



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la  
recherche scientifique  
Université Abbes Laghrou Khenchela  
Faculté des sciences et de la technologie  
Département de mathématiques et informatique



Thème :

# Introduction à la convexité - études et applications -

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master.

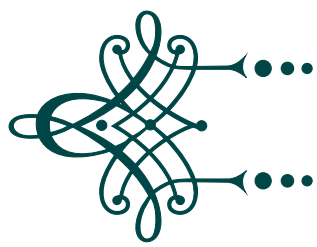
❖ Présenté par :

- ★ Marir Taki Eddine
- ★ Kellil Hanane

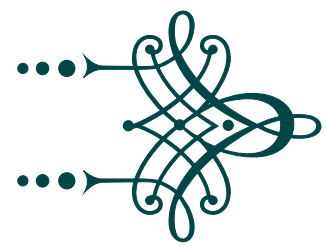
❖ Enquadré par :

- ★ Dr. Ayache benhadid

Promotion : 2021 /2022



# Remerciement



A la fin de ce travail, je tiens à remercier, en tout premier lieu, je remercie le bon **Dieu** tout puissant de m'avoir accordé la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon encadreur de mémoire **M. Benhadid** Ayache Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé dans le but de mener à bien ce travail.

Je voudrai également remercier les membres de mon jury **Mme A. Merghad** qui me fait l'honneur de présider ce jury **M. F. Tebessi** pour avoir accepté d'être examinateurs de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes recherches.

Enfin, je tenons a remercier tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation.  
de ce modeste travail.

*Merci !*

# Dédicace



Je dédie ce travail :

A mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis

★ à toi mon père Djamel Marir ★

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon coeur

★ ma vie et mon bonheur maman que j'adore. ★

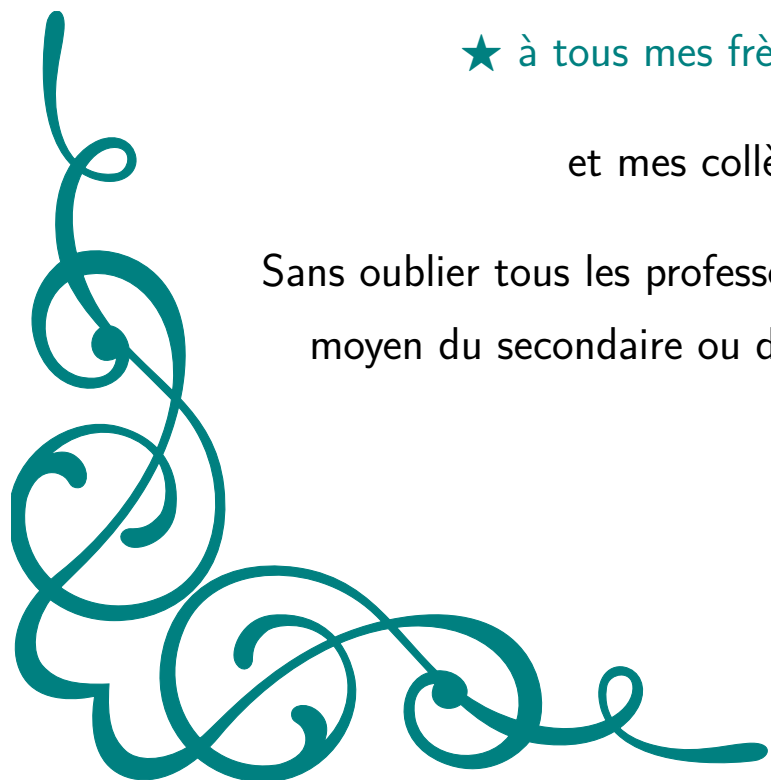
Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnés durant mon chemin d'études supérieures

★ à tous mes frères et mes soeurs★

et mes collègues d'étude.

Sans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire du moyen du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

Marir Bakieddine



# Dédicace



Avant tout, je remercie Allah le tout puissant qui m' à donné la force et la volonté, pour réaliser ce travail.

Je dédie ce modeste travail à :

★ Mon père : Reghis ★

★ Ma mère : Fouzia ★

★ Mon frère : Mohammed ★

★ Mes sœurs : Meriem, Zineb, Fatima Zohra ★

★ Mon encadreur : Dr. Ayache Benhadid ★

★ Mon binôme : Marir Taki Eddine ★

Enfin, à toute la famille Kellil et ceux qui ont contribué de près ou de loin pour la réalisation de ce mémoire.

A tous les lecteurs de ce mémoire.

Je vous dis merci !

Kellil Hamane



$\mathbb{R}^n$	: L'ensemble des éléments $x$ qui contient $n$ composants de $\mathbb{R}$ .
$\langle\langle x, y \rangle\rangle$	: Produit scalaire de deux vecteurs $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^n$
$\sum_{i=1}^n$	: Sommation de 1 à $n$ .
$\ x\ $	: Norme d'un vecteur $x$ dans $\mathbb{R}^n$
$dom(f)$	: Domaine effectif d'une fonction $f$ .
$Epi(f)$	: Épigraphe de $f$ .
$conv(k)$	: Enveloppe convexe d'un ensemble $K$ .
$B(x, r)$	: Boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ .
$\bar{B}(x, r)$	: Boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$ .
$\nabla f$	: Vecteur de dérivées partielles défini sur $\mathbb{R}^n$ (gradient de $f$ ).
$\nabla^2 f = H$	: La matrice des dérivées partielles du second ordre défini sur $\mathbb{R}^n$ (Hessienne).
$x^\top$	: La transposé d'un vecteur colonne $x$ .
$[x]$	: La partie entière de $x$ .
$P_n$	: Matrice positif.
$S_n$	: Matrice symétrique.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>4</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Ensembles Convexes</b>	<b>11</b>
1.1 Définitions . . . . .	11
1.2 Théorème de Carathéodory . . . . .	18
1.3 Exemples . . . . .	20
1.4 Une vue géométrique pour des ensembles convexes et non convexes	24
<b>2 Les fonctions convexes</b>	<b>26</b>
2.1 Définition de la convexité . . . . .	26
2.2 Fonctions convexes . . . . .	26
2.3 Caractérisation de la convexité par le gradient . . . . .	30
2.4 Caractérisation de la convexité par la Hessienne . . . . .	31
<b>3 Applications</b>	<b>38</b>
3.1 La convexité et la norme . . . . .	38
3.2 Inégalité de Jensen . . . . .	39
3.2.1 Le cas discret . . . . .	39
3.2.2 Le cas intégrale (continue) . . . . .	40
3.2.3 Applications . . . . .	41
3.3 Inégalité de Hermite-Hadamard . . . . .	43
3.4 Inégalité de Fejér . . . . .	44
3.5 Inégalité de Hölder . . . . .	46
3.5.1 Le cas décrit . . . . .	46
3.5.2 Le cas intégrale (continue) . . . . .	48
3.6 Inégalité de Minkovsky . . . . .	49

3.6.1 Le cas discret . . . . .	49
3.6.2 Le cas Intégrale(Continue) . . . . .	50
3.7 Inégalité de Chybechev . . . . .	51
3.7.1 Le cas discret . . . . .	51
3.7.2 Le cas Intégrale (continue) . . . . .	53
3.8 Inégalité de Grüss . . . . .	54
3.8.1 Le cas discret . . . . .	54
3.8.2 Le cas Intégrale (continue) . . . . .	55
<b>Conclusion</b>	<b>58</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>59</b>
<b>Résumé</b>	<b>60</b>

Les problèmes d'optimisation comportent généralement trois éléments fondamentaux. Le premier est une seule quantité numérique, ou fonction objective, qui doit être maximisée ou minimisée. L'objectif peut être les coûts de production ou les bénéfices d'une entreprise, l'heure d'arrivée d'un véhicule à une destination déterminée.

Le deuxième élément est un ensemble de variables, qui sont des quantités dont les valeurs peuvent être manipulées afin d'optimiser l'objectif. Par exemple, les quantités de stock à acheter ou à vendre, les quantités de ressources diverses à affecter à différentes activités de production.

Le troisième élément d'un problème d'optimisation est un ensemble de contraintes, qui sont des restrictions sur les valeurs que les variables peuvent prendre. Par exemple, un processus de fabrication ne peut pas exiger plus de ressources que celles qui sont disponibles, ni n'employer moins de zéro ressources. Dans ce cadre général, les problèmes d'optimisation peuvent avoir différentes propriétés mathématiques.

Les problèmes dans lesquels les variables sont des quantités continues nécessitent une approche différente des problèmes dans lesquels les variables sont des quantités discrètes ou combinatoires.

Une classe importante d'optimisation est connue sous le nom d'optimisation convexe. Où les variables sont des nombres réels, l'objectif et toutes les contraintes

sont des fonctions convexes.

Minkowski (1864-1909) a été le premier à étudier systématiquement la convexité et ses travaux de recherche contiennent la plupart des idées importantes utilisées pour ce thème. R. T. Rockafellar, W. Fenchel et J. J. Moreau sont Les fondateurs de l'analyse convexe moderne, ils étudiaient les fonctions convexes de façon approfondie. En particulier, R. T. Rockafellar a fait des progrès considérables dans le domaine durant les années 1970 en étendant l'analyse convexe à des espaces vectoriels plus généraux que  $\mathbb{R}^n$  dans ses divers articles.

Notre thèse est répartie en trois chapitres. Le premier chapitre présente des résultats sur les ensembles convexes. Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude des fonctions convexes et ses propriétés. Dans le dernier chapitre, nous illustrons notre étude avec quelques applications de la convexité.

