

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abbès Laghrou - Khenchela
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Mathématiques et informatique



N° d'ordre:

N° série:

THESE

Pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUE

Option : Mathématiques Appliquées

Intitulée:

ETUDE DE QUELQUES PROBLEMES AUX LIMITES NON LINEAIRES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Par:

Zaid Laadjal

Devant le jury composé de:

K. Saoudi	Prof.	Univ. Abbès Laghrou - Khenchela	Président
N. Adjeroud	M.C.A	Univ. Abbès Laghrou - Khenchela	Rapporteur
A. Zaraï	Prof.	Univ. Larbi Tebessi - Tebessa	Examineur
R. Mecheraoui	M.C.A	Univ. Abbès Laghrou - Khenchela	Examineur
S. Abdelmalek	M.C.A	Univ. Larbi Tebessi - Tebessa	Examineur

Soutenue le: 25 Mars 2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Je remercie ALLAH le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail et qui m'a donné le courage, la patience et la santé durant toutes ces longues années d'étude afin que je puisse arriver à ce niveau.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon Directeur de thèse Monsieur *Nacer Adjeroud* Maître de conférences classe A à l'université Abbès Laghrour - Khenchela, de m'avoir proposé ce thème, pour ses encouragements et pour ses précieux conseils, son aide constant, sa patience et ses directives durant tout le travail.

Je tiens à exprimer ma gratitude envers les membres de jury pour leur disponibilité: Monsieur *Khaled Saoudi* Professeur à l'université Abbès Laghrour - Khenchela, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury et je remercie Messieurs les examinateurs d'avoir accepté d'évaluer ce travail et de rédiger les rapports et les commentaires concernant cette thèse à s'avoir, Monsieur *Abderrahmane Zarai* Professeur à l'université Larbi Tebessi - Tebessa, Monsieur *Rachid Mecheraoui* Maître de Conférences classe A à l'université Abbès Laghrour - Khenchela et Monsieur *Salem Abdelmalek* Maître de Conférences classe A à l'université Larbi Tebessi - Tebessa.

Je tiens aussi à exprimer mes plus sincères remerciements à tous les membres de la faculté des sciences et de la technologie de l'université Abbès Laghrour - Khenchela en général et aux membres du département des mathématiques et informatique en particulier.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance à toute ma famille, amis et collègues pour leurs soutiens et leurs sincères sentiments.

Zaid Laadjal

Résumé

Cette thèse étudie certaines équations différentielles d'ordre fractionnaire avec des conditions aux limites sur un intervalle borné. En se basant sur les théorèmes du point fixe, des conditions suffisantes pour l'existence de solutions ont été proposées pour une nouvelle classe d'équation de Langevin introduisant les différentes dérivées d'ordre fractionnaire au sens de Caputo et pour une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard. Les inégalités de type de Hartman-Wintner et de Lyapunov pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire de Hadamard ont été discutées, ainsi que leurs applications sur un problème de valeurs propres et non-existence de la solution. Des exemples ont été utilisés pour valider les résultats obtenus, et à la fin de notre travail, nous avons proposé quelques problèmes ouverts.

Mots clés: calcul fractionnaire, équation différentielle, équation de Langevin, conditions aux limites, existence, unicité, non-existence, inégalité de Hartman-Wintner, inégalité de Lyapunov.

Abstract

This thesis, investigate some fractional differential equations with boundary conditions on a bounded interval. Based on fixed point theorems, sufficient conditions were determined for the existence of solutions for a new class of Langevin equation involving Caputo fractional derivatives of different order and a class of differential equations with Hadamard fractional derivative. The Hartman-Wintner and Lyapunov type inequalities for a differential equation with Hadamard fractional derivative discussed, with their applications on the eigenvalues problem, and proving of non-existence of solution. Examples were used to validate the results obtained. Finally, some open problems were proposed.

Key words: Fractional calculus, differential equation, Langevin equation, boundary conditions, existence, uniqueness, non-existence, Hartman-Wintner-type inequality, Lyapunov-type inequality.

MSC(2010): 34A08, 34A40, 26D15, 26A33, 34A12, 45J05, 34B15.

ملخص

هذه الأطروحة تتناول دراسة بعض المعادلات التفاضلية ذات رتب كسرية مع شروط حدية على فترة زمنية محدودة. إعتماذا على نظريات النقطة الصامدة تم تحديد شروط كافية لوجود حلول لنمط جديد من معادلة لونجوجا ذات مشتق كابوتو الكسري، وشروط كافية لوحداية الحل لصنف من معادلات تفاضلية ذات مشتق هادامار الكسري. تمت دراسة متراجحات هارتمان-وينتنر وليابونوف لمعادلة تفاضلية ذات مشتق هادامار الكسري، وتطبيقاتها على إشكالية القيم الذاتية وعدم وجود الحل. أستعملت أمثلة لإظهار فعالية النتائج المتوصل إليها. وفي الأخير تم تقديم بعض الإشكاليات المفتوحة.

كلمات دلالية: مشتق كسري، معادلة تفاضلية، معادلة لونجوجا، شروط حدية، وجود، وحدانية، عدم وجود، متراجحة هارتمان-وينتنر، متراجحة ليابونوف.

Table des matières

Remerciments	i
Résumé	ii
Table des matières	v
Introduction générale	1
Notations	7
1 Concepts de base et généralités sur le calcul fractionnaire	8
1.1 Intégrale et dérivée au sens de Riemann-Liouville	8
1.2 Dérivée au sens de Caputo	10
1.3 Intégrale et dérivée au sens de Hadamard	11
1.4 Outils d'analyse fonctionnelle	13
2 Existence et unicité des solutions d'une équation d'ordre fractionnaire à multi- termes de Langevin avec conditions aux limites	15
2.1 L'équation intégrale équivalente au problème	16
2.2 Résultat d'unicité	18
2.3 Résultat d'existence	21
2.4 Exemples	23

3	Estimations précises pour la solution unique d'une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard	25
3.1	Fonction de Green associée au problème	26
3.2	Résultat d'unicité	30
3.3	Résultats sur un problème de valeurs propres	31
3.4	Exemples	32
4	Inégalité de type de Lyapunov d'un problème de Hadamard dérivatif avec conditions aux limites sur un intervalle $[a, b]$	34
4.1	Fonction de Green associée au problème	35
4.2	Inégalité de Hartman-Wintner	36
4.3	Inégalités de Lyapunov	37
4.4	Applications	41
4.4.1	Borne inférieure pour les valeurs propres	41
4.4.2	Résultat de non-existence	42
4.4.3	Exemples	43
	Conclusion et Perspectives	44
	Bibliographie	46

Introduction générale

Cette introduction présente un aperçu historique sur l'intégrale et la dérivée d'ordre fractionnaire et ses applications naturelles par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Toutes les informations de base introduites dans cette introduction proviennent des références [1–9].

L'idée généralisée de la notion de dérivation d'ordre fractionnaire (non entier) a commencé par certaines spéculations, la première tentative pour discuter de cette idée enregistrée dans l'histoire par une question posée en 1695 par l'Hôpital à Leibniz, s'enquiert de la signification de cette notation $\frac{d^n}{dt^n}$ dans le cas de la dérivation d'ordre non entier, quand $n = \frac{1}{2}$ "Que se passe-t-il si $n = \frac{1}{2}$?". En 30 Septembre 1695, Leibniz [10] a répondu comme suit : «C'est un paradoxe apparent à partir duquel, un jour on tirera des conséquences utiles». Pour plus de détails voir [1].

En 1738, Euler [11] a fait le premier pas. Il a observé que le résultat de l'évaluation de la dérivée $\frac{d^q x^a}{dt^q}$ de la fonction puissance : x^a a une signification pour q non entier. Laplace en 1812 [12] a proposé l'idée de dérivation d'ordre non entier pour des fonctions pouvant

être représentées par une intégrale de $\int f(x)x^{-t}dx$.

En 1819, Lacroix [13] a discuté un simple exercice mathématique en utilisant la fonction $f(x) = x^k$, où k est un entier positif, il a pu développer facilement la $n^{\text{ème}}$ dérivative comme suit

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}, \quad k \geq n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

et en utilisant le symbole Γ de Legendre pour le factoriel généralisée, il a obtenu

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}, \quad (2)$$

en remplaçant la fonction $f(x)$ par x et l'ordre n par $\frac{1}{2}$, Lacroix a pu développer la formule

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}. \quad (3)$$

Ce résultat obtenu par Lacroix est le même que celui de la définition actuelle de Riemann-Liouville d'une dérivée fractionnaire.

En 1822, Fourier [14] a proposé l'idée d'utiliser le principe d'égalité

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^q f(x) \cos(\tau t - x\tau + \frac{q\pi}{2}t) d\tau dx, \quad (4)$$

afin de définir la dérivée pour un ordre non entier. C'était la première définition de la dérivée d'ordre positif arbitraire appropriée pour toute fonction suffisamment "bonne", pas nécessairement une fonction de puissance ($f(x) = x^k$).

La véritable histoire du calcul fractionnaire a commencé par Abel [15, 16] et Liouville sur l'équation intégrale

$$\varphi(t) = \int_a^t (t-\tau)^{-\kappa} f(\tau) d\tau, \quad \kappa \in (0, 1), t > a. \quad (5)$$

Bien que les recherches d'Abel n'ont pas mené à la généralisation de la dérivation, mais elles ont pu jouer un rôle énorme dans le développement du calcul fractionnaire. La raison en était que le côté gauche de l'équation d'Abel représente, comme il deviendra évident par la suite, l'opération intégrale fractionnaire d'ordre $1 - \kappa$, tandis que l'inversion de cette équation conduit à une dérivée fractionnaire. Cependant, les notions d'intégré-différentiel d'ordre fractionnaire sous une telle forme ont été mises en forme un peu plus tard [2].

Allant de 1832 jusqu'à 1837, Liouville a publié huit articles [17–24], faisant de lui de droit le véritable créateur de la théorie substantielle de l'intégré-différentielle d'ordre fractionnaire, ces articles de Liouville ont été les premiers à contenir une application du calcul fractionnaire à la solution de certains types d'équations différentielles ordinaires linéaires, dans ses articles, des idées importantes et de grandes portées étaient proposées. Pour toute fonction f qui pouvant être développer comme une série $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k t}$, la définition initiale proposée par Liouville était basée sur la formule de dérivation d'une fonction exponentielle. Ensuite il a mis en oeuvre la formule d'intégrale fractionnaire d'ordre $q > 0$ comme suit [5]

$$D^{-q}f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x+t)x^{q-1}}{(-1)^q \Gamma(q)} dx, t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

En 1847, Riemann a rédigé un papier alors qu'il n'était qu'un étudiant et ne fut publié qu'en 1876 [25], dix ans après sa mort, dans cet article, Riemann était arrivé à l'expression

$$D^{-q}f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-x)^{q-1} f(x) dx, t > 0, \quad (7)$$

pour l'intégration fractionnaire, depuis lors, cette formule est devenue l'une des principales formules d'intégration fractionnaire avec la construction de Liouville, la formule (7) s'appelle maintenant la forme de Riemann-Liouville d'intégration fractionnaire.

Quelques années plus tard, Grunwald [26] et Letnikov [27] en 1872, ont exposé une approche de la dérivée fractionnaire basée sur l'expression

$$D^\kappa f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^\kappa f(t)}{h^\kappa}, \Delta_h^\kappa f(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), n - 1 < \kappa \leq n. \quad (8)$$

En 1892, Hadamard [28] propose une idée de la dérivée fractionnaire d'une fonction analytique via la dérivation de la série de Taylor, où il la comme un outil mathématique de travail efficace. Hadamard a traité l'intégration fractionnaire sous la forme

$$I^\kappa f(t) = \frac{t^\kappa}{\Gamma(\kappa)} \int_0^1 (1-\tau)^{\kappa-1} f(t\tau) d\tau, \quad (9)$$

ce qui l'a amené à examiner davantage les intégrales fractionnaires généralisées de la forme

$$\int_0^1 \varphi(\tau) f(t\tau) d\tau, \quad (10)$$

et par cette idée, il avait considéré le cas $\varphi(\tau) = \frac{(-\ln \tau)^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa)}$.

Le lecteur intéressé peut trouver d'autres détails sur l'histoire de la dérivation fractionnaire entre 1695 et 1900, décrits par Ross dans [1].

Entre 1900 et 1970, un nombre réduit d'ouvrages ont été publiés sur le calcul fractionnaire par certains des contributeurs comme M. Al-Bassam, H. T. Davis, A. Erdelyi, G. H. Hardy, H. Kober, J. E. Littlewood, E. R. Love, T. Osier, M. Riesz, S. Samko, I. Sneddon, H. Weyl et A. Zygmund, ... etc. Par exemple, en 1931, Watanabe [29] a donné la preuve de la formule (règle de Leibniz) suivante

$$D^\kappa(fg) = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\kappa}{j} (D^{\kappa-j} f) D^j g. \quad (11)$$

En général, les détails historiques au cours du dernier siècle occupent un grand espace même s'ils devaient uniquement déterminer les résultats importants obtenus. Pour plus de détails voir §4, §9, §17, §23, §29, §34, §39 et §43 dans le livre [2].

