



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR

ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE «Abbés LAGHROUR» DE KHENCHELA  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE



Département de Sciences de la matière

## Mémoire de fin d'études

*Pour l'obtention du diplôme de Master (L.M.D)*

**Spécialité : Physique des matériaux**

**Option : Physique**

# Convection naturelle bidimensionnelle dans l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques

**Réalisé par :** -Bouallag Malika

-Marir Wissem

**Membres de jury :**

**Dirigé par :**

M.Kerouaz Fatima Zohra

L'année scolaire : 2019/2020

The page is framed by a decorative border of roses in various colors (pink, yellow, white) and green leaves, interspersed with small yellow dots.

## Dédicace

Je dédie ce mémoire en particulier :

A mes très chers parents, qui m'ont éclairés le chemin en me  
donnant la main tout au long de mes années d'études

« Que dieu me les gardes »

A mes chers frères et sœurs

A tous mes amis

A tous mes maîtres

A tous les scientifiques

**Malika**

A decorative border surrounds the page, featuring various roses in shades of pink, red, and cream, along with green leaves and small yellow dots.

## Dédicace

À la mémoire de ma chère mère

A mon puits de sagesse et mon seul recours, **mon cher père.**

À **mes frères et mes sœurs,**

A mes neveux : **nadir et Moutassim et Mohammed amine**

A mes nièces: **Khawla, Hind, INES, Alaa –errahmane.**

A toutes mes amies

Wissem

The page is framed by a decorative border of stylized roses in shades of pink, red, and white, interspersed with green leaves and small yellow dots. The background is white.

# Remerciements

Nous remercions tout d'abord, **ALLAH**, le tout puissant qui nous éclaire le bon chemin et qui nous donne le courage et le pouvoir pour réaliser cette mémoire.

Ce Travail, n'aurait pu se concevoir ni d'ailleurs aboutir sans l'aide de notre directrice de mémoire madame **Kerouaz Fatima Zohra**, dont nous avons apprécié les qualités scientifiques et humaines, et qui, tout au long de ce travail, a eu la grande patience et la gentillesse de nous prodiguer conseils et encouragements. Nous la remercions pour la confiance qu'elle nous a témoignée, en répondant favorablement et sans hésitation à notre sollicitation, pour sa grande modestie et son aide précieuse.

Nous adressons nos sincères remerciements aux membres de jury pour avoir Accepté d'évaluer le présent travail.

Nous exprimons notre profonde gratitude à nos professeurs à l'université pour la qualité de leur enseignement, pour leurs sérieux, et leurs conseils fructueux.

Nous remercions également toutes ces personnes, ces amis, qui nous ont entourés durant notre cursus à l'université de Khenchela et qui ont rendu cette période de notre vie particulièrement agréable.

Nous pensons enfin à nos familles qui nous ont donné le goût d'apprendre et la force de persévérer sans lesquelles nous n'aurions pu mener à bien notre projet.

A toutes ces personnes, un immense merci.

**Malika et Wissem**

# TABLE DES MATIERES

---

## Table des matières

Dédicace.....	I
Remerciements.....	II
Table des matières.....	III
Liste des figures.....	VII
Nomenclature.....	VIII
Introduction Générale.....	1
Chapitre I : Revue Bibliographiques.....	3
I.1 Introduction.....	3
I.2 Définition du milieu poreux.....	3
I.3 Caractéristiques géométriques des milieux poreux .....	4
I.3.1 Porosité.....	4
I.3.2 Perméabilité.....	4
I.3.3 Tortuosité.....	5
I.3.4 Granulométrie.....	6
I.3.5 Volume élémentaires représentatif (V.E.R).....	7
I.3.6 Surface spécifique.....	7
I.4 Généralités sur les transferts de chaleur.....	8
I.5 Modélisation de transfert de chaleur.....	9
I.6 Transfert de chaleur dans les milieux poreux.....	9
I.6.1 transfert de chaleur par conduction.....	9
I.6.2 transfert de chaleur par convection.....	10
I.6.3 transfert de chaleur par rayonnement.....	10
I.7 Types de convection.....	10
I.7.1 Convection naturelle.....	10
I.7.2 Convection mixte.....	11
I.7.3 Convection forcée.....	11
I.8 Nombres adimensionnels utilisés en convection naturelle.....	12
I.8.1 Nombre de Reynolds.....	12

# TABLE DES MATIERES

---

I.8.2 Nombre de Grashof.....	13
I.8.3 Nombre de Prandtl.....	13
I.8.4 Nombre de Nusselt.....	14
I.9 Approximation de Boussinesq.....	14
I.10 Loi de Darcy généralisée.....	15
I.10.1 Loi de Darcy-Forchheimer.....	16
I.10.2 Loi de Darcy-Brinkman.....	17
I.11 Revue Bibliographique .....	17
<b>Chapitre II : Modélisation physique et mathématique .....</b>	<b>24</b>
II.1 Description du problème.....	24
II.1.1 Modèles physique.....	24
II.1.2 Modèle mathématique.....	25
II.1.2.1 Hypothèses simplificatrices.....	25
II.1.2.2 Formulation mathématique.....	25
II.1.2.3 Formulation vectorielle.....	25
II.1.2.3.1 Équation de continuité .....	25
II.1.2.3.2 Equations de quantité de mouvement dans les milieux poreux.....	26
II.1.2.3.3 Équation de l'énergie.....	26
II.1.2.4 Formulation indicielle.....	26
II.1.2.4.1 Equation de continuité.....	26
II.1.2.4.2 Equation de mouvement .....	26
II.1.2.4.3 Equation d'énergie .....	26
II.1.2.5 Formulation des équations dans un système de coordonnées curvillignes orthogonales coordonnées elliptiques .....	27
II.1.2.5.1 Equation de continuité .....	27
II.1.2.5.2 Equation de mouvement .....	27
II.1.2.5.3 Equation de l'énergie .....	27
II.1.3 Le vecteur de pesanteur $\vec{g}$ .....	27

# TABLE DES MATIERES

---

II.1.3.1 Équation de continuité .....	30
II.1.3.2 L'équation de la quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	30
II.1.3.3 L'équation de la quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	30
II.1.3.4 Equation de l'énergie .....	30
II.1.4 Les Conditions aux limites .....	31
II.2 L'adimensionnelle du problème .....	31
II.3 Equations adimensionnelles .....	31
II.3.1 Equation de continuité .....	31
II.3.2 Équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	32
II.3.3 Équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	32
II.3.4 Équation de l'énergie .....	33
II.3.5 Les conditions aux limites adimensionnelles .....	33
<b>Chapitre III : Formulation Numérique .....</b>	<b>34</b>
III.1 Introduction .....	34
III.2 Méthode de résolution numérique.....	34
III.2.1 Le maillage .....	35
III.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\phi$ dans le volume de contrôle .....	35
III.4 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$ .....	41
III.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$ .....	43
III.6 Discrétisation de l'équation de l'énergie .....	46
III.7 Discrétisation des conditions aux limites .....	47
III.8 Equation de discrétisation de la pression .....	48
III.9 Solution des systèmes d'équation discrétisées.....	49
<b>CHAPITRE IV : Résultats et Discussion .....</b>	<b>50</b>
<b>Conclusion Générale .....</b>	<b>53</b>
<b>Annexe .....</b>	<b>54</b>
<b>Références Bibliographiques .....</b>	<b>62</b>
<b>Résumé .....</b>	<b>65</b>

# LISTES DES FIGURES

## Liste des figures

<b>Figure I.1 :</b>	Aspect de l'espace poreux.....	<b>3</b>
<b>Figure I.2 :</b>	Le système de porosité Houpert, (1974).....	<b>4</b>
<b>Figure I.3 :</b>	Représente la tortuosité.....	<b>5</b>
<b>Figure I.4 :</b>	Concept de la longueur effective C.W Fetter (1988).....	<b>6</b>
<b>Figure I.5 :</b>	Représentation schématique de la taille intermédiaire «l» du volume élémentaire représentatif V.E.R entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique «L» et à l'échelle des pores «d» ( <b>Delache, 2005</b> ).....	<b>7</b>
<b>Figure I.6 :</b>	les trois modes de transfert de chaleur.....	<b>9</b>
<b>Figure I.7 :</b>	présentation de la convection dans une casserole.....	<b>11</b>
<b>Figure I.8 :</b>	Four à convection forcée.....	<b>12</b>
<b>Figure II.1 :</b>	Section droite du système.....	<b>24</b>
<b>Figure III.1 :</b>	Représentation d'un volume-fini typique et son voisinage.....	<b>35</b>
<b>Figure III.2 :</b>	Volume de contrôle avant le décalage dans la direction $\varepsilon$ .....	<b>41</b>
<b>Figure III.3 :</b>	Volume de contrôle après le décalage dans la direction $\varepsilon$ .....	<b>42</b>
<b>Figure III.4 :</b>	Volume de contrôle avant le décalage dans la direction $\eta$ .....	<b>44</b>
<b>Figure III.5 :</b>	Volume de contrôle après le décalage dans la direction $\eta$ .....	<b>44</b>
<b>Figure IV.1 :</b>	Isothermes, la pression et les lignes de courant pour $Gr=5.10^3$ .....	<b>50</b>
<b>Figure IV.2 :</b>	Isothermes, la pression et les lignes de courant pour $Gr= 10^4$ .....	<b>51</b>
<b>Figure IV.3 :</b>	Isothermes, la pression et les lignes de courant pour $Gr= 10^5$ .....	<b>51</b>
<b>Figure IV.4 :</b>	Isothermes, la pression et les lignes de courant pour $Gr= 10^6$ .....	<b>52</b>

# Nomenclature

## Nomenclature

$A_1, A_2$	Grands axes des cylindres elliptiques intérieur et extérieur. (m).
$a$	Constante définie dans le système de coordonnées elliptiques (distance aux pôles).
$B_1, B_2$	Petits axes des cylindres elliptiques intérieur et extérieur. (m)
$c_p$	Chaleur massique à pression constante. ( $J.kg^{-1}.K^{-1}$ )
$C_F$	Coefficient du terme de Forchheimer.
$e_1$	Excentricité de l'ellipse interne. $e_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 - B_1^2}}{A_1}$
$e_2$	Excentricité de l'ellipse externe. $e_2 = \frac{\sqrt{A_2^2 - B_2^2}}{A_2}$
$\vec{g}$	Accélération de la pesanteur. ( $m.s^{-2}$ )
$Gr$	Nombre de Grashof défini par $Gr = \frac{g\beta a^3}{\nu^2} \Delta T$
$h$	Coefficient géométrique. (m)
$P$	Pression au sein du fluide. (atm)
$Pr$	Nombre de Prandtl défini par $Pr = \frac{\nu\rho c_p}{\lambda}$
$S_\phi$	Terme de source figurant dans l'équation 2.1.
$T$	Température du fluide. (K)
$T_1$	Température du cylindre elliptique intérieur. (K)
$T_2$	Température du cylindre elliptique extérieur. (K)
$\Delta T$	Écart de température $\Delta T = T_2 - T_1$ . (K)
$t$	Temps. (s)
$V_\varepsilon V_\eta$	Composantes de la vitesse suivant $\varepsilon$ et $\eta$ . ( $m.s^{-1}$ )
$\vec{V}$	Vecteur vitesse. ( $m.s^{-1}$ )
$x, y, z$	Coordonnées cartésiennes. (m)

### Lettres grecques :

$\phi$	La porosité du milieu poreux.
$\beta$	Coefficient volumique d'expansion thermique du fluide. ( $K^{-1}$ )
$\lambda$	Conductivité thermique du fluide. ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )
$\mu$	Viscosité dynamique. ( $kg.m.s^{-1}$ )
$\nu$	Viscosité cinématique. ( $m^2.s^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique du fluide. ( $kg.m^{-3}$ )
$\tau_{ij}$	Tenseur des contraintes visqueuses

# Nomenclature

---

$\eta, \theta, z$  Coordonnées elliptiques

## Exposants

\* Paramètres adimensionnels

## Indices

i intérieur.

e extérieur.

$\eta$  Suivant la coordonnée  $\eta$

$\theta$  Suivant la coordonnée  $\theta$

# Introduction générale

---

## Introduction générale

L'intérêt considérable qui a été porté ces dernières décennies à la convection naturelle dans les milieux poreux est dû à ses diverses applications dans la pratique telles que : l'extraction de l'énergie géothermique, la récupération du pétrole, les échangeurs de chaleur, le stockage des produits d'agriculture, les problèmes de sécurité dans le cœur des réacteurs nucléaires et l'isolation thermique des bâtiments.

Dans la présente étude, nous nous sommes intéressés à la convection naturelle qui se développe dans un espace annulaire entre deux cylindres elliptiques, rempli par un milieu poreux saturé par un fluide (air) avec la variation du nombre de Grashof entre  $5.10^3$  et  $10^6$ .

La présentation de ce mémoire est articulée de la façon suivante :

Le premier chapitre est consacré à une synthèse bibliographique des travaux théoriques, expérimentaux et numériques ayant trait à la convection naturelle dans un espace annulaire poreux, pour diverses configurations et pour différentes conditions aux limites.

La définition de la géométrie du problème étudié, sa modélisation mathématique, basée sur le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer, la mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes et des conditions aux limites et la mise en évidence des grandeurs caractéristiques qui servent de paramètres de contrôle du problème sont abordés dans le deuxième chapitre.

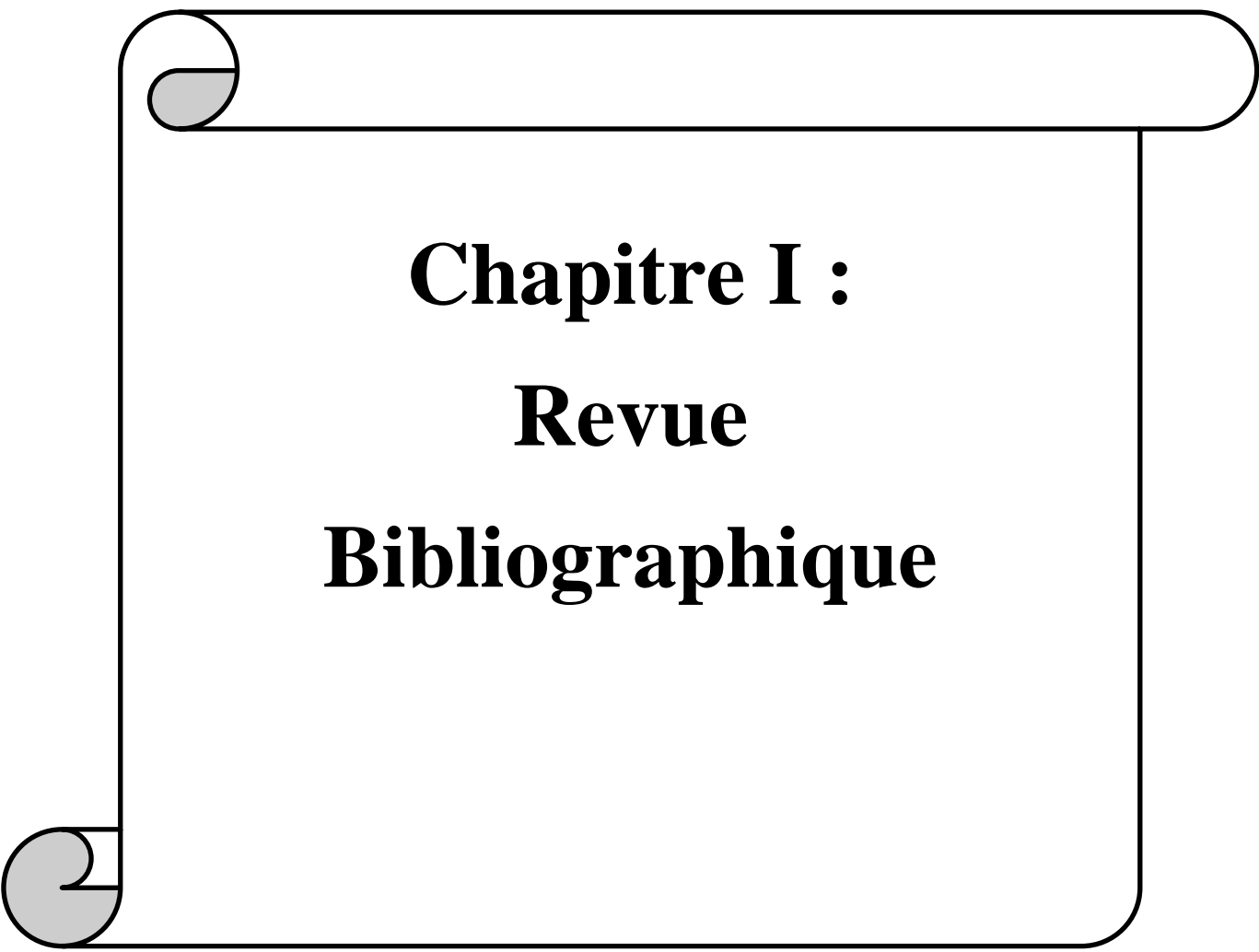
Le troisième chapitre est consacré à l'exposition de la méthode des volumes finis utilisée pour la discrétisation des équations gouvernantes et l'algorithme SIMPLER employé pour la résolution du système d'équations résultant de cette discrétisation.

## Introduction générale

---

Nous rassemblons dans le chapitre quatre les principaux résultats numériques de cette étude. Les commentaires, interprétations et analyse des divers résultats sont présentés à partir des distributions de certaines grandeurs physiques.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus, et pour ne pas alourdir le texte, nous présentons en annexe les coordonnées elliptiques.



**Chapitre I :**  
**Revue**  
**Bibliographique**

## Chapitre I : Revue bibliographique

### I.1 Introduction

Dans ce chapitre, des notions fondamentales sur les milieux poreux les transferts sont présentées, notamment les caractéristiques géométriques, les propriétés thermo physiques et les différents modes de transfert de chaleur dans les milieux poreux. Notre recherche bibliographique présente d'abord une revue des études sur la convection naturelle dans les cavités et entre deux cylindres.

### I.2 Définition du milieu poreux

Un milieu poreux est défini comme étant un milieu solide contenant des pores ; ces pores peuvent être interconnectés ou séparés (**Figure I.1.a**). Pour qu'une phase fluide puisse percoler dans un milieu poreux donné, au moins une partie de sa porosité doit être constituée de pores interconnectés, formés par des cellules poreuses reliées entre elles par des gorges de pores appelées aussi des canalicules comme présentées sur la **Figure (I.1.b)**. [1]

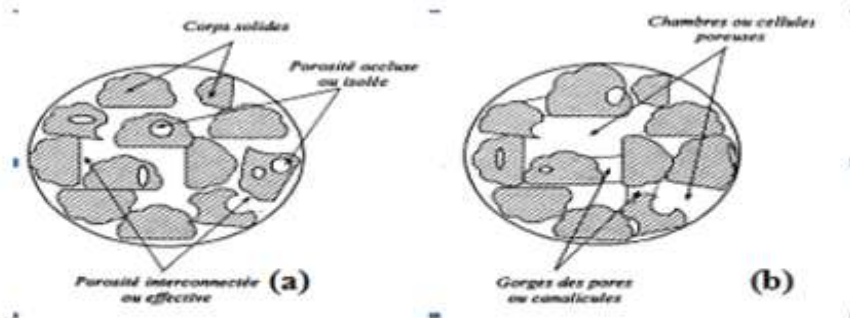


Figure.I.1. Aspect de l'espace poreux

On peut distinguer

#### La matrice consolidée

Les particules de la phase solide sont très compactes, difficiles à diviser.

#### La Matrice non consolidée

Dans ce cas, la matrice n'est formée que de grains ou particules non soudées entre elles (graviers, sable, etc.).