# CHAPITRE 1

## ENSEMBLES CONVEXES

Dans tout ce travail,  $E$  est l'espace vectoriel réel

### 1.1 Définitions

**Définition 1.1.1.** Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $E$ . Le segment entre  $x$  et  $y$  noté  $[x, y]$  est défini par :

$$[x, y] = \{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\}.$$

**Définition 1.1.2.** On appelle simplexe de  $\mathbb{R}^n$  l'ensemble  $K_n$  défini par :

$$K_n : \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n / t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$$

**Définition 1.1.3.** Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ . On appelle combinaison convexe des éléments  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tout élément

$$x = \sum_{i=1}^n t_i x_i \text{ tels que } (t_1, t_2, \dots, t_n) \in K_n.$$

**Définition 1.1.4.** Un sous ensemble  $K$  de  $E$  est dit convexe si pour tout  $x, y \in K$  le segment  $[x, y]$  est inclus dans  $K$ . Donc il vient que : [4]

$$[K \text{ est un ensemble convexe}] \iff [\forall x, y \in K, \forall t \in [0, 1] : tx + [1-t]y \in K]$$

**Exemple 1.1.1.** Nous donnons quelques exemples élémentaires :

1. L'ensemble vide  $\phi$ , les singletons  $\{x\}$  et l'espace vectoriel  $E$  tout entier sont convexes.

2. Tous ensemble affine est convexe.
3. Dans  $\mathbb{R}$  les ensembles convexe sont exactement les intervalles.
4. Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur l'espace vectoriel  $E$ . Pour tout  $x \in E$  et  $r \geq 0$ , La boule centrée en  $x$  et de rayon  $r$  (ouverte ou fermé) est convexe [11] :

$$B(X, r) := \{y \in X / \|x - y\| \leq r\}$$

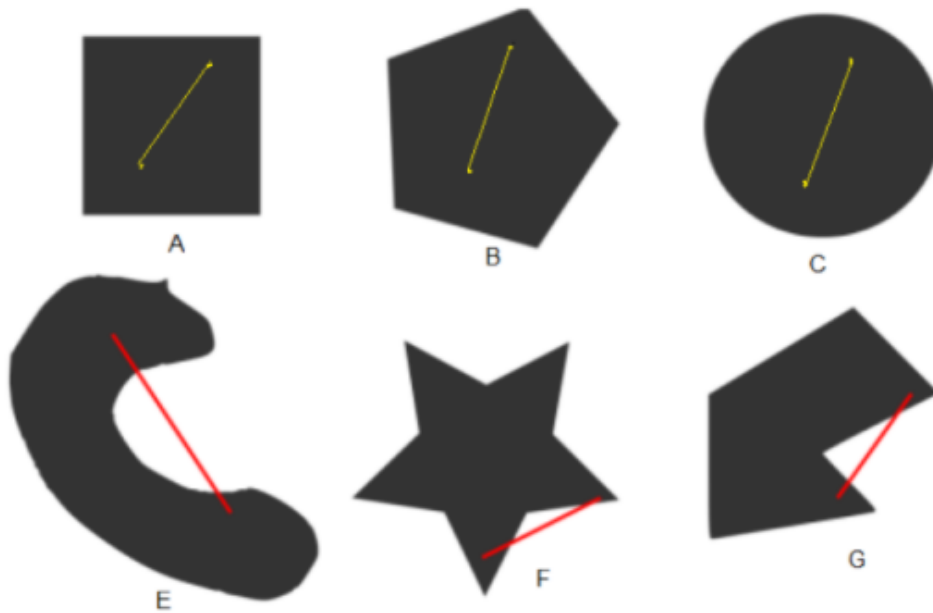


FIG. 1.1: En haut : quelques exemples d'ensembles convexes en 2 dimensions. En bas : quelques exemples d'ensembles non convexes( notez qu'il existe des segments dont les extrémités appartiennent à l'ensemble, qui ne sont pas entièrement contenue dans les ensembles).

**Définition 1.1.5. (Enveloppe convexe)** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble. On appelle enveloppe convexe de  $E$  et on note  $conv(E)$  l'ensemble convexe le plus petit contenant  $E$ . En dimension finie, c'est aussi l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de  $E$  [9] :

$$Conv(E) : \{x \in \mathbb{R}^n \text{ pouvant s'écrire } x = \sum_{i=1}^n t_i x_i \text{ où } x_i \in E, n \in \mathbb{N} \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i = 1, t_i \geq 0\}$$

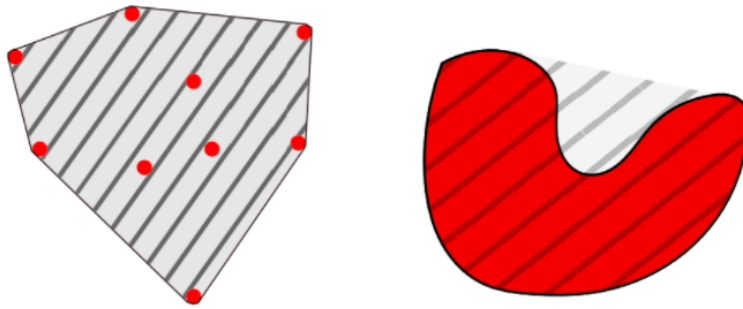


FIG. 1.2: Exemples d'enveloppes convexes. A gauche : enveloppe convexe d'un ensemble discret. A droite : enveloppe convexe d'un ensemble continue.

## Proposition

**Proposition 1.1.1.** Une combinaison linéaire de convexes est un convexe.

**Démonstration 1.** Soient  $C_1$  et  $C_2$  des convexes,  $x_1, x_2 \in C_1$ ,  $y_1, y_2 \in C_2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $t \in [0, 1]$ . On a :

$$t(x_1 + y_1) + (1 - t)(x_2 + y_2) = tx_1 + (1 - t)x_2 + ty_1 + (1 - t)y_2 \in C_1 + C_2$$

et

$$t \lambda x_1 + (1 - t)\lambda x_2 = \lambda(tx_1 + (1 - t)x_2) \in \lambda C_1.$$

**Proposition 1.1.2.** Si  $C, C_1, C_2$  Sont des convexes alors on a :

1. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$
2. Pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $(\lambda + \mu)C = \lambda C + \mu C$

**Démonstration 2.** 1. L'égalité  $\lambda(C_1 + C_2) = \lambda C_1 + \lambda C_2$  est évident

2. L'inclusion  $(\lambda + \mu)C \subset \lambda C + \mu C$  est facile. On montre que  $\lambda C + \mu C \subset (\lambda + \mu)C$ . Le cas où  $\lambda = \mu = 0$  est trivial. On peut supposer que l'un des coefficients n'est pas nul,  $x_1, x_2 \in C$  alors :

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda + \mu) \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_2 \right)$$

D'après la convexité de  $C$  on a :

$$\left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} x_1 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} x_2 \right) \in C.$$

**Proposition 1.1.3.** Soient  $E_1, \dots, E_m$  des espaces de Banach et  $C_1, \dots, C_m$  des convexes de  $E_1, \dots, E_m$  Respectivement. Alors  $C_1 \times \dots \times C_m$  est un convexe de  $E_1 \times \dots \times E_m$ .

**Théorème 1.1.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace normé. Alors toutes les boules (fermé, ouverts) sont des ensembles convexes.

**Démonstration 3.** On a :  $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in E / \|x - x_0\| \leq r\}$ .

Soit  $x, y \in \bar{B}(x_0, r), \forall t \in [0, 1]$ , on montre que :  $tx + (1 - t)y \in \bar{B}(x_0, r)$ .

Il suffit de montrer que :  $\|x_0 - tx - (1 - t)y\| \leq r$ . Or :

$$\begin{aligned} \|x_0 - tx - (1 - t)y\| &= \|x_0 - tx - (1 - t)y - tx_0 + tx_0 - (1 - t)x_0 \\ &\quad + (1 - t)x_0\|. \\ &\leq \|t(x_0 - x) + (1 - t)(x_0 - y)\| \\ &\leq t\|x_0 - x\| + (1 - t)\|x_0 - y\| \\ &\leq tr + (1 - t)r \leq r. \end{aligned}$$

Donc  $\bar{B}(x_0, r)$  est convexe.

**Proposition 1.1.4.** Tout intersection des ensembles convexes est convexe.

**Démonstration 4.** On note  $G = \bigcap K_i$  avec  $K_i$  est un ensemble convexe de  $E$ .

Pour montrer que  $G$  est convexe il suffit de montrer que :

$$\forall x, y \in G, t \in [0, 1] : tx + (1 - t)y \in G.$$

Soient  $x, y \in G, t \in [0, 1]$  alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in G \\ y \in G \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in \bigcap_{i \in I} K_i \\ y \in \bigcap_{i \in I} K_i \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} x \in K_i \forall i \in I \\ y \in K_i \forall i \in I \end{array} \right.$$

Donc  $tx + (1 - t)y \in K_i \forall i \in I \implies tx + (1 - t)y \in \bigcap_{i \in I} K_i$

D'où  $tx + (1 - t)y \in G$ . Alors  $G$  est convexe.

**Remarque 1.** L'union des ensembles convexes n'est pas forcément convexe.

Contre exemple :

Prenons :  $B_1 = B((0, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

Et  $B_2 = B((3, 0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 3)^2 + y^2 \leq 1\}$ .

On a  $B_1 \cup B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1 \text{ où } x^2 + y^2 - 6x + 8 \leq 0\}$

On a  $(0, 0)$  et  $(3, 0) \in B_1 \cup B_2$ , alors si on prend  $t = \frac{1}{2}$ , il vient que :

$$\frac{1}{2}(0, 0) + \frac{1}{2}(3, 0) = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \notin B_1 \cup B_2.$$

Donc  $B_1 \cup B_2$  n'est pas convexe.

**Proposition 1.1.5.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $K$  un ensemble fermé de  $E$ . Si  $K$  vérifiant la propriété de "*demi-somme*" suivante :

$$\forall x, y \in K, \frac{x+y}{2} \in K.$$

Alors  $K$  est convexe.

**Démonstration 5.**  $K$  est convexe  $\iff$  pour tout  $x_1, x_2 \in K$  le segment  $[x_1, x_2] \subset K$  Montrons que  $\forall x_1, x_2 \in K, \forall x \in [x_1, x_2], x \in K$

Comme  $x \in [x_1, x_2]$ , alors  $x \in [x_1, \frac{x_1+x_2}{2}]$  ou bien :  $x \in [\frac{x_1+x_2}{2}, x_2]$  et on le note :

$[x_1^1, x_2^1]$  l'un des deux segments qui contient  $x$ . On construit la suite  $x^n$  suivante :

$$[x_1^1, x_2^1], [x_1^2, x_2^2], \dots, [x_1^n, x_2^n] \text{ où } x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{x_n + x_{n+1}}{2}}{2}$$

Alors :

$$x \in [x_1^n, x_2^n] \subset \dots \subset [x_1^1, x_2^1] \subset [x_1, x_2].$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^n = x$$

Mais grâce à la propriété de "*demi-somme*" de  $K$ , toutes les extrémités  $x_1^n, x_2^n$  sont dans  $K$ . Comme  $K$  est fermé, alors la limite  $x$  est dans  $K$ . [4]

**Proposition 1.1.6.** L'enveloppe convexe de  $E$  est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de  $E$  :

$$\text{conv}(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i / n \geq 1, t_i \in E, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

**Démonstration 6.** Comme  $\text{conv}(E)$  est convexe, cet ensemble contient toutes les combinaisons convexes finies de ses éléments, donc en particulier celles des éléments de  $E$ .

