الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY

Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Existence et unicité des solutions d'une équation fractionnaire intégro-différentielle non linéaire à multi termes

Réalisé par : **Bouhzem zohra**

Dirigé par : **Mr. A. Bragdi**

Présenté le **27/08/2020**

Membres de jury :

Mr. B. Bahri	**Grade**	**Président**
Mme. I. Nasrallah	**Grade**	**Examinateur**

2019-2020

Dédicaces...

Je dédie ce mémoire :

A ma douce mère Khemissa et mon cher père Messoud en
reconnaissance des sacrifices qu'ils ont
fait pour nous tracer un chemin dans cette vie.
Que vie nous donne temps pour les remercier !
C'est grâce à leurs amours infinis, leurs patiences, leurs
inestimables
aide et ses conseils que ma vie s'est construite ! .
A ma chère grande mère.
A mon très cher frère Hamza, son épouse
Et leurs petites filles
⋘Nourseen et Aryam ⋙
A ma très chère sœur Linda, son mari Abdel Halim et
leurs enfants
⋘Loujain et Abdel Basit ⋙
A ma très chère soeur Zeineb
A mes chers amis Ferial,khadidja et Khouloud
A toute la famille "Bouhzem"...

Remerciements...

Tout d'abord je remercie "Allah" , le clément,le miséricordieux , le plus puissant,d'être avec moi et de m'aider.

Après je tient à exprimer
mon profond respect, et de reconnaissance à mon encadreur de mémoire : Mr.A.Bragdi ,pour ces conseils,
et son encouragement durant la période de la préparation et la rédaction de ce mémoire.

Je remercier sincèrement les membres du jury :
Mr.B.Bahri, d'avoir accepté la présidence du jury .
Aussi je remercier vivement Mme.I.Nasrallah.et
d'avoir accepté l'examinateur de ce travail.

Je les remercier
énormément pour l'attention qu'ils ont accordé à ce travail .

Il est important pour moi de remercier ma famille : qui
ont toujours été une source inépuisable d'encouragement .

Il est important pour moi de remercier
tous mes enseignants d'université de Abes Laghrour.

Un grand
merci à mes collègues pour le soutien qui m'ont donnés .

Merci à tous ceux qui ont
contribué, de prés ou de loin, à l'aboutissement de ce travail .

Lieu, le 6 novembre 2020.

Table des matières

Notations...

$C\left([0,1]\right)$	espace des fonctions continues sur $[0,1]$
$C^k\left([0,1]\right)$	espace des fonctions dérivables n fois et continues.sur$[0,1]$
$L^p\left([0,1]\right)$	espace des fonctions mesurables de puissance $p \in [0,+\infty[$ intégrables sur$[0,1]$.
${}^R D^\alpha$	la dérivée fractionnaire au sens de Riemanne-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
${}^c D^\alpha$	la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$.
I^α	l'intégrale fractionnaire au sens de Riemanne-Liouville d'ordre $\alpha > 0$.
$\Gamma\left(.\right)$	La fonction Gamma.
$B\left(.,.\right)$	La fonction Bêta

Abréviations...

EDF	Equation différentielle fractionnaire.
EDIF	Equation différentielle integro-fractionnaire
R.L	Riemanne-Liouville

Introduction Générale...

Le sujet du calcul fractionnel (c'est-à-dire le calcul des intégrales et des dérivés d'ordre non entier, réel ou complexe) n'est pas nouveau, la théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui, les origines remontent à la fin du $17^{ème}$ siècle, l'époque où Isaac Newton et Gottfried Wihelm Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier Leibniz a introduit le symbole $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{ème}$d'une fonction f .quand il a annoncé dans une lettre
à l'Hôpital en 1695, avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$,
l'Hôpital a répondu :

$$\ll \text{Que signifie } \frac{d^n f}{dx^n} sin = \frac{1}{2}? \gg$$

Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel), a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.

Les équations di érentielles fractionnaires peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie tels que l'acoustique, électrochimie, viscoélasticité, rhéologie, fractales, dynamique chaotique, physique des polymères, électromagnétique, médecine, économie, astrophysique, génie chimique, physique statistique, thermodynamique, bioingénierie, etc.

On peut noter ici que la plupart des travaux sur le calcul fractionnaire sont consacrés à la solvabilité des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles fractionnaires linéaires . Récemment, d'autres résultat traitant l'existence, l'unicité des solutions des problèmes fractionnaires non linéaire par l'utilisation des techniques d'analyse non linéaire comme les théorèmes de point fixe telle que : celui de Banach, Krasnoselskii et Schauder.

en 2007, Xinwei et Landong[Xinwei, 2007a] ont examiné l'existence des solutions d'un problème de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire non linéaire données par :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha u(t) = f\left(t, u(t), {}^cD^\beta u(t)\right), \quad 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 1. \\ u(0) = u'(1) = 0, ou\ u'(0) = u(1) = 0, ou\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où${}^{c}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α et
$f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonctions continues donnée.

Su et Zhang en 2009 [Su, 2009],ont étudié.l'existence et l'unicté de la solution du problème de l'équation différentielle d'ordre fractionnaire non linéaire suivante :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}u(t) = f\left(t, u(t), {}^{c}D^{\beta}u(t)\right), & 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2, 0 < \beta \leq 1. \\ a_1 u(0) - a_2 u'(0) = A, et\ b_1 u(1) + b_2 u'(1) = B. \end{cases}$$

Une autre étude dans en 2010 [Ahmad, 2010] où Ahmad et Sivasundaram a étudié l'existence des solutions d'un problème de l'équation fractionnaire intégro-différentielle non linéaire données par :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}u(t) = f(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t)), & 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2 \\ u'(0) + au(\eta_1) = 0, et\ bu'(1) + u(\eta_2) = 0. \end{cases}$$

où $0 < \eta_1 \leq \eta_2 < 1, a, b \in [0,1]$ et ${}^{c}D^{\alpha}$désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre αet $f : [0,1] \times X \times X \times X \longrightarrow X$ est une fonctions continues,puis ϕ, ψ sont deux applications définies par $(\phi u)(t) = \int_0^t \gamma(t,s) u(s)\, ds$, $(\psi u)(t) = \int_0^t \lambda(t,s) u(s)\, ds$,avec $\gamma, \lambda : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0, +\infty[$,telle que : $\sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t \gamma(t,s)\, ds \right| < \infty$ et $\sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t \lambda(t,s)\, ds \right| < \infty$.,$X$ espace de Banach.

L'objectif principal de ce mémoire est l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégro-différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions non locales Ce mémoire se compose de trois chapitres :

Le premier chapitre
notions et définitions concernant la dérivation et d'intégration fractionnaire au sens de Riemann Liouville et Caputo, et leurs propriétés.

Le deuxième chapitre.
nous citons quelques théorèmes du point fixe.

Le dernier chapitre,
nous étudions l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégro-différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions non locales et on a donner un example .