Les pores reliés entre eux, permettent l'écoulement d'un ou plusieurs fluides, on peut alors

Classer les problèmes rencontrés, suivant les phases en présence à l'intérieur des pores

(Delache, 2005) :

1. le milieu est saturé d'un seul fluide
2. le milieu est composé de plusieurs fluides
3. le milieu est le siège d'un transport de fluide et de particules solides [2]

## I.3 Caractéristiques géométriques des milieux poreux

### I. 3.1 Porosité ( $\epsilon$ )

La porosité est une caractéristique intrinsèque d'un milieu poreux notée «  $\epsilon$  ». Elle varie entre 0 (solide plein) et 1 (volume complètement vide). Elle est définie comme le rapport du volume vide occupé par les pores sur le volume total du milieu poreux

Soit :

- Porosité totale  $\epsilon_T$

$$\epsilon_T = \frac{\text{Volume des pores}}{\text{Volume de l'échantillon}} \quad (\text{I.1})$$

- Porosité accessible  $\epsilon_{acc}$

$$\epsilon_{acc} = \frac{\text{Volume des pores accessibles}}{\text{Volume de l'échantillon}} \quad (\text{I.2})$$

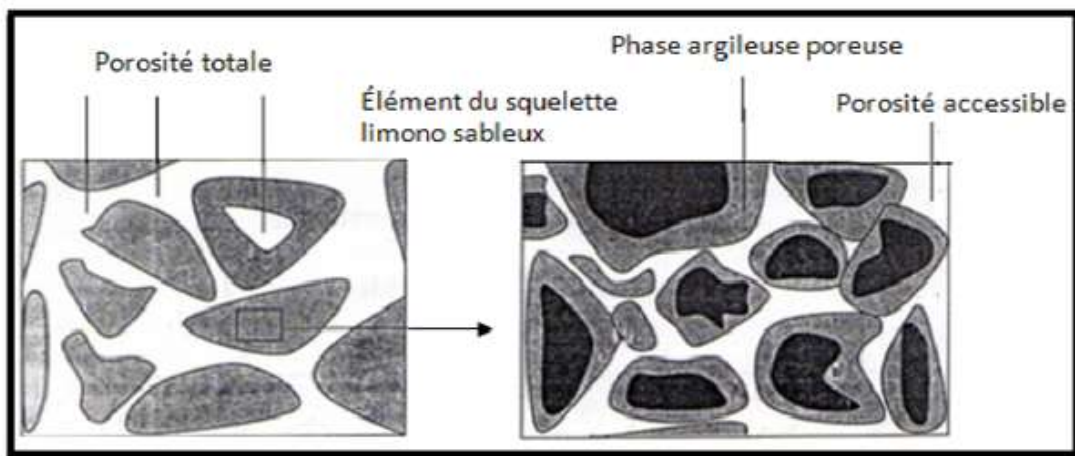


Figure 1.2 : Le système de porosité Houpert, (1974)

### 1.3.2 Perméabilité

La perméabilité d'une roche caractérise l'aptitude de cette roche à laisser s'infiltrer un fluide sous l'effet du gradient de charge. Ce paramètre est relié à la dimension et la connexion des pores entre eux . Des pores clos et non connectés entre eux empêchent le fluide de s'écouler librement d'un pore à un autre. L'ouverture des pores peut plus ou moins favoriser l'écoulement entre les éléments de la roche. La perméabilité est aussi reliée à la viscosité du fluide qui est la mesure de sa résistance à

# Chapitre I : Revue bibliographique

l'écoulement. La perméabilité intrinsèque s'exprime, indépendamment des caractéristiques du fluide, sous la forme [3] :

$$K = \frac{Q \mu}{A(\Delta_P / \Delta_S)} \quad (I.3)$$

Ou :

Q : le débit du fluide qui s'écoule, [  $L^3 T^{-1}$  ]

$\mu$  : La viscosité dynamique du fluide, [  $ML^{-1}T^{-1}$  ]

A : l'aire de la section traversée par le fluide [  $L^2$  ]

$\Delta_P / \Delta_S$  : La variation de la pression par l'unité de longueur [  $ML^{-2}T^{-2}$  ]

### 1.3.3 La tortuosité

C'est le rapport de la longueur moyenne du chemin parcouru par une particule fluide traversant un échantillon, à la longueur de cet échantillon. Elle est définie par : [4]

$$\tau = \frac{L}{L_e} \quad (I.4)$$

$\tau$  : Tortuosité

L : Chemin parcourus

$L_e$  : Longueur de l'échantillon

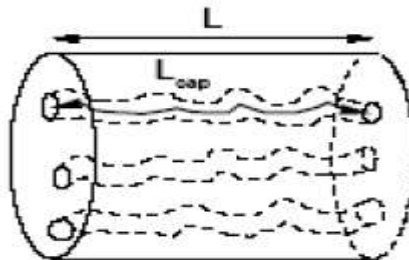


Figure 1.3 : Représente la tortuosité

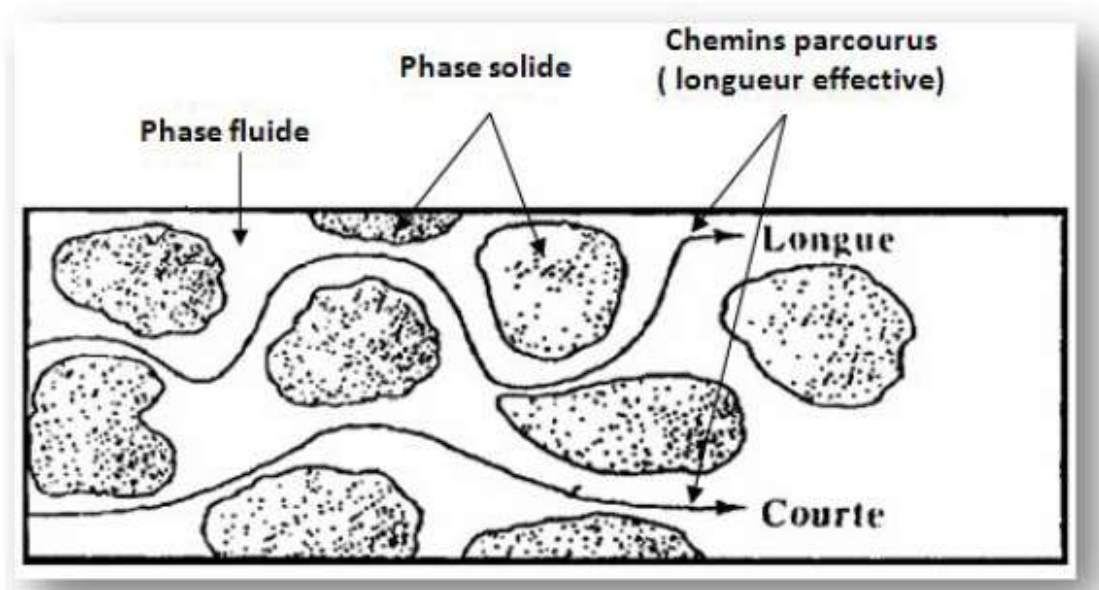


Figure 1.4 : Concept de la longueur effective C.W Fetter (1988)

## I.3.4 Granulométrie

Les premières informations sur les propriétés d'un matériau poreux sont fournies par l'analyse granulométrique, souvent réalisée par tamisage, qui vise à déterminer la distribution des grains qui composent la matrice. On obtient ainsi une courbe granulométrique représentant le pourcentage (volumique ou massique) des éléments dont le diamètre est inférieur ou égal à un diamètre donné. L'analyse de cette courbe fournit en particulier deux informations essentielles : Le diamètre efficace  $d_{10}$  : dimension pour laquelle 10% des éléments du milieu sont plus petits que  $d_{10}$ , qui est le paramètre qui conditionne le plus les propriétés de perméabilité du milieu (de Marsily, 1986).

Le coefficient d'uniformité  $C_u$  : valeur numérique moyenne de la pente de la courbe qui donne une information sur l'homogénéité du milieu.

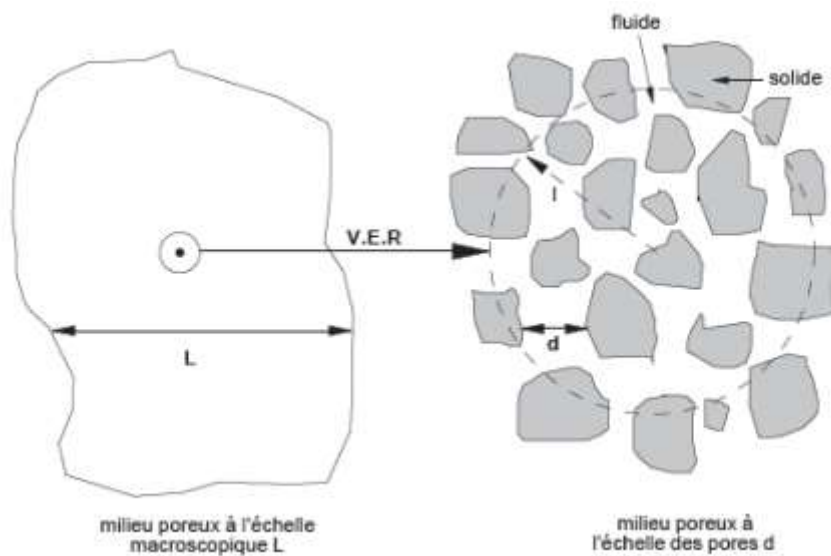
$$C_U = \frac{d_{60}}{d_{10}} \quad (I.5)$$

On considère généralement que le milieu est uniforme au sens granulométrique pour des valeurs de  $C_u$  inférieures à 2,5. [5]

# Chapitre I : Revue bibliographique

## I. 3. 5 Volume Élémentaire Représentatif (V.E.R)

En réalité, un milieu poreux est constitué de grains solides et vides pour lesquelles il n'est pas possible d'attribuer des notions comme la porosité et la perméabilité qu'à partir d'une échelle supérieure de plusieurs ordres de grandeur à l'échelle des pores (L'échelle du pore « d » varie généralement de  $0.05 \mu\text{m}$  pour les nanopores, à  $0.5\text{mm}$  pour les macropores). Un volume élémentaire représentatif est un volume pour lequel les propriétés caractéristiques moyennes (comme la porosité, la perméabilité dans le cas d'un milieu poreux) peuvent être déduites. On est donc amené à effectuer une moyenne spatiale de ces grandeurs. Cette moyenne s'effectue donc sur des nombreux pores par l'intermédiaire d'un Volume Élémentaire Représentatif V.E.R du milieu, (voir figure I.5). De plus, l'échelle « l » du V.E.R doit donc vérifier:  $d \ll l \ll L$  (Delache, 2005). [6]



**Figure I.5 :** Représentation schématique de la taille intermédiaire «l» du volume élémentaire représentatif V.E.R entre la taille du milieu poreux à l'échelle macroscopique «L» et à l'échelle des pores «d» (Delache, 2005).

## I.3.6 Surface spécifique

La surface spécifique notée "Ssp" appelée aussi "Air massique", désigne la surface réelle définie comme la surface totale des grains par unité de masse ( $L^2/M$ ). On peut éventuellement l'exprimer en surface par unité de volume, soit en mètre carré par mètre cube ( $L^2 \cdot L^{-3} = L^{-1}$ ), mais ceci est assez rare. [1]

# Chapitre I : Revue bibliographique

---

$$S_{sp} = \frac{S_g}{M_s} \quad (I.6)$$

Où

$$S_{sp} = \frac{S_g}{V} \quad (I.7)$$

Où

$S_g$  : Surface totale des grains solides [L<sup>2</sup>]

$M_s$  : Masse sèche [M]

$V$  : Volume total du milieu [L<sup>3</sup>].

## I.4 Généralités sur les transferts de chaleur

Le processus par lequel le transfert de l'énergie s'effectue est désigné par le terme transfert de chaleur. La grandeur transférée, appelée chaleur, ne peut être ni mesurée ni observée directement, mais les effets qu'elle produit sont sujets à l'observation et aux mesures.

Le transfert thermique est l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie. Il intervient naturellement entre deux zones ou entre deux systèmes, dès qu'il apparaît entre eux une différence de température et ce quel que soit le milieu qui les sépare.

L'étude des transferts thermiques repose sur les concepts de quantité de chaleur, qui est associée au mouvement de translation, de vibration et de rotation des molécules et des différences de températures qui caractérisent l'intensité de l'énergie transférée. Ces concepts sont définis par la thermodynamique qui ne s'intéresse qu'à des états d'équilibre, négligeant les mécanismes d'échange d'énergie qui y conduisent.

# Chapitre I : Revue bibliographique

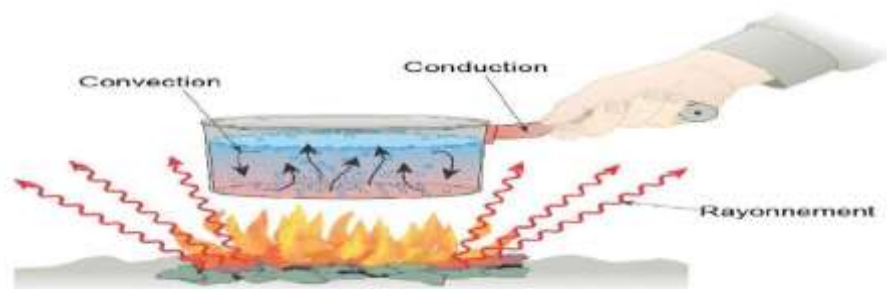
## I.5 Modélisation de transfert de chaleur

La modélisation de transfert de chaleur dans les milieux poreux s'effectue à partir de deux grandes approches générales possibles, en partant soit d'une description microscopique, soit macroscopique du matériau. A l'échelle microscopique, les matériaux poreux ont une structure géométrique très complexe. Il est donc très difficile, voir quasi-impossible, de prédire avec précision le transfert par une description fine de la microstructure du matériau et des mécanismes physicochimique en jeu à cette échelle. La simulation numérique directe des transferts dans ces milieux poreux n'est pas envisageable à ces échelles. C'est pour cette raison que certains auteurs préfèrent utiliser directement des méthodes macroscopiques qui permettent de s'affranchir des difficultés liées à la description complète de la microstructure

## I.6 Transfert de chaleur dans les milieux poreux

Deux corps à températures différentes échangent de l'énergie sous forme de chaleur jusqu'à disparition complète de leur différence de température. Cet échange peut se faire suivant trois modes de transmission fondamentaux :

- La conduction
- La convection
- Le rayonnement



**Figure 1.6** :les trois modes de transfert de chaleur

### I.6 .1 Transfert de chaleur par conduction

La conduction représente le processus de propagation de la chaleur par le contact direct entre les particules d'un corps ou entre des corps ayant des niveaux énergétiques (donc des températures différentes) suite au mouvement de ces particules élémentaires. Le flux thermique conductif qui traverse un composant dépend de sa géométrie, de son épaisseur, du

# Chapitre I : Revue bibliographique

---

matériau ainsi que de la différence de température à travers le composant. La transmission est provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu en contact physique. Il n'y a pas de déplacement appréciable des atomes ou molécules [7]

## I.6 .2 Transfert de chaleur par convection

La convection est un phénomène d'échange de chaleur dans lequel la chaleur est transférée d'un surface solide vers un fluide (ou un gaz) en mouvement. La convection se compose de deux éléments :

- Transfert d'énergie causé par un mouvement moléculaire aléatoire (diffusion)
- Transfert d'énergie par un mouvement volumique ou macroscopique du fluide (advection) [8]

## I.6 .3 Transfert de chaleur par rayonnement

Tout corps matériel émet et absorbe de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps séparés par du vide ou un milieu semi transparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, donc sans support matériel. Le phénomène d'émission d'un corps correspond à la conversion d'énergie matérielle (agitation des électrons constituant la matière dont l'intensité dépend de la température) en énergie radiative. Le phénomène d'absorption est la conversion inverse. [9]

## I.7 Types de convection

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée ou convection mixte. Lorsqu'il se produit au sein du fluide de courants dus simplement aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte

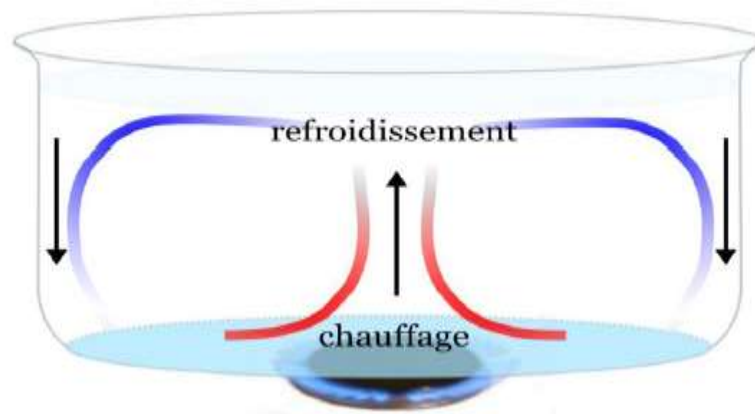
### 1.7.1 Convection naturelle

En convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité due au non uniformité du champ de température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans les régions à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant.

## Chapitre I : Revue bibliographique

---

Le phénomène inverse de courants descendants se produit pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud. Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre. L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié. La définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale. Les effets de convection naturelle sont familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle [10]



**Figure.1.7** : présentation de la convection dans une casserole

### 1.7.2 Convection mixte

Même en convection forcée, les différences de densité créent un écoulement parasite, en général insignifiant par rapport à l'écoulement principal. On parle de convection mixte quand les 2 phénomènes coexistent [11]

### 1.7.3 Convection forcée

La convection forcée est provoquée par une circulation artificielle (pompe, turbine) d'un fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de la convection naturelle. Voici quelques exemples de convection forcée dans des appareillages : chauffage central avec accélérateur, chauffages électriques avec soufflerie, chauffe-eau solaire et four à convection de cuisinière. Le corps humain a son propre système de convection forcée, la circulation sanguine.

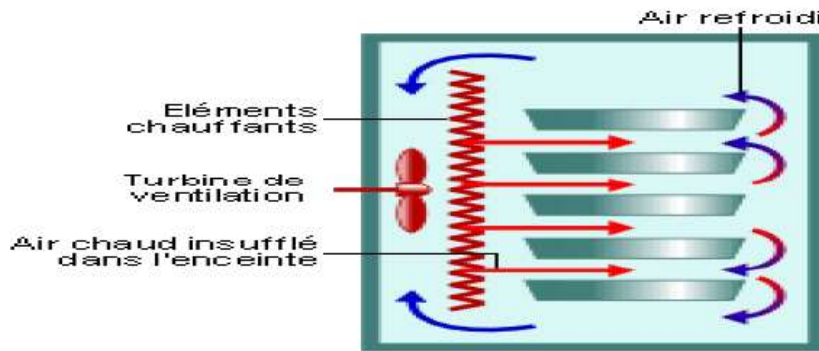


Figure.1.8 : Four à convection forcée

## 1.8 Nombres adimensionnels utilisés en convection naturelle

L'étude des problèmes de transfert de chaleur par convection implique la résolution d'équation différentielle qui décrit la mécanique des fluides, les échanges d'énergie, les transferts de masse. Ces équations sont généralement liées et difficiles à résoudre théoriquement, ce qui conduit à associer à la théorie l'expérimentation permettant de trouver les valeurs des grandeurs recherchées. L'expérimentation est souvent menée à une échelle différente de la réalité industrielle. La nécessité de définir des corrélations qui soient applicables de tailles différentes opérant dans des situations différentes conduit à l'utilisation de paramètres adimensionnels qui permettent de définir des similitudes. C'est ainsi qu'ont été choisis les nombres sans dimension ci-après :

### 1.8.1 Nombre de Reynolds

Représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses. Ce nombre sans dimension apparaît naturellement en dimensionnant les équations de Navier-Stokes. On le définit de la manière suivante : [12]

$$\text{Re} = \frac{U_0}{\nu} L \quad (\text{I.8})$$

# Chapitre I : Revue bibliographique

---

Avec

$U_0$  : Vitesse caractéristique du fluide [m/s]

L: Dimension caractéristique [m]

$\nu$  : Viscosité cinématique du fluide [  $m^2/s$  ]

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ,  $\rho$  masse volumique du fluide [ $Kg/m^3$  ]

$\mu$  Viscosité dynamique du fluide [ $Kg / (m.s)$ ]

## 1.8.2 Le nombre de Grashof

Est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection naturelle dans un fluide. Il correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. Ce nombre porte le nom de Franz Grashof, ingénieur allemand. On le définit de la manière suivante [12]

$$Gr = \frac{g \beta \theta L^3}{\nu^2} \quad (I.9)$$

Avec :

$g$  : Accélération de la pesanteur

$\beta$  : Coefficient de dilatation

## 1.8.3 Le nombre de Prandtl

Le nombre de Prandtl est le rapport de la viscosité cinématique  $\nu$  et la diffusivité thermique  $\alpha$ . Il caractérise l'importance relative des effets thermiques et visqueux et ne dépend que des propriétés du fluide [13]. Ce nombre porte le nom de Ludwig Prandtl, physicien Allemand :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (I.10)$$

Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un nombre de Prandtl faible indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température.