Inversement, il est facile de voir que l'ensemble :

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i / n \geq 1, x_i \in E, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

est convexe, il contient donc aussi  $\text{conv}(E)$

**Proposition 1.1.7.** .

1. Si  $E$  est fini, Soit  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  alors :

$$\text{conv}(E) = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i e_i / t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}.$$

2. Plus généralement, si  $E_1, \dots, E_n$  sont des convexes de  $E$ , alors [2] :

$$\text{conv}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i / x_i \in E_i, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}$$

**Démonstration 7.** 1. Est évident

2. Montrons l'inclusion :

$$\left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i / x_i \in E_i, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\} \subset \text{conv}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n)$$

est évidente. Montrons l'autre inclusion dans le cas où  $n = 2$  pour simplifier les notations :

Si  $x \in \text{conv}(E_1 \cup E_2)$ ,  $x$  s'écrit :

$$x = \sum_{i=1}^n t_i x_i \text{ avec } t_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n t_i = 1.$$

Les  $x_i$  sont dans  $E_1 \cup E_2$ . Soit :  $I = \{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in E_1\}$

$J = \{i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in E_2\}$  et  $t = \sum_{i \in I} t_i$ , Alors  $0 \leq t \leq 1$  et

$$1 - t = \sum_{i \in J} t_i.$$

Si  $t = 0$  ou  $1$ ,  $x$  est alors dans  $\text{conv}(E_1)$  ou dans  $\text{conv}(E_2)$  et par suite dans  $\text{conv}(E_1 \cup E_2)$ . Sinon, on écrit :

$$\begin{aligned} x &= t \sum_{i \in I} \frac{t_i}{t} x_i + (1 - t) \sum_{i \in J} \frac{t_i}{(1 - t)} x_i \\ &= t y_1 + (1 - t) y_2, \quad y_1 \in E_1, \quad y_2 \in E_2 \end{aligned}$$

On en deduit bien que  $x \in \text{conv}(E_1 \cup E_2)$ , d'où l'inclusion :

$$\text{conv}(E_1 \cup E_2) \subset \left\{ \sum_{i=1}^2 t_i x_i / x_i \in E_i, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 t_i = 1 \right\}$$

**Théorème 1.1.2.** Soit  $K$  une partie de  $E$ . Alors  $\text{conv}(K)$  est égale à l'ensemble de tout les combinaisons convexes des éléments de  $K$ .

Autrement :

$$\text{conv}(K) = \left\{ x/x = \sum_{i=1}^n t_i x_i, x_i \in K, t_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^n t_i = 1 \right\}.$$

**Démonstration 8.** On veut montrer que :

$$\text{conv}(K) = \{x/x = \sum_{i=1}^n t_i x_i, x_i \in K, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1\}.$$

On sait que l'ensemble de tout les combinaisons convexes des éléments de  $K$  est un convexe contient  $K$ , et comme  $\text{conv}(K)$  est le plus petit convexe contient  $K$  alors :

$$\text{conv}(K) \subseteq \{x/x = \sum_{i=1}^n t_i x_i, x_i \in K, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1\}.$$

D'autre part  $\text{conv}(K)$  est un ensemble convexe donc il contient les combinaisons convexes de ses éléments, et comme  $K \subset \text{conv}(K)$  il vient que  $\text{conv}(K)$

contient tout les combinaisons convexes d'éléments de  $K$ .

d'où :

$$\{x/x = \sum_{i=1}^n t_i x_i, x_i \in K, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^n t_i = 1\} \subseteq \text{conv}(K).$$

Donc le résultat.

## 1.2 Théorème de Carathéodory

**Théorème 1.2.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$  et  $K$  une partie non vide de  $E$ .

Alors pour tout  $x \in \text{conv}(K)$  :

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i / t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1, \forall x_i \in K.$$

**Démonstration 9.** soit  $x \in \text{conv}(K)$  donc il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que :

$$x = \sum_{i=1}^p t_i x_i / t_i \geq 0, \sum_{i=1}^p t_i = 1, \forall x_i \in K.$$

1. Si  $p \leq n + 1$  on a :  $x = \sum_{i=1}^p t_i x_i$   
 $= \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i / t_i = 0$  pour  $p + 1 \leq i \leq n + 1$ .

Donc le problème est résolu.

2. Si  $p \geq n + 1$  donc  $p - 1 > n = \dim E$ .

Donc la famille  $(x_i - x_1)_{2 \leq i \leq p}$  est liée dans  $E$ .

Donc il existe des  $i$  ( $2 \leq i \leq p$ ) tels que :

$$\sum_{i=2}^p \alpha_i (x_i - x_1) = 0 / \exists i_0, 2 \leq i_0 \leq p, t_{i_0} \neq 0$$

Posons maintenant :  $\alpha_i = - \sum_{i=2}^p \alpha_i$  donc :  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$ . Car :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i = \alpha_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i = - \sum_{i=2}^p \alpha_i + \sum_{i=2}^p \alpha_i = 0$$

Pour montrer que :  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n+1} t_i \mathbf{x}_i$  il suffit de montrer que :  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p-1} t_i \mathbf{x}_i$  (et par recurrence attendre l'ordre  $n + 1$ ).

Pour écrire :  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p-1} t_i \mathbf{x}_i$  on a :  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ . Car :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i &= \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i \mathbf{x}_i \\ &= - \sum_{i=2}^p \alpha_i \mathbf{x}_1 + \sum_{i=2}^p \alpha_i \mathbf{x}_i \\ &= \sum_{i=2}^p \alpha_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $\mathbf{x} \in \text{conv}(\mathbf{K})$  on a :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^p (t_i + t\alpha_i) \mathbf{x}_i = \mathbf{x}.$$

Car :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p (t_i + t\alpha_i) \mathbf{x}_i &= \sum_{i=1}^p t_i \mathbf{x}_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{x} \\ \text{et } (t \sum_{i=1}^p \alpha_i \mathbf{x}_i &= \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Maintenant comme  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$  donc  $\exists j \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que  $\alpha_j < 0$ . On pose  $\mathbf{K} = \left\{ \frac{-t_i}{\alpha_i} / i = 1, 2, \dots, p : \alpha_i < 0 \right\}$ ,  $\mathbf{K}$  admet une borne inférieure. Donc on pose :

$$\mathbf{T} = \min \left\{ \frac{-t_i}{\alpha_i} / \alpha_i < 0, 1 \leq i \leq p \right\}.$$

Si on pose  $\lambda_i = t_i + \mathbf{T}\alpha_i$  il vient que  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ . Car on a :

1.  $\lambda_i \geq 0$  car :  $\mathbf{T} \leq \frac{-t_i}{\alpha_i}$  il vient que  $\mathbf{T}\alpha_i \geq -t_i$  avec  $\alpha_i < 0$  donc :  $t_i + \mathbf{T}\alpha_i \geq 0$ . alors  $\lambda_i \geq 0$ .

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^p \lambda_i &= \sum_{i=1}^p (t_i + T\alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^p t_i + T \sum_{i=1}^p \alpha_i = \sum_{i=1}^p t_i = 1\end{aligned}$$

Finalement :

Comme  $T = \min \left\{ \frac{-t_i}{\alpha_i} \right\}$  alors  $\exists j \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que :

$$T = \frac{-t_j}{\alpha_j} \text{ donc } \lambda_j = t_j - \frac{t_j}{\alpha_j} \alpha_j = 0.$$

$$\text{alors } x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p \lambda_i x_i = \sum_{i \in \{1, \dots, p-1\}} \lambda_i x_i$$

On fait la même technique pour avoir  $p-2, p-3, n+1$ , de nombre d'opération égale  $(p - (n + 1) - 1) = p - n$  opérations. [4]

### 1.3 Exemples

**Exemple 1:** Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  vérifiant la propriété de "*demi-somme*" suivante :

$$(x \in S, y \in S) \implies \left( \frac{x+y}{2} \in S \right)$$

1.  $S$  est-il convexe ?
2. même question si l'on suppose  $S$  fermé.

**La solution :**

1. Non, Il suffit pour le voir de prendre pour  $S$  l'ensemble des rationnels compris entre 0 et 1.
2. Oui, si  $S$  est fermé.  
prenons  $x_1$  et  $x_2$  dans  $S$  et considérons

$$x \in [x_1, x_2] := \{(1-t)x_1 + tx_2 / 0 \leq t \leq 1\}.$$

On prend des deux segments  $[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}]$ ,  $[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2]$   $t_i$  Celui qui contient  $x$ , et on le note  $[x_1^{(1)}, x_2^{(2)}]$ . On s'itére le processus de manière à obtenir :

$$x \in \dots [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}] \subset \dots \subset [x_1, x_2].$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_2^{(k)} = x$$

Mais grâce à la propriété de "**demi-somme**" de  $S$ , toutes les extrémités  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$  sont dans  $S$ . Le caractère fermé de  $S$  fait qu'ensuite la limite  $x$  est dans  $S$ .

**Exemple 2:** Soit  $C$  le convexe défini comme étant l'enveloppe convexe de  $S$  :  $C = \text{conv}(S)$ .

- Montrer que tout point extrémal de  $C$  est nécessairement dans  $S$ .

**La solution :** Soit  $x$  un point extrémal de  $C$  et supposons qu'il ne soit pas dans  $S$ .

Comme  $C = \text{conv}S$ . Il existe une représentation de  $x$  sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \text{ avec } x_1, \dots, x_k \text{ dans } S \text{ et } (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \text{ dans le simplexe-unité de } \mathbb{R}^k.$$

Puisque  $x \notin S$ , on a nécessairement  $k \geq 2$ . On peut supposer, sans perte de généralité, que  $0 < \alpha_k < 1$ . Ainsi :

$$x = \alpha_k x_k + (1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i$$

où  $y := x_k$  et  $z := \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_k} x_i$  sont des éléments de  $C$  différents (différents car, sinon,  $x = x_k$ , ce qui est impossible vu que  $x \notin S$ ). La représentation de  $x$  sous la forme  $x = \alpha_k y + (1 - \alpha_k)z$ , avec  $y$  et  $z$  dans  $C$ ,  $y \neq z$  et  $0 < \alpha_k < 1$ , entre alors en contradiction avec le caractère extrémal de  $x$ .

**Exemple 3:** Montrer que  $\text{conv}(A \times B) = (\text{conv}A) \times (\text{conv}B)$

**la solution :**  $A \subset \text{conv}(A)$ ,  $B \subset \text{conv}(B)$  et  $(\text{conv}A) \times (\text{conv}B)$  est convexe (produit cartésien de deux convexes). Par conséquent,  $\text{conv}(A \times B) \subset (\text{conv}A) \times (\text{conv}B)$ .