1 Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre nous nous intéressons au calcul fractionnaire et surtout la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. Nous donnons ici quelque définitions et propriétés des fonctions Spéciales.

1.1 Fonctions Spéciales

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma , Bêta et leurs propriétés,Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et dans la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire.

1.1.1 La fonction Gamma

L'un des outils de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.1. [K.S. Miller, 1993, Erdelyi A et F., 1981] La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \, , x > 0 \tag{1.1}$$

Proposition 1.2. Pour tout $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1.2}$$

en particulier $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Démonstration. soit $x > 0$, nous avons :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

en effectuant une intégration par partie, nous avons :

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \left. \frac{e^{-t} t^x}{x} \right|_0^{+\infty} + \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{x} \Gamma(x+1) \end{aligned}$$

Alors :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Et par récurrence, on trouve :

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

□

Exemple. 1. $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Démonstration. 1. D'après a propriété (1.2)nous avons :

$$\Gamma(1) = 1!$$

$$\Gamma(2) = 1! = 1.$$

2. Nous montrons maintenant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
De la définition (1.1) nous avons

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{1}{2}-1} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt\end{aligned}$$

Si nous posons $t = \tau^2$, alors $dt = 2\tau d\tau$, et nous obtenons maintenant

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau$$

sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (intégrale de Gauss) ,il vient que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

□

1.1.2 La fonction Bêta

Permi les fonctions de base du calcul fractionnair la fonction Bêta. cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine

Définition 1.3. [K.S. Miller, 1993, S.G. Samko et Marichev., 1993] La fonction Bêta est une fonction définie par :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \text{ ,} \forall x, y > 0 \tag{1.3}$$

Remarque. La fonction Bêta est symétrique i.e

$$B(x,y) = B(y,x)$$

Proposition 1.4. [Erdelyi A et F., 1981]

La fonction Bêta est liée à de la fonction Gamma par la relation suivant :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \forall x,y > 0. \tag{1.4}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-t_1}e^{-t_2}t_1^{x-1}t_2^{y-1}dt_1dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}dt_1 \int_0^{+\infty} e^{-|t_1+t_2|}t_2^{y-1}dt_2 \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = t_{1+}t_2$$

on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1}dt_1 \int_{t_1}^{+\infty} e^{-\tau}(\tau-t_1)^{y-1}d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}d\tau \int_0^{t_1} (\tau-t_1)^{y-1}t_1^{x-1}dt_1 \end{aligned}$$

on pose $\tau' = \frac{t_1}{\tau}$,on arrive à

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}d\tau \int_0^1 (\tau-\tau\tau')^{y-1}(\tau\tau')^{x-1}\tau d\tau' \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}d\tau \int_0^1 (\tau)^{x+y-1}(1-\tau')^{y-1}(\tau')^{x-1}d\tau' \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau}(\tau)^{x+y-1}d\tau B(x,y) \\ &= \Gamma(x+y)B(x,y). \end{aligned}$$

□

1.2 L'intégrale fractionnaire

Dans cette section , on va définir l'integrale d'ordre fractionnaire au sens de Rimann-Liouville.

1.2.1 L'intégrale fractionnaire

Définition 1.5. [I.Podlubny., 1999, Podlubny, 1998] [B. Guo, 2015] Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, T]$, $T > 0$,On considère l'intégrale :

$$I^1 f(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= \int_0^t I^{(1)} f(s)\, ds \\ &= \int_0^t \left(\int_0^s f(r)\, dr \right) ds \\ &= \int_0^t ds \int_0^s f(r)\, dr. \end{aligned}$$

D'après Le Théorème de Fubini On Trouve :

$$\begin{aligned} I^2 f(t) &= \int_0^t \left(\int_r^t ds \right) f(r)\, dr \\ &= \int_0^t (t-r) f(r)\, dr \end{aligned} \tag{1.5}$$

Alors

$$I^2 f(t) = \int_0^t (t-s) f(s)\, ds$$

de même, on a

$$\begin{aligned} I^3 f(t) &= \int_0^t I^2 f(s)\, ds \\ &= \int_0^t \int_0^s (s-r) f(r)\, drds \\ &= \int_0^t ds \int_0^s (s-r) f(r)\, dr \end{aligned}$$

D'après Le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned} &= \int_0^t dr \int_r^t (s-r) f(r)\, ds \\ &= \int_0^t f(r)\, dr \int_r^t (s-r)\, ds \\ &= \int_0^t \frac{(t-r)^2}{2} f(r)\, dr \end{aligned}$$

Alors

$$I^3 f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2 f(s)\, ds.$$

Donc, pour n^{ieme} itération, on a la formule de Cauchy :

$$I^n f(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)\, dt_n$$

$$I^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds. \qquad (1.6)$$

Pour tout entier n.

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$ nous avons :

$$I^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)\, ds, n \in \mathbb{N}^* \qquad (1.7)$$

1.2.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Rimann s'est rendu compte que le second membre de (1.7) paurrait avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière, il a définit l'intégrale fractionnaire de la manière suivante :

Définition 1.6. [S.G. Samko et Marichev., 1993, J. Spanier, 1974] Soient α un réel positif et $f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $T > 0$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de f l'intégrale suivante :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \alpha > 0, t > 0 \qquad (1.8)$$

Soit $f(t) = t^\beta$ avec $\beta > -1$,l'intégrale de f au sens de Riemann-Liouville est donnée par :

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta ds \qquad (1.9)$$

en utilisant le changement de variable

$$s = tx$$

où $x = 0$ quand $s = 0$ et $x = 1$ quand $s = t$et $ds = tdx$, alors (1.9) devient

$$\begin{aligned} I^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-tx)^{\alpha-1} (tx)^\beta t dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t(1-x)]^{\alpha-1} x^\beta t^\beta t dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^\beta t^{\alpha-1} t^{\beta+1} dx \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^\beta dx. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.3),on a :

$$I^{\alpha}\left(t^{\beta}\right)=\frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta+1) \tag{1.10}$$

D'après la relation (1.4) , on a :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}\right) \\ &= t^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t)=t^{\beta}$ est donnée par :

$$I^{\alpha}\left(t^{\beta}\right)=t^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}. \tag{1.11}$$

En particulier, la relation (1.11)montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha>0$ d'une constante est donnée par :

$$I^{\alpha}(C)=\frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}.$$

Proposition 1.7. [I.Podlubny., 1999]
Soit $\alpha>0,\beta>0$,pour tout fonction f continue sur$[0,T]$,on a :

1. $I^{\alpha}\left(I^{\beta}f\right)=I^{\alpha+\beta}f.$
2. $\frac{d}{dt}\left(I^{\alpha}f\right)(t)=\left(I^{\alpha-1}f\right)(t)$,$\alpha>1$.