# Chapitre I : Revue bibliographique

---

## 1.8.4 Le Nombre de Nusselt

Est un nombre adimensionnel utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il représente le rapport entre le transfert thermique convectif et le transfert thermique conductif à travers une interface (souvent fluide/solide). Si la conduction est le principal mode de transfert, alors le nombre de Nusselt sera de l'ordre de l'unité. En cas de présence de convection (due par exemple au déplacement d'un fluide en régime turbulent), le transfert thermique s'effectuera principalement par déplacement du fluide et aura pour conséquence de faire tendre le nombre de Nusselt vers l'infini [12]

On le définit de la manière suivante :

$$N_u = \frac{hH}{K} \quad (\text{I.11})$$

$h$  : coefficient de transfert thermique.

$H$  : Longueur caractéristique

$K$  : Conductivité thermique du fluide

## I.9 Approximation de Boussinesq

L'approximation que nous allons reprendre attribuée à Boussinesq, a en fait été également proposée par Oberbeck pour la première fois en 1879. Cette approximation suppose que les différentes propriétés thermodynamiques ( $\lambda, \alpha, \mu, C_p$ ) sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence. Elle néglige aussi les variations de la masse volumique avec la température et la concentration dans tous les termes des équations de conservation sauf dans le terme des forces de volume:  $\rho(T,P) = \rho(T_0, \rho_0) = \rho_0 = \text{cste}$  où  $T_0, \rho_0$  sont la température et la pression de référence). La masse volumique  $\rho$  varie linéairement avec la température et la concentration [14], ce qui se traduit par :

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)] \quad (\text{I.12})$$

## Chapitre I : Revue bibliographique

---

Où :

$T$  et  $C$  : représentent respectivement la température et la concentration du fluide en un point du système.

$T_0$ ,  $C_0$  et  $\rho_0$  : représentent la température, la concentration et la masse volumique de référence.

$\beta_T$  : est le coefficient d'expansion thermique (constant).

$\beta_C$  : est le coefficient d'expansion solutal (constant).

Avec :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) T \quad (\text{I.13})$$

et

$$\beta_C = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho}{\partial C} \right) C \quad (\text{I.14})$$

Pour la plupart des fluides,  $\beta_T$  est positif à la température et à la pression ambiante, à l'exception de l'eau en dessous de  $4^\circ\text{C}$  et  $\beta_C$  peut être positif ou négatif en fonction de la contribution des constituants à la masse volumique du fluide. Dans notre étude, nous allons considérer  $C$  comme la fraction massique du constituant le plus lourd, ainsi  $\beta_C$  est négatif.

### I.10 Loi de Darcy généralisée

La loi expérimentale de Darcy est notamment utilisée pour décrire la dynamique des fluides homogènes au travers d'un milieu poreux. Cette loi régissant l'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible caractérisé par une viscosité dynamique  $\mu$  et une masse volumique  $\rho$  au travers d'un milieu poreux caractérisé par une perméabilité  $K$ .

Elle s'écrit :

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K} \vec{V} \quad (\text{I.15})$$

# Chapitre I : Revue bibliographique

---

Où

$\vec{V}$  : Est la vitesse de filtration

$\mu$  : Est la viscosité dynamique du fluide

$K$  : Est la perméabilité du milieu poreux

$\vec{\nabla}P$  : Le gradient de pression appliqué

La loi de Darcy ne tient pas en compte les effets de diffusion visqueuse créés par le frottement fluide-parois ainsi que les effets inertiels. Pour cela, d'autres modèles plus complets sont utilisés. [15]

## I.10.1 Loi de Darcy- Forchheimer

Lorsque la vitesse débitante augmente, les forces d'inertie ne sont plus négligeables. Dans ce cas, on montre expérimentalement que pour un gradient de pression fixé, le débit mesuré est plus petit qu'il ne le serait avec la loi de Darcy (Delache, 2005). Forchheimer a proposé une modification empirique de la loi de Darcy en rajoutant une relation non linéaire du second ordre entre le gradient de pression et la vitesse de filtration. Cette formulation appelée de Darcy-Forchheimer (Coux, 1997):

$$\vec{\nabla}p = \rho_f \vec{g} - \frac{\mu_f}{K} \vec{v}_{fil} - F \frac{\rho_f}{\sqrt{K}} |\vec{v}_{fil}| \vec{v}_{fil} \quad (I.16)$$

$F$  : est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux, généralement appelé paramètre de Forchheimer [2]

## I.10.2 Modèle de Darcy-Brinkman

Brinkman (1947) a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de diffusion visqueuse dans l'équation de Stokes.

$$\vec{\nabla}P = -\frac{\mu}{K} \vec{V} + \mu_{eff} \vec{\nabla}^2 V \quad (I.17)$$

# Chapitre I : Revue bibliographique

---

Où le premier terme de second membre de droite est le terme de Darcy et le deuxième et appelé le terme de Brinkman. [15]

## I.11 Revue Bibliographique

L'étude de la convection naturelle a suscité et suscite encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux scientifiques et industriels. Un nombre considérable de travaux a été entrepris, suite à la découverte du phénomène de la convection naturelle par les expériences de Bénard et à l'analyse théorique de Rayleigh au début du XX<sup>ème</sup> siècle. Jusqu'à présent, de nombreuses recherches ont été menées sur la modélisation du phénomène de la convection thermosolutale pour différents type de cavités. A titre d'exemple, C. Béghein et al ont étudié la convection en double diffusion en examinant l'influence du rapport  $N$  sur les taux de transfert de chaleur et de masse, en régime stationnaire, dans une cavité carrée remplie d'air. M. Mamou et al ont présenté une modélisation analytique et une étude numérique de la convection naturelle d'un fluide à double diffusion contenue dans une cavité rectangulaire. H. Beji et al ont utilisé la méthode des volumes finis pour étudier la convection naturelle en double diffusion dans un espace annulaire vertical. E. Papanicolaou, V. Belessiotis ont étudié la convection thermosolutale et le transfert de la chaleur et de masse dans une enceinte trapézoïdale pour mettre en évidence l'effet des paramètres de contrôle sur l'écoulement et les taux de transfert thermique et massique. S. Chen et al ont utilisé le modèle de Boltzmann pour étudier la convection naturelle en double diffusion dans un système annulaire vertical avec des gradients de température et de concentration opposés. [16]

## Domaines d'application de la convection naturelle

Les applications de transfert thermique sont variées, dans lesquelles la convection naturelle est le phénomène le plus dominant. La meilleure compréhension de phénomène augment le nombre d'application et mène à un certain nombre de conception industrielles et environnement sophistiquées. Toutefois, les couts de fonctionnement sont importantes, les petites améliorations d'efficacité sont essentielles et peuvent jouer un grand rôle dans la consommation d'énergie. En outre, les problèmes océanographiques et atmosphériques tels que les effets de serre, les changements extrêmes de climat, ainsi que les problèmes technologiques, à savoirs les équipements électriques et les réactions nucléaires, les appareils ménagers, les réfrigérations et les échangeurs de chaleur sont tous des problèmes, qui ont donné un intérêt particulier à cette science [17].

# Chapitre I : Revue bibliographique

---

## La convection naturelle dans les cavités annulaires

L'étude de la convection naturelle des fluides dans les cavités a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux tant théoriques qu'expérimentaux. L'intérêt de son étude réside dans son implication dans de nombreux phénomènes naturels et industriels, tels que le solaire, le refroidissement des circuits électroniques et des réacteurs nucléaires, l'isolation des bâtiments (cas du double vitrage), la métallurgie, la croissance des cristaux pour l'industrie des semi-conducteurs, ...etc.

**Bairi** a procédé à l'étude numérique et expérimentale de la convection naturelle instationnaire au sein d'une cavité cubique fermée et remplie d'air. La paroi gauche contient trois sources de chaleur à densité de flux constante, séparées par des portions adiabatiques. La paroi d'en face est maintenue à une température constante plus faible que celle des sources alors que toutes les autres parois sont adiabatiques. Différents angles d'inclinaison de la cavité par rapport à l'horizontale ont été considérés pour le cas 2D. Les auteurs ont trouvé une bonne concordance entre leurs résultats numériques et expérimentaux. [18]

Dans une étude numérique et analytique, **Yang et al.**, ont analysé la réponse de l'écoulement dans une cavité verticale de grande extension dont l'une de ses parois verticales est soumise à une température qui varie périodiquement dans le temps. Pour des fréquences faibles et élevées, ils ont observé que les caractéristiques de l'écoulement s'accordent bien avec celle de la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale soumise aux mêmes conditions thermiques

**Lage et al.**, ont étudié numériquement et théoriquement la convection naturelle dans une cavité carrée refroidie isothermiquement sur un côté vertical alors que la paroi opposée est chauffée par un flux thermique pulsatoire. Ils ont montré que, pour une fréquence qui impose le flux de chaleur pulsé, la convection naturelle induite dans la cavité entre en résonance avec la température aux limites. Cette résonance est caractérisée par des fluctuations maximales du taux de transfert de chaleur à travers un plan vertical passant par le centre géométrique de la cellule. Ils ont observé également, en se basant sur les résultats numériques, que le phénomène de résonance existe dans la marge  $[0.01 - 7]$  du nombre de Prandtl et qu'il s'amplifie à mesure que le nombre de Rayleigh augmente. [19]

En ce qui concerne le cas d'une cellule chauffée par le bas d'une façon transitoire, il semble que la première investigation faite sur cette configuration soit due à Mantle-

**Miller et al.**, [16] dans cette étude expérimentale, les auteurs ont examiné l'écoulement et le transfert de chaleur en convection naturelle dans le cas où la température de la paroi chaude varie périodiquement dans le temps autour d'une valeur moyenne, la paroi supérieure froide étant maintenue à une température constante et les parois verticales adiabatiques. [19]

## Chapitre I : Revue bibliographique

---

**Yang et al** ont analysé la réponse de l'écoulement dans une cavité verticale de grande extension dont l'une de ses parois verticales est soumise à une température qui varie périodiquement dans le temps. Pour des fréquences faibles et élevées, ils ont observé que les caractéristiques de l'écoulement s'accordent bien avec celles de la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale soumise aux mêmes conditions thermiques. **Calcagni et al** ont effectué une étude expérimentale de la convection naturelle laminaire d'air dans une cavité bidimensionnelle et rectangulaire avec un chauffage localisé sur la paroi inférieure et un refroidissement symétrique à travers deux côtés verticaux. La paroi supérieure était maintenue adiabatique. **Hasnaoui et al** ont étudié numériquement la convection naturelle transitoire dans une cavité carrée soumise par le bas à une variation sinusoïdale de la température pour un nombre de Prandtl égal à 0,71 (air) et pour des nombres de Rayleigh variant de  $10^5$  à  $10^6$ . **Ho et al** ont étudié la convection naturelle dans des enceintes rectangulaires verticale avec un chauffage partiel des parois, numériquement et expérimentalement pour dévoiler surtout l'influence du rapport d'aspect de l'enceinte. La simulation numérique a été menée pour un rapport d'aspect variant de 1 à 10 et le nombre de Rayleigh modifié dans la plage comprise entre  $10^3$  et  $10^7$ . De la simulation, ils ont trouvé que l'effet du rapport d'aspect de l'enceinte sur le nombre moyen de Nusselt tend à diminuer avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. **Novembre et al** ont étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle dans une enceinte carrée avec chauffage à travers la paroi inférieure et refroidissement le long d'un côté. **T. Fusegi et al** ont utilisé une simulation numérique d'une cavité différentiellement chauffée et ont déterminé la corrélation suivante :  $N_U = 0,1630 Ra^{0,282}$ . Les équations de Navier Stokes d'un fluide de Boussinesq contenu dans une cavité verticale différentiellement chauffée admettent pour une certaine valeur du nombre de Rayleigh une solution numérique instationnaire quasi périodique dont la nature est explicitée par Quere et al. **Cuesta et al** ont mené une étude numérique d'écoulement de Rayleigh-Bénard dans une cavité cubique aux parois parfaitement conductrices pour déterminer les structures d'écoulement avec le nombre de Rayleigh entre  $7 \cdot 10^3$  et  $10^8$ . **Pallares et al.** Ont effectué une étude numérique tridimensionnelle de la convection naturelle dans une cavité cubique chauffée par le bas, pour trois nombres de Prandtl  $Pr = 0,71, 10$  et  $130$ . Les six parois sont considérés comme rigides et immobiles. Ces travaux numériques mettent en évidence la complexité des structures présentes dans l'écoulement. Dans le cas de parois latérales adiabatiques, et pour  $Ra_H \leq 6 \times 10^4$  et  $Pr \leq 130$ , ils ont observé la présence de 7 structures d'écoulement dont la stabilité intrinsèque dépend des nombres de Prandtl et Rayleigh. Pour des parois latérales conductrices, seulement 3 des 7 structures sont présentes en régime laminaire. **Massimo Corcione** ont fait une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans des enceintes rectangulaires, remplies d'air et soumises à un gradient de température vertical, en considérant plusieurs conditions thermiques pour les parois latérales. Un modèle numérique développé spécifiquement basé sur l'algorithme SIMPLER est utilisée pour la solution des équations de Navier Stokes, les simulations sont effectuées pour plusieurs valeurs du rapport d'aspect « largeur/hauteur »

## Chapitre I : Revue bibliographique

---

de l'enceinte variant entre 0.66 et 8 et le nombre de Rayleigh variant entre  $10^3$  et  $10^6$ . **L. Adjout et al.** ont examiné numériquement la convection naturelle laminaire dans une cavité carrée inclinée à paroi verticale ondulée, et différentiellement chauffée. Les essais ont été réalisés pour différents angles d'inclinaison, les amplitudes et les nombres de Rayleigh tandis que le nombre de Prandtl est maintenu constant. Deux configurations géométriques ont été utilisées à savoir une et trois ondulations. Les résultats obtenus montrent que l'ondulation de la paroi chaude influe sur le débit et le taux de transfert de chaleur dans la cavité. Le nombre de Nusselt moyen diminue comparant avec la cavité carrée. La tendance du transfert de chaleur local est ondulée. La fréquence de ce dernier est différente de la fréquence de la paroi ondulée. **B. Abourida et al.** ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire dans une enceinte carrée soumise à différents modes de chauffage par les côtés. La température de la paroi chauffée varie de façon sinusoïdale dans le temps, alors que celle de la paroi opposée est maintenue constante ou varie sinusoïdalement dans le temps. Les paramètres de l'étude sont l'amplitude ( $0 \leq a \leq 0,8$ ) et sa période  $\tau$  ( $0,001 \leq \tau \leq 1$ ), le nombre de Rayleigh ( $10^4 \leq Ra \leq 10^6$ ) et le nombre de Prandtl ( $Pr = 0,7$ ). Pour des combinaisons adéquates de ces paramètres, la variation des deux températures imposées offre la possibilité de contrôler le transfert thermique à travers la paroi froide de la cavité. **B. Calgani et al.** ont étudié expérimentalement et numériquement le transfert de chaleur en convection naturelle dans des enceintes carrées chauffées par-dessous et refroidies à partir des parois latérales. Leur étude est concentrée sur l'effet de l'augmentation de la longueur de la source sur le développement de l'échange de chaleur. Les études numérique et expérimentale montrent un transfert conductif pour  $Ra \leq 10^4$  (nombre de Rayleigh), alors que le phénomène convectif se développe complètement pour  $Ra \approx 10^5$ , et le nombre de Nusselt local  $Nu$  est évalué à la surface de la source de chaleur et présente une allure symétrique près des sources de chaleur. Q.H. Deng et al ont étudié expérimentalement et numériquement l'influence du nombre de Rayleigh et de la dimension de la partie chauffée sur le transfert de chaleur dans une enceinte carrée et des enceintes rectangulaires. [20]

**Lage et al.**, ont étudié numériquement et théoriquement la convection naturelle dans une cavité carrée refroidie isothermiquement sur un côté vertical alors que la paroi opposée est chauffée par un flux thermique pulsatoire. Ils ont montré que, pour une fréquence qui impose le flux de chaleur pulsé, la convection naturelle induite dans la cavité entre en résonance avec la température aux limites. Cette résonance est caractérisée par des fluctuations maximales du taux de transfert de chaleur à travers un plan vertical passant par le centre géométrique de la cellule. Ils ont observé également, en se basant sur les résultats numériques, que le phénomène de résonance existe dans la marge  $[0.01 - 7]$  du nombre de Prandtl et qu'il s'amplifie à mesure que le nombre de Rayleigh augmente [19]

**Nag et al.**, étudié numériquement dans une cavité carrée à chauffage différentiel où une plaque horizontale était fixée sur la paroi chaude. la longueur et la position de la cloison étaient variées et

## Chapitre I : Revue bibliographique

---

Rayleigh était entre  $10^3$  et  $10^6$ . Ils considéraient deux cas, l'un avec cloison adiabatique et l'autre avec cloison parfaitement conductrice. Ils ont constaté que avec la cloison parfaitement conductrice le transfert de chaleur à la paroi froide a augmenté indépendamment de sa position ou longueur et il est atténué avec la partition adiabatique, ce qui était plus prononcé lorsque la position de la partition était plus élevée. **Shi et Khodadadi** ont étudié numériquement, le même problème signalé par **Nag et al.** avec une partition presque parfaitement conductrice sur le chaud mur, mais avec des détails paramétriques plus étendus. Leur la longueur des ailettes sans dimension était comprise entre 0,20 et 0,50, qui avait sept positions le long de la paroi chaude et Le nombre de Rayleigh était de  $10^4$  à  $10^7$ . Depuis la fin était presque parfaitement conducteur et attaché à la paroi chaude, le chauffage des ailettes a amélioré la convection son blocage du champ d'écoulement l'a supprimé. La contribution de ces deux mécanismes contraires ont été pas clairement quantifié. Sur la base des données numériques, ils ont proposé des corrélations pour calculer le nombre de Nusselt en fonction des paramètres pertinents pour ce particulier Cas. Nous voyons dans ce bref examen que l'exclusion de Frédéric et Valence. Toutes les autres études considérées seules les cloisons parfaitement conductrices ou isolées. Pourtant, dans les problèmes d'ingénierie pratiques, souvent les partitions sont fabriquées à partir de matériaux à conductivité finie. [21]

### La convection naturelle entre deux cylindres

**Kuehn et al** ont élaboré une étude expérimentale et numérique sur la convection naturelle dans l'espace annulaire compris entre deux cylindres concentriques et horizontaux dont le rapport des rayons a été pris égal à 2.6, ils ont calculé une conductivité thermique équivalente locale. Ils ont obtenu des résultats en accord avec ceux de l'analyse numérique qu'ils ont réalisée et qui est basée sur la méthode des différences finies et la technique de relaxations successives [22].

L. R. Mack et E. H. Bishop qui ont obtenus une solution analytique pour l'écoulement bidimensionnel stationnaire de convection naturelle entre deux cylindres, par le développement en série de puissances du nombre de Rayleigh ; ils ont pu ainsi définir la configuration des lignes de courant, la distribution de température et les transferts de chaleur locaux et globaux pour des nombres de Rayleigh faibles. Pour ces mêmes conditions, **Marle BLONDEL-ROUX**, leurs résultats correspondent bien à des écoulements observés expérimentalement, unicellulaires et toriques. Ils ont également trouvé numériquement un écoulement multicellulaire, pour des conditions expérimentales particulières correspondant à un nombre de Prandtl très faible  $Pr < 0,03$ , c'est-à-dire les métaux liquides [23].

