher-order thermomechanical vibration analysis of temperature-dependent FGM beams with porosities. *Journal of Engineering*, 2016. doi:10.1155/2016/9561504.
- [168] Mirjavadi, S. S., Matin, A., Shafiei, N., Rabby, S., & Mohasel Afshari, B. (2017). Thermal buckling behavior of two-dimensional imperfect functionally graded microscale-tapered porous beam. *Journal of Thermal Stresses*, 40(10), 1201-1214. doi: 10.1080/01495739.2017.1332962.
- [169] Marzec, I., Bobiński, J., Tejchman, J., & Schönnagel, J. (2021). Finite element analysis on failure of reinforced concrete corner in sewage tank under opening bending moment. *Engineering Structures*, 228, 111506. doi: 10.1016/j.engstruct.2016.12.039.
- [170] Aria, A. I., Rabczuk, T., & Friswell, M. I. (2019). A finite element model for the thermo-elastic analysis of functionally graded porous nanobeams. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 77, 103767. doi: 10.1016/j.euromechsol.2019.04.002.
-

-
- [171] Touloukian, Y. S. (1966). Thermophysical Properties of High Temperature Solid Materials. Volume 6. Intermetallics, Cermets, Polymers, and Composite Systems. Part 2. Cermets, Polymers, Composite Systems. Dtic Document.
- [172] Zenkour, A. M., Allam, M. N. M., & Radwan, A. F. (2014). Effects of transverse shear and normal strains on FG plates resting on elastic foundations under hygro-thermo-mechanical loading. *International Journal of Applied Mechanics*, 6(05), 1450063. <https://doi.org/10.1142/S175882511450063X>
- [173] Akbarzadeh, A. H., Abbasi, M., & Eslami, M. R. (2012). Coupled thermoelasticity of functionally graded plates based on the third-order shear deformation theory. *Thin-Walled Structures*, 53, 141-155. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2012.01.009>
- [174] Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2013). An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 101-110. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.09.034>
- [175] Zenkour, A. M., & Sobhy, M. (2010). Thermal buckling of various types of FGM sandwich plates. *Composite Structures*, 93(1), 93-102. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.06.012>
- [176] Zhang, D. G. (2014). Thermal post-buckling and nonlinear vibration analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory. *Meccanica*, 49, 283-293. <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-013-9793-9>
- [177] Fazzolari, F. A., & Carrera, E. (2014). Thermal stability of FGM sandwich plates under various through-the-thickness temperature distributions. *Journal of Thermal Stresses*, 37(12), 1449-1481. <http://dx.doi.org/10.1080/01495739.2014.937251>
- [178] Katayama, T., Sukenaga, S., Saito, N., Kagata, H., & Nakashima, K. (2011, October). Fabrication of Al₂O₃-W functionally graded materials by slipcasting method. In *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (Vol. 18, No. 20, p. 202023). IOP Publishing. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/18/20/202023>.
- [179] K. Draiche, A. A. Bousahla, A. Tounsi, and M. Hussain, 'An integral shear and normal deformation theory for bending analysis of functionally graded sandwich curved beams', *Arch Appl Mech*, vol. 91, no. 12, pp. 4669–4691, Dec. 2021, doi: 10.1007/s00419-021-02005-0.
-