Démonstration. 1. d'après la définition (1.8),on a :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left(I^{\beta}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} I^{\beta}f(s)\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^s (s-r)^{\beta-1}f(r)\,dr\right)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,ds\int_0^s (s-r)^{\beta-1}f(r)\,dr \end{aligned}$$

D'après Théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left(I^{\beta}f(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,dr\int_r^t (s-r)^{\beta-1}f(r)\,ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t f(r)\,dr\int_r^t (t-s)^{\alpha-1}(s-r)^{\beta-1}\,ds \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$s = r + x\,(t - r)$$

où $x = 0$ quand $s = r$ et $x = 1$ quand $s = t$ et $ds = (t - r)\,dx$, on obtient :

$$I^{\alpha}\left(I^{\beta} f\,(t)\right) = \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)\,\Gamma\,(\beta)} \int_0^t (t - r)^{\alpha+\beta-1} f\,(r)\,dr \int_0^1 (1 - x)^{\alpha-1}\, x^{\beta-1} dx$$

Enfin, en tenant compte de la définition de la fonction Bêta(1.3) puis de la relation (1.4), on obtient :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left(I^{\beta} f\,(t)\right) &= \frac{1}{\Gamma\,(\alpha+\beta)} \int_0^t (t - s)^{\alpha+\beta-1} f\,(s)\,ds \\ &= I^{\alpha+\beta} f\,(t)\,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(I^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f\,(t)\,ds\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma\,(\alpha)} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t (t - s)^{\alpha-1} f\,(s)\,ds\right) \end{aligned}$$

puisque $f\,(s)$ et $(t - s)^{\alpha-1}$ sont continues donc l'application :

$$s \longrightarrow (t - s)^{\alpha-1} f\,(s)$$

est continue, et ona alors :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(I^{\alpha}f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{d}{dt}\left((t-s)^{\alpha-1}f(s)\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (\alpha-1)(t-s)^{\alpha-2}f(s)\,ds \\
&= \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}f(s)\,ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-2}f(s)\,ds \\
&= I^{\alpha-1}f(t).
\end{aligned}$$

□

1.3 Dérivées Fractionnaires

Le but de cette section est présentons les deux plus importantes approches du calcul fractionnaire : la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et au sens de Caputo, y compris quelques unes de leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches.

1.3.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.8. [A. Kilbas, 2006]
soit $f \in L^1([0,T])$,une fonction intégrable sur $[0,T]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ notée ${}^RD^{\alpha}f$ est définie par :

$$\begin{aligned}
{}^RD^{\alpha}f(t) &= D^nI^{n-\alpha}f(t) \qquad (1.13)\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}f(s)\,ds
\end{aligned}$$

$t > 0, n = [\alpha] + 1.$

où $[.]$ dénote la partie entière d'un nombre réél..

Remarque. 1. pour $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
{}^RD^{n}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\right)\int_0^t f(s)\,ds \\
&= \frac{d^n}{dt^n}f(t) \\
&= f^{(n)}(t).
\end{aligned}$$

où $f^{(n)}(t)$ désigne la dérivée usuelle d'ordre n de $f(t)$.
En particulier :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{0}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_{0}^{t} f(s)\,ds \\ &= f(t). \end{aligned}$$

2. pour $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$. alors

$$ {}^{R}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha} f(s)\,ds, t > 0. $$

Exemple. la dérivée de Riemann-Liouville de la fonction f avec $\alpha > 0$:

$$ f\ (t) = \ t^{\beta}\ , t > 0, \beta > -1 $$

D'aprés (1.13) on a :

$$ {}^{R}D^{\alpha}t^{\beta} = D^{n}I^{n-\alpha}\left(t^{\beta}\right) $$

en utilisant (1.10) ,on obtient :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{\alpha}t^{\beta} &= \left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}\right)\left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}t^{\beta+n-\alpha}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}\right)t^{\beta+n-\alpha} \end{aligned} \qquad (1.14)$$

En tenant compte

$$\begin{aligned} \frac{d^{n}}{dt^{n}}t^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1)\ldots(\beta-\alpha+1)\,t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f est donnée par :

$$ {}^{R}D^{\alpha}t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha}. \qquad (1.15)$$

En particulier,Si $\beta = 0$ la relation (1.15)montre que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une constante $f(t) = C$ est donnée par :

$$^{R}D^{\alpha}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha} \tag{1.16}$$

Alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante$f(t) = C$ est non nulle.

Proposition 1.9. [K.S. Miller, 1993] [A. Kilbas, 2006]

1. Pour $\alpha, \beta > 0$ et $n = [\alpha] + 1, m = [\beta] + 1$ tel que $(n, m \in \mathbb{N}^*)$on a :
   L'opérateur de Riemann-Liouville est linéaire

   $$^{R}D^{\alpha}(\lambda f + g)(t) = \lambda\left(^{R}D^{\alpha}f\right)(t) + \left(^{R}D^{\alpha}g\right)(t), \lambda \in \mathbb{R}, t > 0 \tag{1.17}$$

2. soient $f \in L^1([0, T])$,une fonction intégrable sur $[0, T]$vérifiant :

   $$^{R}D^{\alpha}f(t) = 0$$

   alors :
   pour $n - 1 < \alpha < n$,et $n = [\alpha] + 1$.

   $$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1-n)} t^{k+\alpha-n}, \forall C_0, C_1, \ldots C_{n-1} \in \mathbb{R} \tag{1.18}$$

   En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors

   $$f(t) = Ct^{\alpha-1}, \forall C \in \mathbb{R}.$$

3. la propriété qui peut être la plus importante de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann_Liouville est que :

   $$^{R}D^{\alpha}I^{\alpha}f(t) = f(t), t > 0, \alpha > 0. \tag{1.19}$$

Démonstration. 1. soit $f, g \in L^1([0, T])$, $\lambda \in \mathbb{R}$,on a :

$$\begin{aligned} ^{R}D^{\alpha}(\lambda f + g)(t) &= D^n I^{n-\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) \\ &= \lambda D^n I^{n-\alpha}((f+g)(t)) \end{aligned}$$

comme la dérivée $n^{ième}$ et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{\alpha}\left(\lambda f+g\right)(t) &= \lambda D^{n}I^{n-\alpha}f(t)+D^{n}I^{n-\alpha}g(t) \\ &= \lambda\left({}^{R}D^{\alpha}f\right)(t)+\left({}^{R}D^{\alpha}g\right)(t). \end{aligned}$$

2. soit ${}^{R}D^{\alpha}f(t)=0$,d'après (1.13) , on a :

$${}^{R}D^{\alpha}f(t)=D^{n}I^{n-\alpha}f(t)=0.$$

C'est-à-dire que la dérivée d'ordre n de $\left(I^{n-\alpha}f\right)$ est nulle.donc ,on peut écrire :

$$I^{n-\alpha}f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{k}t^{k},\forall C_0,C_1,\ldots C_{n-1}\in\mathbb{R} \tag{1.20}$$