**El-Sherbiny et al** ont étudié numériquement les effets du nombre de Prandtl sur la convection naturelle laminaire dans des couches liquides annulaires entre deux cylindres isothermes horizontaux concentriques de températures différentes. L'étude numérique est faite pour un nombre de Prandtl  $0.01 \leq Pr \leq 10^3$  et le nombre de Rayleigh  $10^2 \leq Ra \leq 10^6$  et pour le rapport des rayons  $RR=r_0/r_i$ ,

## Chapitre I : Revue bibliographique

---

$2 \leq RR \leq 10$ . Les résultats montrent que la valeur maximale de la vitesse est proche des parois. Une diminution continue le long du rayon est représentée avec des changements plus élevés près des parois des cylindres. Aucun autre changement n'a été remarqué pour  $Pr \geq 10$ . [20]

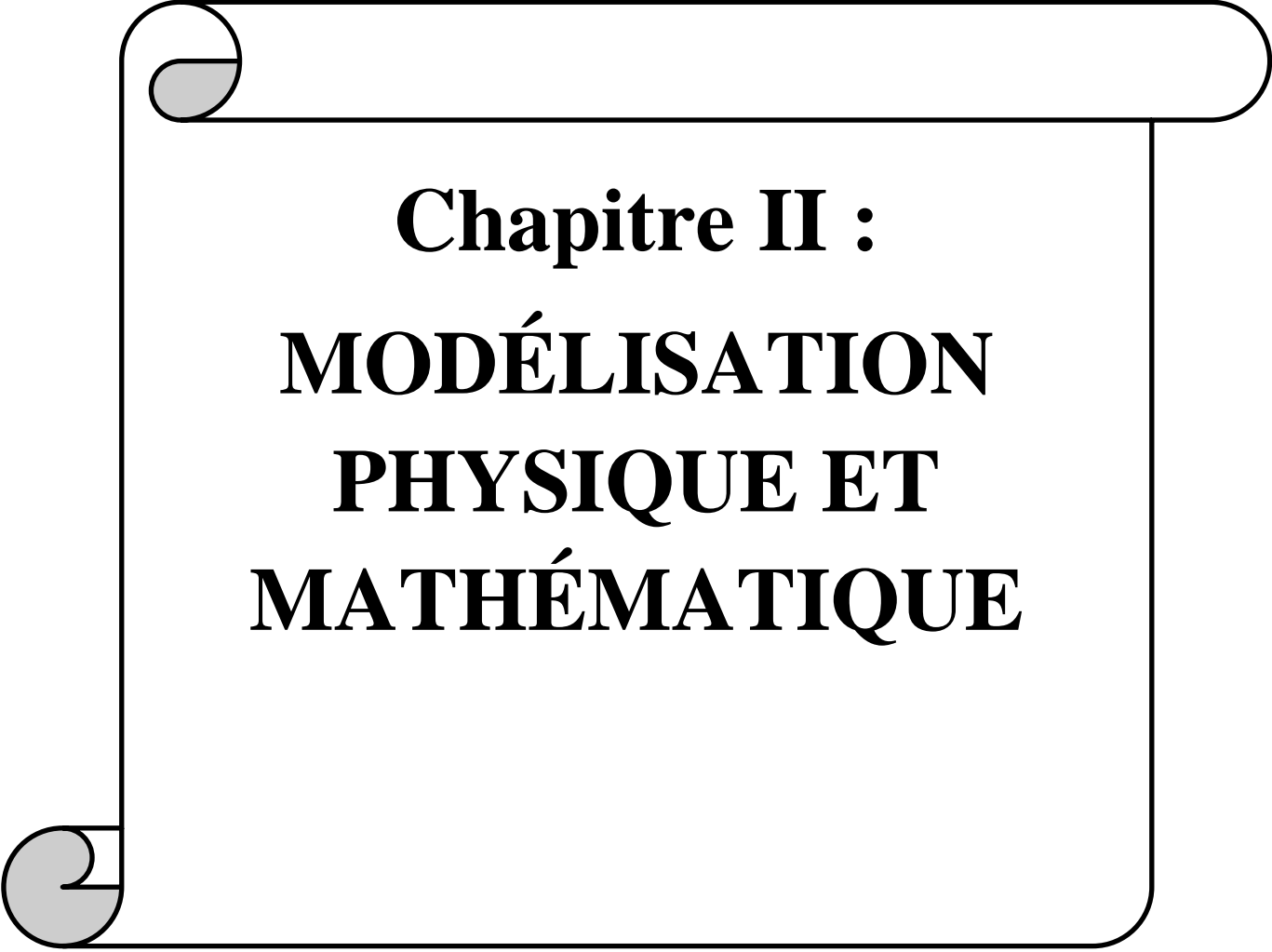
**L. R. Mack et H. C. Hardee**, ont présenté une étude expérimentale ainsi qu'une solution analytique permettant de calculer la configuration des lignes de courant, des distributions de vitesse et de température, et l'évaluation des taux de transfert de chaleur locaux et globaux. La solution est obtenue avec les trois premiers termes du développement en série de puissance du nombre de Rayleigh de la température et de la fonction de courant, pour des écarts de température modérés entre les sphères. L'écoulement unicellulaire est bien retrouvé analytiquement et expérimentalement, cependant pour des conditions pour lesquelles le développement en série pour la fonction de courant reste convergent, et  $Pr = 0,7$ , ces auteurs prévoient un écoulement multicellulaire instable. Cet écoulement semble être instable et périodique, et a été observé expérimentalement dans certaines conditions. [23]

**J.P. Caltagirone** a étudié expérimentalement la convection naturelle dans un espace entre deux cylindres concentriques remplis par un milieu poreux avec un rapport de rayons  $R=2$ . Dans ces expériences, le champ thermique a été visualisé en utilisant l'effet Christiansen. Les nombres de Nusselt expérimentaux ont également été déterminés sur la base des mesures de la température du champ thermique au moyen de thermocouples insérés dans la couche poreuse. **H.H. Bau** a appliqué les techniques de développement de perturbation régulière pour traiter la convection thermique à l'état stationnaire dans un milieu poreux totalement saturé et délimité par deux cylindres excentrés horizontaux. Les deux cylindres sont imperméables au mouvement du fluide et sont maintenus à des températures différentes et uniformes. Les conditions aux limites complexes sont traitées en utilisant les coordonnées bi cylindriques. **K. Himasekhar et H.H Bau** ont fait une analyse détaillée des bifurcations pour différents rapports de rayons dans un espace annulaire cylindrique contenant un milieu poreux saturé de fluide. Ils ont étudié la structure d'écoulement en fonction des paramètres ( $R, Ra$ ) où  $R$  est le rapport des rayons et  $Ra$  est le nombre de Rayleigh-Darcy. Le mouvement du fluide est décrit par les équations (DOB) de Darcy-Oberbeck-Boussinesq en deux dimensions résolues en utilisant la méthode de l'expansion de perturbation. Les expériences de visualisation, de **Caltagirone**, mentionnées ont été refaites à nouveau par **M.C. Charrier-Mojtabi et al** dans une série d'essais sur une couche poreuse cylindrique de rayon égale à celui de Caltagirone. **J.P.B. Mota et E. Saadjan** ont étudié numériquement la convection naturelle dans un milieu poreux délimité par deux cylindres horizontaux avec le modèle de Darcy. Ils ont appliqué un schéma précis au second ordre avec différences finies en utilisant la méthode des directions alternées et une sous-relaxation successive dans un maillage très raffiné. **A.F. Alfahaid et al.** ont présenté une étude numérique de la convection thermique à l'état stationnaire dans un milieu poreux totalement saturé et délimité par deux cylindres concentriques horizontaux, les cylindres sont imperméables et maintenus à différentes températures uniformes. Le schéma de solution est basé sur le modèle à deux dimensions des équations de Darcy-

## Chapitre I : Revue bibliographique

---

Oberbeck-Boussinesq. La méthode des éléments finis est utilisée avec une technique de Galerkin. **J.E. Braga et al.** ont réalisé un calcul numérique sur la convection naturelle laminaire et turbulente dans un espace annulaire cylindrique horizontal rempli d'un milieu poreux saturé de fluide. Les calculs ont été réalisés pour plusieurs valeurs du nombre de Rayleigh sur un intervalle de  $25 < Ra_m < 500$  ainsi que pour le nombre de Darcy de  $3.2 \times 10^{-6} < Da < 3.2 \times 10^4$  en utilisant la méthode des volumes finis. Ils ont adopté le modèle de turbulence  $k-\varepsilon$  macroscopique pour décrire l'écoulement turbulent en milieux poreux. Le même cas a été traité par **J.C. Leong et F.C. Lai** qui ont utilisé la méthode de perturbation et de transformation de Fourier. Les deux cylindres intérieur et extérieur sont maintenus à des températures constantes où la paroi intérieure à une température légèrement supérieure à celle extérieure. Ils ont effectué une étude paramétrique pour examiner les effets du nombre de Rayleigh, le nombre de Darcy, l'épaisseur de la couche poreuse et la conductivité thermique relative sur les résultats de transfert de chaleur. **K. Khanafer et al.** ont réalisé une recherche numérique sur le transfert de chaleur par convection naturelle à l'intérieur d'un anneau horizontal bidimensionnel, l'anneau entre les deux cylindres est partiellement rempli d'un milieu poreux saturé d'un fluide. Ils ont pris les effets de Forchheimer et Brinkman dans leur calcul. **M. Kumari et G. Nath** ont étudié la convection naturelle instationnaire dans un espace annulaire cylindrique horizontal rempli d'un milieu poreux non Darcien. Le problème se pose en raison du changement brusque dans la température de la paroi du cylindre extérieur. Ils ont résolu les équations de Navier-Stokes ainsi que l'équation de l'énergie par la méthode des volumes finis. **M. Sankar et al.** ont présenté une étude sur la convection naturelle dans un espace cylindrique annulaire vertical rempli d'un milieu poreux saturé de fluide. La paroi intérieure est soumise à un chauffage discret et la paroi extérieure est maintenue de manière isotherme à une température inférieure, tandis que la paroi supérieure et inférieure ainsi que les parties non chauffées de la paroi intérieure sont maintenues adiabatique. Ils ont examiné l'importance relative du chauffage discret sur la convection naturelle dans l'espace annulaire poreux grâce à l'équation de Darcy-Brinkman étendue. Ils ont utilisé une méthode aux différences finies implicite pour résoudre les équations du modèle mathématique. Ils ont effectué une analyse sur un large intervalle de valeurs des nombres de Rayleigh modifié et de Darcy pour différentes longueurs et différents emplacements de la source de chaleur. [24]



**Chapitre II :**  
**MODÉLISATION**  
**PHYSIQUE ET**  
**MATHÉMATIQUE**

## Chapitre II : Modélisation physique et mathématique

Ce chapitre présente la formulation mathématique des équations de conservation qui régissent les écoulements. Ensuite nous présentons la description de la méthodologie numérique à la base de la résolution des équations du mouvement et de l'énergie.

### II.1 Description du problème

#### II.1.1 Modèles physique

Figure (2.1) présente le modèle physique du travail actuel (Le problème traité). Nous analysons un écoulement induit par la convection naturelle bidimensionnelle (2D) dans une enceinte formée par l'espace annulaire entre deux cylindres elliptiques de rayon  $e_1$  et  $e_2$ . L'espace annulaire est rempli d'une matière poreuse, les sections elliptiques de l'espace de l'enceinte sont statiques et adiabatiques. Les deux cylindres intérieur et extérieur sont statiques et isothermes. On suppose que la température du cylindre externe est constante et égale à  $T_2$ , la température du cylindre interne est constante aussi et égale à  $T_1$ , avec  $T_1 > T_2$ . Dans le présent travail le nombre de Prandtl  $Pr$ , est 0.7. Le nombre de Grashof,  $Gr$ , varie de  $10^3$  à  $10^6$ .

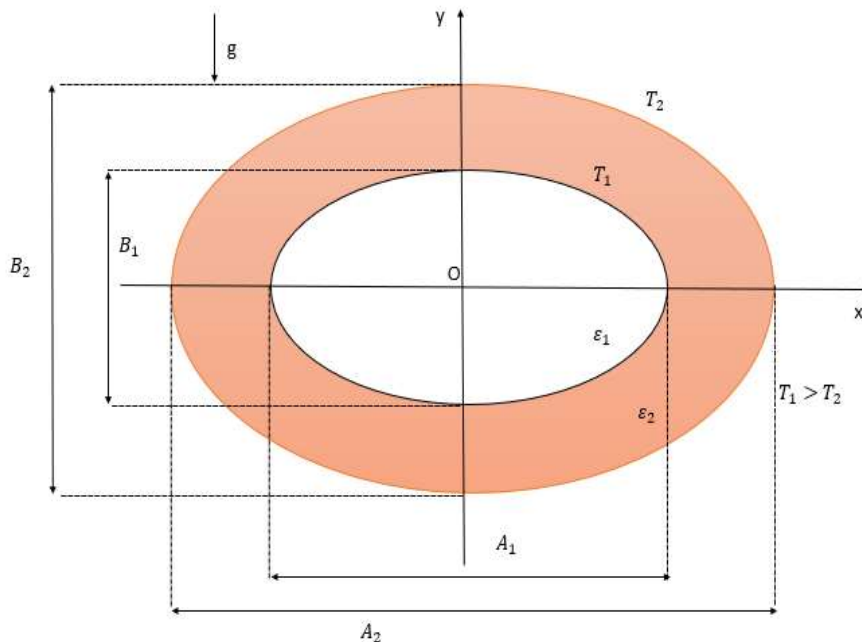


Figure.II.1 : Section droite du système

### II.1.2 Modèle mathématique

#### II.1.2.1 Hypothèses simplificatrices

Les équations présentées dans cette partie sont basées sur des hypothèses qu'il convient de rappeler :

- 1- l'écoulement est stationnaire ;
- 2- l'écoulement est bidimensionnel ;
- 3- le fluide est supposé newtonien ;
- 4- le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable ;
- 5- la variation de la masse volumique n'est considérée que dans le terme de la poussée thermique d'Archimède et elle est supposée constante (égale à  $\rho_0$ ) pour les autres termes des équations ;
- 6- L'approximation de **Boussinesq** est valide. Elle consiste à considérer que les variations de la masse volumique sont négligeables aux niveaux de tous les termes des équations de quantité de mouvement ( $\rho = \rho_0$ ), sauf au niveau du terme de gravité. La variation de  $\rho$  en fonction de la température est donnée comme suit (**Bejan, 2004**) :

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \quad (\text{II.1})$$

T : Température.

$\beta$  : Coefficient d'expansion thermique à pression constante.

$\rho_0$  : Masse volumique du fluide à  $T_0$

- 7- Le milieu poreux est isotrope, homogène et saturé par un seul fluide qui est en équilibre thermique avec la matrice poreuse (**Maougal et Bessaïh, 2013**).

- 8- L'absence des sources de chaleurs.

#### II.1.2.2 Formulation mathématique

En tenant compte de toutes les hypothèses considérées, le système d'équations différentielles aux dérivées partielles décrivant ce problème est composé de l'équation de continuité, les équations de quantité de mouvement et les équations du transfert de chaleur et de matière dans un milieu poreux. Pour tenir compte de tous les effets, on associe à l'équation de Darcy, les termes de Brinkman et de Forchheimer. Le modèle ainsi formé est connu sous le nom du modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer ou loi de Darcy étendue. Les équations modélisantes à travers un milieu poreux s'écrivent alors sous les formes suivantes (Bejan et Nield 2006).

### II.1.2.3 Formulation vectorielle

#### II.1.2.3.1 Équation de continuité

$$\text{div } \vec{V} = 0 \quad (\text{II.2})$$

#### II.1.2.3.2 Equations de quantité de mouvement dans les milieux poreux

$$\rho_f \underbrace{\left[ \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varphi} \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{V}\vec{V}}{\varphi} \right) \right]}_{(a)} = \underbrace{-\frac{1}{\varphi} \vec{\nabla}(\varphi P)}_{(b)} + \underbrace{\rho_f \vec{g}}_{(c)} + \underbrace{\frac{\mu}{\varphi \rho_f} \nabla^2 \vec{V}}_{(d)} - \underbrace{\frac{\mu}{K} \vec{V}}_{(e)} - \underbrace{\frac{C_F \rho_f}{K^{1/2}} |\vec{V}| \vec{V}}_{(f)} \quad (\text{II.3})$$

$\vec{V}$  Une quantité moyennée à travers un volume élémentaire.

- (a) Forces inertielles macroscopiques.
- (b) Gradient de pression.
- (c) Forces de volumes.
- (d) Terme visqueux de Brinkman.
- (e) Terme de Darcy.

#### II.1.2.3.3 Équation de l'énergie

$$(\rho C p)_m \frac{\partial}{\partial t} (T) + (\rho C p)_f (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) T = k_m \vec{\nabla} T \quad (\text{II.4})$$

$$(\rho C p)_m = (1-\varphi) (\rho C p)_s + \varphi (\rho C p)_f$$

$$k_m = (1-\varphi) k_s + \varphi k_f$$

On considère  $\frac{(\rho C p)_m}{(\rho C p)_f} = 1$

### II.1.2.4 Formulation indicelle

#### II.1.2.4.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (V_i) = 0 \quad (\text{II.5})$$

#### II.1.2.4.2 Equation de mouvement

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i V_j) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i - \frac{\mu}{K} V_i - \frac{\mu}{\rho \varphi} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} - c_p \rho \frac{|\vec{V}| V_i}{\sqrt{K}} \quad (\text{II.6})$$

#### II.1.2.4.3 Equation d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho c_p T V_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_m \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.7})$$

#### II.1.2.5 Formulation des équations dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales coordonnées elliptiques

Le passage des coordonnées aux coordonnées elliptiques s'effectue à l'aide des relations suivant :

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \varepsilon \cos \eta \\ y = a \operatorname{sh} \varepsilon \sin \eta \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Les équations (II.5), (II.6), (II.7) s'écrivent respectivement avec la convention de sommation sur les indices répétés comme suit :

##### II.1.2.5.1 Equation de continuité

L'équation de continuité s'écrit en coordonnées curvilignes

$$\frac{1}{h_\varepsilon h_\eta h_z} \times \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{h_\varepsilon h_\eta h_z}{h_s} \rho V_s \right) = 0 \quad (\text{II.9})$$

##### II.1.2.5.2 Equation de mouvement

L'équation de mouvement s'écrit en coordonnées curvilignes

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{\partial V_\lambda}{\partial t} + \left( \frac{V_s}{h_s} \frac{\partial V_\lambda}{\partial x_s} + \frac{V_\lambda}{h_s h_\lambda} \frac{\partial h_\lambda}{\partial x_s} - \frac{(V_s^2)}{h_s h_\lambda} \frac{\partial h_s}{\partial x_\lambda} \right) \vec{t}_\lambda \right] = - \frac{1}{h_\lambda} \frac{\partial P}{\partial x_\lambda} \vec{t}_\lambda \\ + \frac{\mu}{\rho \varphi} \left[ \frac{1}{h_\varepsilon h_\eta h_z} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{h_\varepsilon h_\eta h_z}{h_s} \tau_{s\lambda} \right) \right\} + \frac{\tau_{s\lambda}}{h_s h_\lambda} \frac{\partial h_\lambda}{\partial x_s} - \frac{\tau_{ss}}{h_\lambda h_s} \frac{\partial h_s}{\partial x_\lambda} \right] \vec{t}_\lambda + \rho g_\lambda \vec{t}_\lambda - \frac{\mu}{K} V_\lambda \vec{t}_\lambda - \\ \frac{c_F \rho}{\sqrt{K}} |\vec{V}| V_\lambda \vec{t}_\lambda \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

### II.1.2.5.3 Equation de l'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_P T) + \frac{1}{h_\varepsilon h_\eta h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{h_\varepsilon h_\eta h_z}{h_s} \rho c_P T V_s \right) \right] = \frac{1}{h_\varepsilon h_\eta h_z} \left[ \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{h_\varepsilon h_\eta h_z}{h_s} k_m \left( \frac{\partial T}{\partial x_s} \right) \right) \right] \quad (\text{II.11})$$

### II.1.3 Le vecteur de pesanteur $\vec{g}$

Dans les coordonnées cartésiennes on définit le vecteur de pesanteur comme suite :

$$\vec{g} = 0\vec{i} - g\vec{j} + 0\vec{k}$$

Dans les coordonnées elliptiques on a :

$$\vec{g} = g_\varepsilon \vec{i}_\varepsilon + g_\eta \vec{i}_\eta + g_z \vec{i}_z$$

On utilise la relation suivantes pour transformer le vecteur de pesanteur à partir des coordonnées cartésiennes jusqu'aux coordonnées elliptiques

$$g_x = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial x}{\partial e^i} g_i$$

$$g_y = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y}{\partial e^i} g_i$$

$$g_z = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial z}{\partial e^i} g_i$$

On a :

$$g_{11} = h_\varepsilon^2 = a^2 (\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)) \quad (\text{II.12})$$

$$g_{22} = h_\eta^2 = a^2 (\sinh^2(\varepsilon) + \sin^2(\eta)) \quad (\text{II.13})$$

$$g_{33} = h_z^2 = 1 \quad (\text{II.14})$$

$$x = a \cdot \cosh(\varepsilon) \cos(\eta) \quad (\text{II.15})$$

$$y = -a \cdot \sinh(\varepsilon) \sin(\eta) \quad (\text{II.16})$$

$$z = z \quad (\text{II.17})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (a \cdot \cosh(\varepsilon) \cdot \cos(\eta)) \cdot g_\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (a \cdot \cosh(\varepsilon) \cdot \cos(\eta)) \cdot g_\eta + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (a \cdot \cosh(\varepsilon) \cdot \cos(\eta)) \cdot g_z \quad (\text{II.18})$$

$$-g = \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (a \cdot \sinh(\varepsilon) \cdot \sin(\eta)) \cdot g_\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (a \cdot \sinh(\varepsilon) \cdot \sin(\eta)) \cdot g_\eta + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (a \cdot \sinh(\varepsilon) \cdot \sin(\eta)) \cdot g_z \quad (\text{II.19})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (Z) g_\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \frac{\partial}{\partial \eta} (Z) g_\eta + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \frac{\partial}{\partial z} (Z) g_z \quad (\text{II.20})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} a \cdot \sinh(\varepsilon) \cdot \cos(\eta) \cdot g_\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} a \cdot \cosh(\varepsilon) \cdot \sin(\eta) \cdot g_\eta + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot 0 \cdot g_z \quad (\text{II.20})$$

$$-g = \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} a \cdot \cosh(\varepsilon) \cdot \sin(\eta) \cdot g_\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} a \cdot \sinh(\varepsilon) \cdot \cos(\eta) \cdot g_\eta + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot 0 \cdot g_z \quad (\text{II.21})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot 0 \cdot g_\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot 0 \cdot g_\eta + \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot 1 \cdot g_z \quad (\text{II.22})$$

$$g_z = 0 \quad \text{On}$$

résout l'équation (4) et (5) on trouve :

$$g_\varepsilon = -g \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot \cosh(\varepsilon) \cdot \sin(\eta) \quad (\text{II.24})$$

$$g_\eta = -g \frac{1}{\sqrt{h_\varepsilon h_\eta}} \cdot \sinh(\varepsilon) \cdot \cos(\eta) \quad (\text{II.25})$$

Avec :

$\varepsilon, \eta, z$  : Coordonnées curvilignes.