Démontrons l'inclusion réciproque, soient  $u \in \text{conv}A$  et  $v \in \text{conv}B$  ; alors il existe

$$\left. \begin{array}{l} \text{—des entiers non nuls } p \text{ et } q. \\ \text{—des éléments } a_1, \dots, a_p \text{ de } A \text{ et des éléments } b_1, \dots, b_q \text{ de } B \\ \text{—}(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \text{ dans le simplexe-unité de } \mathbb{R}^p, \\ \text{—}(\mu_1, \dots, \mu_q) \text{ dans le simplexe-unité de } \mathbb{R}^q, \end{array} \right\} \quad (1)$$

tel que :

$$U = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i, \quad V = \sum_{j=1}^q \mu_j b_j \quad (2)$$

d'où :

$$(U, V) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j (a_i, b_j) \quad (3)$$

Mais  $(a_i, b_j) \in A \times B$  pour tout  $(i, j)$  et

$$(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_1 \mu_q, \dots, \lambda_2 \mu_1, \dots, \lambda_2 \mu_q, \dots, \lambda_p \mu_1, \dots, \lambda_p \mu_q)$$

est dans le simplexe-unité de  $\mathbb{R}^{pq}$  (en effet tous les coefficients  $\lambda_i \mu_j$  sont positifs et :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \lambda_i \mu_j = \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \right) \left( \sum_{j=1}^q \mu_j = 1 \right)$$

Il résulte donc (3) que  $(U, V)$  est bien dans  $\text{conv}(A \times B)$  [5]

**Exemple 4:** Si on prend  $E = \mathbb{R}^2$ .

1. L'ensemble  $K$  tel que  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y \geq 0\}$  est un ensemble convexe de  $\mathbb{R}^2$  car :

Si on prend  $x = (x_1, y_1)$  et  $y = (x_2, y_2)$ ,  $t \in [0, 1]$  il vient que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in K \iff x_1 + y_1 \geq 0 \\ y \in K \iff x_2 + y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Alors :

$$\begin{aligned} t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} &= (tx_1, ty_1) + ((1-t)x_2, (1-t)y_2) \\ &= (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \end{aligned}$$

Et comme :

$$tx_1 + (1-t)x_2 + ty_1 + (1-t)y_2 = t(x_1 + y_1) + (1-t)(x_2 + y_2) \geq 0$$

donc  $t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \in K$ , d'où  $K$  est convexe de  $\mathbb{R}^2$

2. L'ensemble  $K$  telle que  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$  n'est pas convexe de  $\mathbb{R}^2$  car :

Si on prend :  $\mathbf{x} = (1, 0)$  et  $\mathbf{y} = (0, 1)$ ,  $t = 1/2$  il vient que :

$$t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} = (1/2, 0) + (0, 1/2) = (1/2, 1/2)$$

et  $(1/2, 1/2) \notin K$  car  $(1/2)^2 + (1/2)^2 \neq 1$ .

3. Le cylinder circulaire droit

$$C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \in \mathbb{R}, x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

est un convexe de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En effet, Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  des éléments de  $C$  et soit  $t \in [0, 1]$ . On obtient :

$$\begin{aligned} (tx_1 + (1-t)y_1)^2 + \dots + (tx_n + (1-t)y_n)^2 &= t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \\ &\quad \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t(1-t) \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &\leq t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t(1-t) \\ &\quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \end{aligned}$$

d'après inégalité de Cauchy-Schwarz [4] :

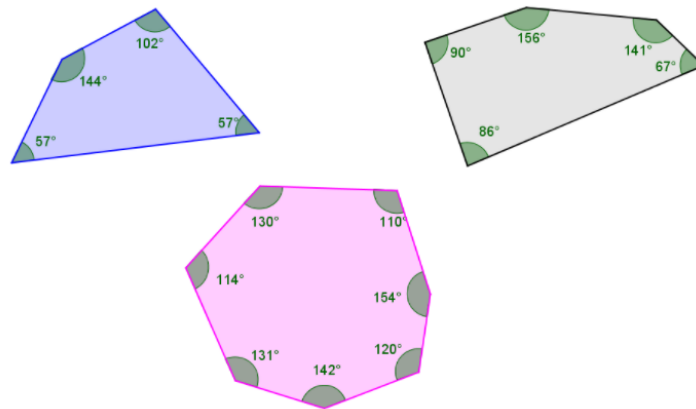
$$\begin{aligned} &\leq t^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + (1-t)^2 \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2t(1-t) \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \\ &\leq t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = 1. \end{aligned}$$

## 1.4 Une vue géométrique pour des ensembles convexes et non convexes

### 1.4.1 Les formes convexes

Une forme  $F$  (partie du plan) est convexe quand, pour tous point  $A$  et  $B$  de  $F$ , le segment (rectiligne) qui joint  $A$  à  $B$  est tout entier contenue dans  $F$ .

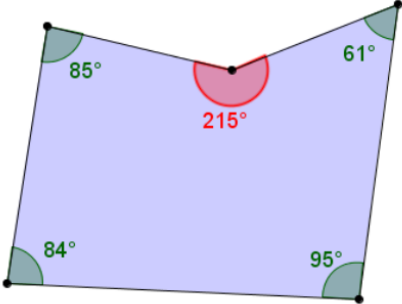
**Exemple :** Un polygone est convexe si tous ses angles intérieure ont une mesure inférieure à  $180^\circ$



### 1.4.2 Les formes non convexes

son contraire est convexe ou bombé, soit une forme arrondée vers l'intérieur.

**Exemple :** Un polygone est non convexe s'il possède au moins un angle intérieur dont la mesure est supérieure à  $180^\circ$



## CHAPITRE 2

## LES FONCTIONS CONVEXES

### 2.1 Définition de la convexité

La convexité est à la base une propriété géométrique, assez intuitive d'ailleurs, qui permet de caractériser certains objets. On voit assez bien ce qu'est un objet convexe dans un espace à deux ou trois dimensions.

Nous allons maintenant montrer comment cette propriété peut aussi s'appliquer aux fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$

### 2.2 Fonctions convexes

**Définition 2.2.1.** Soit  $K \in \mathbb{R}^n$  ensemble convexe  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

1. On dit que  $f$  est convexe sur  $K$  si :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall (x, y) \in K^2, \lambda \in [0, 1]$$

2. On dira que  $f$  est strictement convexe si :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y), \forall (x, y) \in K^2, \lambda \in [0, 1], x \neq y$$

Lorsque  $n = 1$  cette définition s'interprète bien géométriquement : le graphe de la fonction est toujours en dessous du segment reliant les points  $(x, f(x))$  et  $(y, f(y))$

3. On dit que  $f$  est fortement convexe sur  $K$  s'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \alpha t(1-t)\|x-y\|^2, \forall (x, y) \in K^2,$$

$$\lambda \in [0, 1]$$

**Proposition 2.2.1.** Soit  $f$  une fonctionnelle convexe définie sur un convexe non vide  $K$ .

1. Si  $u$  et  $v$  sont deux points de minimum locaux alors  $f(u) = f(v)$
2. Si de plus  $f$  est strictement convexe, alors  $u = v$ .

**Démonstration 10.** 1. Soient  $u$  et  $v$  deux minima. Comme  $K$  est convexe,  $u + \theta(v - u) \in K$  pour tout  $\theta \in [0, 1]$ . De plus  $\exists \theta_0$ , tq : pour tout  $\theta \in ]0, \theta_0]$  :

$$f(u) \leq f(u + \theta(v - u))$$

Comme  $f$  est convexe, on obtient, pour tout  $\theta \in ]0, \theta_0]$  :

$$f(u) \leq f(u + \theta(v - u)) = f((1 - \theta)u + \theta v) \leq (1 - \theta)f(u) + \theta f(v)$$

et on déduit facilement que  $f(u) \leq f(v)$ . De même on montre que  $f(u) \geq f(v)$ . On a donc bien  $f(u) = f(v)$ .

2. Supposons que  $f$  soit strictement convexe. Si  $u$  et  $v$  sont deux points de minimum, on a vu que  $f(u) = f(v)$ . Si  $u$  et  $v$  sont distincts,

$$f(u + \theta(v - u)) < (1 - \theta)f(u) + \theta f(v) = f(u) \quad \theta \in ]0, 1[$$

ce qui contredit le fait que  $u$  est un minimum local. On a donc bien  $u = v$ .

Nous en déduisons. [1]

**Exemple 2.2.1.** L'application  $x \rightarrow x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.2.2.** Soit  $C$  une partie de  $E$  et  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On appelle epigraphe de  $f$  noté  $Epi(f)$  l'ensemble

$$\{(y, t) \in C \times \mathbb{R}, f(y) \leq t\}$$

c'est une partie de  $E \times \mathbb{R}$ . [6]

**Proposition 2.2.2.** Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe dans  $E \times \mathbb{R}$ .

**Démonstration 11.** condition nécessaire : considérons deux éléments  $(y_1, t_1)$  et  $(y_2, t_2)$  de l'épigraphe de  $f$  et  $\alpha \in [0, 1]$ .

La convexité de  $f$  nous permet d'écrire :

$$f(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \leq \alpha f(y_1) + (1 - \alpha)f(y_2) \leq \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2$$

Le point  $(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2, \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2)$  appartient bien à l'épigraphe de  $f$ , qui est donc convexe.

condition suffisante : Considérons deux éléments  $y_1, y_2 \in C$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  et notons  $t_i = f(y_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Les deux couples  $(y_i, t_i)$ ,  $i = 1, 2$  appartiennent à l'épigraphe de  $f$ , qui est convexe par hypothèse. Il en résulte que  $(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2, \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) \in \text{Epi}(f)$  et donc  $f(\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \leq \alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2$ , ce qui prouve la convexité de  $f$ . [7]

**Définition 2.2.3. (Domaine effectif d'une fonction).**

Le Domaine effectif d'une fonction  $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est l'ensemble :

$$\text{dom } f = \{x \in E / f(x) < +\infty\}.$$

**Remarque 2.** La fonction  $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  est convexe si et seulement si :

1. son domaine effectif est convexe.
2. sa restriction  $f|_{\text{dom } f}$  à son domaine effectif est convexe.

**Exemples :**

1. Soit  $f(x) = |x|$ . Alors,  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . En effet par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$|t(x) + (1 - t)y| \leq |t| |x| + |1 - t| |y| = t|x| + (1 - t)|y|$$

2. Soit  $f(x) = |x|^2$ . Par l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$ , on obtient [8] :

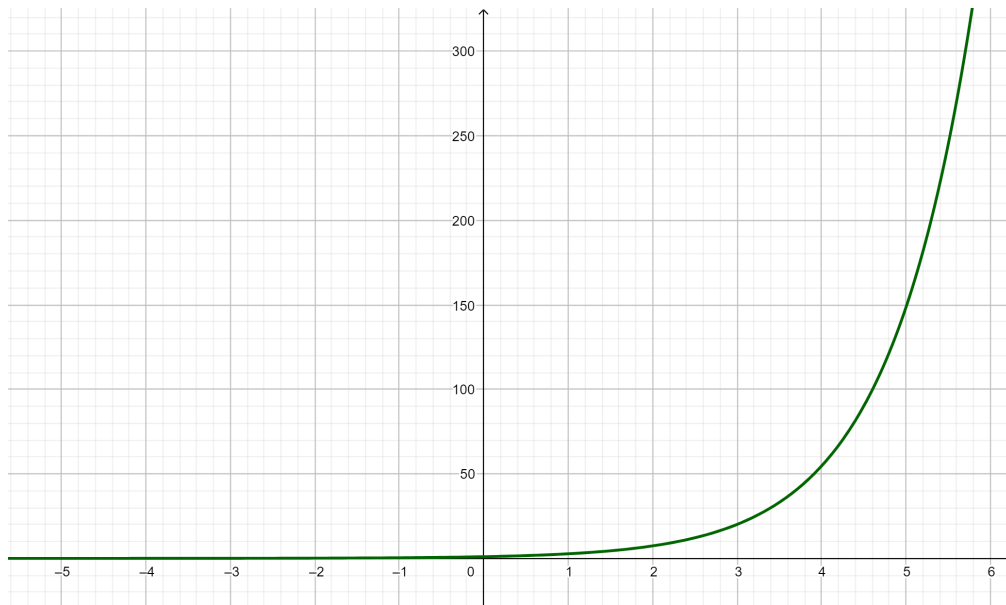
$$\begin{aligned} (tx + (1-t)y)^2 &= t^2x^2 + (1-t)^2y^2 + 2t(1-t)xy \\ &\leq t^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t(1-t)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