L'application de I^{α} aux deux membres de l'identité obtenue (1.20) ; donne :

$$\begin{aligned} I^{n-\alpha+\alpha}f(t) &= I^{n}f(t) \qquad (1.21)\\ &= I^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_{k}t^{k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}C_{k}I^{\alpha}\left(t^{k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\left(\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}\right)t^{k+\alpha}. \end{aligned}$$

Ensuite, on applique D^{n} à (1.21) ; on obtient :

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\left(\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}\right)D^{n}t^{k+\alpha} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\left(\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)}\right)\left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\alpha+1-n)}t^{k+\alpha-n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1-n)}t^{k+\alpha-n} \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_{k}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1-n)}t^{k+\alpha-n} \tag{1.22}$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$ et $n = 1$ alors :

$$f(t) = Ct^{\alpha-1}, \forall C \in \mathbb{R}.$$

3. D'après la définition(1.13) ,on a :

$$\begin{aligned} {}^{R}D^{\alpha} I^{\alpha} f(t) &= D^{n} I^{n-\alpha} I^{\alpha} f(t) \\ &= D^{n} I^{n} f(t) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

□

1.3.2 Dérivée fractionnaire au sens de caputo

Définition 1.10. [A. Kilbas, 2006]
soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$, et $f \in C^{n}([0,T])$,une fonction intégrable sur $[0,T]$, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo de f d'ordre α notée ${}^{c}D^{\alpha} f$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha} f(t) &= I^{n-\alpha}(D^{n} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds \end{aligned} \tag{1.23}$$

Remarque. 1. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1.$,la dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha} f(t) &= I^{1-\alpha}(Df)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{t} (t-s)^{-\alpha} f^{(1)} ds \\ &= I^{1-\alpha} f'(t) \end{aligned}$$

2. si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ la dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par :

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{n} f(t) &= I\left(D^{n+1} f\right)(t) \\ &= \frac{d^{n}}{dt^{n}} f(t) \\ &= f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

En particulier,

$$^{c}D^{0}f(t) = f(t).$$

Lemme 1.11. [A. Kilbas, 2006]
Supposons que $f \in L^{1}([o, T]), T > 0$,et $\alpha > 0$alors :

$$I^{\alpha c}D^{\alpha}f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}t^{k} \tag{1.24}$$

Proposition 1.12. [Podlubny, 1998]

1. soit $n-1 < \alpha < n$,$n \in \mathbb{N}$, $\lambda \epsilon \mathbb{R}, f \in L^{1}([0, T])$,La dérivation fractionnaire Caputo est une opération linéaire :
$$^{c}D^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) = \lambda^{c}D^{\alpha}f(t) +^{c}D^{\alpha}g(t)$$
2. soit $\alpha > 0, f$ une fonction intégrable sur $[0, T]$vérifiant :
$$^{R}D^{\alpha}f(t) = 0$$
alors :
$$f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}C_{k}t^{k}, \forall C_{0}, C_{1}, \ldots C_{n-1} \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$
3. pour $f \in L^{1}([0, T])$ $\alpha > 0$,alors :
$$({}^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}f)(t) = f(t).$$
4. Soit $\alpha > 0, \beta > 0$,avec $n = [\alpha] + 1$, et $f \in C^{n}([0, T])$ on a :
$$^{c}D^{\alpha}\left({}^{c}D^{\beta}f(t)\right) =^{c} D^{\alpha+\beta}f(t). \tag{1.26}$$

Démonstration. 1. soit $n-1 < \alpha < n$,$n \in \mathbb{N}$, $\lambda \epsilon \mathbb{R}$,
$f \in L^{1}([0, T])$,ona:

$$\begin{aligned} ^{c}D^{\alpha}(\lambda f(t) + g(t)) &= I^{n-\alpha}D^{n}(\lambda f(t) + g(t)) \\ &= \lambda I^{n-\alpha}D^{n}(f(t) + g(t)). \end{aligned}$$

on a la dérivée $n^{i\grave{e}me}$ et l'itégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned} ^{c}D^{\alpha}(\lambda f + g)(t) &= \lambda I^{n-\alpha}D^{n}f(t) + I^{n-\alpha}D^{n}g(t) \\ &= \lambda({}^{c}D^{\alpha}f)(t) + ({}^{c}D^{\alpha}g)(t). \end{aligned}$$

2. soit ${}^{c}D^{\alpha}f(t)=0$,d′après (1.23) , on a

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D^{\alpha}f(t) = I^{n-\alpha}D^{n}f(t) &= 0 \\
&\Rightarrow\ f^{(n)}(t)=0 \\
&\Rightarrow\ f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k t^k
\end{aligned}
$$

Finalement on obtient :

$$
f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}C_k t^k, \forall C_0, C_1, \ldots C_{n-1}\in\mathbb{R}
$$

3. soit $f\ \in L^1([0,T])$ on a :

$$
\begin{aligned}
({}^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}f)(t) &= I^{n-\alpha}D^{n}(I^{\alpha}f(t)) \\
&= I^{n}D^{n}(f(t)) \\
&= f(t)
\end{aligned}
$$

Alors, L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire.

4. D'apres la définition (1.23) , on a :

$$
\begin{aligned}
{}^{c}D^{\alpha}\left({}^{c}D^{\beta}f(t)\right) &= {}^{c}D^{\alpha}\left(I^{n-\beta}D^{n}f(t)\right) \\
&= I^{n-\alpha}D^{n}\left(I^{n-\beta}D^{n}f(t)\right) \\
&= I^{n-(\alpha+\beta)}D^{n}I^{n}D^{n}f(t) \\
&= I^{n-(\alpha+\beta)}D^{n}f(t) \\
&= {}^{c}D^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}
$$

□

Exemple. La dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction $f(t)=t^{\beta}$:
soit n un entier et $0\leq n-1<\alpha<n$ avec $\beta>n-1$,alors on a :

$$
f^{(n)}(s)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}s^{\beta-n},
$$

d'où

$$
{}^{c}D^{\alpha}t^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \qquad (1.27)
$$

effectuant le changement de variable

$$s = tx,$$

où $x = 0$ quand $s = 0$ et $x = 1$ quand $s = t$ et $ds = tdx$, alors(1.27) devient :

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}t^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (t-tx)^{n-\alpha-1}(tx)^{\beta-n}\,tdx \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}t^{\beta-\alpha}\int_0^1 (1-x)^{n-\alpha-1}x^{\beta-n}dx \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction Bêta(1.3)puis de la relation (1.4) ,on a :

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}t^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaie au sens de Caputo de la fonction $f(t) = t^{\beta}$est donnée par :

$$ {}^{c}D^{\alpha}t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}t^{\beta-\alpha}. \tag{1.28}$$

En particulier, l'utilisation de la formule (1.23) pour calculer la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une constante $C \in \mathbb{R}$ exprime que cette dérivée est nulle c'est-à-dire :

$${}^{c}D^{\alpha}C = 0.$$

Relation entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle de Riemann-Liouville