Le calcul fractionnaire a reçu beaucoup d'attention au cours des dernières 30 années [3] et est devenu un important domaine de recherche en raison à la fois par le développement intensif de la théorie du calcul fractionnaire lui-même et par ses plusieurs applications. Il existe deux définitions les plus couramment utilisées d'une intégrale fractionnaire et de la dérivée fractionnaire : au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo. Et il y a plusieurs autres définitions d'une intégrale fractionnaire et de la dérivée fractionnaire. Par exemple, la dernière définition a été publiée par Jarad et autres en 2017 [30] et il est de forme

$$\mathcal{J}_a^{\alpha,\rho} f(t) = \frac{1}{\rho^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(t-\tau)} f(\tau) d\tau, \text{ for } \alpha > 0, 0 < \rho \leq 1. \quad (12)$$

Cette définition est appelée intégrale fractionnaire proportionnel généralisé. Et ils ont représenté aussi un nouveau opérateur de dérivé fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (GFP Derivative) et un nouveau opérateur de dérivé fractionnaire au sens de Caputo comme suit :

$${}^{\mathcal{R}}\mathcal{D}_a^{\alpha,\rho} f(t) = D^{n,\rho} \mathcal{J}_a^{n-\alpha,\rho} f(t), \quad (13)$$

$${}^C_p\mathfrak{D}_a^{\alpha,\rho} f(t) = \mathcal{J}_a^{n-\alpha,\rho} (D^{n,\rho} f)(t), \quad (14)$$

(resp.) où $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. et $D^{n,\rho} f(t) = \underbrace{D^\rho D^\rho \cdots D^\rho}_{n\text{-fois}} f(t)$, avec $D^\rho f(t) = (1-\rho)f(t) + \rho f'(t)$. Et en 2020, Abdeljawad [31] a généralisé la dérivée D^ρ dans le cas $\rho \in \mathbb{R}^+$ sous la forme

$$D^\rho f(t) = (1-\rho+n)f^{(n)}(t) + (\rho-n)f^{(n+1)}(t), \quad \rho \in (m, m+1], m \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Plusieurs problèmes complexes de la vie quotidienne ont été modélisés par des équations différentielles et des équations intégré-différentielles d'ordre fractionnaire, voir [5–8, 32] et ce fait trouver des applications étendues dans divers domaines scientifiques et technologiques et dans plusieurs domaines de l'économie, branches de la physique, de la chimie et de l'astronomie, de la biologie, de l'économie, de l'ingénierie comme l'ingénierie thermique acoustique, la théorie du contrôle, les matériaux viscoélastiques, le traitement du signal, l'électromagnétisme, la robotique, la diffusion anormale et les milieux fracturés, la théorie du potentiel et les statistiques électriques, l'aérodynamique, l'électrodynamique des milieux complexes, la rhéologie polymère, ... etc. Nous demandons vivement au lecteur de lire l'article [4] avec toutes ses références.

En analyse mathématique, les conditions aux limites sont une contrainte sur les solutions des équations différentielles aux dérivées ordinaires et partielles sur une frontière. Il existe un grand nombre de conditions aux limites possibles en fonction de la formulation du nombre de variables en jeu et ainsi en fonction de la nature de l'équation.

Un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles (que ce soit d'ordre entier ou d'ordre fractionnaire) dont on cherche des solutions qui prennent plus de valeurs imposées par les limites du domaine de résolution. Pour le problème de Cauchy, on a une ou plusieurs conditions qui sont imposées en un même point, mais ils existe plusieurs types de conditions aux limites permettant de bien poser un problème différentiel, on cite ici les conditions aux limites de Dirichlet où l'on impose la valeur de la solution aux bords du domaine, les conditions aux limites de Neumann où l'on impose la valeur de la dérivée de la solution aux bords du domaine, il y a les

conditions de Robin où la valeur de la solution aux bords du domaine est imposée comme une équation différentielle d'ordre un, on trouve aussi les conditions mixtes, et les conditions aux limites de Cauchy où l'application des conditions doubles Dirichlet/Neumann est systématique. Par exemple, voir [33–39].

Le but de notre travail est d'étudier certaines équations différentielles non linéaires d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini dans un espace de Banach.

Cette thèse est constituée de quatre chapitre comme suit :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques principes de base sur le calcul fractionnaire à partir de fonctions Gamma, ensuite, quelques définitions des approches d'intégration et dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville, de Caputo et de Hadamard avec leurs propriétés. Après cela, nous présentons le concept de l'opérateur compact et encore le théorème d'Arzela-Ascoli, ainsi qu'un aperçu de principe de contraction de Banach et le théorème de point fixe de Krasnoselskii.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions d'une nouvelle classe de problèmes aux limites d'équations de Langevin à plusieurs termes d'ordre fractionnaire avec conditions aux limites. Les résultats principaux sont obtenus à l'aide des théorèmes de point fixe.

Dans le troisième chapitre, nous étudions l'estimation forte de la condition suffisante sur l'intervalle donné pour l'existence de la solution unique d'une classe de problèmes aux limites avec dérivée fractionnaire au sens de Hadamard. La méthode d'analyse est obtenue par le principe de contraction de Banach. De plus, nous obtiendrons aussi un résultat pour un problème de valeurs propre.

Dans le quatrième chapitre, nous répondons à la question qui récemment posée concernant l'inégalité de Lyapunov pour un problème aux limites d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard. En utilisant certaines aptitudes en analyse mathématique et on obtient aussi les inégalités de type de Hartman-Wintner sur un intervalle $[a, b]$. Puis, leurs applications.

Finalement on présente une conclusion et notre perspectives et nous proposons quelques problèmes ouverts.

Notations

\mathbb{N} : ensemble des nombres entiers positifs.

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}^+ : ensemble des nombres réels positifs.

\mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.

Γ : fonction gamma d'Euler.

$\lceil \cdot \rceil$: fonction de partie entière supérieure.

D^n : opérateur de dérivée ordinaire d'ordre $n \in \mathbb{N}$.

$L^1[a, b]$: espace des fonctions mesurables et intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

$C([a, b])$: espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

$AC([a, b])$: espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

$AC^n([a, b])$: espace des fonctions Ψ telle que $\Psi^{(i)} \in AC([a, b]), i = 0, 1, \dots, n$.

\mathcal{I}_a^κ : opérateur d'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\kappa \in \mathbb{R}^+$.

${}^{\mathcal{R}}\mathcal{D}_a^\kappa$: opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\kappa \in \mathbb{R}^+$.

${}^{\mathcal{C}}\mathcal{D}_a^\kappa$: opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\kappa \in \mathbb{R}^+$.

${}^{\mathcal{H}}\mathcal{I}_a^\kappa$: opérateur d'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\kappa \in \mathbb{R}^+$.

${}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa$: opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\kappa \in \mathbb{R}^+$.

Chapitre 1

Concepts de base et généralités sur le calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et certaines propriétés des intégrales fractionnaires et des dérivés fractionnaires, aussi, les théorèmes de point fixe que nous allons utiliser dans les prochains chapitres. (Voir [40–44]).

1.1 Intégrale et dérivée au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.1 (La fonction Gamma [40]) La fonction Gamma d'Euler (notée par Γ) est définie par la formule

$$\Gamma(\kappa) = \int_0^{+\infty} \tau^{\kappa-1} e^{-\tau} d\tau, \quad (1.1)$$

tel que $\kappa \in \mathbb{C}$ avec $Re(\kappa) > 0$.

Nous avons les propriétés suivantes :

$$\Gamma(\kappa) = \frac{\Gamma(\kappa + 1)}{\kappa}, \quad \text{pour tout } \kappa \in \mathbb{C}, Re(\kappa) > 0; \quad (1.2)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}; \quad (1.3)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \sqrt{\pi}, & \text{pour } n = 0, \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}, & \text{pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (1.4)$$

En particulier, on a

$$\Gamma(1) = 0! = 1, \quad \Gamma(2) = 1! = 1. \quad (1.5)$$

L'approche de Riemann-Liouville de l'intégrale fractionnaire pour une fonction Ψ s'appuie sur la formule de calcul de l'intégrale répétée n fois ($n \in \mathbb{N}^*$) et qui est donnée par

$$\mathcal{I}_a^n \Psi(t) = \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} \Psi(\tau_n) d\tau_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} \Psi(\tau) d\tau,$$

où $-\infty < a < t < +\infty$. Cette formule est appelée formule de Cauchy, qui a été généralisé en une formule d'ordre $\kappa \in \mathbb{R}^+$ et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma, ce qui donne la définition suivante :

Définition 1.2 ([40]) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$), et $\kappa \in \mathbb{R}^+$. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\kappa \in \mathbb{R}^+$ pour une fonction $\Psi \in L^1[a, b]$ définie par

$$\mathcal{I}_a^\kappa \Psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_a^t (t-\tau)^{\kappa-1} \Psi(\tau) d\tau & \text{pour } \kappa > 0, \\ \Psi(t), & \text{pour } \kappa = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

où $t \in [a, b]$.

Définition 1.3 ([40]) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$). La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre κ pour une fonction $\Psi \in L^1[a, b]$ définie par

$$\mathcal{R}_a^\kappa \Psi(t) = \begin{cases} D^n \mathcal{I}_a^{n-\kappa} \Psi(t) = \frac{D^n}{\Gamma(n-\kappa)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\kappa-1} \Psi(\tau) d\tau & \text{pour } \kappa > 0, \\ \Psi(t), & \text{pour } \kappa = 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$, $t \in [a, b]$ et $n = \lceil \kappa \rceil$, tel que $\lceil \cdot \rceil$ est la fonction de partie entière supérieure.

Proposition 1.1 ([40, 41]) Soient $\Psi \in L^1[a, b]$ et $\kappa > 0$. L'intégrale $\mathcal{I}_a^\kappa \Psi(t)$ existe pour tout $t \in [a, b]$ et la fonction $\mathcal{I}_a^\kappa \Psi$ est un élément de $L^1[a, b]$.

Proposition 1.2 ([40, 41]) Pour $\sigma > 0, \kappa \geq 0, n = \lceil \kappa \rceil$, et $\Psi \in L^1[a, b]$, nous avons les propriétés suivantes :

$$\mathcal{I}_a^\kappa \mathcal{I}_a^\sigma \Psi(t) = \mathcal{I}_a^\sigma \mathcal{I}_a^\kappa \Psi(t) = \mathcal{I}_a^{\kappa+\sigma} \Psi(t), \quad (1.8)$$

$$\mathcal{I}_a^\kappa (x-a)^{\sigma-1}(t) = \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\kappa+\sigma)} (t-a)^{\kappa+\sigma-1}. \quad (1.9)$$

Lemme 1.1 ([40]) Soit $\kappa > 0$ avec $n = \lceil \kappa \rceil$. La solution générale de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire ${}^{\mathcal{R}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) = 0$ est donnée par

$$u(t) = q_1 (t-a)^{\kappa-1} + q_2 (t-a)^{\kappa-2} + \dots + q_n (t-a)^{\kappa-n}, \quad (1.10)$$

où $q_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n$.

Proposition 1.3 ([40]) Soit $\kappa > 0$. Alors

$$\mathcal{I}_a^\kappa {}^{\mathcal{R}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) = u(t) + q_1 (t-a)^{\kappa-1} + q_2 (t-a)^{\kappa-2} + \dots + q_n (t-a)^{\kappa-n}, \quad (1.11)$$

où $q_j \in \mathbb{R}$, avec $j = 1, 2, \dots, n$, et $n = \lceil \kappa \rceil$. Et nous avons la propriété suivante :

$${}^{\mathcal{R}}\mathcal{D}_a^\kappa \mathcal{I}_a^\kappa u(t) = u(t). \quad (1.12)$$

1.2 Dérivée au sens de Caputo

Définition 1.4 ([40]) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$). La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\kappa \in \mathbb{R}^+$ pour une fonction $\Psi \in C^n[a, b]$ définie par

$${}^c\mathcal{D}_a^\kappa \Psi(t) = \begin{cases} \mathcal{I}_a^{n-\kappa} D^n \Psi(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\kappa)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\kappa-1} \Psi^{(n)}(\tau) d\tau \text{ pour } \kappa > 0, \\ \Psi(t), \text{ pour } \kappa = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

où $t \in [a, b], n = \lceil \kappa \rceil$.

