

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx \quad (\text{Intégration par parties deux fois}).$$

$$b_k = 2 \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

2] la série de Fourier associée à $f: 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$

3] On peut écrire $f \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx$.

Puisque f est continue sur $[-\pi, \pi]$, 2π périodique et C^1 sur $[-\pi, \pi]$.

Ex N° 3

1] l'espace $L_T^2(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions périodiques de période T et de carré intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$.

le produit scalaire: $(f, g)_{L_T^2(\mathbb{R})} = \int_0^T f(x) \overline{g(x)} \, dx$

la norme: $\|f\|_{L_T^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{T} \int_0^T (f(x))^2 \, dx$

la base Hilbertienne: $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{i \frac{2\pi n}{T} x}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2] la série de Fourier de f converge vers f au sens quadratique ssi: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |f_n(x) - S_n(x)|^2 \, dx = 0$

Telle que $S_n(x)$ est la série des sommes partielles de la série de Fourier de f .