Théorème 1.13. *[K.S. Miller, 1993] [A. Kilbas, 2006]*
soient $f \in C^n([0,T])$ *,et* $\alpha > 0$*,avec* $n = [\alpha] + 1$*, alors :*

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = {}^{R}D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)\,t^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \tag{1.29}$$

En particulier ,pour $0 < \alpha < 1$*,et* $n = 1$ *ona :*

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = {}^{R}D^{\alpha}f(t) - \frac{f(0)\,t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \tag{1.30}$$

Remarque. Si $f^{(k)}(0) = 0$ pour $k = 0, \ldots, n-1$, alors :

$$^{c}D^{\alpha} f(t) = {}^{R}D^{\alpha} f(t).$$

2 Quelques Théorèmes de point fixe

Le but de ce chapitre est l'étude de quelques théorèmes du point fixe. On commencera par le plus simple et le plus connu d'entre eux : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes qui assure l'existence et l'unicité. On verra ensuite le théorème du point fixe de Schauder n'assure que l'existence seulement Enfin nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

2.1 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach (connu aussi sous le nom principe de l'application contractante) est un théorème simple à prouver, qui garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante,

2.1.1 Théorème de l'application contractante

Définition 2.1. (Point fixe).[Smart, 1974]
Soit X un espace de Banach et $T\ : X \longrightarrow X$.une application continue ,On appelle point fixe de T tout point x^*tel que

$$T\left(x^*\right) = x^*. \tag{2.1}$$

Définition 2.2. (Application Lipschitzienne)[J. Spanier, 1974, Smart, 1974]
Soit X un espace de Banach,muni de la norme $\|.\|_X$ et $T\ : X \longrightarrow X$ une application continue, on dit que T est lipschitzienne de constante $K \geq 0$,si elle vérifie :

$$\forall x, y\ \in\ X\ , \|T\left(x\right) - T\left(y\right)\|_X \leq K \|x - y\|_X \tag{2.2}$$

Théorème 2.3. *(Application contractante)[J. Spanier, 1974]*
Soit X un espace de Banach, et $T\ : X \longrightarrow X$ une application continue, on dit queT est contractante si T est lipschitzienne de rapport $K < 1$:

$$\exists K < 1 : \forall x, y\ \in X : \|T\left(x\right) - T\left(y\right)\|_X \leq K \|x - y\|_X \tag{2.3}$$

2.1.2 Principe des applications contractantes

Théorème 2.4. *(Le théorème du point fixe de Banach) [J. Spanier, 1974]*
Soit X un espace de Banach, et $T\ : X \longrightarrow X$ un opérateur contractant alors T admet un point fixe unique,c'est-à-dire :

$$\exists! x^* \in X,\ :\ T\left(x^*\right) = x^*. \tag{2.4}$$

2.2 Théorème du point fixe de Schauder

Définition 2.5. Soit $T : X \longrightarrow E$ un opérateur.On dit que :
- T est compact si l'image par T de tout borné de X est relativement compact (c'est-à-dire que son adhérence est compact)dans E.
- T est dit complètement continu s'il est continu et compact.

Théorème 2.6. *(Arzela-Ascoli) :[Hale et Lune, 1993]*
Soit $C\left(X\right)$ l'espace des fonctions continues sur un espace X de Banach , pour qu'un ensemble $M \subset\ C\left(X\right)$ soit relativement compacte, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit :

— *Uniformément bornée :*

$$\exists c \geq 0; \forall x \in M, : \ \|x(t)\| \leq c, \forall t \in X. \tag{2.5}$$

— *Equicontinue :*

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &> 0, \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in X \ : \\ |t_1 - t_2| &< \delta \Longrightarrow |x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon, \forall x \in M. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Théorème 2.7. *(Théorème de point fixe de Schauder).[Zeidler, 1986]*
Soit Eun sous ensemble de X et $f \ : E \longrightarrow X$ une fonction continue, E compact, convexe et X espace de Banach. Alors f admet un point fixe dans E.

2.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Théorème 2.8. *(Krasnoselskii)[Stuckless, 2003]*
Soit E un sous-ensemble d'un espace X, et $f, g : E \longrightarrow X$:

— *E :fermé, convexe.*
— *X :espace de Banach.*
— *f et g sont continus,f est compact, g est une contraction et $f(x) + g(y) \in E$, $\forall x, y \in E$.*
Alors $f + g$ admet un point fixe x^*dans E tel que $f(x^*) + g(x^*) = x^*$.

3 Equation fractionnaire intégro-différentielle non linéaire à multi termes

Dans ce chapitre est consacré à prouver l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation intégro-différentielle fractionnaire non linéaire avec des conditions multi termes [Being., 2010] [Xinwei, 2007b] [Li, 2010].

3.1 Présentation du problème

Dans cette section, nous présenterons un problème fractionnaire (P) engendré par l'équation suivante :

$$^{c}D^{\alpha}u\left(t\right)=f\left(t,u\left(t\right),\left(\phi u\right)\left(t\right),\left(\psi u\right)\left(t\right),^{c}D^{\beta_{1}}u\left(t\right),^{c}D^{\beta_{2}}u\left(t\right),...,^{c}D^{\beta_{n}}u\left(t\right)\right) \tag{3.1}$$

où $0<t<1,\ 1<\alpha<2$
avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} u\left(0\right)+au\left(1\right) &= 0 \\ u\prime\left(0\right)+bu'\left(1\right) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

où $^{c}D^{\alpha}$ désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α, et $f:[0,1]\times\mathbb{R}^{n+3}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonctions continues donnée,$1<\alpha<2$,
$0<\beta_{i}<1,\alpha-\beta_{i}\geq1$,et $a,b\neq-1$.

Puis ϕ,ψ sont deux applications définies par
$\left(\phi u\right)\left(t\right)=\int_{0}^{t}\gamma\left(t,s\right)u\left(s\right)ds$, $\left(\psi u\right)\left(t\right)=\int_{0}^{t}\lambda\left(t,s\right)u\left(s\right)ds$,avec $\gamma,\lambda:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow[0,+\infty[$,telle que : $\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_{0}^{t}\gamma\left(t,s\right)ds\right|<\infty$ et $\sup_{t\in[0,1]}\left|\int_{0}^{t}\lambda\left(t,s\right)ds\right|<\infty$.

Lemme 3.1. [A. Kilbas, 2006]
Soient $\alpha>0,n=[\alpha]+1$,et $f\in C\left[0,1\right]$ et $^{c}D^{\alpha}u\left(t\right)\in C\left[0,1\right]$,on a :

$$I^{\alpha}\left(^{c}D^{\alpha}u\left(t\right)\right)=u\left(t\right)+C_{0}+C_{1}t+C_{2}t^{2}+\ldots+C_{n-1}t^{n-1}. \tag{3.3}$$

où $C_{i}\in\mathbb{R},i=1,2,3,\ldots,n-1$.