Proposition 1.4 ([41]) Soient $\kappa > 0$ et $\sigma \geq 0$ tel que $n = \lceil \kappa \rceil$, on a

$${}^c\mathcal{D}_a^\kappa (t-a)^\sigma = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma = 0, 1, \dots, n-1, \\ \frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(\sigma+1-\kappa)} (t-a)^{\sigma-\kappa} & \text{if } \sigma > n-1, \end{cases} \quad (1.14)$$

Proposition 1.5 ([40]) *Pour $\kappa > 0$ tel que $n = \lceil \kappa \rceil$, nous avons les propriétés suivantes :*

$${}^c \mathcal{D}_a^\kappa \mathcal{I}_a^\kappa \Psi(t) = \Psi(t), \quad \Psi \in L^1[a, b], \quad (1.15)$$

$$\mathcal{I}_a^\kappa {}^c \mathcal{D}_a^\kappa \Psi(t) = \Psi(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Psi^{(j)}(a)(t-a)^j}{j!}, \quad \Psi \in C^n[a, b]. \quad (1.16)$$

En particulier, lorsque $0 < \kappa \leq 1$, on a

$$\mathcal{I}_0^\kappa {}^c \mathcal{D}_0^\kappa \Psi(t) = \Psi(t) - \Psi(0). \quad (1.17)$$

Lemme 1.2 ([40]) *Soit $\kappa > 0$ avec $n = \lceil \kappa \rceil$. La solution générale de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire ${}^c \mathcal{D}_a^\kappa u(t) = 0$ est donnée par*

$$u(t) = q_0 + q_1(t-a) + q_2(t-a)^2 + \dots + q_{n-1}(t-a)^{n-1}, \quad (1.18)$$

où $q_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

1.3 Intégrale et dérivée au sens de Hadamard

L'approche de Hadamard de l'intégrale fractionnaire était basée sur la généralisation de la n-ième intégrale

$$\mathcal{I}_a^n \Psi(t) = \int_a^t \frac{d\tau_1}{\tau_1} \int_a^{\tau_1} \frac{d\tau_2}{\tau_2} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} \Psi(\tau_n) \frac{d\tau_n}{\tau_n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{n-1} \frac{\Psi(\tau)}{\tau} d\tau,$$

où $0 < a < t < +\infty$. Ce qui donne la définition suivante :

Définition 1.5 ([40]) *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($0 < a < b < +\infty$) et $\kappa \in \mathbb{R}^+$. L'intégrale fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre κ pour une fonction $\Psi \in L^1[a, b]$ définie par*

$$\mathcal{H} \mathcal{I}_a^\kappa \Psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-1} \Psi(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, & \text{pour } \kappa > 0, \\ \Psi(t), & \text{pour } \kappa = 0, \end{cases} \quad (1.19)$$

où $t \in [a, b]$.

Définition 1.6 ([40]) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($0 < a < b < +\infty$), et $\kappa \in \mathbb{R}^+$ avec $n = [\kappa]$ et $\delta = t \frac{d}{dt}$, et soient $AC[a, b]$ est un espace des fonctions absolument continues et $AC_\delta^n[a, b] = \{\Psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \Psi, \delta^{n-1}\Psi(t) \in AC[a, b]\}$. La dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\kappa \geq 0$ pour une fonction $\Psi \in AC_\delta^n[a, b]$ définie par

$$\mathcal{H}\mathcal{D}_a^\kappa \Psi(t) = \begin{cases} \delta^n \mathcal{H}\mathcal{I}_a^{n-\kappa} \Psi(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\kappa)} \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau}\right)^{n-\kappa-1} \Psi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} & \text{pour } \kappa > 0, \\ \Psi(t), & \text{pour } \kappa = 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

où $t \in [a, b]$.

Proposition 1.6 ([39, 40]) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ ($0 < a < b < +\infty$), et $\kappa > 0$, $n = [\kappa]$, pour $\Psi \in L^1[a, b]$. Nous avons les propriétés suivantes :

$$\mathcal{H}\mathcal{D}_a^\kappa \mathcal{H}\mathcal{I}_a^\kappa \Psi(t) = \Psi(t), \quad (1.21)$$

$$\mathcal{H}\mathcal{I}_a^\kappa \mathcal{H}\mathcal{D}_a^\kappa \Psi(t) = \Psi(t) - \sum_{i=1}^{j=n} \frac{(\delta^{n-j} \mathcal{H}\mathcal{I}_a^{n-\kappa} \Psi)(a)}{\Gamma(\kappa - j + 1)} \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\kappa-j}, \quad (1.22)$$

tel que $\mathcal{H}\mathcal{I}_a^{n-\kappa} \Psi \in AC_\delta^n[a, b]$.

Lemme 1.3 ([39, 40]) Soit $\kappa > 0$ avec $n = [\kappa]$. L'équation $\mathcal{H}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) = 0$ admet la solution générale suivante :

$$u(t) = \sum_{j=1}^{j=n} q_j \left(\ln \frac{t}{a}\right)^{\kappa-j}, \quad t \in [a, b], \quad (1.23)$$

où $q_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, n$) sont des réels constants.

Remarque 1.1 Dans l'article [42], Jarad et autres ont présenté une nouvelle définition de la modification de type de Caputo de dérivée fractionnaire de Hadamard comme suit :

$${}^C\mathcal{D}_a^\kappa \Psi(t) = \mathcal{H}\mathcal{I}_a^{n-\kappa} \delta^n \Psi(t) \text{ for } \kappa \in \mathbb{N}^*; \text{ et } {}^C\mathcal{D}_a^\kappa \Psi(t) = \delta^n \Psi(t) \text{ for } \kappa \in \mathbb{N},$$

et ont présenté les propriétés de cette dérivée. Pour plus de détails voir [42].

Remarque 1.2 Pour simplifier la notation on a écrit \mathcal{I}^κ , $\mathcal{H}\mathcal{I}^\kappa$, $\mathcal{R}\mathcal{D}^\kappa$, ${}^C\mathcal{D}^\kappa$ et $\mathcal{H}\mathcal{D}^\kappa$ à la place de \mathcal{I}_0^κ , $\mathcal{H}\mathcal{I}_1^\kappa$, $\mathcal{R}\mathcal{D}_0^\kappa$, ${}^C\mathcal{D}_0^\kappa$, et $\mathcal{H}\mathcal{D}_1^\kappa$ respectivement

1.4 Outils d'analyse fonctionnelle

Définition 1.7 (Ensemble relativement compact [43]) Soit X un espace métrique complet. Une partie Ω de X est relativement compacte si et seulement si son adhérence est compacte.

Définition 1.8 (Opérateur compact [43]) Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces de Banach et B une partie non vide de X . Une application $T : X \rightarrow Y$ est dite compacte si et seulement si, elle est continue et l'image de tous ensemble bornée $B \subset X$ est un ensemble relativement compact de Y .

Définition 1.9 (Ensemble des fonctions uniformément bornées [43]) Soit $\bar{\Omega}$ un domaine borné fermé de l'espace euclidien X . Considérons l'espace des fonctions continues $C(\bar{\Omega})$. Soit M un ensemble de fonctions dans $C(\bar{\Omega})$. On dit que les fonctions d'un ensemble M sont uniformément bornées s'il existe une constante $c > 0$, commune à toutes les fonctions de M , telle que pour toute fonction $\Psi \in M$ on a $|\Psi(t)| < c$, $t \in \bar{\Omega}$. Ainsi donc, dire que M est borné dans $C(\bar{\Omega})$.

Définition 1.10 (Equicontinuité [43]) On dit qu'une partie $M \subset C(\bar{\Omega})$ est équicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour tous deux éléments quelconques $t_1, t_2 \in \bar{\Omega}$ vérifiant l'inégalité $\|t_1 - t_2\|_X < \delta$, alors l'inégalité $|\Psi(t_1) - \Psi(t_2)| < \varepsilon$ est vérifiée à la fois pour toute les fonctions Ψ de M .

Théorème 1.1 (Théorème d'Arzela-Ascoli [43]) Soit $\bar{\Omega}$ un sous ensemble dans l'espace normé X , et soit $C(\bar{\Omega})$ un espace de Banach formé de fonctions continues $\Psi(t)$, où $t \in \bar{\Omega}$. Pour qu'un ensemble $M \subset C(\bar{\Omega})$ soit compact, il faut et il suffit que les fonctions de M soient uniformément bornées et équicontinues.

Définition 1.11 (Application contractante [43]) Soit (X, d) un espace métrique, $T : X \rightarrow X$ est une application contractante si

$$\exists k, 0 < k < 1, \forall (x, y) \in X \times X : d(T(x); T(y)) \leq kd(x; y).$$

Théorème 1.2 (Principe de contraction de Banach [43]) Soit (X, d) est un espace métrique complet, $T : X \rightarrow X$ est une application contractante. Alors T admet un point fixe unique dans X .

Théorème 1.3 (Théorème de point fixe de Krasnoselskii [44]) Soit X un ensemble non vide fermé et convexe dans un espace de Banach E , et soient M et N deux opérateurs définies sur X vers E . Si

- (i) $Mu_1 + Nu_2 \in X$ pour tout $u_1, u_2 \in X$;
- (ii) M est un opérateur contractant;
- (iii) N est compact et continue.

Alors il existe $v \in X$ tel que $Mv + Nv = v$.

Chapitre 2

Existence et unicité des solutions d'une équation d'ordre fractionnaire à multi-termes de Langevin avec conditions aux limites

Dans ce chapitre on présente essentiellement l'article [45] intitulé : "Existence and uniqueness of solutions for multi-term fractional Langevin equation with boundary conditions", publié dans : Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal., Vol. 27, no. 5a, 2020, 339-350.

Inspiré par le développement récent de l'équation de Langevin [46–54], nous étudions dans ce chapitre l'existence et l'unicité des solutions pour une nouvelle classe de problèmes aux limites d'équations de Langevin à plusieurs termes impliquant des dérivées

fractionnaire de Caputo d'ordre différent de la forme :

$${}^c\mathcal{D}^\kappa ({}^c\mathcal{D}^\sigma + \lambda) u(t) - \sum_{i=1}^m \xi_i {}^c\mathcal{D}^\kappa ({}^c\mathcal{D}^{\sigma_i} + \lambda_i) u(t) = f(t, u(t)), \quad (2.1)$$

avec les conditions aux limites :

$$u(0) = u'(0) = u(1) = 0, \quad (2.2)$$

où $t \in J = [0, 1]$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m \leq 1$, et $1 < \sigma \leq 2$, $0 < \kappa \leq 1$, $1 \leq \sigma - \sigma_i < 2$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i, \xi_i \in \mathbb{R}$, et ${}^c\mathcal{D}^\varepsilon$ l'opérateur de dérivé de Caputo d'ordre fractionnaire ε ($\varepsilon = \kappa, \sigma, \sigma_i$), $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire donnée. Les résultats principaux du problème (2.1)-(2.2) sont obtenus à l'aide du théorème de point fixe de Banach et du théorème de point fixe de Krasnoselskii et en appliquant des outils modernes d'analyse fonctionnaire. Des exemples sont donnés pour illustrer les résultats principaux.

2.1 L'équation intégrale équivalente au problème

Notre premier résultat traite la variable linéaire du problème (2.1)-(2.2) et il joue un rôle important dans l'obtention des résultats principaux.

Lemme 2.1 *Pour $h \in C([0, 1], \mathbb{R})$. La fonction u est une solution du problème fractionnaire suivant :*

$${}^c\mathcal{D}^\kappa ({}^c\mathcal{D}^\sigma + \lambda) u(t) - \sum_{i=1}^m \xi_i {}^c\mathcal{D}^\kappa ({}^c\mathcal{D}^{\sigma_i} + \lambda_i) u(t) = h(t), \quad (2.3)$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = 0, \quad (2.4)$$

si seulement si u est une solution de l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u(t) = & - \int_0^t \left(\frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (t - \tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (t - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right) u(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^t (t - \tau)^{\kappa+\sigma-1} h(\tau) d\tau \\ & + t^\sigma \int_0^1 \left(\frac{\Omega (1 - \tau)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (1 - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right) u(\tau) d\tau \\ & - \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa+\sigma-1} h(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où

$$\Omega = \lambda - \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i. \quad (2.6)$$

Preuve. Par application de l'opérateur \mathcal{I}^κ sur les deux côtés de (2.3), on obtient

$${}^c \mathcal{D}^\sigma u(t) - \sum_{i=1}^m \xi_i {}^c \mathcal{D}^{\sigma_i} u(t) = \mathcal{I}^\kappa h(t) - \Omega u(t) + q_0, \quad (2.7)$$

où Ω est donné par (2.6) et $q_0 \in \mathbb{R}$.