$h_\varepsilon, h_\eta, h_z$  : Coefficients métriques, en coordonnées curvilignes.

$h_\lambda, h_s$  : Sommations sur les nouveaux coefficients métriques.

$\chi_s$  : Somme pour les nouvelles coordonnées, dans le nouveau référentiel.

$V_\varepsilon, V_\eta, V_z$  : Nouvelles composantes du vecteur vitesse dans le nouveau référentiel.

$V_\lambda, V_S$  : Sommation pour les nouvelles composantes du vecteur vitesse.

$i_\lambda$  : Sommation pour les vecteurs unitaires du nouveau référentiel.

$\tau_{S,S}, \tau_{\lambda,S}$  : Sommation pour le tenseur des contraintes visqueuses.

$$\begin{cases} h_\varepsilon = h_\eta = h = a\sqrt{sh^2\varepsilon + \sin^2\eta} \\ h_z = 1 \end{cases} \quad (\text{II.26})$$

Nous aurons donc après les simplifications nécessaires, le système d'équations suivant :

### II.1.3.1 Équation de continuité

$$\frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (hV_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) \right] = 0 \quad (\text{II.27})$$

### II.1.3.2 L'équation de la quantité de mouvement suivant $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} \right) + \frac{1}{h^2 \varphi^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (h V_\varepsilon V_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\varepsilon V_\eta) + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} - V_\eta^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \right] = & - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \rho g_{\varepsilon} + \frac{\mu}{\rho \varphi} \\ \left[ \frac{2}{h^2} \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial \eta^2} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{h^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\varepsilon}{h} \right) \right) + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h} \right) + \right. \right. & \\ \left. \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h} \right) \right) \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{2}{h^2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial V_\eta}{\partial \eta} + \frac{V_\varepsilon}{h^2} \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} - \frac{\mu}{k} V_\varepsilon - \frac{c_F \rho}{\sqrt{k}} \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2} \cdot V_\varepsilon \right] & \quad (\text{II.28}) \end{aligned}$$

### II.1.3.3 L'équation de la quantité de mouvement suivant $\eta$

$$\begin{aligned} \rho \left[ \frac{1}{\varphi} \left( \frac{\partial V_\eta}{\partial t} \right) + \frac{1}{h^2 \varphi^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (h V_\eta V_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h V_\eta V_\eta) + V_\varepsilon V_\eta \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^2 \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \right] = & - \frac{1}{h} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \rho g_\eta + \\ \frac{\mu}{\rho \varphi} \left[ \frac{2}{h} \frac{\partial^2 V_\eta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 V_\varepsilon}{\partial \varepsilon^2} - \frac{1}{h^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{2}{h^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h} \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \left( h \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h} \right) \right) + \right. & \\ \left. \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon}{h} \right) \right) \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} - \frac{2}{h^2} \left( \frac{1}{h} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{V_\eta}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} \right) \frac{\partial h}{\partial \eta} \right] - \frac{\mu}{k} V_\eta - \frac{c_F \rho}{\sqrt{k}} \sqrt{V_\varepsilon^2 + V_\eta^2} \cdot V_\eta & \quad (\text{II.29}) \end{aligned}$$

### II.1.3.4 Equation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (h T V_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h T V_\eta) \right] = \frac{1}{h^2} \lambda \alpha \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} \right] \quad (\text{II.30})$$

### II.1.4 Les Conditions initiales et aux limites

Les conditions aux limites qui s'appliquent à ce problème sont les suivantes.

#### 1-Conditions aux limites

Pour le cylindre externe :

$$\text{Pour } 0 < \eta < 2\pi \quad V_\varepsilon = V_\eta = 0 \quad \text{et} \quad T = T_2.$$

Pour le cylindre interne:

$$\text{Pour } 0 < \eta < 2\pi \quad V_\varepsilon = V_\eta = 0 \quad \text{et} \quad T = T_2.$$

#### 2-Conditions initiales

$$\text{à } t=0 \quad V_\varepsilon = V_\eta = 0 \quad \text{et} \quad T = 0.$$

## II.2 L'adimensionnelle du problème

Pour mettre le système d'équations précédent sous une forme adimensionnelle, nous avons choisi

Le symbole \* désigne les quantités adimensionnelles qui sont définies comme suit

$$h^* = \frac{h}{a}, \quad V_\varepsilon^* = \frac{V_\varepsilon}{v/a}, \quad V_\eta^* = \frac{V_\eta}{v/a},$$

$$P^* = \frac{\Delta P}{\rho_0 \frac{v^2}{a^2}}, \quad t^* = \frac{t}{a/v},$$

$$T^* = \frac{T - T_1}{\Delta T}, \quad \Delta T = T_2 - T_1$$

$$Gr = \frac{g \beta a^3}{v^2} \Delta T, \quad Pr = \frac{v}{\alpha},$$

$$Re = \frac{v_0 a}{v}, \quad Da = \frac{k}{a^2}.$$

a : Longueur caractéristique.

v/a : Vitesse caractéristique.

$a^2 / \nu$  : Temps caractéristique.

### II.3 Equations adimensionnelles

à  $t^* = 0$   $= 0$  et  $T^* = 0$ .

A  $t^* > 0$  :

#### II.3.1 Equation de continuité

$$\frac{1}{(h^*)^2} \left[ \frac{\partial(h^*V_\varepsilon^*)}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial(h^*V_\eta^*)}{\partial\eta} \right] = 0 \quad (\text{II.31})$$

#### II.3.2 Équation de quantité de mouvement suivant $\varepsilon$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h^{*2}} \left[ \frac{\partial(h^*V_\varepsilon^*V_\varepsilon^*)}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial(h^*V_\eta^*V_\varepsilon^*)}{\partial\eta} \right] + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h^{*2}} \left[ V_\varepsilon^*V_\eta^* \frac{\partial h_\varepsilon^*}{\partial\varepsilon} - V_\eta^{*2} \frac{\partial h^{*2}}{\partial\eta} \right] = -\frac{1}{h^*} \frac{\partial P^*}{\partial\varepsilon} + \\ & \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Reh^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left( 2 \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial\varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial\eta} \right) \right] + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Reh^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left( 2 \frac{V_\eta^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial\eta} \right) + \frac{\partial}{\partial\eta} \left( h^* \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h^*} \right) \right) + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial z^*} \left( h^* \frac{\partial V_z^*}{\partial\varepsilon} \right) \right] + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Reh^{*2}} \left[ -\frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial\eta} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial\varepsilon} \left( \left( \frac{V_\eta^*}{h^*} \right) \frac{\partial h^*}{\partial\eta} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial\eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h^*} \right) \frac{\partial h^*}{\partial\eta} \right) + \\ & \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Reh^{*2}} \left[ \left( -2 \frac{1}{h^*} \frac{\partial V_\eta^*}{\partial\eta} \frac{\partial h^*}{\partial\varepsilon} \right) + \left( -2 \frac{1}{h^{*2}} V_\varepsilon^* \frac{\partial h^*}{\partial\varepsilon} \frac{\partial h^*}{\partial\varepsilon} \right) \right] - \frac{V_\varepsilon^*}{ReDa} - C_f \frac{\sqrt{V_\varepsilon^{*2} + V_\eta^{*2}}}{\sqrt{Da}} V_\varepsilon^* + \\ & \frac{Gr}{Re^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h^{*2}}} \cosh(\varepsilon) \sin(\eta) \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

### II.3.3 Équation de quantité de mouvement suivant $\eta$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial t^*} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h^{*2}} \left[ \frac{\partial(h^* V_\varepsilon^* V_\eta^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h^* V_\eta^* V_\eta^*)}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{\varphi^2} \frac{1}{h^{*2}} \left[ V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon} - V_\varepsilon^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \right] = -\frac{1}{h^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} + \\
 & \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2 \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial z^*} \left( h^{*2} \frac{\partial y}{\partial z^*} \right) + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( h^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h^*} \right) \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \frac{\partial}{\partial \eta} \left( 2 \frac{V_\varepsilon^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h^{*2}} \left[ -\frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\eta^*}{h^*} \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \left( \frac{V_\eta^*}{h^*} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h^*} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon} \right) \right] + \right. \\
 & \left. \frac{1}{\varphi} \frac{1}{Re h^{*2}} \left[ \left( -2 \frac{1}{h^*} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} V_\varepsilon^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \right) + \left( -2 \frac{1}{h^*} V_\eta^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \right) \right] - \frac{V_\eta^*}{Re Da} - c_f \frac{\sqrt{V_\varepsilon^{*2} + V_\eta^{*2}}}{\sqrt{Da}} V_\eta^* + \right. \\
 & \left. \frac{Gr}{Re^2} T^* \frac{1}{\sqrt{h^{*2}}} \sinh(\varepsilon) \cos(\eta) \right] \tag{II.33}
 \end{aligned}$$

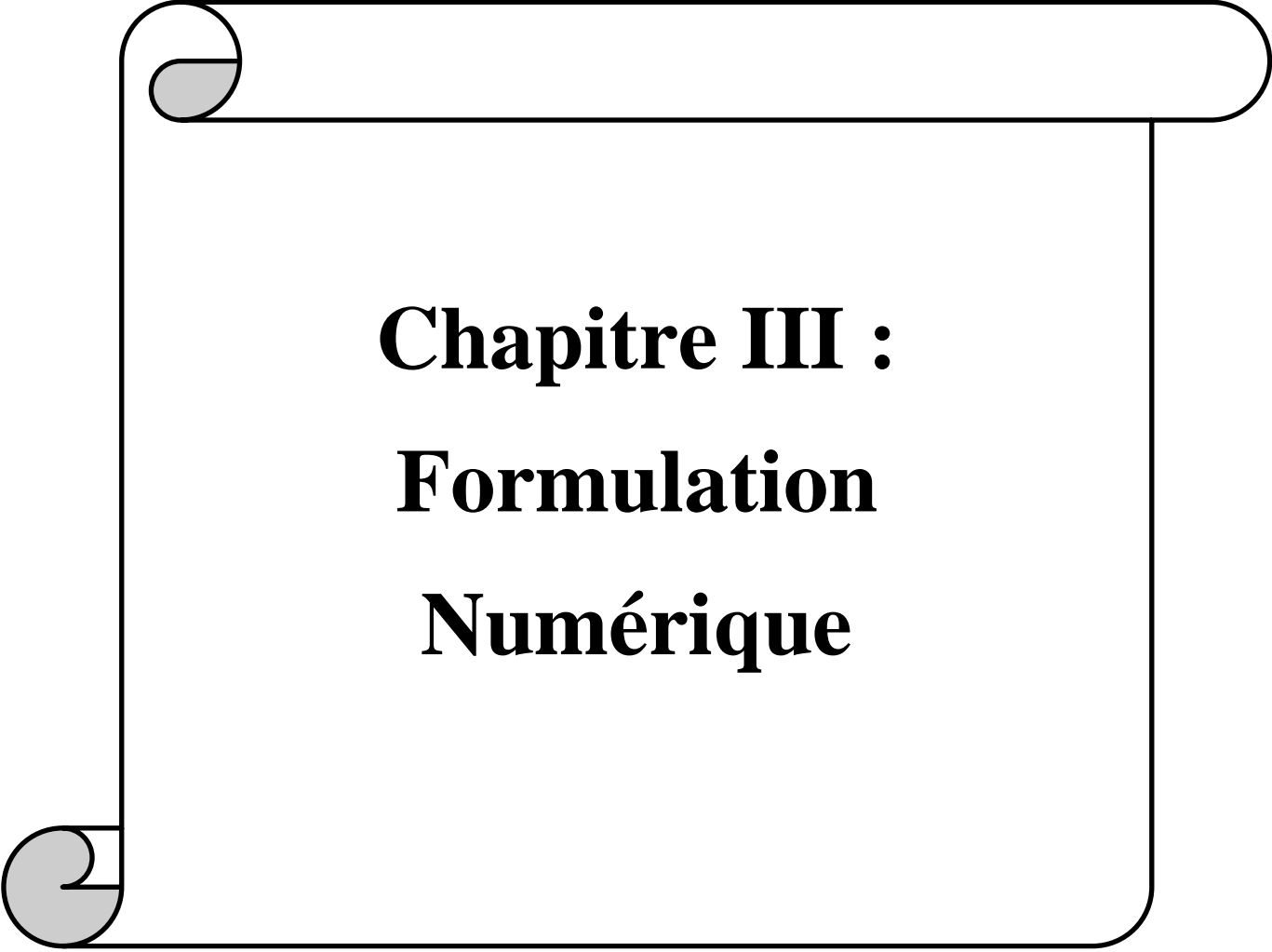
### II.3.4 Équation de l'énergie

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{1}{h^{*2}} \frac{\partial(h^* V_\varepsilon^* T^*)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h^* V_\eta^* T^*)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h^{*2} V_z^* T^*)}{\partial z^*} &= \frac{1}{Re Pr h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \lambda \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \right) + \right. \\
 & \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( h^{*2} \lambda \frac{\partial T^*}{\partial \varepsilon} \right) \right] \tag{II.34}
 \end{aligned}$$

### II.3.5 Les conditions aux limites adimensionnelles sont

Pour le cylindre intérieur :  $\varepsilon = e_i$   $t^* = 0$   $V_\varepsilon^* = V_\eta^* = 0$  et  $T_1^* = 1$

Pour le cylindre extérieur :  $\varepsilon = e_e$   $t^* = 0$   $V_\varepsilon^* = V_\eta^* = 0$  et  $T_2^* = 0$



**Chapitre III :**  
**Formulation**  
**Numérique**

## Chapitre III Formulation Numérique

### III.1 INTRODUCTION

Au cours de ces dernières années, nous assistons à une augmentation fulgurante de la performance des ordinateurs, qui a permis l'utilisation de méthodes numériques de plus en plus performantes et efficaces pour la résolution de systèmes d'équations différentielles non linéaires.

Depuis les 20 dernières années, nous vivons aussi une révolution qui a bouleversé notre vie de tous les jours. Bien entendu, il s'agit d'une révolution informatique. Les ordinateurs ont envahi les bureaux des chercheurs et aussi les foyers. Les ordinateurs sont, chaque jour, de plus en plus rapides et, aujourd'hui, à la veille du troisième millénaire, nous commençons à pouvoir résoudre des problèmes de transfert et de transport en 2-D et 3-D.

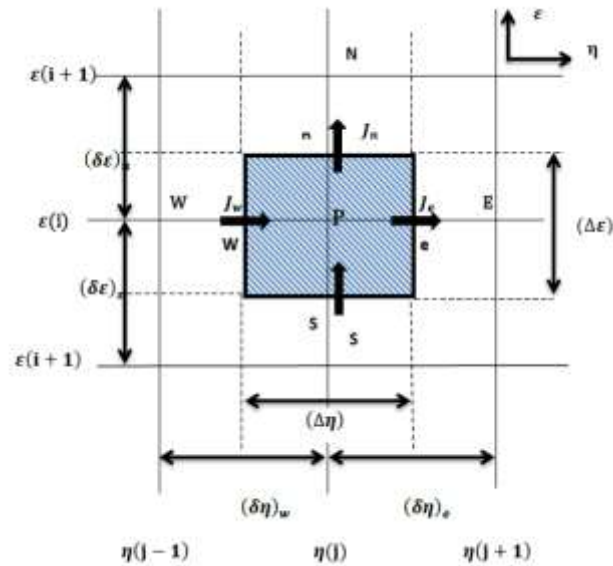
### III.2 Méthode de résolution numérique

En vue du passage d'un problème exact (continu) au problème approché (discret), on dispose de plusieurs techniques concurrentes et complémentaires : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Chacune de ces trois méthodes correspond à une formulation différente des équations de la physique :

- équilibre des forces en chaque point pour les différences finies,
- minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour les éléments finis,
- loi de conservation et calcul des flux pour la méthode des volumes finis.

La méthode des volumes finis intègre, sur des volumes élémentaires de forme simple, les équations écrites sous forme de loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et elle est donc particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides : équation de conservation de la masse, équation de conservation de la quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie.

On a choisit la méthode des volumes finis en vue de la géométrie du problème et les capacités de calcul. Cette méthode a été développée pour résoudre les problèmes de transfert de chaleur et d'écoulement des fluides, elle est décrite en détails dans le livre de **S.V.Patankar** [25]



**Figure III.1** : Représentation d'un volume-fini typique et son voisinage

### III.2.1 Le maillage

On découpe l'espace annulaire selon les directions  $\varepsilon, \eta$  en un ensemble de volume élémentaire finis ou « volumes de contrôle » égaux à  $(\Delta V^* = h^2 \Delta \varepsilon \Delta \eta \ 1)$ . (Le problème étant bidimensionnel on prend l'unité dans la direction  $z$  comme épaisseur).