Démonstration. Soient $\alpha>0,n=[\alpha]+1$,En utilisant (1.24) ,on obtient :

$$I^{\alpha}\left(^{c}D^{\alpha}u\left(t\right)\right)=u\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^{(k)}\left(0\right)}{k!}t^{k}.$$

par le changement de variable $C_{k}=-\frac{u^{(k)}(0)}{k!}\in\mathbb{R}$,pour chaque $i=1,2,3,\ldots,n-1$,on obtient :

$$I^{\alpha}\left(^{c}D^{\alpha}u\left(t\right)\right)=u\left(t\right)+\sum_{k=0}^{n-1}C_{k}t^{k}.$$

□

Lemme 3.2. soit $1<\alpha<2$,et $y\in C\left[0,1\right],a,b\neq-1$,alors l'équation :

$$^{c}D^{\alpha}u\left(t\right)=y\left(t\right),\forall t\in\left[0,1\right]. \tag{3.4}$$

avec les conditions initiales (3.2) ,admet une unique solution qui est donnée par :

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds - \frac{a}{(1+a)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds \\ &\quad + \frac{ab-b(1+a)t}{(1+a)(1+b)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)ds. \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant I^{α}sur l'équation (3.4) on obtient :

$$I^{\alpha}\left[{}^{c}D^{\alpha}u(t) - y(t)\right] = 0 \Longleftrightarrow I^{\alpha}D^{\alpha}u(t) - I^{\alpha}y(t) = 0$$

D'après (3.3) ,et pour $1 < \alpha < 2, (n = [\alpha] + 1 = 2)$,on a :

$$I^{\alpha}D^{\alpha}u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t,\ C_0, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Donc

$$u(t) + C_0 + C_1 t - I^{\alpha}y(t) = 0$$

Ce qui implique

$$u(t) = I^{\alpha}y(t) - C_0 - C_1 t$$

par conséquent,la solution générale de l'équation (3.4) ,donne par :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)ds - C_0 - C_1 t \qquad (3.6)$$

Les conditions aux limites implique que :

$$\left\{ \begin{array}{c} u(0) + au(1) = 0 \Longrightarrow C_0 + aI^{\alpha}y(1) - aC_0 - aC_1 = 0 \\ u\prime(0) + bu'(1) = 0 \Longrightarrow C_1 - \frac{b}{\Gamma(\alpha-1)}{}_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)ds + bC_1 = 0 \end{array} \right.$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{c} -(1+a)C_0 = -aI^{\alpha}y(1) + aC_1 \Longrightarrow C_0 = \frac{a}{1+a}I^{\alpha}y(1) - \frac{a}{1+a}C_1 \\ C_1 - \frac{b}{\Gamma(\alpha-1)}{}_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)ds + bC_1 = 0 \Longrightarrow C_1 = \frac{b}{1+b}I^{\alpha-1}y(1) \end{array} \right.$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{c} C_0 = \frac{a}{1+a}I^{\alpha}y(1) - \frac{a}{1+a}\left(\frac{b}{1+b}I^{\alpha-1}y(1)\right) \\ C_1 = \frac{b}{1+b}I^{\alpha-1}y(1) \Longrightarrow C_1 = \frac{b}{(1+b)\Gamma(\alpha-1)}{}_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)ds \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} C_0 = \frac{a}{1+a}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}y(s)ds - \frac{b}{(1+b)\Gamma(\alpha-1)}{}_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)ds\right] \\ C_1 = \frac{b}{(1+b)\Gamma(\alpha-1)}{}_0^1 (1-s)^{\alpha-2}y(s)ds \end{array} \right.$$

l'equation (3.4) équivalentente à :

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\
&- \frac{a}{1+a}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - \frac{b}{1+b}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds\right] \\
&- \frac{bt}{1+b} I^{\alpha-1} y(1) \\
&= \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - \frac{a}{(1+a)\Gamma(a)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s) ds\right] \\
&+ \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds \left[\frac{ab-b(1+a)t}{(1+b)(1+a)}\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - \frac{a}{(1+a)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\
&+ \frac{ab-b(1+a)t}{(1+a)(1+b)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s)\, ds
\end{aligned}$$

□

3.2 Résultat d'existance et d'unicité

Maintenant, on va montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (P) à (3.1) (3.2),
Soit $C(I)$ l'espace des fonctions continues sur $I = [0, 1]$,
et

$$X = \left\{u : u \in C(I)\, et^C D^{\beta_i} u \in C(I)\,(0 < \beta_i < 1)\; pour i = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

c'est l'espace muni de la norme

$$\|u\|_X = \max_{t\in I} |u(t)| + \sum_{i=1}^{n} \max_{i\in I} \left|{}^C D^{\beta_i} u(t)\right|.$$

$(X, \|.\|)$est un espace de Banach.

Théorème 3.3 (2). *Supposons qu'il existe $k \in [0, \alpha-1]$ et $\mu(t) \in L^{\frac{1}{k}}([0,1])$telle que :*

$$\begin{aligned}
&\left|f(t, x, y, w, u_1, u_2, \ldots, u_n) - f\left(t, x', y', w', v_1, v_2, \ldots, v_n\right)\right| \qquad (3.7)\\
\leq\ & \mu(t)\left(\left|x-x'\right| + \left|y-y'\right| + \left|w-w'\right| + |u_1-v_1| + |u_2-v_2| + \ldots + |u_n-v_n|\right)
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1]$ *,et* $x, y, w, x\prime, y\prime, w\prime, u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$*,donc le problème* (P)*de* (3.1) (3.2)*admet une solution unique Si :*

$$\Delta = (1+\gamma_0+\lambda_0)\left[\Lambda_0 + \eta_0\Lambda_1 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha-\beta_i-k+1)}\Lambda_1 + \frac{\Lambda_1\eta_1}{\Gamma(2-\beta_i)}\right)\right] < 1 \tag{3.8}$$

où $\gamma_0 = \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t \gamma(t,s)\,ds\right|, \lambda_0 = \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t \lambda(t,s)\,ds\right|,$
$\mu^* = \left(\int_0^1 (\mu(s))^{\frac{1}{k}}\,ds\right)^k$
Puis

$$\Lambda_0 = \frac{(1+2|a|)\,\mu^*}{|1+a|\,\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k}\right)^{1-k}$$

$$\Lambda_1 = \frac{\mu^*}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}$$

$$\eta_0 = \frac{|b|\,(1+2|a|)}{|1+a|\,|1+b|}$$

$$\eta_1 = \frac{|b|}{|1+b|}$$

Démonstration. Soit $F : X \longrightarrow X$,on réecrit l'équation (3.5)sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&(Fu)(t)\\
=\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\\
&f\left(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), {}^cD^{\beta_1}u(s), {}^cD^{\beta_2}u(s), ..., {}^cD^{\beta_n}u(s)\right) ds\\
&-\frac{a}{(1+a)\,\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\\
&f\left(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), {}^cD^{\beta_1}u(s), {}^cD^{\beta_2}u(s), ..., {}^cD^{\beta_n}u(s)\right) ds\\
&+\frac{ab-b(1+a)t}{(1+a)(1+b)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\\
&f\left(s, u(s), (\phi u)(s), (\psi u)(s), {}^cD^{\beta_1}u(s), {}^cD^{\beta_2}u(s), ..., {}^cD^{\beta_n}u(s)\right) ds.
\end{aligned}$$