Ensuite, en appliquant l'opérateur \mathcal{I}^σ sur les deux côtés de (2.7) et en utilisant la propriété (1.17), on obtient

$$u(t) - q_1 - q_2 t - \sum_{i=1}^m \xi_i \mathcal{I}^{\sigma - \sigma_i} [u(t) - u(0)] = \mathcal{I}^{\kappa + \sigma} h(t) - \Omega \mathcal{I}^\sigma u(t) + q_0 \frac{1}{\Gamma(\sigma + 1)} t^\sigma, \quad (2.8)$$

où $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$. D'après (2.8), on a

$$u'(t) = q_2 + \sum_{i=1}^m \xi_i \mathcal{I}^{\sigma - \sigma_i - 1} [u(t) - u(0)] + \mathcal{I}^{\kappa + \sigma - 1} h(t) - \Omega \mathcal{I}^{\sigma - 1} u(t) + q_0 \frac{1}{\Gamma(\sigma)} t^{\sigma - 1}, \quad (2.9)$$

on utilise les conditions $u'(0) = u(0) = u(1) = 0$ dans (2.9) et (2.8), ce qui donne $q_1 = q_2 = 0$ et

$$q_0 = \Gamma(\sigma + 1) \left(- \sum_{i=1}^m \xi_i \mathcal{I}^{\sigma - \sigma_i} u(1) - \mathcal{I}^{\kappa + \sigma} h(1) + \Omega \mathcal{I}^\sigma u(1) \right). \quad (2.10)$$

En substituant les valeurs de q_0, q_1 et q_2 dans (2.8) avec l'utilisation de (2.6), on obtient

$$\begin{aligned} u(t) &= - \left(\Omega \mathcal{I}^\sigma u(t) - \sum_{i=1}^m \xi_i \mathcal{I}^{\sigma - \sigma_i} u(t) \right) + \mathcal{I}^{\kappa + \sigma} h(t) \\ &\quad + t^\sigma \left(- \sum_{i=1}^m \xi_i \mathcal{I}^{\sigma - \sigma_i} u(1) + \Omega \mathcal{I}^\sigma u(1) \right) - t^\sigma \mathcal{I}^{\kappa + \sigma} h(1). \end{aligned}$$

L'inverse s'ensuit par calcul direct. La preuve est complète. ■

Soit $X = C(J, \mathbb{R})$ un espace de Banach de toutes fonctions continues de J à valeurs dans \mathbb{R} muni de la norme $\|u\| = \sup_{t \in J} |u(t)|$.

Et nous définissons l'opérateur $\mathcal{A} : X \rightarrow X$ par

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}u(t) = & - \int_0^t \left(\frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (t-\tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (t-\tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma-\sigma_i)} \right) u(\tau) d\tau \\
 & + \frac{1}{\Gamma(\kappa+\sigma)} \int_0^t (t-\tau)^{\kappa+\sigma-1} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\
 & + t^\sigma \int_0^1 \left(\frac{\Omega (1-\tau)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (1-\tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma-\sigma_i)} \right) u(\tau) d\tau \\
 & - \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa+\sigma)} \int_0^1 (1-\tau)^{\kappa+\sigma-1} f(s, u(\tau)) d\tau.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Remarque 2.1 Notons que l'existence des points fixes de l'opérateur \mathcal{A} équivalente à l'existence de solutions du problème (2.1)-(2.2).

2.2 Résultat d'unicité

Théorème 2.1 Soit $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant l'hypothèse :

(H_1) Il existe $L > 0$ tel que $|f(t, \omega) - f(t, \varpi)| \leq L |\omega - \varpi|$, pour tout $t \in J$, $\omega, \varpi \in \mathbb{R}$ et $|f(t, 0)| \leq \phi(t)$ tel que ϕ est une fonction continue sur J vers \mathbb{R}^+ avec $\hat{\phi} = \sup_{t \in J} \phi(t)$.

Alors le problème (2.1)-(2.2) admet une solution unique sur J à condition que

$$\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma+1)} + \mu + \frac{L}{\Gamma(\kappa+\sigma+1)} < \frac{1}{2}, \tag{2.12}$$

où $\Omega = \lambda - \sum_{i=1}^m \lambda_i \xi_i$ et $\mu = \sum_{i=1}^m \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\sigma-\sigma_i+1)}$.

Preuve. Choisissons $r > 0$ satisfaisant

$$r \geq \frac{\hat{\phi}}{\Gamma(\kappa+\sigma+1) \left(\frac{1}{2} - \frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma+1)} - \mu \right) - L}, \tag{2.13}$$

et considérons $B_r = \{u \in X : \|u\| \leq r\}$. Afin de vérifier les hypothèses du principe de contraction de Banach, nous montrons d'abord que $\mathcal{A}B_r \subset B_r$, où \mathcal{A} est défini par (2.11).

Pour $u \in B_r$, et $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}u(t)| &\leq \int_0^t \left| \frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (t-\tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (t-\tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma-\sigma_i)} \right| |u(\tau)| d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\kappa+\sigma)} \int_0^t (t-\tau)^{\kappa+\sigma-1} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \\
&\quad + t^\sigma \int_0^1 \left| \frac{\Omega(1-\tau)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i(1-\tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma-\sigma_i)} \right| |u(\tau)| d\tau \\
&\quad + \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa+\sigma)} \int_0^1 (1-\tau)^{\kappa+\sigma-1} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \\
&\leq \frac{|\Omega| r}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t-\tau)^{\sigma-1} d\tau + \sum_{i=1}^m \frac{r |\xi_i| \int_0^t (t-\tau)^{\sigma-\sigma_i-1} d\tau}{\Gamma(\sigma-\sigma_i)} \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\kappa+\sigma)} \int_0^t (t-\tau)^{\kappa+\sigma-1} (|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, 0)| + |f(\tau, 0)|) d\tau \\
&\quad + \frac{|\Omega| r t^\sigma}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1-\tau)^{\sigma-1} d\tau + \sum_{i=1}^m \frac{r t^\sigma |\xi_i| \int_0^1 (1-\tau)^{\sigma-\sigma_i-1} d\tau}{\Gamma(\sigma-\sigma_i)} \\
&\quad + \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa+\sigma)} \int_0^1 (1-\tau)^{\kappa+\sigma-1} (|f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, 0)| + |f(\tau, 0)|) d\tau \\
&\leq \frac{r |\Omega| t^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} + \sum_{i=1}^m \frac{r |\xi_i| t^{\sigma-\sigma_i}}{\Gamma(\sigma-\sigma_i+1)} + \frac{Lr + \hat{\phi}}{\Gamma(\kappa+\sigma)} \int_0^t (t-\tau)^{\kappa+\sigma-1} d\tau \\
&\quad + \frac{|\Omega| r t^\sigma}{\Gamma(\sigma+1)} + \sum_{i=1}^m \frac{r t^\sigma |\xi_i|}{\Gamma(\sigma-\sigma_i+1)} + \frac{(Lr + \hat{\phi}) t^\sigma}{\Gamma(\kappa+\sigma)} \int_0^1 (1-\tau)^{\kappa+\sigma-1} d\tau \\
&\leq \frac{r |\Omega|}{\Gamma(\sigma+1)} + \sum_{i=1}^m \frac{r |\xi_i|}{\Gamma(\sigma-\sigma_i+1)} + \frac{Lr + \hat{\phi}}{\Gamma(\kappa+\sigma+1)} \\
&\quad + \frac{r |\Omega|}{\Gamma(\sigma+1)} + \sum_{i=1}^m \frac{r |\xi_i|}{\Gamma(\sigma-\sigma_i+1)} + \frac{Lr + \hat{\phi}}{\Gamma(\kappa+\sigma+1)} \\
&= 2r \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma+1)} + \mu + \frac{L + \frac{\hat{\phi}}{r}}{\Gamma(\kappa+\sigma+1)} \right) \leq r,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\|\mathcal{A}u\| \leq r$ pour tout $u \in B_r$. Par conséquent, on obtient $\mathcal{A}B_r \subset B_r$.

Nous montrons que l'opérateur \mathcal{A} est une application contractante. Pour $u, v \in X$, et pour

tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{A}u(t) - \mathcal{A}v(t)| &\leq \int_0^t \left| \frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (t - \tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (t - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right| |u(\tau) - v(\tau)| d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^t (t - \tau)^{\kappa+\sigma-1} |f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))| d\tau \\
 &\quad + t^\sigma \int_0^1 \left| \frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (1 - \tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (1 - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right| |u(\tau) - v(\tau)| d\tau \\
 &\quad + \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa+\sigma-1} |f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))| d\tau, \\
 &\leq \|u - v\| \int_0^t \left| \frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (t - \tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (t - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right| d\tau \\
 &\quad + \frac{L \|u - v\|}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^t (t - \tau)^{\kappa+\sigma-1} d\tau \\
 &\quad + \|u - v\| t^\sigma \int_0^1 \left| \frac{\Omega (1 - \tau)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (1 - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right| d\tau \\
 &\quad + \frac{L \|u - v\| t^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^1 |(1 - \tau)^{\kappa+\sigma-1}| d\tau \\
 &\leq \|u - v\| \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \sum_{i=1}^m \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\sigma - \sigma_i + 1)} \right) + \frac{L \|u - v\|}{\Gamma(\kappa + \sigma + 1)} \\
 &\quad + \|u - v\| \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \sum_{i=1}^m \frac{|\xi_i|}{\Gamma(\sigma - \sigma_i + 1)} \right) + \frac{L \|u - v\|}{\Gamma(\kappa + \sigma + 1)},
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|\mathcal{A}u - \mathcal{A}v\| \leq 2 \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \mu + \frac{L}{\Gamma(\kappa + \sigma + 1)} \right) \|u - v\|.$$

Alors, d'après la condition (2.12) par le principe de contraction de Banach, on obtient que l'opérateur \mathcal{A} est contractant. Ainsi, l'opérateur \mathcal{A} admet un point fixe unique, on en déduit que le problème (2.1)-(2.2) admet une solution unique sur $[0, 1]$.

La preuve est terminée. ■

2.3 Résultat d'existence

Théorème 2.2 Soit $f : J \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $|f(t, \omega)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(t, \omega) \in J \times \mathbb{R}$ tel que φ est une fonction continue sur J vers \mathbb{R}^+ avec $\widehat{\varphi} = \sup_{t \in J} \varphi(t)$. Alors, le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution sur J à condition que

$$\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \mu < \frac{1}{2}. \quad (2.14)$$

Preuve. Considérons une boule fermée $B_r = \{u \in X : \|u\| \leq r\}$ avec

$$r \geq \frac{2\widehat{\varphi}}{\Gamma(\kappa + \sigma + 1)} \left[1 - 2 \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \mu \right) \right]^{-1},$$

et nous définissons les opérateurs M et N sur B_r comme suit :

$$\begin{aligned} Mu(t) &= - \int_0^t \left(\frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (t - \tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (t - \tau)^{\sigma - \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right) u(\tau) d\tau \\ &\quad + t^\sigma \int_0^1 \left(\frac{\Omega (1 - \tau)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (1 - \tau)^{\sigma - \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right) u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.15)$$

et

$$\begin{aligned} Nu(t) &= \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^t (t - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\ &\quad - \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} f(s, u(\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (2.16)$$

On remarque que $Au = Mu + Nu$. Nous vérifions maintenant les hypothèses du théorème de point fixe de Krasnoselskii.

Étape 1. $Mu + Nv \in B_r$ pour tout $u, v \in B_r$. on a

$$\begin{aligned} |Mu(t) + Nv(t)| &\leq \int_0^t \left| \frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (t - \tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (t - \tau)^{\sigma - \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right| |u(\tau)| d\tau \\ &\quad + t^\sigma \int_0^1 \left| \frac{\Omega (1 - \tau)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (1 - \tau)^{\sigma - \sigma_i - 1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right| |u(\tau)| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^t (t - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} |f(\tau, v(\tau))| d\tau \\ &\quad + \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} |f(\tau, v(\tau))| d\tau, \end{aligned} \quad (2.17)$$

ce qui implique que

$$\|Mu + Nv\| \leq 2r \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \mu + \frac{\widehat{\varphi}/r}{\Gamma(\kappa + \sigma + 1)} \right) \leq r. \quad (2.18)$$

Ainsi $Mu + Nv \in B_r$.

Étape 2. M est une application contractante. Pour $u, v \in B_r$, on a

$$\begin{aligned} |Mu(t) - Mv(t)| &\leq \int_0^t \left| \frac{\Omega}{\Gamma(\sigma)} (t - \tau)^{\sigma-1} - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\xi_i (t - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right| |u(\tau) - v(\tau)| d\tau \\ &\quad + t^\sigma \int_0^1 \left| \frac{\Omega (1 - \tau)^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)} - \sum_{i=1}^m \frac{\xi_i (1 - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1}}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right| |u(\tau) - v(\tau)| d\tau \\ &\leq \|u - v\| \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma)} \int_0^t (t - \tau)^{\sigma-1} d\tau + \sum_{i=1}^m \frac{|\xi_i| \int_0^t (t - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1} d\tau}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right) \\ &\quad + \|u - v\| \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\sigma-1} d\tau + \sum_{i=1}^m \frac{|\xi_i| \int_0^1 (1 - \tau)^{\sigma-\sigma_i-1} d\tau}{\Gamma(\sigma - \sigma_i)} \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \mu \right) \|u - v\|, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|Mu - Mv\| \leq 2 \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \mu \right) \|u - v\|. \quad (2.19)$$

D'après (2.14) et (2.19), on en déduit que M est une application contractante

Étape 3. N est compact et continue. Soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = u$. Alors

$$\begin{aligned} |Nu_n(t) - Nu(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \left| \int_0^t (t - \tau)^{\kappa+\sigma-1} [f(\tau, u_n(\tau)) - f(\tau, u(\tau))] d\tau \right| \\ &\quad + \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \left| \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa+\sigma-1} [f(s, u_n(\tau)) - f(\tau, u(\tau))] d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^t (t - \tau)^{\kappa+\sigma-1} |f(\tau, u_n(\tau)) - f(\tau, u(\tau))| d\tau, \\ &\quad + \frac{t^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa+\sigma-1} |f(\tau, u_n(\tau)) - f(\tau, u(\tau))| d\tau, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|Nu_n - Nu\| = 0$ comme f est continue. Ainsi, N est continue.