D'où :

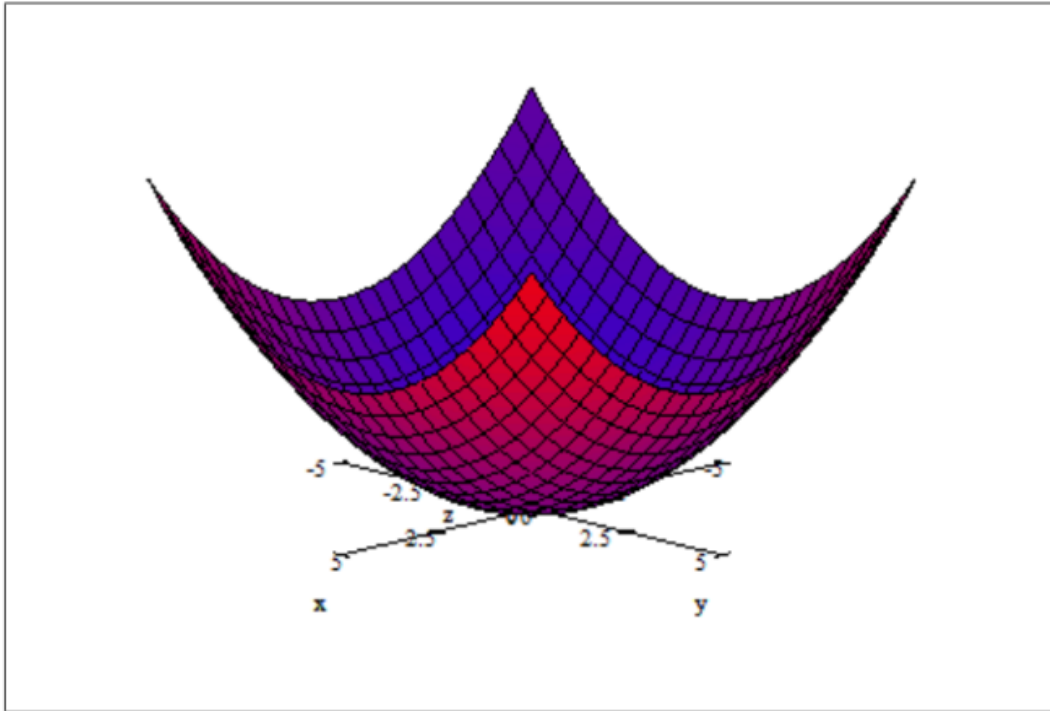
$$(tx + (1-t)y)^2 \leq tx^2(t + (1-t)) + (1-t)y^2(t + (1-t))$$

3. Les fonctions suivantes sont convexes selon la convexité de leurs épigraphe.

- $x \mapsto \exp(x)$  est convexe.



- $(x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$  est convexe.



## 2.3 Caractérisation de la convexité par le gradient

**Théorème 2.3.1.** Soit  $C \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert convexe et  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , différentiable. Alors,  $f$  est convexe sur  $C$  si et seulement si

$$\forall x, y \in C : f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad (2.1)$$

**Démonstration 12.** Soit  $f$  est convexe i.e.

$$\forall x, y, \in C \quad \lambda \in [0, 1] : f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$

En retranchant  $f(x)$  des deux termes de l'inégalité et en divisant par  $\lambda$ , on obtient :

$$\frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

En faisant tendre  $\lambda$  vers 0, on a la nécessité

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda(y - x)) - f(x)}{\lambda} = \langle \nabla f(x), y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$$

Soient à présent  $x, y \in C$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Posons :  $x_\lambda = x + \lambda(y - x)$ . En

retranchant respectivement  $x$  et  $y$  de  $x_\lambda$  on obtient :

$$\begin{cases} x_\lambda - x = \lambda(y - x) & (1) \\ x_\lambda - y = (1 - \lambda)(x - y) & (2) \end{cases}$$

En appliquant la relation (1) à la fonction  $f$  respectivement aux point  $(x, x_\lambda)$  et  $(y, x_\lambda)$ , on obtient :

$$\begin{cases} f(x) \geq f(x_\lambda) - \lambda \langle \nabla f(x_\lambda), y - x \rangle \\ f(y) \geq f(x_\lambda) + (1 - \lambda) \langle \nabla f(x_\lambda), y - x \rangle \end{cases}$$

En multipliant respectivement ces deux inégalités par  $(1 - \lambda)$  et  $\lambda$  :

$$\begin{cases} (1 - \lambda)f(x) \geq (1 - \lambda)f(x_\lambda) - \lambda(1 - \lambda) \langle \nabla f(x_\lambda), y - x \rangle \\ \lambda f(y) \geq \lambda f(x_\lambda) + \lambda(1 - \lambda) \langle \nabla f(x_\lambda), y - x \rangle \end{cases}$$

En somment les deux inégalités, on obtient la relation

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in C : f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

assurant la convexité de  $f$ .

## 2.4 Caractérisation de la convexité par la Hessienne

**Théorème 2.4.1.** Soit  $C \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert convexe :  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^2$ . Alors,  $f$  est convexe sur  $C$  si et seulement si pour tout  $x \in C$ ,  $\nabla^2 f(x)$  est semi-définie positive sur  $C$  i.e :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \langle y, \nabla^2 f(x)y \rangle \geq 0 \quad (2.2)$$

$f$  est strictement convexe sur  $C$  si  $\nabla^2 f(x)$  est définie positive.

**Démonstration 13.** Supposons que  $f$  est convexe, et soit  $x \in C$ . On veut montrer la relation (2.2). Vue que  $C$  est ouvert. Alors pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ , il existe  $\lambda$  suffisamment petite avec  $|\lambda| \neq 0$  et  $x + \lambda y \in C$ . Du théorème précédent et

la différentiabilité d'ordre 2 de  $f$  on a :

$$f(x + \lambda y) \geq f(x) + \lambda \langle \nabla f(x), y \rangle \quad (2.3)$$

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{1}{2} \lambda^2 \langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle + \lambda^2 \|x\|^2 \varepsilon(\lambda x) \quad (2.4)$$

En substituant (2.4) dans (2.3) on obtient

$$\frac{1}{2} \lambda^2 \langle \nabla^2 f(x) y, y \rangle + \lambda^2 \|x\|^2 \varepsilon(\lambda x) \geq 0 \quad (2.5)$$

En divisons la relation (2.5) par  $\lambda^2$  et en faisant tendre  $\lambda \rightarrow 0$ , d'où la relation (2.2). Inversement, supposons que la matrice Hessienne est semidéfinie positif en tout point dans  $C$ . Considérons  $x$  et  $y$  dans  $C$ , du développement de Taylor avec reste de la Moyenne, on a :

$$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(\hat{y}) y - x, y - x \rangle \quad (2.6)$$

où  $\hat{y} = \lambda x + (1 - \lambda)y$  pour un certain  $\lambda \in ]0, 1[$ . Notons que  $\hat{y} \in C$  par convexité, de la semidéfinie positivité de la matrice Hessienne  $\nabla^2 f(\hat{y})$  et de (2.7), on déduit que :

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

Puisque  $x$  et  $y$  sont quelconque dans  $C$ , la convexité de  $f$  se déduit du Théorème précédent. Considérons la forme quadratique  $q$  définie par la relation (2.5), on sait déjà que sa matrice Hessienne est  $H$ .

Ainsi, du précédent Théorème, on déduit que  $q$  est convexe (strictement convexe) si et seulement si la matrice Hessienne  $H$  est semidéfinie positive (définie positive). Le Théorème suivant, un classique de l'algèbre linéaire nous donne une caractérisation pratique.

**Théorème 2.4.2.** Une matrice  $H \in S_n(\mathbb{R})$ , est définie positive (semidéfinie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives (positives)

**Corollaire 2.4.1.** Une forme quadratique  $q$  définie par la relation (2.5), est convexe (strictement convexe) si et seulement si les valeurs propres de la matrice Hessienne  $H$  sont positives (strictement positives).

La convexité d'une forme quadratique nécessite le calcul de tous ces valeurs propres, ceci peut s'avérer couteux point de vu numérique.

Donnons d'abord quelques définitions :

**Définition 2.4.1.** Soit  $H = (h_{ij})_{i,j} \in S_n(\mathbb{R})$ . Une sous matrice  $k \times k$  formée, à partir de  $A$ , en éliminant  $n - k$  colonnes, disons les colonnes  $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$  et les mêmes  $n - k$  lignes  $i_1, i_2, \dots, i_{n-k}$  est appelée une sous matrice de  $A$ , d'ordre principal  $k$ . Le déterminant d'une sous-matrice principale  $k \times k$  est appelé le mineur principal d'ordre  $k$  de la matrice  $H$ .

**Exemple 2.4.1.** Soit  $H$  une matrice  $3 \times 3$

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$

Les mineurs principaux dominants de premier ordre est seulement  $h_{11}$ , obtenue en éliminant les 2 dernières lignes et colonnes. Les mineurs principaux dominants de second ordre on a seulement

$$\det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

où la sous-matrice est obtenue en éliminant la troisième ligne et colonne. Les mineurs principal dominant de troisième ordre et un seul est c'est le déterminant de la matrice  $H$ .

**Théorème 2.4.3.** .

1. Une matrice  $H \in S_n(\mathbb{R})$ , est semi-définie positive si et seulement si chacun des mineurs principaux de  $H$  est  $\geq 0$ .
2. Une matrice  $H \in S_n(\mathbb{R})$ , est semi-définie négative si et seulement si chacun des mineurs principaux d'ordre impaire de  $H$  est  $\leq 0$ , et chacun des mineurs principaux d'ordre paire de  $H$  est  $\geq 0$ .

3. Une matrice  $H \in S_n(\mathbb{R})$ , est définie positive si et seulement si chacun des mineurs principaux dominants de  $H$  est  $> 0$ .
4. Une matrice  $H \in S_n(\mathbb{R})$ , est définie négative si et seulement si ses  $n$  mineurs principaux dominant alternent en signe de la manière suivante :

$$h_{11} < 0, \det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} > 0, \det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} < 0 \dots \text{etc.}$$

Exemple 2.4.2. La matrice :

$$H = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$$

n'est pas semidéfinie positive, est-elle définie négative ?

Il se trouve que  $h_{11} < 0$  et  $\det \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} > 0$ , d'où  $H$  est définie négative.