Pour $u, v \in X$ et pour chaque $t \in [0,1]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\left|(Fu)(t)-(Fv)(t)\right| \\
&= \left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\right. \\
&\left(f\left(s,u(s),(\phi u)(s),(\psi u)(s),{}^cD^{\beta_1}u(s),{}^cD^{\beta_2}u(s),...,{}^cD^{\beta_n}u(s)\right)\right. \\
&\left.\left.-f\left(s,v(s),(\phi v)(s),(\psi v)(s),{}^cD^{\beta_1}v(s),{}^cD^{\beta_2}v(s),...,{}^cD^{\beta_n}v(s)\right)\right)ds\right. \\
&-\frac{a}{(1+a)\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \\
&\left(f\left(s,u(s),(\phi u)(s),(\psi u)(s),{}^cD^{\beta_1}u(s),{}^cD^{\beta_2}u(s),...,{}^cD^{\beta_n}u(s)\right)\right. \\
&\left.-\left(s,v(s),(\phi v)(s),(\psi v)(s),{}^cD^{\beta_1}v(s),{}^cD^{\beta_2}v(s),...,{}^cD^{\beta_n}v(s)\right)\right)ds \\
&+\frac{ab-b(1+a)t}{(1+a)(1+b)\Gamma(\alpha-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} \\
&\left(f\left(s,u(s),(\phi u)(s),(\psi u)(s),{}^cD^{\beta_1}u(s),{}^cD^{\beta_2}u(s),...,{}^cD^{\beta_n}u(s)\right)\right. \\
&\left.-f\left(s,v(s),(\phi v)(s),(\psi v)(s),{}^cD^{\beta_1}v(s),{}^cD^{\beta_2}v(s),...,{}^cD^{\beta_n}v(s)\right)\right)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s) \left(|u(s) - v(s)| \right. \\
&+ |(\phi u)(s) - (\phi v)(s)| + |(\psi u)(s) - (\psi v)(s)| + \left| {}^c D^{\beta_1} u(s) - {}^c D^{\beta_1} v(s) \right| \\
&+ \left| {}^c D^{\beta_2} u(s) - {}^c D^{\beta_2} v(s) \right| \\
&+ \ldots + \left. \left| {}^c D^{\beta_n} u(s) - {}^c D^{\beta_n} v(s) \right| \right) ds \\
&+ \frac{|a|}{|1+a| \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \mu(s) \left(|u(s) - v(s)| \right. \\
&+ |(\phi u)(s) - (\phi v)(s)| + |(\psi u)(s) - (\psi v)(s)| \\
&+ \left| {}^c D^{\beta_1} u(s) - {}^c D^{\beta_1} v(s) \right| + \left| {}^c D^{\beta_2} u(s) - {}^c D^{\beta_2} v(s) \right| \\
&+ \ldots + \left. \left| {}^c D^{\beta_n} u(s) - {}^c D^{\beta_n} v(s) \right| \right) ds \\
&+ \frac{|b| (1 + 2|a|)}{|1+a| |1+b| \Gamma(\alpha - 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} \mu(s) \left(|u(s) - v(s)| \right. \\
&+ |(\phi u)(s) - (\phi v)(s)| + |(\psi u)(s) - (\psi v)(s)| \\
&+ \left| {}^c D^{\beta_1} u(s) - {}^c D^{\beta_1} v(s) \right| \\
&+ \left| {}^c D^{\beta_2} u(s) - {}^c D^{\beta_2} v(s) \right| + \ldots + \left. \left| {}^c D^{\beta_n} u(s) - {}^c D^{\beta_n} v(s) \right| \right) ds \\
\leq\ & \frac{(1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\|}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mu(s)\, ds \\
&+ \frac{|a| (1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\|}{|1+a| \Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} \mu(s)\, ds \\
&+ \frac{|b| (1 + 2|a|) (1 + \gamma_0 + \lambda_0) \|u - v\|}{|1+a| |1+b| \Gamma(\alpha - 1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} \mu(s)\, ds
\end{aligned}
$$

on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants $p = \frac{1}{1-k}$ et $q = \frac{1}{k}$ On trouve

$$\begin{aligned}
& \left|(Fu)(t) - (Fv)(t)\right| \\
\leq\ & \frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t \left((t-s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{1-k}} ds\right)^{1-k} \left(\int_0^t (\mu(s))^{\frac{1}{k}} ds\right)^k \\
& + \frac{|a|(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{|1+a|\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^1 \left((1-s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{1-k}} ds\right)^{1-k} \left(\int_0^1 (\mu(s))^{\frac{1}{k}} ds\right)^k \\
& + \frac{|b|(1+2|a|)(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{|1+a||1+b|\Gamma(\alpha-1)} \left(\int_0^1 \left((1-s)^{\alpha-2}\right)^{\frac{1}{1-k}} ds\right)^{1-k} \left(\int_0^1 (\mu(s))^{\frac{1}{k}} ds\right)^k \\
\leq\ & \frac{\mu^*(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-k}{\alpha-k}\right)^{1-k} \\
& + \frac{\mu^*|a|(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{|1+a|\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-k}{\alpha-k}\right)^{1-k} \\
& + \frac{\mu^*|b|(1+2|a|)(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{|1+a||1+b|\Gamma(\alpha-1)} \left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
& \left|(Fu)(t) - (Fv)(t)\right| \\
\leq\ & (1+\gamma_0+\lambda_0)\Bigg[\frac{(1+2|a|)\mu^*}{|1+a|\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1-k}{\alpha-k}\right)^{1-k} \\
& + \frac{\mu^*|b|(1+2|a|)}{|1+a||1+b|\Gamma(\alpha-1)} \left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}\Bigg] \|u-v\|
\end{aligned}$$