Ensuite, pour $u \in B_r$ et pour $t_2, t_1 \in J$ avec $t_2 > t_1$, on a

$$\begin{aligned}
 |Nu(t_2) - Nu(t_1)| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} f(\tau, u(\tau)) d\tau \right. \\
 &\quad - \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^{t_1} (t_1 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} f(\tau, u(\tau)) d\tau \\
 &\quad \left. + \frac{t_2^\sigma - t_1^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} f(s, u(\tau)) d\tau \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^{t_1} ((t_2 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} - (t_1 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1}) |f(s, u(\tau))| d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \\
 &\quad + \frac{t_2^\sigma - t_1^\sigma}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \\
 &\leq \frac{\widehat{\varphi}}{\Gamma(\kappa + \sigma)} \left(\int_0^{t_1} [(t_2 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} - (t_1 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1}] d\tau \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} d\tau + (t_2^\sigma - t_1^\sigma) \int_0^1 (1 - \tau)^{\kappa + \sigma - 1} d\tau \right) \\
 &= \frac{\widehat{\varphi}}{\Gamma(\kappa + \sigma + 1)} [(t_2 - t_1)^{\kappa + \sigma} + t_2^\sigma - t_1^\sigma],
 \end{aligned}$$

qui tend à zéro lorsque $t_2 \rightarrow t_1$, indépendant de $u \in B_r$, ceci implique que N est équi-continu. Donc d'après le théorème d'Arzela-Ascoli on déduit que N est compact sur B_r . Alors, d'après le théorème du point fixe de Krasnoselskii on en déduit que le problème (2.1)-(2.2) admet au moins une solution dans B_r . Ceci complète la preuve. ■

2.4 Exemples

Considérons l'équation de Langevin d'ordre fractionnaire à trois termes non linéaires suivante :

$$\begin{aligned}
 {}^c\mathcal{D}^\kappa \left({}^c\mathcal{D}^{7/4} + \frac{5}{2} \right) u(t) - {}^c\mathcal{D}^\kappa \left(\frac{({}^c\mathcal{D}^{1/2+5})}{8} + \frac{({}^c\mathcal{D}^{3/4+7})}{4} \right) u(t) \\
 = f(t, u(t)), \quad 0 < \kappa \leq 1, \quad t \in (0, 1),
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

vérifiant les conditions aux limites :

$$u(0) = u'(0) = u(1) = 0, \tag{2.21}$$

Ici $\sigma = 7/4$, $\sigma_1 = 1/2$, $\sigma_2 = 3/4$, $\lambda = 5/2$, $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 7$, $\xi_1 = 1/8$, $\xi_2 = 1/4$.

i). Supposons $f(t, u(t)) = \frac{\sqrt{u^2(t)+1-t^2}}{7} - \sin^2 t + 1$ et $\kappa = \frac{1}{2}$.

En utilisant les valeurs données, on trouve que

$$\Omega = \lambda - \lambda_1 \xi_1 - \lambda_2 \xi_2 = 1/8, \quad \mu = \frac{|\xi_1|}{\Gamma(\sigma - \sigma_1 + 1)} + \frac{|\xi_2|}{\Gamma(\sigma - \sigma_2 + 1)} \approx 0.36033.$$

Pour $(t, u_1), (t, u_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, on obtient $|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq L \|u_1 - u_2\|$ avec $L = 1/7$. De plus

$$\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \mu + \frac{L}{\Gamma(\kappa + \sigma + 1)} \approx 0.49409 < \frac{1}{2}. \quad (2.22)$$

Ainsi, par le théorème 2.1 on en déduit que le problème (2.20)-(2.21) admet une solution unique sur $[0, 1]$.

ii). Afin d'illustrer le théorème 2.2, on prend $f(t, u(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \tan^{-1} u(t) + e^{-t}$.

On voit que $|f(t, u(t))| \leq \frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}} + e^{-t} = \varphi(t)$ avec $\widehat{\varphi} = \frac{\pi+2}{2}$. Alors, la condition (2.14) reste vraie comme

$$\frac{|\Omega|}{\Gamma(\sigma + 1)} + \mu \approx 0.43805 < \frac{1}{2}. \quad (2.23)$$

L'hypothèses du théorème 2.2 sont satisfaites. Donc le problème (2.20)-(2.21) admet au moins une solution sur $[0, 1]$ pour $\kappa \in (0, 1]$.

Chapitre 3

Estimations précises pour la solution unique d'une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard

Dans ce chapitre on présente essentiellement l'article [55] intitulé : "Sharp estimates for the unique solution of the Hadamard-type two-point fractional boundary value problems" et il a été accepté pour publication dans : Appl. Math. E-notes, 2021. Voir aussi arxiv.org/abs/2008.05301 .

Inspiré par les travaux [56–59], dans ce chapitre, nous présentons l'estimation précise sur la condition de l'intervalle donné qui permet de trouver la solution unique pour une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaire de type Hadamard avec des conditions aux limites sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) = -\mathcal{F}(t, u(t)), & 0 < a < t < b, 1 < \kappa \leq 2, \\ u(a) = 0, \quad u(b) = B, & B \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où f est une fonction continue et B est une constante réelle.

Par l'utilisation de la fonction de Green et le principe de contraction de Banach, de plus, nous obtiendrons aussi la borne inférieure des valeurs propres pour un problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} {}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) = \lambda u(t), & 0 < a < t < b, 1 < \kappa \leq 2, \\ u(a) = 0 = u(b). \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ces sections nous présentons la démonstration des résultats principaux du problème (3.1), puis la déduction des résultats de (3.2). De plus, un exemple est présenté pour clarifier les résultats principaux.

3.1 Fonction de Green associée au problème

Lemme 3.1 Soit $y \in C([a, b], \mathbb{R})$. La fonction u est une solution du problème fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) = -y(t), & 0 < a < t < b, 1 < \kappa \leq 2, \\ u(a) = 0, \quad u(b) = B, & B \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3.3)$$

si seulement si u est une solution de l'équation intégrale

$$u(t) = \int_a^b G(t, \tau) y(\tau) d\tau + B \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1}, \quad (3.4)$$

où

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \begin{cases} \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} \frac{1}{\tau} - \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-1} \frac{1}{\tau}, & a \leq \tau \leq t \leq b, \\ \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} \frac{1}{\tau}, & a \leq t \leq \tau \leq b. \end{cases} \quad (3.5)$$

Preuve. En appliquant l'opérateur ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{I}_a^\kappa$ sur l'équation ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) = -y(t)$, on obtient

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-1} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + q_1 \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-1} + q_2 \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-2}, \quad (3.6)$$

où $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$.

Utilisant la condition initiale $u(a) = 0$, on trouve que $q_2 = 0$. Puis par la condition $u(b) = B$, on obtient

$$q_1 = \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{1-\kappa} \int_a^b \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + B \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{1-\kappa}. \quad (3.7)$$

En substituant les valeurs de q_1 et q_2 dans (3.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{\left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{1-\kappa}}{\Gamma(\kappa)} \int_a^b \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-1} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + B \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{1-\kappa} + B \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_a^t \left[\left(\ln \frac{b}{a} \right)^{1-\kappa} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} - \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-1} \right] y(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\kappa)} \int_t^b \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{1-\kappa} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} y(\tau) \frac{d\tau}{\tau} + B \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \\ &= \int_a^b G(t, \tau) y(\tau) d\tau + B \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1}. \end{aligned}$$

L'inverse s'ensuit par calcul direct. La preuve est complète. ■

Lemme 3.2 ([55, 60]) *La fonction de Green G définie dans Lemme 3.1, possède les propriétés suivantes :*

i). $G(\tau, \tau) \geq G(t, \tau) \geq 0$ pour tous $(t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]$,

ii). $\max_{t \in [a, b]} \int_a^b |G(t, \tau)| d\tau = \frac{(\kappa-1)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^\kappa}{\kappa^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)}$.

Preuve. Nous commençons par fixer un $\tau \in [a, b]$. On dérive la fonction $G(t, \tau)$ par rapport à t .

Pour $1 \leq a < t \leq \tau \leq b$, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} g_2 = \frac{(\kappa-1) \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-2} \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1}}{\Gamma(\kappa) \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\kappa-1} \tau t} \geq 0, \quad (3.8)$$

on obtient

$$g_2(\tau, \tau) \geq g_2(t, \tau). \quad (3.9)$$

Pour $1 \leq a \leq \tau < t \leq b$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_1 &= -\frac{\partial}{\partial t} g_2 - \frac{(\kappa - 1)}{\Gamma(\kappa)\tau t} \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-2} \\ &= \frac{(\kappa - 1)}{\Gamma(\kappa)\tau t} \frac{(\ln \frac{t}{a})^{\kappa-2} (\ln \frac{b}{\tau})^{\kappa-1}}{(\ln \frac{b}{a})^{\kappa-1}} - \frac{(\kappa - 1)}{\Gamma(\kappa)\tau t} \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-2} \\ &= -\frac{(\kappa - 1) (\ln \frac{t}{a})^{\kappa-2}}{\Gamma(\kappa)\tau t} \left[\left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{t}{\tau}} \right)^{2-\kappa} - \left(\frac{\ln \frac{b}{\tau}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Par l'inégalités $1 \leq a \leq \tau < t \leq b$, on obtient

$$\left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{t}{\tau}} \right)^{2-\kappa} \geq 1, \quad (3.11)$$

et

$$0 < \left(\frac{\ln \frac{b}{\tau}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \leq 1, \quad (3.12)$$

utilisant l'inégalités (3.11) et (3.12), on obtient

$$\left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{t}{\tau}} \right)^{2-\kappa} - \left(\frac{\ln \frac{b}{\tau}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \geq 0, \quad (3.13)$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t} g_1 \leq 0. \quad (3.14)$$

Alors, pour $1 \leq a \leq \tau < t \leq b$, on a

$$g_1(t, \tau) \geq g_1(b, \tau) = 0. \quad (3.15)$$

D'autre part, pour tout $\tau \in [a, b]$, $\lim_{t \rightarrow s} g_1(t, \tau) = -\frac{1}{\Gamma(\kappa)} \frac{(\ln \frac{\tau}{a})^{\kappa-1} (\ln \frac{b}{\tau})^{\kappa-1}}{(\ln \frac{b}{a})^{\kappa-1}} \frac{1}{\tau} = g_1(\tau, \tau)$,
donc pour tout $t \in [\tau, b]$,

$$g_1(\tau, \tau) \geq g_1(t, \tau), \quad (3.16)$$

et, si $t = \tau$ alors

$$g_2(\tau, \tau) = g_1(\tau, \tau) = G(\tau, \tau), \quad (3.17)$$

avec $g_2(a, \tau) = g_1(a, a) = 0$, pour tout $\tau \in [a, b]$.

D'après (3.9), (3.15), (3.16) et (3.17), on obtient

$$G(\tau, \tau) \geq G(t, \tau) \geq 0. \quad (3.18)$$

ii). D'après la fonction de Green (3.5), nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma(\kappa) \int_a^b |G(t, \tau)| d\tau &= \int_a^t \left[\left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} - \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-1} \right] \frac{d\tau}{\tau} \\ &\quad + \int_t^b \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} \frac{d\tau}{\tau} \\ &= \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1} \int_a^b \left(\ln \frac{b}{\tau} \right)^{\kappa-1} \frac{d\tau}{\tau} - \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau} \right)^{\kappa-1} \frac{d\tau}{\tau} \\ &= \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{1-\kappa} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\kappa} - \frac{1}{\kappa} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_a^b G(t, \tau) d\tau = \frac{\Theta(t)}{\Gamma(\kappa + 1)}, \quad (3.19)$$

où

$$\Theta(t) = \left(\ln \frac{b}{a} \right) \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-1} - \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa}, \quad t \in [a, b]. \quad (3.20)$$

Observons que $\Theta(a) = 0$ et $\Theta(b) = 0$. Pour $t \in (a, b)$, on dérive la fonction $\Theta(t)$ on obtient

$$\Theta'(t) = \frac{(\kappa - 1)}{t} \left(\ln \frac{b}{a} \right) \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-2} - \frac{\kappa}{t} \left(\ln \frac{t}{a} \right)^{\kappa-1}$$

Donc l'équation $\Theta'(t) = 0$ possède une solution unique, atteint au point

$$t^* = a \left(\frac{b}{a} \right)^{(\kappa-1)/\kappa}.$$

On voit facilement que $t^* \in (a, b)$. Par ce que $\Theta(t)$ est une fonction continue et $t^* \in (a, b)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
 \max_{t \in [a, b]} \Theta(t) &= \Theta(t^*) \\
 &= \left(\ln \frac{b}{a} \right) \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right)^{\kappa-1} - \left(\ln \left(\frac{b}{a} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right)^{\kappa} \\
 &= \frac{1}{\kappa-1} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa} \ln \frac{b}{a} \right)^{\kappa} \\
 &= \frac{(\kappa-1)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{\kappa}}{\kappa^{\kappa}}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

D'après (3.19) et (3.21), nous obtenons la deuxième propriété dans Lemme 3.2. La preuve est terminée. ■

3.2 Résultat d'unicité

Théorème 3.1 Soit $\mathcal{F} : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et satisfait à une condition de Lipschitz uniformément par rapport à la deuxième variable sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ avec la constante de Lipschitz K , c'est-à-dire,

$$|\mathcal{F}(t, u) - \mathcal{F}(t, v)| \leq K |u - v|,$$

pour tous $(t, u), (t, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, avec $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Si

$$\frac{b}{a} < \exp \left(\frac{\kappa^{(\kappa+1)/\kappa} \Gamma^{1/\kappa}(\kappa)}{(\kappa-1)^{(\kappa+1)/\kappa} K^{1/\kappa}} \right). \tag{3.22}$$

Alors, le problème aux limites d'ordre fractionnaire (3.1) admet une solution unique sur $[a, b]$ pour toute valeur B .