Le centre d'un volume fini typique est un point  $P$ , et les centres de ses faces latérales est, ouest, nord, sud, sont désignées respectivement, par les lettres  $e, w, n, s$  et  $t$ . Chacun des volumes finis intérieurs est entouré de quatre autres volumes finis. Les centres de ces volumes sont les points  $E, W, N, S$  et  $T$ . les variables scalaires (pression, température) sont stockées aux points centrés dans les volumes finis, alors que les composantes des vitesses sont stockées aux centres des faces latérales des volumes finis décalés [25]. Une illustration d'un volume fini typique

### III.3 Discrétisation de l'équation générale de transfert d'une variable $\phi$ dans le volume de contrôle

Pour illustrer la discrétisation des équations de transfert par la méthode des volumes finis, on considère l'équation de transfert sous sa forme générale :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( h^* V_{\varepsilon}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( h^* V_{\eta}^* \phi - \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = S_{\phi} \quad (\text{III.1})$$

Les sources et les coefficients de diffusion sont spécifiés dans le tableau

Tableau variable  $\phi$ , coefficient de diffusion  $\Gamma$  et terme source  $S_{\phi}$  pour l'équation du notre problème

## Chapitre III : Formulation Numérique

Equation	$\phi$	$\Gamma$	$S_\phi$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant $\varepsilon$	$V_\varepsilon^*$	$\Gamma_{\phi_\varepsilon}$ 2	$-\frac{1}{h^*} \frac{\partial P^*}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{\varphi Re h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\varepsilon^* \partial h^*}{h^* \partial \eta} \right) + \frac{2}{\varphi Re h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^* \partial h^*}{h^* \partial \eta} \right)$ $+ \frac{1}{\varphi Re h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ h^* \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h^*} \right) \right] + \frac{1}{\varphi Re h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h^*} \right) \right]$
		$\Gamma_{\phi_\eta}$ 1	$\frac{2}{\varphi Re h^{*2}} \left( \frac{1}{h^*} \frac{\partial V_\eta^*}{\partial \eta} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon} - \frac{2}{\varphi Re h^{*2}} \left( \frac{V_\varepsilon^* \partial h^*}{h^{*2} \partial \varepsilon} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon}$ $+ \frac{1}{\varphi h^{*2}} V_\eta^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon} - \frac{1}{\varphi h^*} V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} - \frac{V_\varepsilon^*}{Re Da} - c_F \frac{\sqrt{V_\varepsilon^{*2} + V_\eta^{*2}}}{\sqrt{Da}}$ $+ \frac{Gr}{h^* Re} T^* \cosh \varepsilon \sin \eta$
Quantité de mouvement suivant $\eta$	$V_\eta^*$	$\Gamma_{\phi_\varepsilon}$ 1	$-\frac{1}{h^*} \frac{\partial P^*}{\partial \eta} - \frac{1}{\varphi Re h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^* \partial h^*}{h^* \partial \varepsilon} \right) + \frac{2}{\varphi Re h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^* \partial h^*}{h^* \partial \varepsilon} \right)$
		$\Gamma_{\phi_\eta}$ 2	$+ \frac{1}{\varphi Re h^{*2}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ h^* \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h^*} \right) \right]$ $+ \frac{1}{\varphi Re h^{*2}} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{V_\eta^*}{h^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{V_\varepsilon^*}{h^*} \right) \right] \frac{\partial h^*}{\partial \varepsilon}$ $- \frac{2}{\varphi Re h^{*2}} \left( \frac{1}{h^*} \frac{\partial V_\varepsilon^*}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \eta} - \frac{2}{\varphi Re h^{*2}} \left( \frac{V_\eta^* \partial h^*}{h^{*2} \partial \eta} \right) \frac{\partial h^*}{\partial \eta}$ $+ \frac{1}{\varphi h^{*2}} V_\varepsilon^{*2} \frac{\partial h^*}{\partial \eta}$ $- \frac{1}{\varphi h^{*2}} V_\varepsilon^* V_\eta^* \frac{\partial h^*}{\partial \eta} - \frac{V_\eta^*}{Re Da} - c_F \frac{\sqrt{V_\varepsilon^{*2} + V_\eta^{*2}}}{\sqrt{Da}} V_\eta^*$ $+ \frac{Gr}{h^* Re} T^* \sinh \varepsilon \cos \eta$
Energie	$T^*$	$\frac{1}{Pr}$	0

## Chapitre III : Formulation Numérique

L'équation de discrétisation d'une variable  $\phi$  est obtenue par l'intégration de son équation de conservation dans un volume fini typique (Pour les  $\phi$  scalaires) ou un volume fini décalé (Pour les  $\phi$  associées aux composantes de la vitesse). Ci-après, on présente un cas de discrétisation d'une équation de transfert de  $\phi$

$$\underbrace{\int_w^e \int_s^n \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} \frac{\partial \phi}{\partial t^*} h^{*2} d\varepsilon d\eta dt^*}_1 + \underbrace{\int_w^e \int_s^n \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} \left[ \frac{\partial(h^*V_\varepsilon\phi)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial(h^*V_\eta\phi)}{\partial \eta} \right]}_2 =$$

$$\underbrace{\int_w^e \int_s^n \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \right]}_3 d\varepsilon d\eta dt^* + \underbrace{\int_w^e \int_s^n \int_{t^*}^{t^*+\Delta t^*} S_\phi d\varepsilon d\eta dt^*}_4$$

Les termes 1, 2,3 et 4 de l'équation (III.2) représentent les intégrales triples dans le volume fini (entre les faces w-e, s-n et  $t^*$  et  $t^* + \Delta t^*$ ), des termes de la variation temporelle, de la convection, de la diffusion et de la source de  $\phi$ . On utilise une discrétisation spatiale, on utilise le schéma de la loi de puissance (Power-Law) pour approcher les variations de  $\phi$  entre les points du maillage. Ce schéma présente l'avantage d'être inconditionnellement stable

Posons :

$$\left. \begin{aligned} J_\varepsilon &= \left( h^*V_\varepsilon^*\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} \right) \\ J_\eta &= \left( h^*V_\eta^*\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (III.3)$$

Où  $J_\varepsilon$  et  $J_\eta$  sont les flux totaux (convection plus diffusion).

En portant ces valeurs dans l'équation (III.1), on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial J_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial J_\eta}{\partial \eta} = S_\phi \quad (III.4)$$

L'intégration de l'équation (III.4) dans le volume de contrôle de la figure (III.2) donne :

$$\frac{(\phi_P^{t^*} - \phi_P^0) h_P^{*2} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta}{\Delta t^*} + J_n - J_s + J_e - J_w = \overline{S_\phi} \cdot \Delta V \quad (III.5)$$

$J_e, J_w, J_n$  et  $J_s$  sont les valeurs des flux totaux aux interfaces du volume de contrôle

$\overline{S_\phi}$  Est la valeur moyenne de  $S_\phi$  dans ce volume élémentaire. Ce terme peut généralement être linéarisé en fonction de  $\phi_P$  (au nœud P) et se mettre sous la forme :

## Chapitre III : Formulation Numérique

---

$$\overline{S_\phi} = S_0 + S_P - \phi_P \quad (\text{III.6})$$

Avec :  $S_P < 0$

Par autre l'équation (III.5) devient :

$$\frac{(\phi_P^{t^*} - \phi_P^0) h_P^{*2} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta}{\Delta t^*} + J_n - J_s + J_e - J_w = (S_0 + S_P - \phi_P) \cdot \Delta V \quad (\text{III.7})$$

En intégrant aussi l'équation de continuité (II.9) dans le volume élémentaire, on obtient :

$$F_n - F_s + F_e - F_w = 0 \quad (\text{III.8})$$

Où  $F_n, F_s, F_e$  et  $F_w$ , sont les débits massiques (termes de convection) à travers les surfaces de ce volume :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= (h^* V_\varepsilon^*)_n \cdot \Delta \eta \\ F_s &= (h^* V_\varepsilon^*)_s \cdot \Delta \eta \\ F_e &= (h^* V_\eta^*)_e \cdot \Delta \varepsilon \\ F_w &= (h^* V_\varepsilon^*)_w \cdot \Delta \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.9})$$

Nous poserons dans ce qui suit  $\phi_P^{t^*} = \phi_P$

En multipliant l'équation (III.8) par la fonction  $\phi_P$  et en soustrayant l'équation obtenue de l'équation (III.7), il vient :

$$\begin{aligned} &(\phi_P - \phi_P^0) \frac{h_P^{*2} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta}{\Delta t^*} + (J_n - F_n \cdot \phi_P) - (J_s - F_s \cdot \phi_P) + (J_e - F_e \cdot \phi_P) - \\ &(J_w - F_w \cdot \phi_P) = (S_0 + S_P - \phi_P) \cdot \Delta V \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

D'après S.V.PATANKAR, on peut représenter les termes entre parenthèses de l'équation (III.10) de la manière suivante :

## Chapitre III : Formulation Numérique

---

$$\begin{aligned}
 J_n - F_n \cdot \phi_P &= a_N(\phi_P - \phi_N) \\
 J_s - F_s \cdot \phi_P &= a_S(\phi_S - \phi_P) \\
 J_e - F_e \cdot \phi_P &= a_E(\phi_P - \phi_E) \\
 J_w - F_w \cdot \phi_P &= a_W(\phi_W - \phi_P)
 \end{aligned}
 \tag{III.11}$$

Introduisons ces valeurs dans l'équation (III.10) on obtient :

$$\begin{aligned}
 (\phi_P - \phi_P^0) \frac{h_P^{*2} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta}{\Delta t^*} + a_N(\phi_P - \phi_N) - a_S(\phi_S - \phi_P) + a_E(\phi_P - \phi_E) - \\
 a_W(\phi_W - \phi_P) = (S_0 + S_P \cdot \phi_P) \cdot \Delta V
 \end{aligned}
 \tag{III.12}$$

Ce qui nous amène enfin à l'équation de discrétisation :

$$a_P \phi_P = a_N \phi_N + a_S \phi_S + a_E \phi_E + a_W \phi_W + b
 \tag{III.13}$$

Avec :

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + a_P^0 - S_P h_P^{*2} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta
 \tag{III.14}$$

$$a_P^0 = \frac{h_P^{*2} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta}{\Delta t^*}
 \tag{III.15}$$

$$b = S_0 h_P^{*2} \Delta \varepsilon_P \Delta \eta + a_P^0 \phi_P^0
 \tag{III.16}$$

On introduit maintenant la fonction  $A(|P|)$  du nombre de Péclet, qui est celle de la loi de puissance (Power Law), d'après PATANKAR, elle est donnée par :

$$A(|P|) = \|0, (1 - 0.1)^5\|$$

Le symbole  $\|A, B\|$  signifie que le maximum entre A et B est choisi.

Les coefficients de l'équation algébrique (III.13) deviennent alors :

## Chapitre III : Formulation Numérique

$$\begin{aligned}
 a_N &= D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \\
 a_S &= D_s A(|P_s|) + \|-F_s, 0\| \\
 a_E &= D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \\
 a_W &= D_w A(|P_w|) + \|-F_w, 0\|
 \end{aligned}
 \tag{III.17}$$

Dans les relations (III.17), les grandeurs  $D_n$ ,  $D_s$ ,  $D_e$  et  $D_w$  sont les termes diffusifs, et  $P_n$ ,  $P_s$ ,  $P_e$  et  $P_w$  sont donc, les nombres de Péclet, ils sont définis par :

$$\begin{aligned}
 D_n &= \frac{(\Gamma_\phi)_n \cdot \Delta\eta}{(\delta\varepsilon)_n} \\
 D_s &= \frac{(\Gamma_\phi)_s \cdot \Delta\eta}{(\delta\varepsilon)_s} \\
 D_e &= \frac{(\Gamma_\phi)_e \cdot \Delta\varepsilon}{(\delta\eta)_e} \\
 D_w &= \frac{(\Gamma_\phi)_w \cdot \Delta\varepsilon}{(\delta\eta)_w}
 \end{aligned}
 \tag{III.18}$$

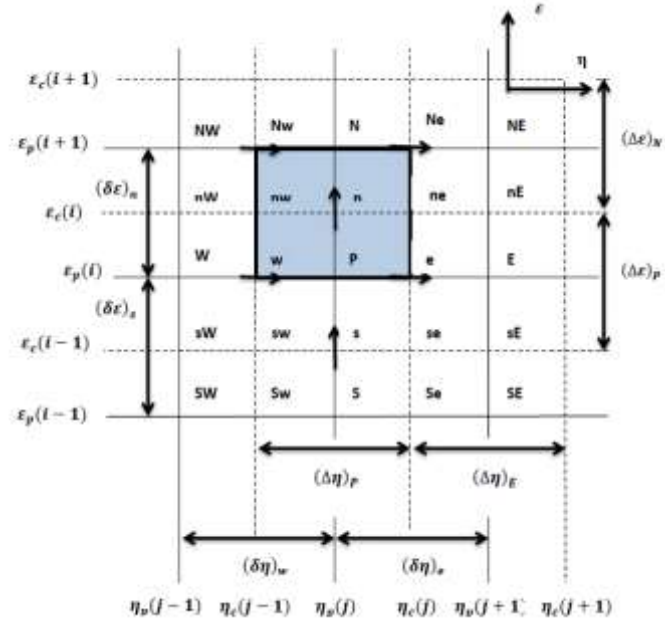
$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\
 P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\
 P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\
 P_w &= \frac{F_w}{D_w}
 \end{aligned}
 \tag{III.19}$$

Parmi les conditions de convergence et de stabilité exigées par cette méthode, notons que dans l'équation (III.13) tous les coefficients doivent être positifs,  $S_p$  doit être négatif et le coefficient  $a_p$ , doit être égale à la somme des autres coefficients et  $S_p \Delta V$ .

La discrétisation précédente s'applique aux équations différentielles aux dérivées partielles de toute la variable dépendante :  $\phi$  est l'une de ces variables U, V, P et T. Pour chaque variable, le coefficient de diffusion  $\Gamma_\phi$  et la source  $S_\phi$  sont définis dans le tableau III.1. Cependant l'équation de discrétisation



## Chapitre III : Formulation Numérique



**Figure III.3** : Volume de contrôle après le décalage dans la direction  $\varepsilon$

La phase de discrétisation de l'équation de quantité de mouvement de  $V_\varepsilon^*$  est similaire à celle de l'équation générale :

$$a_P(V_\varepsilon^*)_P = a_N(V_\varepsilon^*)_N + a_S(V_\varepsilon^*)_S + a_E(V_\varepsilon^*)_E + a_W(V_\varepsilon^*)_W + S_{V_\varepsilon^*} \quad (\text{III.20})$$

Elle s'exprime par les termes diffusifs et convectifs :

Où les termes diffusifs contenus dans différents coefficients sont :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \frac{2(\Delta\eta)_P}{(\Delta\varepsilon)_N} \\ D_s &= \frac{2(\Delta\eta)_P}{(\Delta\varepsilon)_P} \\ D_e &= \frac{2(\delta\varepsilon)_n}{(\delta\eta)_e} \\ D_w &= \frac{2(\delta\varepsilon)_n}{(\delta\eta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.21})$$

## Chapitre III : Formulation Numérique

---

Et les termes convectifs sont :

$$\begin{aligned}
 F_n &= \left( h_N^* \frac{(V_\varepsilon^*)_{N^+} + (V_\varepsilon^*)_P}{2} \right) \cdot (\Delta\eta)_P \\
 F_S &= \left( h_P^* \frac{(V_\varepsilon^*)_P + (V_\varepsilon^*)_S}{2} \right) \cdot (\Delta\eta)_P \\
 F_e &= \left( h_{ne}^* \frac{(V_\eta^*)_{Ne} + (V_\eta^*)_e}{2} \right) \cdot (\delta\varepsilon)_n \\
 F_w &= \left( h_{nw}^* \frac{(V_\eta^*)_{Nw} + (V_\eta^*)_w}{2} \right) \cdot (\delta\varepsilon)_n
 \end{aligned} \tag{III.22}$$

Les nombres de Péclet sont :

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\
 P_S &= \frac{F_S}{D_S} \\
 P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\
 P_w &= \frac{F_w}{D_w}
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

Les coefficients de l'équation algébrique de  $V_\varepsilon^*$  sont données dans les relations (III.17)

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + \frac{2}{h_n^{*2}} \left( \frac{\partial h}{\partial \varepsilon} \Big|_n \right)^2 \frac{(\delta\varepsilon)_n (\Delta\eta)_P}{h_n^{*2}} + \frac{h_n^{*2} (\delta\varepsilon)_n (\Delta\eta)_P}{\Delta t^*} \tag{III.24}$$

Et le terme de source de cette équation est :

$$S_{V_\varepsilon^*} = S_0 h_P^{*2} (\delta\varepsilon)_n \Delta\eta_P + \frac{h_n^{*2} (\delta\varepsilon)_n (\Delta\eta)_P}{\Delta t^*} (V_\varepsilon^*)_n \tag{III.25}$$

Le terme  $S_0$  pour cette équation est spécifié dans le tableau (III.1)

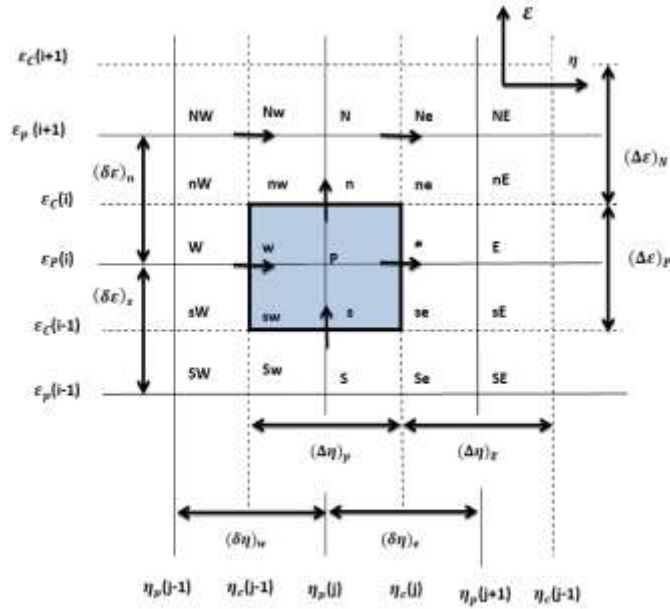
### III.5 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement suivant $\eta$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement suivant  $\eta$  est intégrée dans le volume fini représenté par la figure (III.6), où il y a un décalage de maillage dans la direction. Le volume de contrôle devient :

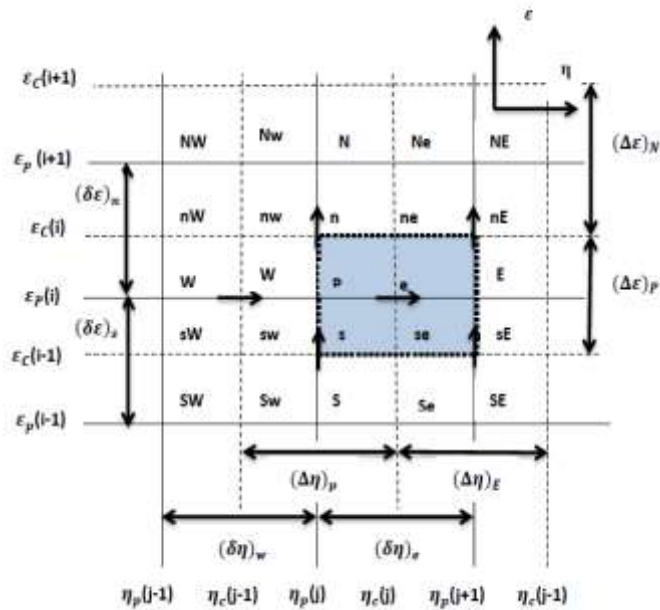
## Chapitre III : Formulation Numérique

$\Delta V = h^2 \cdot (\Delta \varepsilon)_P \cdot (\delta \eta)_e$ . En suivant les mêmes étapes de discrétisation que pour l'équation précédente on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_P(V_\eta^*)_P = a_N(V_\eta^*)_N + a_S(V_\eta^*)_S + a_E(V_\eta^*)_E + a_W(V_\eta^*)_W + S_{V_\eta^*} \quad (\text{III.26})$$



**Figure III.4 :** Volume de contrôle avant le décalage dans la direction  $\eta$



**Figure III.5 :** Volume de contrôle après le décalage dans la direction  $\eta$

## Chapitre III : Formulation Numérique

---

Comme précédemment, on définit les quantités de convection et de diffusion F et D.

Les termes diffusifs sont :

$$\left. \begin{aligned}
 D_n &= \frac{(\delta\eta)_e}{(\delta\varepsilon)_n} \\
 D_s &= \frac{(\delta\eta)_e}{(\delta\varepsilon)_s} \\
 D_e &= \frac{2(\Delta\varepsilon)_P}{(\Delta\eta)_E} \\
 D_w &= \frac{2(\Delta\varepsilon)_P}{(\Delta\eta)_P}
 \end{aligned} \right\} \quad (III.27)$$

Et les termes convectifs sont :

$$\left. \begin{aligned}
 F_n &= \left( h_{ne}^* \frac{(V_\varepsilon^*)_{ne} + (V_\varepsilon^*)_n}{2} \right) \cdot (\delta\eta)_e \\
 F_s &= \left( h_{se}^* \frac{(V_\varepsilon^*)_{se} + (V_\varepsilon^*)_s}{2} \right) \cdot (\delta\eta)_e \\
 F_e &= \left( h_E^* \frac{(V_\eta^*)_E + (V_\eta^*)_P}{2} \right) \cdot (\Delta\varepsilon)_P \\
 F_w &= \left( h_P^* \frac{(V_\eta^*)_P + (V_\eta^*)_w}{2} \right) \cdot (\Delta\varepsilon)_P
 \end{aligned} \right\} \quad (III.28)$$

Les nombres de Péclet sont :

$$\left. \begin{aligned}
 P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\
 P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\
 P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\
 P_w &= \frac{F_w}{D_w}
 \end{aligned} \right\} \quad (III.29)$$

Les coefficients de l'équation algébrique de  $V_\eta^*$  sont donnés dans les relations (III.17).