[12]

**Exemples :**

1\ Dans  $S_n(\mathbb{R})$  structuré en espace euclidien grâce au produit scalaire  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  (rappel :  $\langle\langle A, B \rangle\rangle := \text{tr}(AB)$ ). on considère l'ensemble suivant :

$$\Omega_1 := \{M \in P_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr } M = 1\}$$

★ Montrer que  $\Omega_1$  est un convexe compact de  $S_n(\mathbb{R})$ .

★ Montrer que les points extrémaux de  $\Omega_1$  sont exactement les matrices de la forme  $xx^\top$ , où  $x$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$ .

**La solution :**

1°)  $\Omega_1$  est par définition l'intersection du cône convexe fermé  $P_n(\mathbb{R})$  avec l'hyperplan

affine d'équation  $\langle\langle M, I_n \rangle\rangle = 1$  : c'est donc un convexe fermé. Par ailleurs, si  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  désignent ses valeurs propres.

$$\|M\|^2 := \text{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

si à présent  $M \in \Omega_1$ , ses valeurs propres  $\lambda_i$  sont toutes positives (puisque  $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ) et inférieures à 1 (puisque  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr} M = 1$ ). Par conséquent.

$$\|M\|^2 \leq n \text{ pour tout } M \in \Omega_1.$$

$\Omega_1$  est donc borné : c'est un convexe compact de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

2°) Montrons que  $\Omega_1$  est l'enveloppe convexe de  $xx^\top$ , où  $x$  est de norme 1 :

$$\Omega_1 = \text{conv}\{xx^\top \mid \|x\| = 1\} \quad (2.7)$$

Toute matrice de la forme  $xx^\top$  avec  $\|x\| = 1$ , est symétrique semi-définie positive et de trace 1 (car  $\text{tr}(xx^\top) = \|x\|^2$ ) ; par conséquent, toute combinaison convexe de telles matrices est dans  $\Omega_1$ .

Réciproquement, soit  $M \in \Omega_1$ . Par décomposition spectrale, on peut exprimer  $M$  sous la forme

$$M = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i x_i^\top, \quad (2.8)$$

où les  $x_i$  sont des vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^n$  et les  $\lambda_i$  les valeurs propres de  $M$ .

Mais ces valeurs propres sont positives et de somme égale à 1 ; ce qu'exprime (2.8) est donc que  $M$  est une combinaison convexe d'éléments de  $\{xx^\top \mid \|x\| = 1\}$ .

Visualisation géométrique de (2.7)

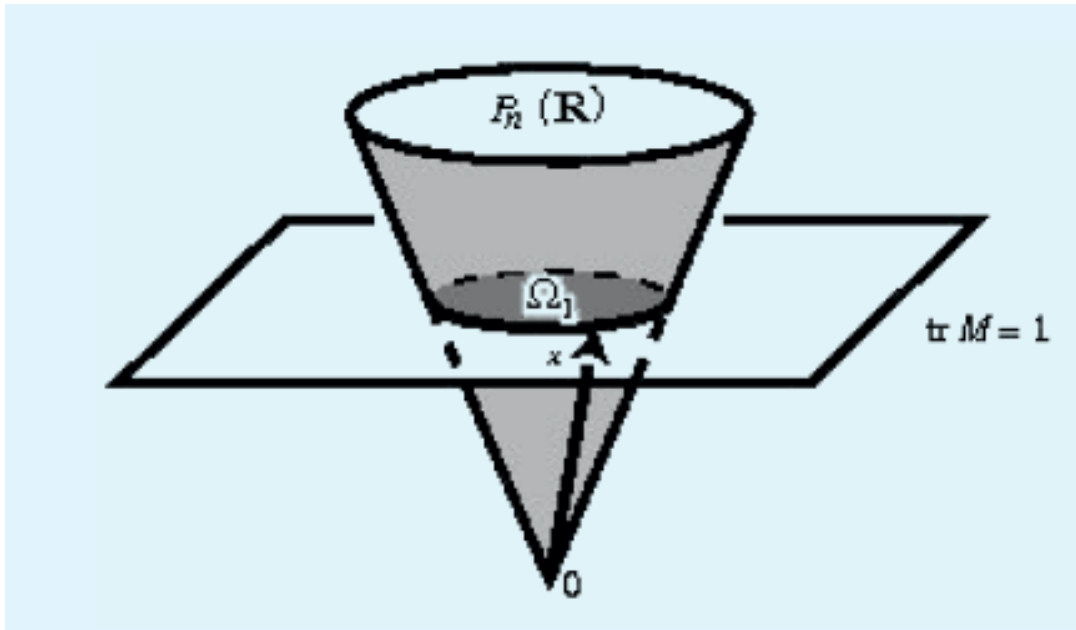


FIG. 2.1:

D'après l'expression (2.7) de  $\Omega_1$ , les points extrémaux de  $\Omega_1$  figurent nécessairement parmi les matrices de la forme  $xx^\top$ , où  $\|x\| = 1$ .

Réciproquement, soit  $xx^\top$  avec  $\|x\| = 1$  et montrons qu'il s'agit d'un point extrémal de  $\Omega_1$ . Supposons que l'on ait la décomposition :

$$\left. \begin{aligned} xx^\top &= \alpha M + (1 - \alpha)N, \quad \alpha \in ]0, 1[ \\ M \text{ et } N &\text{ dans } \Omega_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Et montrons que cela conduit nécessairement à  $xx^\top = M = N$ .

En faisant le produit scalaire  $\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$  avec  $xx^\top$  dans chaque membre de la première ligne de (2.9), on obtient :

$$1 = \alpha \langle Mx, x \rangle + (1 - \alpha) \langle Nx, x \rangle \quad (2.10)$$

Comme  $\langle Mx, x \rangle \leq \lambda_1(M) \leq 1$  ( $\lambda_1(M)$  désignant la plus grande valeur propre de  $M$ ) et  $\langle Nx, x \rangle \leq \lambda_1(N) \leq 1$  il vient de (2.10) que  $\lambda_1(M) = \lambda_1(N) = 1$ .

Puisque les valeurs propres de  $M$  (et de  $N$ ) sont positives et de somme égale à 1, la seule possibilité pour  $M$  (et  $N$ ) est d'être de rang 1.  $M = uu^\top$  avec  $\|u\| = 1$  (et  $N = vv^\top$ , avec  $\|v\| = 1$ ). Avec la première ligne de (2.9), on conclut ensuite à  $xx^\top = uu^\top = vv^\top$ . [5]

2\ La fonction  $x \mapsto x^2$  est-il convexe ?

**La solution [6] :**

$x \mapsto x^2$  est convexe car :

$$\begin{aligned} tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - f[tx_1 + (1-t)x_2] &= tx_1^2 + (1-t)x_2^2 \\ &\quad - [tx_1 + (1-t)x_2]^2 \\ &= t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

Et pour  $0 \leq t \leq 1$ ; on a :

$$t(1-t)(x_1 - x_2)^2 \geq 0$$

## CHAPITRE 3

## APPLICATIONS

### Quelques inégalités classiques :

Dans ce chapitre, on va présenter quelques inégalités nécessaires et donner quelques définitions.

### 3.1 La convexité et la norme

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. On peut dans la définition d'une norme, remplacer la troisième propriété (inégalité triangulaire) par la suivante :

L'ensemble des éléments  $x \in E$  tels que  $\|x\| \leq 1$  est une partie convexe de  $E$ .

**Démonstration 14.** Soit  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  une application, et telle que l'ensemble  $A = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  soit une partie convexe de  $E$ .

Montrons que  $\|\cdot\|$  vérifie l'inégalité triangulaire.

Pour tous  $x, y \in E \setminus \{\vec{0}\}$ , on a bien  $\frac{x}{\|x\|} \in A \setminus \{\vec{0}\}$  et  $\frac{y}{\|y\|} \in A$ . En posant

$\lambda = \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|} \in [0, 1]$ , on obtient :

$$\lambda \frac{x}{\|x\|} + (1 - \lambda) \frac{y}{\|y\|} = \frac{x}{\|x\| + \|y\|} + \frac{y}{\|x\| + \|y\|} \in A,$$

Puisque  $A$  est convexe. Ce qui entraîne :

$$\left\| \left( \frac{x}{\|x\| + \|y\|} + \frac{y}{\|x\| + \|y\|} \right) \right\| \leq 1$$

d'où :

$$\frac{\|x + y\|}{\|x\| + \|y\|} \leq 1$$

Soit :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Réciproquement supposons que  $\phi$  soit une norme sur  $E$  et montrons que l'ensemble  $A = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$  est alors une partie convexe de  $E$ .

Soient  $x$  et  $y \in A$  tels que  $\|x\| \leq 1$  et  $\|y\| \leq 1$ .

Pour tout réel  $t \in [0, 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} \|tx + (1 - t)y\| &\leq \|tx\| + \|(1 - t)y\| \\ &\leq t\|x\| + (1 - t)\|y\| \\ &\leq t + (1 - t) = 1, \text{ car } x, y \in A \end{aligned}$$

Il s'en suit donc que  $tx + (1 - t)y \in A$ , ce qui montre que  $A$  est bien une partie convexe de  $E$ . [8]

## 3.2 Inégalité de Jensen

L'inégalité de Jensen a été découverte à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle et il donna la preuve en 1906 par le mathématicien Danois Johan Jensen, cette inégalité est une généralisation de l'inégalité de la convexité à plusieurs nombres, comme par exemple, la comparaison entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de plusieurs nombres. On peut l'écrire de deux manières :

### 3.2.1 Le cas discret

**Théorème 3.2.1.** Soit  $f$  une fonction convexe sur  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ , ( $n \geq 2$ ) et  $p = (p_1, p_2, p_3, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$  alors :

$$f\left(\frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{p_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \quad (3.1)$$

avec  $p_n = \sum_{i=1}^n p_i$ .