Preuve. Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ espace de Banach muni de la norme $\|u\| = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)|$, on définit l'opérateur $T : E \rightarrow E$ par

$$Tu(t) = \int_a^b G(t, \tau) \mathcal{F}(\tau, u(\tau)) d\tau + B \left(\frac{\ln \frac{t}{a}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1}, \tag{3.23}$$

où la fonction G est donnée par (3.5).

Notons que le problème (3.1) admet la solution $u \in E$ si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur T .

Pour tous $(t, u), (t, v) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned} |Tu(t) - Tv(t)| &\leq \int_a^b G(t, \tau) |\mathcal{F}(\tau, u(\tau)) - \mathcal{F}(\tau, v(\tau))| d\tau \\ &\leq \int_a^b KG(t, \tau) |u(\tau) - v(\tau)| d\tau \\ &\leq K \int_a^b G(t, \tau) d\tau \|u - v\|, \end{aligned}$$

Utilisons la deuxième propriété dans le Lemme 3.2, on obtient

$$\|Tu - Tv\| \leq \frac{K(\kappa - 1)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\kappa}{\kappa^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)} \|u - v\|. \quad (3.24)$$

On peut facilement vérifier que l'hypothèse (3.22) mène au principe de l'application contractante. Par conséquent, T est une application contractante, on en déduit que le problème (3.1) admet une solution unique. ■

3.3 Résultats sur un problème de valeurs propres

Dans cette section nous allons étudier la borne inférieure pour les valeurs propres du problème (3.2).

Théorème 3.2 *Si le problème de valeurs propres (3.2) admet une solution continue non triviale, alors*

$$|\lambda| \geq \frac{\kappa^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)}{(\kappa - 1)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\kappa}, \quad (3.25)$$

Preuve. En utilisant Lemme 3.2, la solution du problème (3.2), peut être écrite comme suit

$$u(t) = \int_a^b -\lambda G(t, \tau) u(\tau) d\tau.$$

Ainsi, pour tout $t \in [a, b]$, nous avons

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \int_a^b |\lambda| |G(t, \tau)| |u(\tau)| d\tau \\ &\leq \|u\| |\lambda| \int_a^b |G(t, \tau)| d\tau \\ &\leq \|u\| |\lambda| \frac{(\kappa - 1)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\kappa}{\kappa^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|u\| \leq \|u\| |\lambda| \frac{(\kappa - 1)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\kappa}{\kappa^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)}.$$

Comme u est non triviale, alors $\|u\| \neq 0$, on obtient l'inégalité (3.25). La preuve est complète. ■

Remarque 3.1 Si

$$|\lambda| < \frac{\kappa^{\kappa+1} \Gamma(\kappa)}{(\kappa - 1)^{\kappa-1} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^\kappa}, \quad (3.26)$$

Alors le problème aux limites (3.2) n'admet pas une solution non triviale.

3.4 Exemples

1. Considérons le problème d'ordre fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}\mathfrak{D}_1^{3/2} u(t) = (t-1)^2 + \sqrt{t-1+u^2(t)}, & 1 < t < e, \\ u(1) = 0, u(e) = B, & B \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.27)$$

Ici $\kappa = \frac{3}{2}$, $[a, b] = [1, e]$ et $\mathcal{F}(t, u) = (t-1)^2 + \sqrt{t-1+u^2}$ pour tout $(t, u) \in (1, e] \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |\partial_u \mathcal{F}(t, u)| &= \frac{|u|}{\sqrt{t-1+u^2}} \\ &\leq 1 := K. \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs données, on trouve que

$$\exp\left(\frac{\kappa^{(\kappa+1)/\kappa} \Gamma^{1/\kappa}(\kappa)}{(\kappa - 1)^{(\kappa+1)/\kappa} K^{1/\kappa}}\right) = \exp\left(\frac{3}{4} (9\pi)^{1/3}\right) > e.$$

Donc, l'inégalité (3.22) est satisfaite. Par conséquent et d'après le théorème 3.1, on en déduit que le problème aux limites d'ordre fractionnaire (3.27) admet une solution unique sur $[1, e]$.

2. Considérons le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}\mathcal{D}_1^{3/2}u(t) = \lambda u(t), & 1 < t < e, \\ u(1) = 0 = u(e), \end{cases} \quad (3.28)$$

Ici $\kappa = \frac{3}{2}$, et $[a, b] = [1, e]$.

Utilisant les valeurs données, on trouve que

$$\frac{\kappa^{\kappa+1}\Gamma(\kappa)}{(\kappa-1)^{\kappa-1}\left(\ln\frac{b}{a}\right)^\kappa} = \frac{9\sqrt{3\pi}}{8}. \quad (3.29)$$

D'après le théorème 3.2, on en déduit que : Si λ est une valeur propre du problème (3.28), alors $|\lambda| \geq 9\sqrt{3\pi}/8$.

Chapitre 4

Inégalité de type de Lyapunov d'un problème de Hadamard dérivatif avec conditions aux limites sur un intervalle $[a, b]$

Dans ce chapitre on présente essentiellement l'article [60] intitulé : "Lyapunov-type inequality for the Hadamard fractional boundary value problem on a general interval $[a,b]$ " publié dans J. Math. inequal., Vol. 13, no. 3 (2019), 789-799.

Inspiré par les travaux [61, 62], dans ce chapitre, nous allons étudier le problème ouvert suivant :

Comment obtenir l'inégalité de type Lyapunov de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard avec conditions aux limites suivante ? :

$$\begin{cases} {}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) + q(t)u(t) = 0, & 1 \leq a < t < b, \quad 1 < \kappa \leq 2, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

où ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa$ dénote la dérivée de Hadamard et $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

De plus, nous avons obtenu plusieurs résultats pour des inégalités de type de Hartman-Wintner avec leurs applications sur un problème de valeurs propres et de non-existence des solutions.

L'intérêt de ce chapitre ne se résume pas seulement au fait de trouver une réponse au problème ouvert, mais aussi en certaines aptitudes en analyse mathématique à surmonter les obstacles difficiles pour tirer le maximum de la fonction de Green.

4.1 Fonction de Green associée au problème

Lemme 4.1 *La fonction $u \in C([a, b], \mathbb{R})$ est une solution du problème fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) + q(t)u(t) = 0, & 1 \leq a < t < b, \quad 1 < \kappa \leq 2, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

si seulement si u est une solution de l'équation intégrale

$$u(t) = \int_a^b G(t, \tau)q(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (4.3)$$

où $G(t, \tau)$ est définie par (3.5).

Preuve. Voir Lemme 3.1 (avec $B = 0$ et $y(t) = q(t)u(t)$). ■

Lemme 4.2 *La fonction de Green G définie dans le Lemme 4.1, possède les propriétés suivantes :*

1. $G(\tau, \tau) \geq G(t, \tau) \geq 0$, pour tous $(t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]$.
2. Pour tout $(t, \tau) \in [a, b] \times [a, b]$,

$$|G(t, \tau)| \leq |G(\tau, \tau)| \leq \frac{1}{4^{(\kappa-1)}\Gamma(\kappa)a} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{(\kappa-1)}. \quad (4.4)$$

Preuve. 1. Pour la preuve de la première propriété, voir Lemme 3.2 et leur preuve.

2. Nous démontrons la deuxième propriété. On a $G(\tau, \tau) = g_2(\tau, \tau) = g_1(\tau, \tau) \geq g_2(t, \tau) \geq g_1(t, \tau) \geq 0$.

On utilise l'inégalité $AB \leq \frac{(A+B)^2}{4}$ avec $A = \ln \frac{\tau}{a}$ et $B = \ln \frac{b}{\tau}$, alors

$$\begin{aligned} |G(\tau, \tau)| &= \frac{1}{\Gamma(\kappa) \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1} \tau} \left[\left(\ln \frac{\tau}{a}\right) \left(\ln \frac{b}{\tau}\right) \right]^{\kappa-1} \\ &\leq \frac{1}{4^{\kappa-1} \Gamma(\kappa) \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1} \tau} \left[\left(\ln \frac{\tau}{a} + \ln \frac{b}{\tau}\right)^2 \right]^{\kappa-1} \\ &= \frac{1}{4^{\kappa-1} \Gamma(\kappa) \tau} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1} \\ &\leq \frac{1}{4^{\kappa-1} \Gamma(\kappa) a} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|G(t, \tau)| \leq |G(\tau, \tau)| \leq \frac{1}{4^{(\kappa-1)} \Gamma(\kappa) a} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1}. \quad (4.5)$$

La preuve est complète. ■

L'existence des solutions non triviales et continues pour des problèmes aux limites d'ordre fractionnaire est assurée par les inégalités de Lyapunov et de Hartman-Wintner. Dans ces sections nous présentons ces inégalités pour le problème (4.1).

4.2 Inégalité de Hartman-Wintner

Théorème 4.1 *S'il existe une solution continue non triviale du problème aux limites avec la dérivée fractionnaire de Hadamard (4.1), alors*

$$\int_a^b \frac{1}{\tau} \left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)^{\kappa-1} |q(\tau)| d\tau \geq \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1} \Gamma(\kappa). \quad (4.6)$$

Preuve. Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{t \in [a, b]} |u(t)|.$$

On a

$$|u(t)| \leq \int_a^b |G(t, \tau)| |q(\tau)| |u(\tau)| d\tau,$$

ce qui donne

$$\|u\| \leq \|u\| \int_a^b |G(\tau, \tau)| |q(\tau)| d\tau.$$

Comme u est non triviale (i.e. $\|u\| \neq 0$), donc

$$1 \leq \int_a^b \frac{1}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1} \Gamma(\kappa) \tau} \left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)^{\kappa-1} |q(\tau)| d\tau, \quad (4.7)$$

d'après (4.7) on en déduit l'inégalité (4.6). ■

4.3 Inégalités de Lyapunov

Nous présentons l'inégalité de Lyapunov suivante :

Théorème 4.2 *S'il existe une solution continue non triviale du problème aux limites avec la dérivée fractionnaire de Hadamard (4.1), alors*

$$\int_a^b |q(\tau)| d\tau \geq 4^{(\kappa-1)} \Gamma(\kappa) a \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{1-\kappa}. \quad (4.8)$$

Preuve. Nous notons $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{a}$, alors d'après le théorème 4.1 nous obtenons

$$\int_a^b |q(\tau)| d\tau \geq a \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1} \frac{\Gamma(\kappa)}{\max_{\tau \in [a, b]} h(\tau)}, \quad (4.9)$$

où

$$h(\tau) = \left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)^{\kappa-1}. \quad (4.10)$$

Si $\tau = a$ ou $\tau = b$, alors $h(\tau) = 0$. sinon, on dérive la fonction $h(\tau)$, pour tout $\tau \in (a, b)$:

$$\begin{aligned} h'(\tau) &= \frac{(\kappa-1)}{\tau \left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)^{2-\kappa}} \left(\ln \frac{b}{\tau} - \ln \frac{\tau}{a}\right) \\ &= \frac{(\kappa-1) \left(\ln \frac{ab}{\tau^2}\right)}{\tau \left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)^{2-\kappa}}, \end{aligned}$$

nous avons une solution unique $\tau_0 = \sqrt{ab}$ de l'équation $h'(\tau) = 0$ sur (a, b) . On obtient

$$\max_{\tau \in [a, b]} h(\tau) = h(\tau_0) = \left(\ln \frac{\sqrt{ab}}{a} \ln \frac{b}{\sqrt{ab}}\right)^{\kappa-1}. \quad (4.11)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
 ab = \sqrt{ab}\sqrt{ab} &\Leftrightarrow \ln \frac{\sqrt{ab}}{a} = \ln \frac{b}{\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \left(\ln \frac{\sqrt{ab}}{a} - \ln \frac{b}{\sqrt{ab}} \right)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow 4 \left(\ln \frac{\sqrt{ab}}{a} \ln \frac{b}{\sqrt{ab}} \right) &= \left(\ln \frac{\sqrt{ab}}{a} \right)^2 + \left(\ln \frac{b}{\sqrt{ab}} \right)^2 + 2 \left(\ln \frac{\sqrt{ab}}{a} \ln \frac{b}{\sqrt{ab}} \right) \\
 \Leftrightarrow \left(\ln \frac{\sqrt{ab}}{a} \ln \frac{b}{\sqrt{ab}} \right) &= \frac{1}{4} \left(\ln \frac{\sqrt{ab}}{a} + \ln \frac{b}{\sqrt{ab}} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow \left(\ln \frac{\sqrt{ab}}{a} \ln \frac{b}{\sqrt{ab}} \right)^{\kappa-1} &= \frac{1}{4^{(\kappa-1)}} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{2(\kappa-1)}, \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