## Chapitre III : Formulation Numérique

---

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + \frac{2}{h_e^{*2}} \left( \frac{\partial h^*}{\partial \eta} \Big|_e \right)^2 \frac{(\Delta \varepsilon)_P (\delta \eta)_e}{h_P^{*2}} + \frac{h_P^{*2} (\Delta \varepsilon)_P (\delta \eta)_e}{\Delta t^*} \quad (\text{III.30})$$

Et le terme  $S_0$  pour cette équation est spécifié dans le tableau (III.1)

### III.6 Discrétisation de l'équation de l'énergie

L'équation de l'énergie est intégrée dans le volume fini typique de dimension  $h^{*2}$ .  $(\Delta \varepsilon)_P$ .  $(\Delta \eta)_P$ .

En suivant les mêmes étapes de discrétisation on obtient l'équation algébrique suivante :

$$a_P T_P = a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T_W + T_T \quad (\text{III.31})$$

Les termes de diffusion sont :

$$\left. \begin{aligned} D_n &= \left( \frac{1}{P_r} \right) \frac{(\Delta \eta)_P}{(\delta \varepsilon)_n} \\ D_s &= \left( \frac{1}{P_r} \right) \frac{(\Delta \eta)_P}{(\delta \varepsilon)_s} \\ D_e &= \left( \frac{1}{P_r} \right) \frac{(\Delta \varepsilon)_P}{(\delta \eta)_e} \\ D_w &= \left( \frac{1}{P_r} \right) \frac{(\Delta \varepsilon)_P}{(\Delta \eta)_w} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.32})$$

Les termes de convection sont :

$$\left. \begin{aligned} F_n &= h_n^* \cdot (V_\varepsilon^*)_n \cdot (\Delta \eta)_P \\ F_s &= h_s^* \cdot (V_\varepsilon^*)_s \cdot (\Delta \eta)_P \\ F_e &= h_e^* \cdot (V_\eta^*)_e \cdot (\Delta \varepsilon)_P \\ F_w &= h_w^* \cdot (V_\eta^*)_w \cdot (\Delta \varepsilon)_P \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.33})$$

## Chapitre III : Formulation Numérique

---

Les nombres de Péclet sont :

$$\begin{aligned}
 P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\
 P_s &= \frac{F_s}{D_s} \\
 P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\
 P_w &= \frac{F_w}{D_w}
 \end{aligned}
 \tag{III.34}$$

Les coefficients de l'équation algébrique d'énergie sont donnés dans les relations (III.17)

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W + \frac{h_P^{*2}(\Delta\varepsilon)_P(\Delta\eta)_P}{\Delta t^*}
 \tag{III.35}$$

Et le terme de source de cette équation est :

$$S_T = \frac{h_P^{*2}(\Delta\varepsilon)_P(\Delta\eta)_P}{\Delta t^*} T_P
 \tag{III.36}$$

### III.7 Discrétisation des conditions aux limites

Les équations de discrétisation des conditions aux limites de notre problème sont aussi écrites sous la forme générale de l'équation de discrétisation.

Pour les pions sur les parois :

- Les composantes de la vitesse  $V_\varepsilon^*$  et  $V_\eta^*$  sont nulles :

Pour  $V_\varepsilon^*$  :  $a_P = 1$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \quad \text{et} \quad S_{V_\varepsilon^*} = 0$$

Pour  $V_\eta^*$  :  $a_P = 1$

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \quad \text{et} \quad S_{V_\eta^*} = 0$$

- La température sur la paroi interne :

Cas I :  $a_P = 1$

## Chapitre III : Formulation Numérique

---

$$a_E = a_W = a_N = a_S = 0 \quad \text{et} \quad S_T = 1$$

Cas II :  $a_P = 1$

$$a_N = 1$$

$$a_E = a_W = a_S = 0 \quad \text{et} \quad S_T = h_p^*(\delta\varepsilon)_n$$

### III.8 Equation de discrétisation de la pression

Cette équation est obtenue par une combinaison des équations de discrétisation de l'équation de continuité et des équations des quantités de mouvement, on obtient :

$$a_P P_P^* = a_N P_N^* + a_S P_S^* + a_E P_E^* + a_W P_W^* + b \quad (\text{III.37})$$

Les coefficients de cette équation sont :

$$\left. \begin{aligned} a_N &= d_n \cdot h_n^* \cdot (\Delta\eta)_P \\ a_S &= d_s \cdot h_s^* \cdot (\Delta\eta)_P \\ a_E &= d_e \cdot h_e^* \cdot (\Delta\varepsilon)_P \\ a_W &= d_w \cdot h_w^* \cdot (\Delta\varepsilon)_P \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.38})$$

$$a_P = a_N + a_S + a_E + a_W \quad (\text{III.39})$$

$$b = \left( h_s^*(\widehat{V}_\varepsilon^*)_s - h_n^*(\widehat{V}_\varepsilon^*)_n \right) \cdot (\Delta\eta)_P + \left( h_w^*(\widehat{V}_\eta^*)_w - h_e^*(\widehat{V}_\eta^*)_e \right) \cdot (\Delta\varepsilon)_P \quad (\text{III.40})$$

$$\left. \begin{aligned} d_n &= \frac{h_n^* \cdot (\Delta\eta)_P}{a_P} \\ d_s &= \frac{h_s^* \cdot (\Delta\eta)_P}{a_P} \\ d_n &= \frac{h_e^* \cdot (\Delta\varepsilon)_P}{a_P} \\ d_w &= \frac{h_w^* \cdot (\Delta\varepsilon)_P}{a_P} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.41})$$

## Chapitre III : Formulation Numérique

---

### III.9 Solution des systèmes d'équations discrétisées

Les systèmes des équations de discrétisation sont résolus séquentiellement suivant l'algorithme SIMPLER (Semi-Implicit-Pressure-Linked-Equation-Revised) :

1. On commence par une initialisation de toutes les variables dépendantes à un certain temps appelé  $t^*=0$ .
2. On incrémente le temps de  $\Delta t^*$ .
3. On calcule les coefficients des équations de discrétisation des quantités de mouvement et on détermine les pseudos vitesses.
4. Avec les pseudos vitesses, on peut résoudre (par la méthode itérative de balayage) le système d'équations de discrétisation de la pression et obtenir une estimation de cette dernière  $P^*$ .
5. La pression  $P^*$  est utilisée dans les équations de discrétisation des quantités de mouvement, qui sont ensuite résolues pour obtenir une estimation du champ de vitesse  $V_{\varepsilon}^*$  et  $V_{\eta}^*$ .
6. Avec les estimations des vitesses, on peut résoudre le système d'équations de discrétisation de la correction de la pression : pour obtenir une estimation (correction) de cette dernière  $P$ .
7. Le champ de vitesse est corrigé par la correction de pression.
8. On résout le système d'équations de discrétisation de la température et on obtient le champ de température.
9. On compare les valeurs des variables dépendantes avant et après incrémentation d'un temps : si la différence entre ces valeurs est négligeable dans tout le domaine de calcul on arrête ce dernier, sinon on retourne à l'étape 2.

### III.10 Contrôle de convergence

La convergence des calculs vers la solution exacte est contrôlée par deux critères :

1. La différence entre deux valeurs successives (au temps  $t^*$  et au temps  $t^*+\Delta t^*$ ) des variables d'écoulement, ne doit pas dépasser un certain seuil  $\varepsilon$ .
2. Cependant cette condition est insuffisante, car la différence dépend du pas de temps choisis.

### III.11 Détails numériques

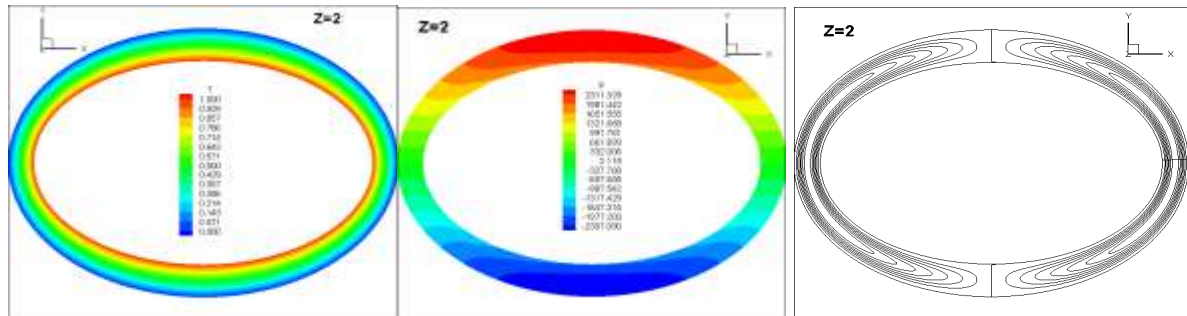
Un code de calcul basé sur l'algorithme précédent en langage Fortran a été réalisé et exécuté sur un micro-ordinateur personnel Intel® core (TM) i5 310M CPU 2,5 GHz et 4Go de RAM. Les calculs numériques ont été effectués pour un maillage de  $43^* 44^* 83^*$  avec un pas de temps  $10^{-4}$



**Chapitre IV :**  
**RÉSULTATS ET**  
**DISCUSSIONS**

### Chapitre IV : Résultats et discussions

Les résultats numériques correspondent à  $Da=10^{-2}$ ,  $\phi=0.5$ ,  $Pr=0.7$ ,  $Re=1$ ,  $C_F=0.55$  et pour différentes valeurs des nombres de Grashof ( $Gr=5.10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$  et  $10^6$ )



**Figure IV.1** : Isothermes, la pression et les lignes de courant pour  $Gr=5.10^3$

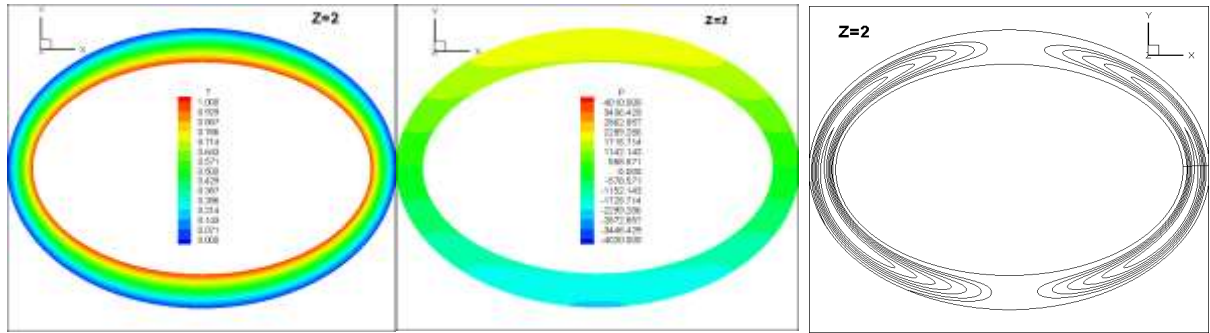
La figure (IV.1) représente les isothermes, la pression et les lignes de courant pour une valeur du nombre de Grashof ( $Gr=5.10^3$ ). Nous remarquons que ces isothermes et ces lignes de courant sont symétriques par rapport au plan vertical.

- **Les isothermes**: Ce sont des courbes presque parallèles et épousent bien le profil de la paroi chaude la distribution des températures est simplement décroissante de la paroi chaude vers la paroi froide.

On peut dire que les transferts thermiques au niveau de la paroi chauffée sont des transferts quasi-conductifs, car les champs des vitesses sont différents de zéro.

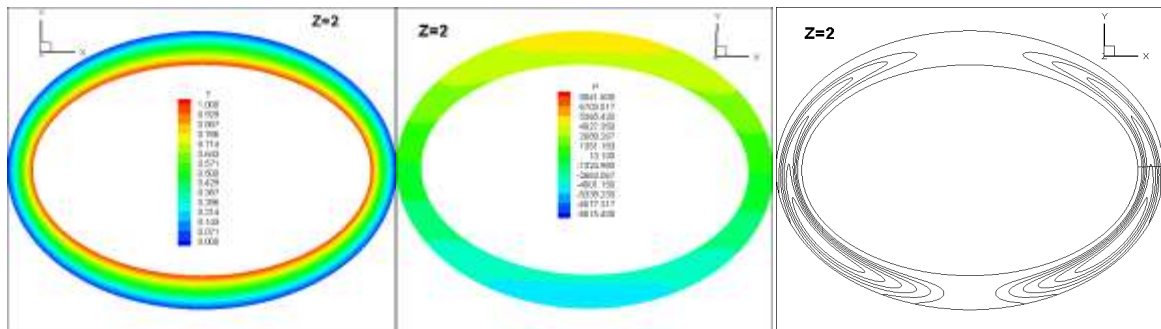
- **La pression** pour la variation de la pression on constate des variations radiales et angulaires. La valeur maximale de la pression est située en haut de l'enceinte et la valeur minimale est située dans le bas de l'enceinte.

- **Les lignes de courant**: L'écoulement s'organise en deux cellules symétriques qui tournent très lentement dans des sens opposés : la cellule gauche tourne dans le sens trigonométrique par contre la cellule droite tourne dans le sens horaire (les particules de fluide au contact de la paroi chaude s'échauffent et deviennent moins denses du fait de sa dilatation thermique et remontent sous l'action de la poussée d'Archimède, le fluide échange sa chaleur, se refroidit et s'alourdit. Il redescend sous l'effet de la pesanteur).



**Figure IV.2 :** Isothermes, la pression et les lignes de courant pour  $Gr= 10^4$

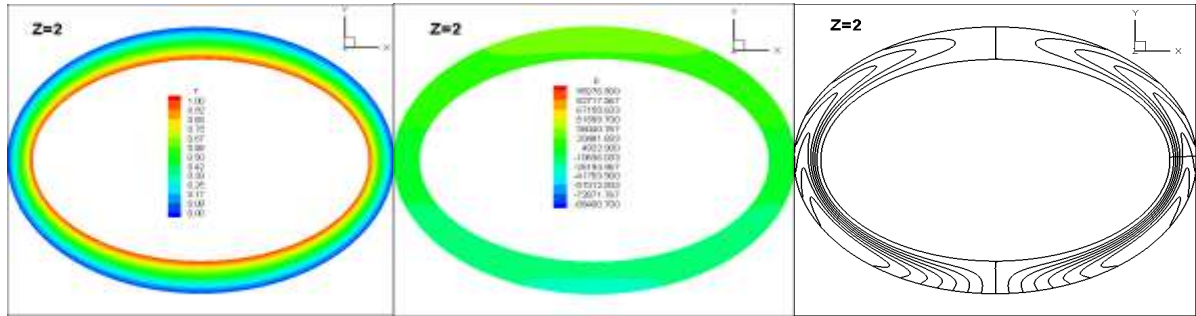
La figure (IV.2) illustre les résultats obtenus dans le cas où  $Gr=10^4$ . On constate que pour les lignes de courant l'écoulement commence déjà à se composer de deux cellules principales et chaque cellule contient un noyau situé à la partie inférieure de l'enceinte ce qui traduit une augmentation de la convection mais qui reste relativement faible comme le montre l'allure des lignes isothermes.



**Figure IV.3:** Isothermes, la pression et les lignes de courant pour  $Gr= 10^5$

La figure (IV.3) illustre la répartition des isothermes, la pression et les lignes de courant pour une valeur du nombre de Grashof ( $Gr=10^5$ ). On constate que pour cette valeur les lignes de courant sont déformés et confinés près de la paroi (froide) du cylindre extérieur de l'enceinte, ce qui traduit l'accélération de l'écoulement et le régime de l'écoulement reste monocellulaire.

Et pour la pression la valeur maximale est située en haut de l'enceinte et la valeur minimale est située dans le bas de l'enceinte avec une diminution de ces valeurs par rapport au cas précédent.



**Figure IV.4 :** Isothermes, la pression et les lignes de courant pour  $Gr= 10^6$

La figure (IV.4) représente les distributions des isothermes des lignes de courant, lorsque le nombre de Grashof égal à ( $Gr=10^6$ ). On remarque que les lignes de courant s'insèrent vers le bas de la section avec une déformation près du cylindre extérieur ceci est due au décollement des particules du fluide qui s'éloignent de la paroi chaude vers la paroi froide; ce qui implique que le mécanisme de transfert de chaleur par convection devient comparable à la conduction.

Les résultats des simulations numériques ont montré que :

- Pour une valeur du nombre de Grashof ( $Gr < 10^4$ ) le transfert de chaleur se fait par pseudo-conduction et le régime de l'écoulement est monocellulaire.
- Nous obtenons une convection naissante pour une valeur du nombre de Grashof supérieur à  $10^5$
- La convection naturelle s'intensifie avec l'augmentation du nombre de Grashof

# Conclusion générale

---

## Conclusion générale

La convection naturelle dans un espace annulaire délimité par deux cylindres elliptiques maintenus à des températures constantes et rempli par un milieu poreux saturé de fluide a été étudiée numériquement pour le cas bidimensionnel d'un écoulement laminaire et permanent, par la méthode des volumes finis et sous la formulation vortacité-fonction de courant, avec l'adoption du modèle de Darcy et l'approximation de Boussinesq.

Le modèle mathématique est représenté par les équations de continuité, de quantité de mouvement et de l'énergie. La méthode des volumes finis intégrée sur des volumes élémentaires de forme simple et les équations sont écrites sous forme de la loi de conservation. Elle fournit ainsi de manière naturelle des approximations discrètes conservatives et elle est donc particulièrement bien adaptée aux équations de la mécanique des fluides : équation de conservation de la quantité de mouvement et équation de conservation de l'énergie.

Les résultats montrent que le mode de conduction est prédominant dans le transfert de chaleur tant que le nombre de Grashof n'est pas élevé, mais avec l'augmentation du Grashof nous remarquons une naissance d'une couche limite qui devient de plus en plus mince, qui montre la présence de la convection donc l'augmentation du nombre de Grashof induisant un passage d'un mode de conduction en un mode de convection. D'après les résultats obtenus, on remarque que :

- Les isothermes sont approximativement parallèles et symétriques lorsque les nombres de Grashof sont faibles et que la conduction thermique est dominante
- Pour des valeurs inférieures à  $10^4$  du nombre de Grashof, on observe une dominance de transfert de chaleur par conduction. Mais avec des valeurs plus élevées du nombre de Grashof il y a une augmentation du mode de transfert de chaleur par convection.
- Pour la variation de la pression on constate des variations radiales et angulaires en chaque section. La valeur maximale de la pression est située en haut de l'enceinte et la valeur minimale est située dans le bas de l'enceinte avec une diminution de ces valeurs par l'augmentation du nombre de Grashof.
- Le régime de l'écoulement dans cette étude est un écoulement monocellulaire.