**Démonstration 15.** On va démontrer par récurrence.

Pour  $n = 2$  :

$$f\left(\frac{1}{p_1 + p_2} \sum_{i=1}^2 p_i x_i\right) = f\left(\frac{1}{p_1 + p_2} (p_1 x_1 + p_2 x_2)\right),$$

Comme  $f$  est une fonction convexe, alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{p_1 + p_2} (p_1 x_1 + p_2 x_2)\right) &\leq \frac{p_1}{p_1 + p_2} f(x_1) + \frac{p_2}{p_1 + p_2} f(x_2) \\ &\leq \frac{1}{p_1 + p_2} (p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2)) \\ &\leq \frac{1}{p_1 + p_2} \left(\sum_{i=1}^2 p_i f(x_i)\right) \\ &\leq \frac{1}{P_2} \left(\sum_{i=1}^2 p_i f(x_i)\right) \end{aligned}$$

Donc l'inégalité (3.1) est vrai pour  $n = 2$ . On suppose que l'inégalité (3.1) est vrai pour  $n$  et on montre quel est vrai pour  $n + 1$ ,

$$f\left(\frac{1}{P_{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) = f\left(\frac{p_{n+1}}{P_{n+1}} x_{n+1} + \frac{P_n}{P_{n+1}} \cdot \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right)$$

Comme l'inégalité (3.1) est vrai pour  $n + 1$ , alors elle est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$$

### 3.2.2 Le cas intégrale (continue)

La forme intégrale de l'inégalité de Jensen à la forme suivante :

**Théorème 3.2.2.** Soit  $f$  une fonction convexe sur l'intervalle  $I$ ,  $u : [a, b] \rightarrow I$  une fonction continue. Alors :

$$f\left(\frac{\int_a^b p(x)u(x) dx}{\int_a^b p(x) dx}\right) \leq \frac{\int_a^b p(x)f(u(x)) dx}{\int_a^b p(x) dx} \quad (3.2)$$

où  $p$  est positif continue sur  $[a, b]$

**Démonstration 16.** Comme  $f$  est une fonction convexe sur l'intervalle  $[a, b]$ ,

alors pour tout  $t_0 \in [a, b]$ , il existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$f(t) - f(t_0) \geq \beta(t - t_0), \quad t \in [a, b]$$

d'où

$$p(t)f(u(t)) \geq \beta(u(t) - t_0)p(t) + f(t_0)p(t) \quad (3.3)$$

posons

$$t_0 = \frac{\int_a^b p(t)u(t) dt}{\int_a^b p(t) dt}$$

et on intègre l'inégalité (3.3) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_a^b p(t)f(u(t)) dt &\geq \beta \int_a^b p(t) \left( u(t) - \frac{\int_a^b p(t)u(t) dt}{\int_a^b p(t) dt} \right) dt \\ &+ f \left( \frac{\int_a^b p(t)u(t) dt}{\int_a^b p(t) dt} \right) \int_a^b p(t) dt \\ &= \beta \left( \int_a^b p(t)u(t) dt - \int_a^b p(t)u(t) dt \right) \\ &+ f \left( \frac{\int_a^b p(t)u(t) dt}{\int_a^b p(t) dt} \right) \int_a^b p(t) dt \end{aligned}$$

Ce qu'implique :

$$\frac{\int_a^b p(t)f(u(t)) dt}{\int_a^b p(t) dt} \geq f \left( \frac{\int_a^b p(t)u(t) dt}{\int_a^b p(t) dt} \right)$$

### 3.2.3 Applications

Dans ce qui suit on donne quelques application direct de l'inégalité de Jensen

**Proposition 3.2.1.** (Comparaison entre moyennes géométrique et moyenne arithmétique) Soit  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ .

On a :

$$\left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

**Démonstration 17.** Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = -\ln(x)$$

on a alors :

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

on en déduit que  $f$  est convexe. En appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{-\ln(x_i)}{n}$$

donc :

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln(x_i)}{n} \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)$$

qui s'écrit :

$$\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{n}}\right) \leq \ln\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)$$

donc :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)$$

alors :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

**Proposition 3.2.2.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

**Démonstration 18.** Considérons la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = x^p$$

on a alors

$$f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$$

Par conséquent  $f$  est convexe. En appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient :

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p,$$

et en élevant les deux membres à la puissance  $\frac{1}{p}$  on obtient

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \leq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Remarque 3.** Si l'on pose  $p = 2$  dans la formule précédente on obtient [3]

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Par conséquent

$$\left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

### 3.3 Inégalité de Hermite-Hadamard

**Théorème 3.3.1.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe. Alors :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Pour la démonstration, on a besoin du Lemme suivant

**Lemme 3.3.1.** Soit  $f$  une fonction intégrable dans  $I$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a) d\lambda \\ &= \int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b) d\lambda \end{aligned}$$

**Preuve du Théorème 3.4.1.** Soit  $f$  est une fonction convexe on a pour tout

$\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{\lambda b + (1-\lambda)a + \lambda a + (1-\lambda)b}{2}\right) \\ &\leq \frac{f(\lambda b + (1-\lambda)a) + f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{2} \\ &\leq \frac{\lambda f(b) + (1-\lambda)f(a) + \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)}{2} \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

alors on peut écrire :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(\lambda b + (1-\lambda)a) + f(\lambda a + (1-\lambda)b)}{2} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (3.4)$$

En intégrant l'inégalité (3.4) sur  $[0, 1]$ , par rapport à  $\lambda$  et on utilise le Lemme 3.4.1 on obtient [3]

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) d\lambda &\leq \frac{1}{2} \left( \int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a) d\lambda + \int_0^1 f(\lambda a + (1-\lambda)b) d\lambda \right) \\ &\leq \int_0^1 \frac{f(a) + f(b)}{2} d\lambda, \end{aligned}$$

alors

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

### 3.4 Inégalité de Fejér

L'inégalité de **Fejér** est une généralisation de l'inégalité de Hermite-Hadamard.

**Théorème 3.4.1.** Soit  $f$  une fonction convexe sur  $[a, b]$ , et soit  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une fonction intégrable et symétrique par rapport à  $x = \frac{a+b}{2}$  (i.e.  $p(x) = p(a+b-x)$ ). Alors :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t) dt \leq \int_a^b p(t) f(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b p(t) dt \quad (3.5)$$

pour la démonstration on besoin du lemme suivant

Lemme 3.4.1. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe, alors

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(x) + f(a+b-x) \leq f(a) + f(b)$$

Preuve du Théorème 3.5.1. Comme  $f$  une fonction convexe sur  $[a, b]$ , et soit  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction intégrable et symétrique par rapport à  $x = \frac{a+b}{2}$ .

On a

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t) dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) p(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) p(t) dt$$

Comme  $p$  est symétrique par rapport à  $x = \frac{a+b}{2}$  on obtient [3]

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t) dt &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) p(t) dt \\ &+ \int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right) p(a+b-t) dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[ f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] p(t) dt, \end{aligned}$$

on utilise le Lemme 3.5.1 on obtient

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t) dt &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(t) + f(a+b-t)]p(t) dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)p(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)p(t) dt \quad (3.6) \\ &= \int_a^b p(t)f(t) dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b p(t) dt &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{f(a) + f(b)}{2} p(t) dt \\ &\quad + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{f(a) + f(b)}{2} p(a + b - t) dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(a) + f(b)] p(t) dt \end{aligned}$$

d'après le Lemme 3.5.1 on obtient

$$\begin{aligned} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b p(t) dt &\geq \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(t) + f(a + b - t)] p(t) dt \\ &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t) p(t) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t) p(t) dt \quad (3.7) \\ &= \int_a^b p(t) f(t) dt \end{aligned}$$

Alors de (3.6) et (3.7) on obtient :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b p(t) dt \leq \int_a^b p(t) f(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b p(t) dt$$

### 3.5 Inégalité de Hölder

L'inégalité de **Hölder** est une inégalité fondamentale relative aux espaces de fonctions  $L^p$

#### 3.5.1 Le cas décrit

**Théorème 3.5.1.** Soient  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$  et  $p, q \in \mathbb{R}_+^n$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  on a :

$$\sum_{i=0}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=0}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=0}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.8)$$

Preuve 3.5.1. On applique l'inégalité de Jensen avec  $n = 2$ ,  $p_1 = \frac{1}{p}$ ,  $p_2 = \frac{1}{q}$ ,  $f(x) = -\ln(x)$  et  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  on obtient

$$\begin{aligned} -\ln\left(\frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}\right) &\leq -\frac{\ln(x_1)}{p} - \frac{\ln(x_2)}{q} \\ &\leq -\ln\left(x_1^{\frac{1}{p}}\right) - \ln\left(x_2^{\frac{1}{q}}\right) \end{aligned}$$

Par la fonction exponentielle on obtient

$$x_1^{\frac{1}{p}} * x_2^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x_1}{p} + \frac{x_2}{q}$$

Posons

$$x_1 = \frac{a_i^p}{\sum_{i=0}^n a_i^p} \text{ et } x_2 = \frac{b_i^q}{\sum_{i=0}^n b_i^q}$$

On obtient

$$\left(\frac{a_i^p}{\sum_{i=0}^n a_i^p}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{b_i^q}{\sum_{i=0}^n b_i^q}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum_{i=0}^n a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{i=0}^n b_i^q}$$

C'est à dire

$$\frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_i^p}{p \sum_{i=0}^n a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{i=0}^n b_i^q}$$

Sommons

$$\sum_{i=0}^n \frac{a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \sum_{i=0}^n \frac{a_i^p}{p \sum_{i=0}^n a_i^p} + \frac{b_i^q}{q \sum_{i=0}^n b_i^q}$$

d'où

$$\frac{\sum_{i=0}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{\sum_{i=0}^n a_i^p}{p \sum_{i=0}^n a_i^p} + \frac{\sum_{i=0}^n b_i^q}{q \sum_{i=0}^n b_i^q}$$

qui se simplifie

$$\frac{\sum_{i=0}^n a_i b_i}{\left(\sum_{i=0}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

et finalement

$$\sum_{i=0}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=0}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=0}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

### 3.5.2 Le cas intégrale (continue)

**Théorème 3.5.2.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continue et intégrable sur  $[a, b]$ , soient  $1 < p, q < +\infty$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Alors

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right) \leq \left( \int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b (g(x))^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Pour la démonstration on a besoin du Lemme suivant

**Lemme 3.5.1. (inégalité de Young)** Soit  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  et  $p > 0, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

**Preuve du Théorème 3.6.2.** On suppose que [3]

$$\int_a^b |f(x)|^p dx \neq 0 \text{ et } \int_a^b |g(x)|^q dx \neq 0$$

On applique l'inégalité de Young avec

$$a = \frac{|f(x)|}{\left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}} \text{ et } b = \frac{|g(x)|}{\left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}}$$

On obtient

$$\frac{|f(x)|}{\left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{\left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

On intègre sur  $[a, b]$  par rapport à  $x$  on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx}{\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} &\leq \frac{1}{p} \frac{\int_a^b |f(x)|^p dx}{\int_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{1}{q} \frac{\int_a^b |g(x)|^q dx}{\int_a^b |g(x)|^q dx} \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Alors :

$$\left(\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx\right) \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

### 3.6 Inégalité de Minkovsky

L'inégalité de **Minkovsky** est l'inégalité triangulaire pour la norme des espaces  $L^p$  pour  $p \geq 1$

#### 3.6.1 Le cas discret

**Théorème 3.6.1.** Soient  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $p > 1$  Alors

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

si  $p < 1$  ( $p \neq 0$ ), l'inégalité s'inverse. Dans les deux cas l'égalité est valide si et seulement si  $a$  et  $b$  sont proportionnel.