Par (4.11) et (4.12)

$$\max_{\tau \in [a, b]} h(\tau) = h(\tau_0) = \frac{1}{4^{(\kappa-1)}} \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{2(\kappa-1)}, \tag{4.13}$$

Par substitution (4.13) dans (4.9), on en déduit

$$\int_a^b |q(\tau)| d\tau \geq 4^{(\kappa-1)} \Gamma(\kappa) a \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{1-\kappa}.$$

La preuve est complète. ■

Nous définissons les constantes :

$$\xi_1 = \exp \left(\frac{1}{2} \left[[2(\kappa - 1) + \ln ba] - \sqrt{4(\kappa - 1)^2 + \ln^2 \frac{b}{a}} \right] \right), \tag{4.14}$$

et

$$\xi_2 = \exp \left(\frac{1}{2} \left[[2(\kappa - 1) + \ln ba] + \sqrt{4(\kappa - 1)^2 + \ln^2 \frac{b}{a}} \right] \right). \tag{4.15}$$

Lemme 4.3 La fonction de Green G définie dans Lemme 4.1, vérifie la propriété suivante

$$\max_{t, \tau \in [a, b]} |G(t, \tau)| = \frac{1}{\Gamma(\kappa) \xi_1} \left(\frac{\ln \frac{\xi_1}{a} \ln \frac{b}{\xi_1}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1}. \tag{4.16}$$

Preuve. On observe que $g_2([a, b] \times [a, b]) \subset G([a, b] \times [a, b])$, et par la première propriété du Lemme 4.2, nous obtenons

$$\max_{t, \tau \in [a, b]} |G(t, \tau)| = \max_{\tau \in [a, b]} |G(\tau, \tau)|, \tag{4.17}$$

où $G(\tau, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\kappa) \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1}} \left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)^{\kappa-1} \frac{1}{\tau}$.

ensuite que nous avons seulement obtenu la valeur maximale de la fonction

$$Q(\tau) = \left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)^{\kappa-1} \frac{1}{\tau}, \tau \in [a, b]. \quad (4.18)$$

On a $Q(a) = Q(b) = 0$. On dérive la fonction $Q(\tau)$ sur (a, b) .

$$Q'(\tau) = \left[(\kappa - 1) \frac{\ln \frac{b}{\tau} - \ln \frac{\tau}{a}}{\left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)} - 1 \right] \left(\ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau}\right)^{\kappa-1} \frac{1}{\tau^2}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} Q'(\tau) = 0 &\Leftrightarrow (\kappa - 1) \left(\ln \frac{b}{\tau} - \ln \frac{\tau}{a}\right) = \ln \frac{\tau}{a} \ln \frac{b}{\tau} \\ &\Leftrightarrow [2(\kappa - 1) + \ln b + \ln a] \ln \tau - [(\kappa - 1) + \ln b] \ln a - \ln^2 \tau - (\kappa - 1) \ln b = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln^2 \tau - [2(\kappa - 1) + \ln ba] \ln \tau + [(\kappa - 1) \ln ba + \ln b \ln a] = 0, \end{aligned}$$

donc l'équation $Q'(\tau) = 0$ est équivalente à l'équation d'ordre 2 suivante :

$$x^2 - [2(\kappa - 1) + \ln ba] x + [(\kappa - 1) \ln ba + \ln b \ln a] = 0, \quad (4.19)$$

où $x = \ln \tau$. Donc l'équation (4.19) admet deux solutions données comme suit :

$$x_1 = \frac{[2(\kappa - 1) + \ln ba] - \sqrt{\Delta}}{2} = \ln \xi_1, \quad x_2 = \frac{[2(\kappa - 1) + \ln ba] + \sqrt{\Delta}}{2} = \ln \xi_2, \quad (4.20)$$

tel que $\Delta = 4(\kappa - 1)^2 + \ln^2 \frac{b}{a}$.

On a

$$x_2 > \frac{\ln ba + \sqrt{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^2}}{2} = \ln b,$$

Alors $\xi_2 \notin (a, b)$.

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(2(\kappa - 1) + \ln ba - \sqrt{\left(2(\kappa - 1) + \ln \frac{b}{a}\right)^2 - 4(\kappa - 1) \left(\ln \frac{b}{a}\right)} \right) \\ &> \frac{1}{2} \left(2(\kappa - 1) + \ln ba - \sqrt{\left(2(\kappa - 1) + \ln \frac{b}{a}\right)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2(\kappa - 1) + \ln ba - 2(\kappa - 1) - \ln \frac{b}{a} \right) = \ln a \\ &\Rightarrow \xi_1 > a, \end{aligned}$$

et d'autre part on a

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{1}{2} \left(2(\kappa - 1) + \ln ba - \sqrt{\left(2(\kappa - 1) - \ln \frac{b}{a}\right)^2 + 4(\kappa - 1) \ln \frac{b}{a}} \right) \\
 &< \frac{1}{2} \left(2(\kappa - 1) + \ln ba - \sqrt{\left(2(\kappa - 1) - \ln \frac{b}{a}\right)^2} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(2(\kappa - 1) + \ln ba - \left|2(\kappa - 1) - \ln \frac{b}{a}\right| \right) \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(2(\kappa - 1) + \ln ba - \left(|2(\kappa - 1)| - \left| \ln \frac{b}{a} \right| \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(2(\kappa - 1) + \ln ba - \left(2(\kappa - 1) - \ln \frac{b}{a} \right) \right) = \ln b \\
 &\Rightarrow \xi_1 < b,
 \end{aligned}$$

on en déduit que $\xi_1 \in (a, b)$.

Par conséquent

$$\max_{\tau \in [a, b]} |Q(\tau)| = \frac{1}{\xi_1} \left(\ln \frac{\xi_1}{a} \ln \frac{b}{\xi_1} \right)^{\kappa-1}. \quad (4.21)$$

Donc

$$\max_{t, \tau \in [a, b]} |G(t, \tau)| = \frac{1}{\Gamma(\kappa)\xi_1} \left(\frac{\ln \frac{\xi_1}{a} \ln \frac{b}{\xi_1}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{\kappa-1}. \quad (4.22)$$

La preuve est complète. ■

Nous avons l'estimation précise de l'inégalité de type de Lyapunov suivante :

Théorème 4.3 *S'il existe une solution continue non triviale du problème aux limites avec la dérivée fractionnaire de Hadamard (4.1), alors*

$$\int_a^b |q(\tau)| d\tau \geq \Gamma(\kappa)\xi_1 \left(\frac{\ln \frac{\xi_1}{a} \ln \frac{b}{\xi_1}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{1-\kappa}, \quad (4.23)$$

où ξ_1 est définie par (4.14).

Preuve. En utilisant Lemme 4.1, la solution du problème (4.1), peut être écrite comme suit

$$u(t) = \int_a^b G(t, \tau) q(\tau) u(\tau) d\tau.$$

Ainsi, pour tout $t \in [a, b]$, nous avons

$$\begin{aligned} |u(t)| &\leq \int_a^b |G(t, \tau)| |q(\tau)| |u(\tau)| d\tau \\ &\leq \|u\| \int_a^b |G(t, \tau)| |q(\tau)| d\tau, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\|u\| \leq \|u\| \int_a^b |G(t, \tau)| |q(\tau)| d\tau.$$

Puisque u est non triviale (i.e $\|u\| \neq 0$), alors

$$\frac{1}{\max_{t, \tau \in [a, b]} |G(t, \tau)|} \leq \int_a^b |q(\tau)| d\tau.$$

En utilisant Lemme 4.3, on obtient l'inégalité (4.23). La preuve est complète. ■

Remarque 4.1 Nous avons résolu le problème tel qu'il était proposé sur le domaine $[a, b]$ avec $(1 \leq a < b)$. Mais un lecteur perspicace peut remarquer que les résultats restent corrects lorsque $0 < a < b$, sans rien changer dans la méthode d'étude ci-dessus.

Remarque 4.2 Soient $a = 1, b = e$, d'après le théorème 4.3, on peut déduire le résultat dans [63] et nous avons résolu le problème ouvert (4.1) en utilisant la méthode d'analyse directe. En outre, il existe une réponse du problème ouvert par une autre méthode différente proposée dans [63].

4.4 Applications

Nous présentons maintenant l'applications des inégalités obtenues ci-dessus sur un problème de valeurs propres et on obtient un résultat de non-existence des solutions pour le problème aux limites (4.1).

4.4.1 Borne inférieure pour les valeurs propres

Considérons le problème de valeurs propres suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{H}\mathfrak{D}_a^\kappa u(t) = \lambda u(t), & 0 < a < t < b, \quad 1 < \kappa \leq 2, \\ u(a) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (4.24)$$

Théorème 4.4 *Si le problème de valeurs propres (4.24) admet une solution continue non triviale, alors*

$$|\lambda| \geq \frac{4^{(\kappa-1)}\Gamma(\kappa)}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\kappa}. \quad (4.25)$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Hartman-Wintner (4.6), avec $q(t) = \lambda$, ce qui donne

$$|\lambda| \int_a^b \frac{1}{\tau} d\tau \geq \frac{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1} \Gamma(\kappa)}{\max_{\tau \in [a,b]} h(\tau)},$$

tel que $h(\tau)$ est définie par (4.10). En utilisant uniquement l'égalité (4.13), on trouve

$$|\lambda| \ln \frac{b}{a} \geq \frac{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^{\kappa-1} \Gamma(\kappa)}{\frac{1}{4^{(\kappa-1)}} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{2(\kappa-1)}}, \quad (4.26)$$

D'après (4.26), on obtient l'inégalité (4.25). ■

Remarque 4.3 *Le théorème 3.2 améliore le résultat de l'inégalité de la borne inférieure des valeurs propres pour le problème de valeurs propres (3.2) car*

$$\frac{\kappa^{\kappa+1}}{(\kappa-1)^{\kappa-1}} \geq 4^{(\kappa-1)}, \text{ pour toute } \kappa \in (0, 2]. \quad (4.27)$$

Donc, notez que le résultat du théorème 3.2 est meilleur que le résultat du théorème 4.4. De plus, pour un intervalle général $[a, b]$, le résultat du théorème 3.2 est toujours le meilleur, car nous avons utilisé l'estimation précise pour l'intégration $\max_{t \in [a,b]} \int_a^b |G(t, s)| ds$.

4.4.2 Résultat de non-existence

Dans cette sous-section, on obtient la non-existence de solutions du problème aux limites (4.1).

Théorème 4.5 *Supposons que*

$$\int_a^b |q(\tau)| d\tau < \Gamma(\kappa) \xi_1 \left(\frac{\ln \frac{\xi_1}{a} \ln \frac{b}{\xi_1}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{1-\kappa}, \quad (4.28)$$

où ξ_1 est définie par (4.14). Alors le problème aux limites (4.1) n'admet pas de solution non triviale.

Preuve. Supposons le contraire, i.e., le problème aux limites (4.1) admet une solution non triviale u . D'après le théorème 4.3, l'inégalité (4.23) est vraie. Ceci contredit l'hypothèse (4.28). La preuve est complète. ■

4.4.3 Exemples

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^{\mathcal{H}}\mathfrak{D}_1^{\frac{3}{2}}u(t) + q(t)u(t) = 0, & 1 < t < 2, \\ u(1) = u(2) = 0, \end{cases} \quad (4.29)$$

Ici $\kappa = \frac{3}{2}$, $a = 1$, $b = 2$. Utilisant les valeurs données, on trouve que $\xi_1 = 1.269$ et

$$\Gamma(\kappa)\xi_1 \left(\frac{\ln \frac{\xi_1}{a} \ln \frac{b}{\xi_1}}{\ln \frac{b}{a}} \right)^{1-\kappa} \simeq 2.8442,$$

i). Nous choisissons $q(t) = t^2 - 1$. On a

$$\int_a^b |q(\tau)|d\tau = \int_1^2 (\tau^2 - 1)d\tau = \frac{4}{3} < 2.8442.$$

Il est clair que l'hypothèse du Théorème 4.5 est satisfaite, Alors le problème aux limites (4.29) n'a pas de solution non triviale.

ii). En particulier, dans le cas $q(t) = \lambda$, on a

$$\frac{4^{(\kappa-1)}\Gamma(\kappa)}{\left(\ln \frac{b}{a}\right)^\kappa} = (\ln 2)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}.$$

D'après le théorème 4.4 on en déduit que, si $|\lambda| < (\ln 2)^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\pi}$, alors le problème (4.29) avec $q(t) = \lambda$ n'admet pas une solution non triviale.