## ANNEXE : COORDONNES ELLIPTIQUES

### I. Introduction

Dans le référentiel elliptique représenté sur la figure (II.1), nous observons dans le plan (XY) un groupe d'ellipse et un groupe de paraboles :

- Les ellipses définies par  $U = \text{constant}$ , dont le grand axe est confondu avec l'axe(X)
- Les paraboles définies par  $V = \text{constant}$

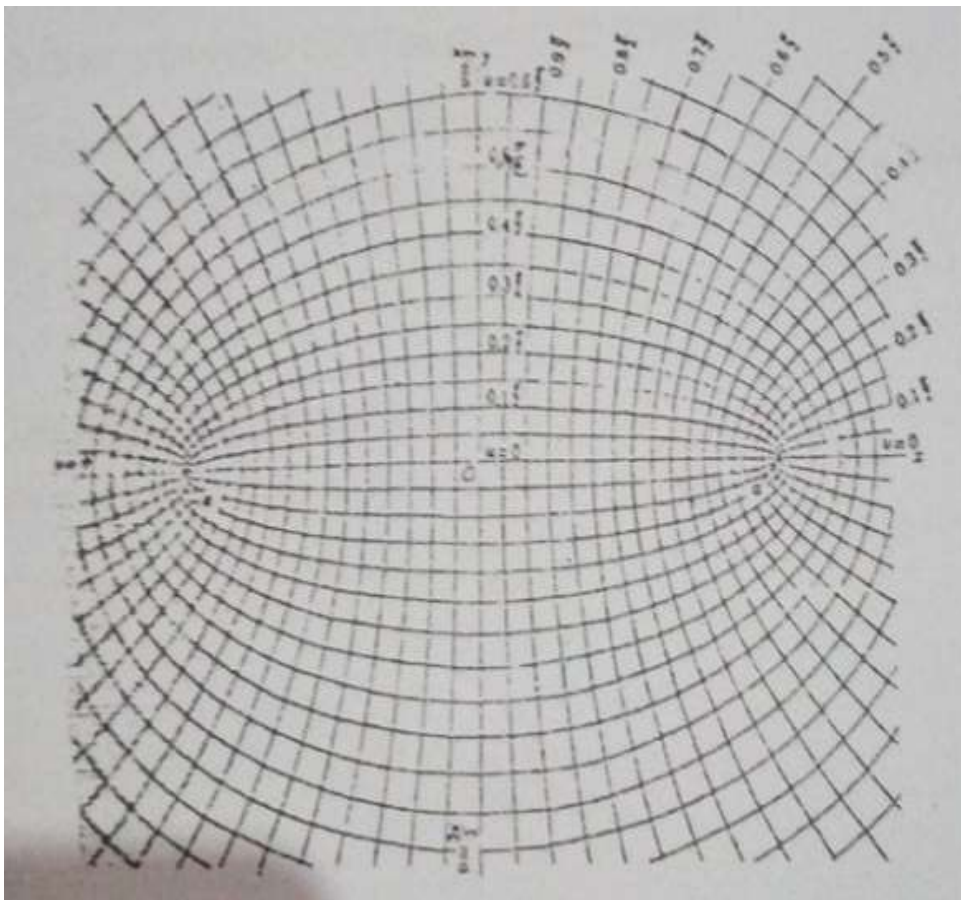


Figure (II.1) : Représentation schématique des coordonnées elliptiques

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques s'effectue l'aide des relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} X &= a \operatorname{ch} \eta \cos \theta \\ Y &= a \operatorname{sh} \eta \sin \theta \\ Z &= Z \end{aligned} \right\} \quad (II.1)$$

## ANNEXE : COORDONNES ELLIPTIQUES

Ces formules s'établissent comme suit, d'après la théorie des variables complexes.

$$Z = a \operatorname{chw} \quad (\text{II.2})$$

Avec

$$Z = x + i y \quad \text{Et} \quad W = \eta + i \theta$$

Nous avons :

$$\operatorname{chw} = \frac{e^w + e^{-w}}{2} = \frac{e^\eta e^{i\theta} + e^{-\eta} e^{-i\theta}}{2}$$

En développant les termes exponentiels, nous obtenons :

$$\operatorname{chw} = \cos \theta \operatorname{ch}\eta + i \sin \theta \operatorname{sh}\eta \quad (\text{II.3})$$

Introduisons cette valeur dans l'équation (II.2). Il vient :

$$Z = x + i y = a \operatorname{chw} = a (\cos \theta \operatorname{ch}\eta + i \sin \theta \operatorname{sh}\eta) \quad (\text{II.4})$$

L'identification de la partie réelle à X et de la partie imaginaire à y donne :

$$X = a \cos \theta \operatorname{ch}\eta$$

$$Y = a \sin \theta \operatorname{sh}\eta$$

### II. Démonstration géométrique

A partir du système (II.1), on a :

$$\cos \theta = \frac{X}{a \operatorname{ch}\eta} \quad \text{Et} \quad \sin \theta = \frac{Y}{a \operatorname{sh}\eta}$$

Soit :

$$\cos^2 \theta = \frac{X^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \eta} \quad \text{Et} \quad \sin^2 \theta = \frac{Y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta}$$

Comme :

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

On en déduit

$$\frac{X^2}{a^2 \operatorname{ch}^2 \eta} + \frac{Y^2}{a^2 \operatorname{sh}^2 \eta} = 1 \quad (\text{II.5})$$

## ANNEXE : COORDONNES ELLIPTIQUES

On passe :

$$\begin{cases} A = a \operatorname{ch}\eta \\ B = a \operatorname{sh}\eta \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Et comme :

$$\operatorname{ch}\eta > \operatorname{sh}\eta \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

On se ramène donc à l'équation d'une famille d'ellipse de grand axe  $A = a \operatorname{ch}\eta$  et de petit axe  $B = a \operatorname{sh}\eta$

L'équation (II.5) sera donc de la forme :

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1 \quad (\text{II.7})$$

### II. Coefficients métriques

En coordonnées cartésiennes un élément de longueur s'écrit :

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$$

Cet exemple nous conduit à écrire. Dans le cas général :

$$(ds)^2 = h_1 (dU_1)^2 + h_2 (dU_2)^2$$

Où :

$U_1$  et  $U_2$  Sont des coordonnées curvilignes, les quantités  $h_1$  et  $h_2$ , les coefficients métriques qui sont fonction, en général, les coordonnées.

En coordonnées cartésiennes, on a

$$h_X = h_Y = 1 \quad \text{Et en coordonnées elliptiques } h_\eta = h_\theta = a (\operatorname{sh}^2\eta + \operatorname{sin}^2\theta)^{1/2} \quad \text{et } h_Z = 1$$

Ces coefficients sont obtenus en utilisant les transformations (II.1) et les définitions suivantes :

$$h^2\eta = \left(\frac{\partial X}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)^2 \quad (\text{II.8})$$

$$h^2\theta = \left(\frac{\partial X}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (\text{II.9})$$

$$h^2Z = \left(\frac{\partial X}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial Z}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial Z}\right)^2 \quad (\text{II.10})$$

## ANNEXE : COORDONNES ELLIPTIQUES

Par suit on obtient :

$$h^2\eta = h^2\theta = \partial^2(\text{sh}^2\eta + \sin^2\theta) \quad (\text{II.11})$$

$$h^2Z = 1 \quad (\text{II.12})$$

En connaissant les coefficients métriques, on peut écrire les différentes expressions des gradients, divergences, rotationnels, etc.

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \vec{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X_2} \vec{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X_3} \vec{a}_3$$

Avec :

$h_1, h_2, h_3$  : Coefficients métriques

$X_1, X_2, X_3$  : Coordonnées curvilignes

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ \frac{\partial}{\partial X_1} (h_2 \cdot h_3 \cdot V_1) + \frac{\partial}{\partial X_2} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_2) + \frac{\partial}{\partial X_3} (h_1 \cdot h_2 \cdot V_3) \right\}$$

Avec :

$V_1, V_2, V_3$  : Composantes de la vitesse suivant  $X_1, X_2, X_3$

$$h_4 = h_1 \cdot h_2 \cdot h_3$$

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{h_4} \left\{ h_1 \left[ \frac{\partial}{\partial X_2} (h_3 V_3) - \frac{\partial}{\partial X_3} (h_2 V_2) \right] \vec{a}_1 + h_2 \left[ \frac{\partial}{\partial X_3} (h_1 V_1) - \frac{\partial}{\partial X_1} (h_3 V_3) \right] \vec{a}_2 + h_3 \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} (h_2 V_2) - \frac{\partial}{\partial X_2} (h_1 V_1) \right] \vec{a}_3 \right\}$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{h_4} \left[ \begin{aligned} & \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \right)}{\partial X_1} \frac{\partial \phi}{\partial X_1} + \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_2^2} + \frac{\partial \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \right)}{\partial X_2} \frac{\partial \phi}{\partial X_2} + \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X_3^2} \\ & + \frac{\partial \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \right)}{\partial X_3} \frac{\partial \phi}{\partial X_3} \end{aligned} \right]$$

Puisque dans notre cas, nous avons, en coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} h_1 = h\eta \\ h_2 = h\theta \\ h_3 = h_2 = 1 \end{cases} \quad \text{Et} \quad h\eta = h\theta = h$$

Et nous avons aussi :

## ANNEXE : COORDONNES ELLIPTIQUES

$$\begin{cases} X_1 = \eta \\ X_2 = \theta \\ X_3 = Z \end{cases} \quad \begin{cases} V_1 = V_\eta \\ V_2 = V_\theta \\ V_3 = V_Z \end{cases} \quad \text{Et} \quad \begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{a}_\eta \\ \vec{a}_2 = \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_3 = \vec{a}_Z \end{cases} \quad \text{Vecteurs unitaires suivant } \eta, \theta \text{ et } Z$$

Ceci nous permettra donc de simplifier les équations précédentes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \phi = -\frac{1}{h} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \vec{a}_\eta + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{a}_\theta \right] + \frac{\partial \phi}{\partial Z} \vec{a}_Z \quad (\text{II.13})$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} (hV_\eta) + \frac{\partial}{\partial \theta} (hV_\theta) \right] + \frac{\partial V_Z}{\partial Z} \quad (\text{II.14})$$

$$\text{rot } \vec{V} = \left[ \frac{1}{h} \frac{\partial V_Z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial Z} \right] \vec{a}_\eta + \left[ \frac{\partial V_\eta}{\partial Z} - \frac{1}{h} \frac{\partial V_Z}{\partial \eta} \right] \vec{a}_\theta + \left[ h \frac{\partial V_\theta}{\partial \eta} + V_\theta \frac{\partial h}{\partial \eta} - V_\eta \frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \vec{a}_Z \quad (\text{II.15})$$

$$\Delta \phi = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} \quad (\text{II.16})$$

### II.1. Exemple

Cas de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux (Figure I.2)

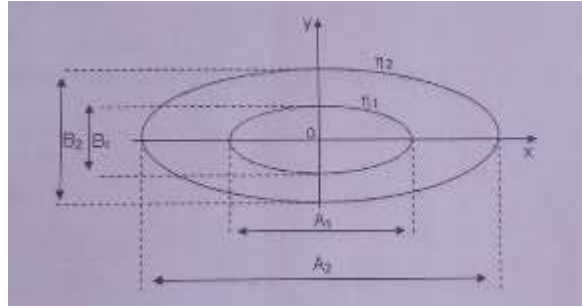


Figure (I.2) : Représentation schématique de deux cylindres elliptiques confocaux d'axes horizontaux

Les relations (2.6) nous donnent :

$$\frac{A}{B} = \coth \eta = \frac{e^{2\eta} + 1}{e^{2\eta} - 1} \quad (\text{II.17})$$

On en déduit :

$$e^{2\eta} = \frac{A+B}{A-B} \quad (\text{II.18})$$

Soit encore :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{A+B}{A-B} \right] \quad (\text{II.19})$$

Nous aurons donc pour le cylindre elliptique intérieur :

## ANNEXE : COORDONNES ELLIPTIQUES

$$\eta_1 = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{A_1 + B_1}{A_1 - B_1} \right] \quad (\text{II.19.a})$$

Et pour le cylindre extérieur :

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{A_2 + B_2}{A_2 - B_2} \right] \quad (\text{II.19.b})$$

### II.2. Excentricité de l'ellipse

L'excentricité d'une ellipse est donnée par :

$$e = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} \quad (\text{II.20})$$

Avec :  $0 < e < 1$

Et A et B sont respectivement le grand et le petit axe de l'ellipse. D'autre part la relation (II.17) donne :

$$\frac{A^2}{B^2} = \coth^2 \eta = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{sh}^2 \eta} \quad (\text{II.21})$$

Comme :

$$\text{ch}^2 \eta - \text{sh}^2 \eta = 1$$

On en déduit :

$$\text{ch}^2 \eta - 1 = \text{sh}^2 \eta \quad (\text{II.22})$$

En remplaçant (II.22) dans (II.21) on obtient :

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{\text{ch}^2 \eta}{\text{ch}^2 \eta - 1}$$

D'où :

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{\text{ch}^2 \eta - 1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{1}{\text{ch}^2 \eta}$$

On en déduit :

$$\frac{1}{\text{ch}^2 \eta} = 1 - \frac{B^2}{A^2} = \frac{A^2 - B^2}{A^2}$$

Soit encore :

## ANNEXE : COORDONNES ELLIPTIQUES

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\eta} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A} = e$$

On obtient donc :

$$e = \frac{1}{\operatorname{ch}\eta_1} \quad (\text{II.23})$$

On aura donc pour le cylindre elliptique intérieur :

$$e_1 = \frac{1}{\operatorname{ch}\eta_1} \quad (\text{II.23.a})$$

Et pour le cylindre elliptique extérieur :

$$e_2 = \frac{1}{\operatorname{ch}\eta_2} \quad (\text{II.23.b})$$

Les relations (II.21), (II.22) et (II.23) donnent :

$$\operatorname{th}^2\eta = \frac{\operatorname{ch}^2\eta - 1}{\operatorname{ch}^2\eta} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\eta} = 1 - e^2$$

On aura donc :

$$\operatorname{th}\eta = \sqrt{1 - e^2} = \frac{e^{2\eta} - 1}{e^{2\eta} + 1}$$

Ce qui donne :

$$e^{2\eta} = \frac{-(\operatorname{th}\eta + 1)}{\operatorname{th}\eta - 1}$$

Qui permet d'obtenir la relation suivante :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\sqrt{1 - e^2} + 1}{1 - \sqrt{1 - e^2}} \right] \quad (\text{II.23.c})$$

### II.3. Remarque

Soit donc :

$$e = \frac{1}{\operatorname{ch}\eta} = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{A}$$

Pour :

## ANNEXE : COORDONNES ELLIPTIQUES

---

$A=B$

On a

$e=0$

C'est dire  $\eta=0$ , on se ramène donc au cas d'un plan. Ce qui nous amène étudier deux cas particuliers :

1 – Cas d'un cylindre entourant une ellipse

2 – Cas d'une ellipse entourant un plan

## Références bibliographiques

---

### Les Références

- [1] Salima Bouchemella, Thème : Contribution à la simulation numérique des écoulements des eaux dans les milieux poreux non saturés, Thèse de Doctorat
- [2] Sassane Nadjette, Modélisation du transfert de chaleur lors de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'une paroi poreuse, Mémoire de Magister
- [3] Hussein Hoteit, Simulation d'écoulements et de transports de polluants en milieu poreux : Application a la modélisation de la sûreté des dépôts de déchets radioactifs, Thèse
- [4] Mr Benosman Fayçal, contribution à l'étude des phénomènes de transfère dans les milieux poreux fracturés, Mémoire de Magister
- [5] Lyacine Bennacer, Contribution à la connaissance des mécanismes de transfert et de retentions des particules solides dans les soles saturés, Thèse du Doctorat
- [6] Boutina Lyes, Étude numérique de la convection mixte en milieu poreux dans un canal contenant des composants Élect, Thèse du Doctorat
- [7] J. P. B. Mota and E. Saatdjan, On the réduction of natural convection heat transfer in horizontal eccentric annuli containing saturated porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 7 (1997), 401-416.
- [8] K. Himasekhar and H. H. Bau, Large Rayleigh number convection in a horizontal, eccentric annulus containing saturated porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29 (1986), 703-712
- [9] S. Bories, M. Prat, Transferts de chaleur dans les milieux poreux. Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse
- [10] Yoshihiro Mochimaru, Transient natural convection heat transfer in a spherical cavity, *Heat Transfer. Japanese Research*, Vol. 18, N°4, pp.9-19. (1989).
- [11] J. H. Lee, W. H. Park and M. Daguinet, Theoretical study o\ the natural convection flows in a partially filled vertical cylinder subjected to a constant wall temperature, 2nd ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference, Mars 22-27, Honolulu, Hawaii, pp. 1-6. (1984).

## Références bibliographiques

---

- [12] Salhi Hicham, Etude numérique de la convection naturelle dans les enceintes : Nano fluide, Thèse
- [13] Valérie Ménard, Convection naturelle dans une cavité contenant une source de chaleur, Thèse préparée au sein du département modèle pour l'aérodynamique et l'énergétique (DMAE) de l'ONERA-centre de Toulouse
- [14] Loujaine Yacine, Étude de la séparation thermogravitationnelle en milieu fluide ou poreux dans une enceinte soumise à des flux thermiques croisés , Doctorat de L'Université de Toulouse
- [15] Abderrahim Bourouis, Transfert convectif dans une cavité totalement ou partiellement occupée par une Matrice poreuse en ETL ou HETL, Thèse
- [16] Elmoustaine Brahim, Convection thermosolutale dans un milieu annulaire fluide de rapport de forme modéré, 16èmes Journées Internationales de Thermique (JITH 2013) Marrakech (Maroc), du 13 au 15 Novembre, 2013
- [17] E. H. Bishop, and C. T. Carley, Photographic studies of natural convection between concentric cylinders, Heat transfer and fluid Mechanics Institute Proceedings of the 1966. pp. 63-78, Stanford University Press, Stanford. (1966).
- [18] F. Zouiri, M.A. Oulmane, N. Labsi, Y.K. Benkahla, A. Boutra, convection naturelle au sein d'une cavité carrée munie d'une source chauffante placée sur sa paroi inférieure , Lille, 28 Août au 1er Septembre 2017
- [19] S.Manar, étude numérique de la convection naturelle au sein d'une cavité carrée avec chauffage et refroidissement variables, revue des énergies renouvelables Vol.17 N°2 (2014) 323-334,
- [20] Bouras Abdelkarim, contribution a l'étude des transferts de chaleur et de masse au sein d'un espace annulaire elliptique d'axe horizontal, Thèse, 17/12 /2015
- [21] E. Bilgen, Natural convection in cavities with a thin fin on the hot wall, Ecole Polytechnique Box 6079, Centre Ville, Montreal, QC, Canada H3C 3A7 Received 25 September 2004; received in revised form 25 March 2005 Available online 23 May 2005
- [22] Abdelkrim Fatima, Etude de la convection naturelle thermique dans une enceinte fermée, Mémoire, le 25 /06 /2018

## Références bibliographiques

---

- [23] Marle BLONDEL-ROUX, Convection naturelle entre deux sphères concentriques, Thèse, L'université de Bordeaux I, le 9 juillet 1983
- [24] Boulechfar Hichem, Simulation numérique des transferts de chaleur et de masse en milieux poreux saturés de fluide dans différents espaces annulaires, Thèse, le 27/11/2016
- [25] Suhas .V . **Patankar**, Numéral Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill,New York,1980.

### Résumé

Les transferts de chaleur par convection naturelle en régime laminaire et permanent dans un espace annulaire elliptique horizontal bidimensionnel rempli par un milieu poreux saturé de fluide newtonien et incompressible, est analysé numériquement en mettant au point un code de calcul aux volumes finis pour résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement, et de l'énergie, en utilisant la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq. Les surfaces intérieure et extérieure sont maintenues à la température constante. L'étude est réalisée pour les nombres de Grashof allant de  $5 \cdot 10^3$  à  $10^6$ . Nous avons étudié les effets des différents nombres de Grashof thermique sur la convection naturelle. Les résultats sont présentés sous forme des isothermes, des lignes de courant et de la pression. Le but de cette étude est de voir l'influence du nombre de Grashof sur la structure de l'écoulement et de la distribution de la température

### Abstract

The heat transfer by natural convection in a permanent laminar regime in a two-dimensional horizontal elliptical annular space filled with a porous medium saturated with Newtonian fluid and incompressible, is analyzed numerically by developing a finite volume calculation code to solve the equations of continuity, momentum, and energy, using Darcy's law and Boussinesq's approximation. The interior and exterior surfaces are kept at constant temperature. The study is carried out for Grashof numbers ranging from  $5 \cdot 10^3$  to  $10^6$ . We have studied the effects of different thermal Grashof numbers on natural convection. The results are presented as isotherms, streamlines, and pressure. The aim of this study is to see the influence of the Grashof number on the structure of the flow and the temperature distribution

### ملخص

يتم تحليل نقل الحرارة بالحمل الحراري الطبيعي في النظام الصفحي والدائم في فضاء حلقي بيضاوي أفقي ثنائي الأبعاد مملوء بوسط مسامي مشبع بالسائل النيوتوني وغير القابل للضغط ، رقمياً عن طريق تطوير كود حساب حجم محدود لحل معادلات الاستمرارية ، التيار والطاقة ، باستخدام قانون دارسي وتقريب بوسينسك. يتم الحفاظ على الأسطح الداخلية والخارجية في درجة حرارة ثابتة. تم إجراء الدراسة لأرقام جراشوف التي تتراوح من (  $5 \cdot 10^3$  و  $10^6$  ). لقد درسنا تأثيرات أعداد جراشوف الحرارية المختلفة على الحمل الحراري الطبيعي. يتم تقديم النتائج على شكل متساوي الحرارة، وخطوط التيار، والضغط. الهدف من هذه الدراسة هو معرفة تأثير رقم جراشوف على بنية التدفق وتوزيع درجات الحرارة.