**Preuve 3.6.1.** Nous donnons la démonstration dans le cas où  $p > 1$ , l'autre cas se pouvant pareillement. Nous avons :

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p = \sum_{i=1}^n a_i (a_i + b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n b_i (a_i + b_i)^{p-1}.$$

On applique alors l'inégalité de Hölder à chacune des deux sommes, avec les

coefficients  $p$  et  $\frac{p}{p-1}$  (qui sont bien tels que  $\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p}$ ). Cela nous donne

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p &\leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\quad + \left( \sum_{i=1}^n b_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned}$$

En divisant chaque membre par  $\left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{\frac{p-1}{p}}$ , on obtient exactement l'inégalité de Minkowski.

### 3.6.2 Le cas Intégrale(Continue)

**Théorème 3.6.2.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continue et intégrable sur  $[a, b]$ , alors :

$$\left( \int_a^b (f(x) + g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

où  $p > 1$

Preuve 3.6.2. On utilise l'inégalité de Hölder, on obtient [3]

$$\begin{aligned}
 \int_a^b |f + g|^p dx &\leq \int_a^b (|f| + |g|) |f + g|^{p-1} dx \\
 &= \int_a^b |f| |f + g|^{p-1} dx + \int_a^b |g| |f + g|^{p-1} dx \\
 &\leq \left( \left( \int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
 &\quad \left( \int_a^b |f + g|^{(p-1)\left(\frac{p}{p-1}\right)} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
 &= \left( \left( \int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\
 &\quad \left( \int_a^b |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}
 \end{aligned}$$

ce qui est implique

$$\left( \frac{\int_a^b |f + g|^p dx}{\left( \int_a^b |f + g|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}} \right) \leq \left( \int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

donc

$$\left( \int_a^b |f + g|^p dx \right)^{1 - \frac{p-1}{p}} \leq \left( \int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

alors

$$\left( \int_a^b (f(x) + g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_a^b (f(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_a^b (g(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

### 3.7 Inégalité de Chybechev

L'inégalité classique de Chybechev implique la différence entre la moyenne du produit de deux fonctions et le produit du moyen des fonctions individuelles.

## 3.7.1 Le cas discret

**Théorème 3.7.1.** Soient  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , monotone dans la même direction et  $n \in \mathbb{N}^*$  alors :

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right) \quad (3.9)$$

si  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont monotone dans le sens inverse, alors l'inégalité (3.9) s'inverse ;

**Preuve 3.7.1.** On suppose que  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , monotone dans la même direction et  $n \in \mathbb{N}^*$  Alors

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

ce qu'implique

$$a_i b_i + a_j b_j \geq a_j b_i + a_i b_j, \quad (3.10)$$

En somment l'inégalité (3.10) par rapport a  $i$  on obtient

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) + n a_j b_j \geq a_j \sum_{i=1}^n b_i + b_j \sum_{i=1}^n a_i \quad (3.11)$$

En somment l'inégalité (3.11) par rapport a  $j$  on obtient

$$n \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) + n \left( \sum_{i=1}^n a_j b_j \right) \geq \sum_{j=1}^n a_j \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n a_i,$$

en fait l'inégalité en même indice  $i$

$$2n \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

Donc

$$n \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

Alors

$$\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

### 3.7.2 Le cas Intégrale (continue)

**Théorème 3.7.2.** Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction intégrable, si  $f$  et  $g$  sont monotone dans la même direction alors

$$\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x) f(x) g(x) dx \geq \int_a^b p(x) f(x) dx \int_a^b p(x) g(x) dx \tag{3.12}$$

Si  $f$  et  $g$  sont monotone dans le sens inverse, alors l'inverse de l'inégalité (3.12) s'inverse, dans les deux cas, l'égalité dans (3.12) reste vrai si et seulement si  $f$  ou  $g$  est constante.

**Preuve 3.7.2.** Comme  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions monotones dans la même direction et  $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction intégrable on a [3] :

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0 \tag{3.13}$$

en multiplie (3.13) par  $p(x)p(y)$  on obtient

$$p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0 \tag{3.14}$$

on intègre l'inégalité (3.14) par rapport à  $x$  et  $y$  on obtient

$$\int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \geq 0 \quad (3.15)$$

en multiplie (3.15) par  $\frac{1}{2}$  on obtient

$$\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \geq 0, \quad (3.16)$$

d'où

$$\begin{aligned} & \int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx - \int_a^b p(x)f(x) dx \int_a^b p(x)g(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b p(x)p(y)(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy \geq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\int_a^b p(x) dx \int_a^b p(x)f(x)g(x) dx \geq \int_a^b p(x)f(x) dx \int_a^b p(x)g(x) dx$$

### 3.8 Inégalité de Grüss

#### 3.8.1 Le cas discret

Dans le cas discret l'inégalité de Grüss est une estimation de la différence :

$$I(a, b, p) := P_n \sum_{i=1}^n p_i a_i b_i - \sum_{i=1}^n p_i a_i \sum_{i=1}^n p_i b_i \quad (3.17)$$

où  $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$ .

**Théorème 3.8.1.** Soient  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , deux n-uplet de tels que

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

et soit  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}_+^n$ . Alors

$$|I(a, b; p)| \leq |a_n - a_1| |b_n - b_1| \max_{1 \leq j \leq n-1} P_j (P_n - P_{j+1})$$

où  $P_j = \sum_{k=1}^j p_k$

Une autre version de l'inégalité de Grüss due à M. Biernacki, H. Pidek et C. Ryll-Nardzewski est donné par

**Théorème 3.8.2.** Soient  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , tels que  $r < a_i < R$ , et  $s < b_i < S$  pour tous  $i = 1, \dots, n$ . Alors on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right| \leq \frac{1}{n} \left[ \frac{n}{2} \right] \left( 1 - \frac{1}{n} \left[ \frac{n}{2} \right] \right) (R - r)(S - s)$$

où  $[x]$  est la partie entière de  $x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

### 3.8.2 Le cas Intégrale (continue)

Dans le cas continue l'inégalité de Grüss est donnée une approximation de l'intégrale du produit en termes de produit de intégrales comme suit

**Théorème 3.8.3.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ . Soient également  $\alpha \leq f(t) \leq A$  et  $\beta \leq g(t) \leq B$   $\alpha, A$  et  $\beta, B$  des réels tels que  $\forall t \in [a, b]$ ,

alors

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt - \left( \int_a^b f(t) dt \right) \left( \int_a^b g(t) dt \right) \right| \leq \frac{1}{4}(A - \alpha)(B - \beta).$$

**Preuve 3.8.1.** Comme  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions intégrables sur  $[a, b]$  et  $\forall t \in [a, b]$

$$\alpha \leq f(t) \leq A \text{ et } \beta \leq g(t) \leq B$$

on note que

$$|T(f, g)| = \left| \int_a^b f(t)g(t) dt - \left( \int_a^b f(t) dt \right) \left( \int_a^b g(t) dt \right) \right|$$

Tout d'abord, nous utilisons cette identité prouvée par K.A.Andreiev, qui affirme

que  $T(f, g)$  peut être écrit comme

$$T(f, g) = \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dx dy$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$T^2(f, g) \leq T(f, f)T(g, g)$$

On désigne par  $K(f)$  la moyenne intégrale arithmétique

$$K(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

d'autre part

$$\begin{aligned} T(f, f) &= \int_a^b f(t)f(t) dt - \left( \int_a^b f(t) dt \right) \left( \int_a^b f(t) dt \right) \\ &= \int_a^b f(t)^2 dt - \left( \int_a^b f(t) dt \right)^2 \\ &= K(f^2) - K^2(f) \geq 0 \end{aligned}$$

On peut facilement voir que l'identité suivante est également vraie

$$T(f, f) = (A - K(f))(K(f) - \alpha) - \frac{1}{b-a} \int_a^b (A - f(x))(f(x) - \alpha) dx$$

ce qui implique

$$T(f, f) \leq (A - K(f))(K(f) - \alpha).$$

De même, on a

$$T(g, g) \leq (B - K(g))(K(g) - \beta)$$

En combinant les étapes précédentes

$$T^2(f, g) \leq (A - K(f))(K(f) - \alpha)(B - K(g))(K(g) - \beta)$$

Enfin, par l'inégalité  $A - G$ , il est évident que

$$(A - K(f))(K(f) - \alpha) \leq \frac{1}{4}(A - \alpha)^2,$$
$$(B - K(g))(K(g) - \beta) \leq \frac{1}{4}(B - \beta)^2,$$

donc

$$T^2(f, g) \leq \frac{1}{16}(A - \alpha)^2(B - \beta)^2,$$

d'où [3]

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{4}(A - \alpha)(B - \beta).$$

## CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons fait une étude générale sur la convexité en prenant en considération les fonctions convexes, elles sont utiles dans l'optimisation comme le sera montré dans ce travail, mais aussi dans plusieurs domaines de mathématiques appliquées.

Donc nous espérons que ce travail, soit un document utile et un point de départ pour d'autres thèmes de recherches.

## Bibliographie

- [1] Ameer Hayat. Zaddam Zahia. l'efficacité de la méthode de gradient conjugué pour les fonctions quadratiques . Université Constantine 1, 2018
- [2] Analyse convexe . Sorbonne université,2017
- [3] Becherif Boumediene. Introduction à l'analyse des inégalités et leurs applications. Université Abdelhamid Ibn badis -Mostaganem ,2017
- [4] Fatima Djerradi.Sur la théorie de la convexité et ses applications . Université Ahmed draia d'Adrar,2018
- [5] Jean-Baptiste Hiriart-urruty . Optimisation et analyse convexe exercices et problèmes corrigés avec rappels de cours
- [6] Kada Allan. Élément d'analyse : fonction d'une variable réelle.Alger ,1984
- [7] Karima Aouiaidjia.Semi norme et espace topologique localement convexe,2014
- [8] leila sahraoui.Fonctions convexes : propriétés et applications,2013
- [9] Pierre Weiss . Éléments d'analyse et d'optimisation convexe. Université de Toulouse,2015
- [10] [www.alloprof.qc.ca](http://www.alloprof.qc.ca) la classification des polygones
- [11] Bahraoui Fatiha, Etude des problèmes de minimisation convexes à contribution de la dualité.
- [12] [www.exoco-lmd.com](http://www.exoco-lmd.com)

## ملخص

في هذه المذكرة تناولنا مفهوم التحدب وتطبيقاته حيث قسمنا المذكرة إلى ثلاثة أجزاء في الجزء الأول تناولنا مفهوم التحدب بالنسبة للمجموعات بينما خصص الجزء الثاني للدوال المحدبة وخصائصها أما الجزء الأخير فقد تناول بعضاً من تطبيقات التحدب

## Abstract

In this memory we deal with the theory of convexity and its applications. It's devised in three chapters. The first chapter presents results on convex sets. The second chapter is devoted to the study of convex functions and their properties. In the last chapter, we illustrate this study with some applications of convexity.

## Résumé

Notre mémoire apporte des études sur la théorie de convexité et ses applications. Elle est devisée en trois chapitres. Le premier chapitre présente des résultats sur les ensembles convexes. Le deuxième, est consacré à l'étude des fonctions convexes et ses propriétés. Dans le dernier chapitre, nous illustrons notre étude avec quelques applications de la convexité.