Conclusion et Perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié :

- L'existence et l'unicité de solutions d'une nouvelle classe d'équations à multi termes de Langevin de dérivées d'ordre fractionnaire sur l'intervalle $[0, 1]$;
- L'estimation précise sur la condition de l'intervalle donné qui permet de trouver la solution unique pour une classe d'équations différentielles d'ordre fractionnaires au sens de Hadamard avec conditions aux limites ;
- Les inégalités de type de Hartman-Wintner et de type de Lyapunov d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard sur un intervalle borné $[a, b]$ et on en déduit les conditions suffisantes pour la non-existence de solution de la même équation.

Comme perspectives, nous allons proposer les problèmes ouverts suivants :

1. Comment obtenir l'inégalité de Lyapunov pour le problème aux limites à trois points suivant ? :

$$\begin{cases} {}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^{\kappa}u(t) + q(t)u(t) = 0, \\ u(a) = u(\eta) = u(b) = 0, \end{cases} \quad (4.30)$$

tel que ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^{\kappa}$ dénote l'opérateur de dérivée fractionnaire au sens de Hadamard d'ordre $\kappa \in (2, 3]$, et $t \in [a, b]$, η est un réel constant avec $0 < a < \eta < b$, et $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2. Comment effectuer une analyse similaire à celle présentée dans le troisième chapitre sur le problème suivant ? :

$$\begin{cases} {}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa u(t) = -f(t, u(t)), \\ u(a) = u(\eta) = 0, u(b) = B, \end{cases} \quad (4.31)$$

où $\kappa \in (2, 3]$, $t \in [a, b]$, $0 < a < \eta < b$, $B \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

3. Même questions ci-dessus avec changement de l'opérateur ${}^{\mathcal{H}}\mathcal{D}_a^\kappa$ par l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville ${}^{\mathcal{R}}\mathcal{D}_a^\kappa$ où $a > -\infty$.

Bibliographie

- [1] **B. Ross**, The development of fractional calculus 1695-1900, *Historia Math.*, 4(1), 1977, 75-89.
- [2] **S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev**, *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.
- [3] **J. T. Machado, V. Kiryakova, F. Mainardi**, Recent history of fractional calculus, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16, 2011, 1140-1153.
- [4] **H. G. Sun, Y. Zhang, D. Baleanu, W. Chen, Y. Q. Chen**, A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.*, 64, 2018, 213-231.
- [5] **R. Hilfer**. Threefold introduction to fractional derivatives. In G. Radons R. Klages and I. M. Sokolov, editors, *Anomalous Transport : Foundations and Applications*.Wiley-VCH, 2008.
- [6] **K. S. Miller, B. Ross**, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.
- [7] **J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. T. Machado**, *Advances in Fractional Calculus : Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, Dordrecht, 2007.
- [8] **B. K. Oldham, S. J. Spanier**, *The Fractional Calculus*, New York : Academic Press, 1974.

-
- [9] **L. Podlubny**, Fractional Differential Equations, New York, Academic Press, **1999**.
- [10] **G. W. Leibniz**, Letter from Hanover, Germany to G. F. A. L'Hôpital, September 30, 1695, in : Leibnizens Mathematische Schriften 1849. [reprinted in Hildesheim, Germany, Olms Verlag, 2, **1962**, 301-302.].
- [11] **L. Euler**, De progressionibus transcendentibus, sev quarum termini generales algebraice dari nequeunt, Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Scientiarum Petropolitanae 5, **1738**, 36-57.
- [12] **P. S. Laplace**, Théorie Analytique des Probabilités, Paris : Courcier, **1812**.
- [13] **S. F. Lacroix**, Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral Paris : Courtier, 3, second edition, **1819**, 409-410.
- [14] **J. Fourier**, Théorie Analytique de la Chaleur, in Oeuvres de Fourier Paris : Firmin Didot 1, 508, **1822**. [2nd publ. The Analytical Theory of Heat. New York : Dover publ., **1955**, 466 pp.].
- [15] **N. H. Abel**, Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, in oeuvres Complètes Christiania : Grondahl, 1, **1881**, 16-18.
- [16] **N. H. Abel**, Auflosung einer mechanischen Aufgabe. J. fur reine und angew. Math., 1, **1826**, 153-157.
- [17] **J. Liouville**, Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions, J. l'Ecole Roy. Polytechn., 13, Sect. 21, **1832**, 1-69.
- [18] **J. Liouville**, Mémoire sur le calcul des différentielles a indices quelconques. Ibid., **1832**, 71-162.
- [19] **J. Liouville**, Mémoire sur l'intégration de l'équation : $(mx^2 + nx + p)d^2y/dx^2 + (qx + pr)dy/dx + sy = 0$, à l'aide des différentielles indices quelconques, Ibid., **1832**, 163-186.
- [20] **J. Liouville**, Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires, J. fir reine und ungew. Math., 11, **1834**, 1-19.

-
- [21] **J. Liouville**, Mémoire sur une formule d'analyse, *Ibid.*, 12, no 4, **1834**, 273-287.
- [22] **J. Liouville**, Mémoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des différentielles à indices quelconques, *Ibid.*, 13, no 1-3, **1835**, 219-232.
- [23] **J. Liouville**, Mémoire sur le changement de la variable indépendante dans le calcul des différentielles à indices quelconques, *J. l'Ecole Roy. Polytechn.*, 15, Sect., 24, **1835**, 17-54.
- [24] **J. Liouville**, Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires. *Ibid.*, 15, no 55, **1837**, 58-84.
- [25] **G. F. B. Riemann**, Versuch einer Auffassung der Integration und Differentiation, in *Gesammelte Werke und Willenshaftlicher*, Leipzig, Teubner, 331-344, 1876. [New ed. *Gesammelte in New York : Nachlass. Dover Publ. Inc.*, 558, **1953**, 1-116.
- [26] **A. K. Grunwald**, Uber "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung. *Z. angew. Math. Phys.*, 12, **1867**, 441-480.
- [27] **A. V. Letnikov**, An explanation of the concepts of the Theory of differentiation with an arbitrary index *Moskow Matem. Sbornik*, 6, **1872**, 413-445.
- [28] **J. Hadamard**, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor, *J. math. pure Appl.*, Ser. 4, 8, **1892**, 101-186.
- [29] **Y. Watanabe**, Notes on the generalized derivative of Riemann-Liouville and its application to Leibnitz's formula, *Tohoku Math. J.*, 34, **1931**, 8-27 and 28-41.
- [30] **F. Jarad, T. Abdeljawad, J. Alzabut**, Generalized fractional derivatives generated by a class of local proportional derivatives, *Eur. Phys. J. Special Topics*, 226, **2017**, 3457-3471.
- [31] **T. Abdeljawad**, Lyapunov-type Inequalities for Local Fractional Proportional Derivatives, In : H. Dutta, A. O. Akdemir, A. Atangana, (Eds.), *Fractional Order Analysis : Theory, Methods and Applications*, Wiley, New York, 2020.

-
- [32] **F. Mainardi**, Fractional Calculus : Some Basic Problems in Continuum and Statistical Mechanics. In : Carppinteri A, F. Mainardi, Fractals and Fractional Caluculas in Continuum Mechanics, New York : Springer–Verlag, **1997**, 291-348.
- [33] **S. Sun, Y. Zhao, Z. Han, Y. Li**, The existence of solutions for boundary-value problem of fractional hybrid differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17, **2012**, 4961-4967.
- [34] **F. Jiao, Y. Zhou**, Existence of solution for a class of fractional boundary value problems via critical point theory, Comput. Math. Appl., 62, **2011**, 1181-1199.
- [35] **W. Chen, Y. Wang**, Existence of solutions of boundary-value problem of a class of nonlinear fractional- differential equations, Adv. Differ. Equ., 2014 :174, **2014**, 1-12.
- [36] **Z. Laadjal, Q-H. Ma**, Existence and uniqueness of solutions for nonlinear Volterra-Fredholm integro-differential equation of fractional order with boundary conditions, Math. Meth. Appl. Sci., **2019**, 1-13. Doi : 10.1002/mma.5845 .
- [37] **Z. Laadjal, T. Abdeljawad, F. Jarad**, On existence-uniqueness results for proportional fractional differential equations and incomplete Gamma functions, Adv. differ. Equ., 2020 :641, **2020**, 1-16.
- [38] **N. Nyamoradi, M. Javidi**, Existence of multiple positive solutions for fractional differential inclusion with m-point boundary conditions and two fractional orders, Electron. J. Diff. Equ., No. 187, **2012**, 1-26.
- [39] **B. Ahmad, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, J. Tariboon**, Hadamard-Type Fractional Differential Equations : Inclusions and Inequalities, Cham, Springer, **2017**.
- [40] **A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo**, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, Amsterdam, **2006**.
- [41] **K. Diethelm**, The Analysis of Fractional Differential Equations : An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type, Springer Heidelberg Dordrecht London New York, **2010**.

-
- [42] **F. Jarad, T. Abdeljawad, D. Baleanu**, Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives, *Adv. differ. Equ.*, 2012 :142, **2012**, 1-8.
- [43] **A. Kolmogorov, S. Fomine**, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. 2e édition, Editions Mir-Moscou, **1973**.
- [44] **M.A. Krasnoselskii**, Two remarks on the method of successive approximations, *Uspekhi Mat. Nauk*, 10, **1955**, 123-127.
- [45] **Z. Laadjal, B. Ahmed, N. Adjeroud**, Existence and uniqueness of solutions for multi-term fractional Langevin equation with boundary conditions, *DCDIS Series A : Math. Analys.*, 27, 5a, **2020**, 339-350.
- [46] **S. C. Lim, M. Li, L. P. Teo**, Langevin equation with two fractional orders, *Phys. Lett. A*, 372, **2008**, 6309-6320.
- [47] **B. Ahmad, J. Nieto, A. Alsaedi, M. El-Shahed**, A study of nonlinear Langevin equation involving two fractional orders in different intervals, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 13, **2012**, 599-606.
- [48] **B. Ahmad, S. K. Ntouyas**, New existence results for differential inclusions involving Langevin equation with two indices, *J. Nonlinear Convex Analys.*, 14, no. 3, **2013**, 437-450.
- [49] **C. Torres**, Existence of solution for fractional Langevin equation : variational approach, *Electron. J. Qual. Theor. Diff. Equ.*, No. 54, **2014**, 1-14.
- [50] **O. Baghani**, On fractional Langevin equation involving two fractional orders, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 42, **2017**, 675-681.
- [51] **B. Li, S. Sun, Y. Sun**, Existence of solutions for fractional Langevin equation with infinite-point boundary conditions, *J. Appl. Math. Comput.*, 53, **2017**, 683-692.
- [52] **H. Fazli, J. J. Nieto**, Fractional Langevin equation with anti-periodic boundary conditions, *Chao. Solito. Fract.*, 114, **2018**, 332-337.
- [53] **Z. Zhou, Y. Qiao**, Solutions for a class of fractional Langevin equations with integral and anti-periodic boundary conditions, *Bound. Value Probl.*, 2018 :152, **2018**, 1-10.

-
- [54] **Z. Laadjal, Q. Al-Mdallal, F. Jarad**, Analysis of a coupled system of nonlinear fractional Langevin equations with certain non-local and non-separated boundary conditions, Submitted to Numer. Meth. Part. Diff. Equ., Corrections sent in 23 Dec. 2020.
- [55] **Z. Laadjal, N. Adjeroud**, Sharp estimates for the unique solution of the Hadamard-type two-point fractional boundary value problems, Appl. Math. E-notes, **2021**. (Accepted).
- [56] **R. A. C. Ferreira**, Existence and uniqueness of solutions for two-point fractional boundary value problems, Electron. J. Diff. Equ., No. 202, **2016**, 1-5.
- [57] **R. A. C. Ferreira**, Note on a uniqueness result for a two-point fractional boundary value problem, Appl. Math. Lett., 90, **2019**, 75-78.
- [58] **B. Ahmad**, Sharp estimates for the unique solution of two-point fractional-order boundary value problems, Appl. Math. Lett., 65, **2017**, 77-82.
- [59] **Z. Laadjal, T. Abdeljawad, F. Jarad**, Sharp estimates of the unique solution for two-point fractional boundary value problems with conformable derivative, Numer. Meth. Part. Diff. Equ., **2021**, 1-10. Doi : 10.1002/num.22760 .
- [60] **Z. Laadjal, N. Adjeroud, Q-H. Ma**, Lyapunov-type inequality for the Hadamard fractional boundary value problem on a general interval $[a,b]$, J. Math. Inequal., 13, 3, **2019**, 789-799.
- [61] **S. K. Ntouyas, B. Ahmad, T. P. Horikis**, Recent developments of Lyapunov-type inequalities for fractional differential equations, pages 619-686. In : D. Andrica, T. Rassias (eds), Differential and Integral Inequalities, Springer Optimization and Its Applications, 151, Springer, Cham, **2017**.
- [62] **Q-H. Ma, C. Ma, J. Wang**, A Lyapunov-type inequality for a fractional differential equation with Hadamard derivative, J. Math. Inequal., 11, 1, **2017**, 135-141.
- [63] **M. Jleli, M. Kirane, B. Samet**, Hartman-Wintner-Type Inequality for a fractional boundary value problem via a fractional derivative with to another function, Discrete Dynamics in Nature and Society, Article ID 5123240, **2017**, 1-8.