Par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo avec $0 < \beta_i < 1$,et $t \in [0,1]$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \left|{}^C D^{\beta_i}(Fu)(t) - {}^C D^{\beta_i}(Fv)(t)\right| \\
& = \left|\int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} (Fu)'(s)\, ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} (Fv)'(s)\, ds\right| \\
& = \left|\int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} \left((Fu)'(s) - (Fv)'(s)\right) ds\right| \\
& \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{-\beta_i}}{\Gamma(1-\beta_i)} \left|(Fu)'(s) - (Fv)'(s)\right| ds \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

nous avons aussi:

$$
\begin{aligned}
&\left|(Fu)'(t)-(Fv)'(t)\right| \\
&=\left|\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\right. \\
&\left[f\left(s,u(s),(\phi u)(s),(\psi u)(s),{}^c D^{\beta_1}u(s),{}^c D^{\beta_2}u(s),\ldots,{}^c D^{\beta_n}u(s)\right)\right. \\
&\left.-f\left(s,v(s),(\phi v)(s),(\psi v)(s),{}^c D^{\beta_1}v(s),{}^c D^{\beta_2}v(s),\ldots,{}^c D^{\beta_n}v(s)\right)\right]ds \\
&-\frac{b}{1+b}\int_0^1 \frac{(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \\
&\left[f\left(s,u(s),(\phi u)(s),(\psi u)(s),{}^c D^{\beta_1}u(s),{}^c D^{\beta_2}u(s),\ldots,{}^c D^{\beta_n}u(s)\right)\right. \\
&\left.\left.-f\left(s,v(s),(\phi v)(s),(\psi v)(s),{}^c D^{\beta_1}v(s),{}^c D^{\beta_2}v(s),\ldots,{}^c D^{\beta_n}v(s)\right)\right]ds\ \right| \\
\leq\ & \frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{\Gamma(\alpha-1)}\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\mu(s)\,ds \\
&+\frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|\,|b|}{\Gamma(\alpha-1)\,|1+b|}\int_0^1 (1-s)^{\alpha-2}\mu(s)\,ds \\
&\leq \frac{\mu^*(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k} t^{\alpha-k-1} \\
&+\frac{\mu^*(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|\,|b|}{\Gamma(\alpha-1)\,|1+b|}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
&\left|(Fu)'(t)-(Fv)'(t)\right| \\
&\leq \frac{\mu^*(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k} t^{\alpha-k-1} \\
&+\frac{\mu^*(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|\,|b|}{\Gamma(\alpha-1)\,|1+b|}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

En remplaçant (3.11) dans l'inégalité (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{C}D^{\beta_i}\left(Fu\right)\left(t\right)-{}^{C}D^{\beta_i}\left(Fv\right)\left(t\right)\right| \\
&\leq \frac{\mu^*\left(1+\gamma_0+\lambda_0\right)\left\|u-v\right\|}{\Gamma\left(1-\beta_i\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}\int_0^t\left(t-s\right)^{-\beta_i}s^{\alpha-k-1}ds \\
&+\frac{\mu^*\left(1+\gamma_0+\lambda_0\right)\left\|u-v\right\|\left|b\right|}{\Gamma\left(1-\beta_i\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)\left|1+b\right|}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}\int_0^t\left(t-s\right)^{-\beta_i}ds \\
&\leq \frac{\mu^*\left(1+\gamma_0+\lambda_0\right)\left\|u-v\right\|}{\Gamma\left(1-\beta_i\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}\int_0^1\left(1-\xi\right)^{-\beta_i}\xi^{\alpha-k-1}d\xi \\
&+\frac{\mu^*\left(1+\gamma_0+\lambda_0\right)\left\|u-v\right\|\left|b\right|}{\Gamma\left(1-\beta_i\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)\left|1+b\right|}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}
\end{aligned}$$

Puisque $B\left(\alpha-k,1-\beta_i\right)=\int_0^1\left(1-\xi\right)^{-\beta_i}\xi^{\alpha-k-1}d\xi=\frac{\Gamma(\alpha-k)\Gamma(1-\beta_i)}{\Gamma(\alpha-\beta_i-k+1)}$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|{}^{C}D^{\beta_i}\left(Fu\right)\left(t\right)-{}^{C}D^{\beta_i}\left(Fv\right)\left(t\right)\right| \\
&\leq \left(1+\gamma_0+\lambda_0\right)\left[\frac{\Gamma\left(\alpha-k\right)\mu^*}{\Gamma\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(\alpha-\beta_i-k+1\right)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}\right. \\
&\left.+\frac{\mu^*\left|b\right|}{\Gamma\left(2-\beta_i\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)\left|1+b\right|}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}\right]\left\|u-v\right\|
\end{aligned}$$

Finalemment, pour tout $i=1,2,\ldots,n$,Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\left\|Fu-Fv\right\| \\
&\leq \left(1+\gamma_0+\lambda_0\right)\left[\frac{(1+2\left|a\right|)\mu^*}{\left|1+a\right|\Gamma\left(\alpha\right)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k}\right)^{1-k}\right. \\
&+\frac{\mu^*\left|b\right|\left(1+2\left|a\right|\right)}{\left|1+a\right|\left|1+b\right|\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k} \\
&+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Gamma\left(\alpha-k\right)\mu^*}{\Gamma\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(\alpha-\beta_i-k+1\right)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}\right. \\
&\left.\left.+\frac{\mu^*\left|b\right|}{\Gamma\left(2-\beta_i\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)\left|1+b\right|}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}\right)\right]\left\|u-v\right\| \\
&\leq \left(1+\gamma_0+\lambda_0\right)\left[\Lambda_0+\eta_0\Lambda_1\right. \\
&+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Gamma\left(\alpha-k\right)}{\Gamma\left(\alpha-\beta_i-k+1\right)}\Lambda_1\right. \\
&\left.\left.\frac{\Lambda_1\eta_1}{\Gamma\left(2-\beta_i\right)}\right)\right]\left\|u-v\right\| \\
&=\Delta\left\|u-v\right\|.
\end{aligned}$$

Puisque $\Delta < 1$,alors Fest une contraction, d'apres le principe de l'application contractante de Banach,(2.4) F admet un point fixe unique, qui est la solution unique du problème (P) $à$ (3.1) (3.2) .Ceci complete la preuve. □

Corollaire 3.4. Supposons qu'il existe $L > 0$,tel que :

$$\begin{aligned} & \left|f\left(t,x,y,w,u_1,u_2,\ldots,u_n\right)-f\left(t,x',y',w',v_1,v_2,\ldots,v_n\right)\right| \\ \leq\; & L\left(\left|x-x'\right|+\left|y-y'\right|+\left|w-w'\right|+\left|u_1-v_1\right|+\left|u_2-v_2\right|+\ldots+\left|u_n-v_n\right|\right) \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0,1]$,et$x, y, w, x\prime, y\prime, w\prime, u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$,donc le problème (P)de (3.1) (3.2)admet une solution unique Si :

$$\Delta = (1+\gamma_0+\lambda_0)\left[\Lambda_0+\eta_0\Lambda_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha-\beta_i-k+1)}\Lambda_1+\frac{\Lambda_1\eta_1}{\Gamma(2-\beta_i)}\right)\right] < 1$$

où $\gamma_0 = \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t \gamma(t,s)\,ds\right|, \lambda_0 = \sup_{t\in[0,1]}\left|\int_0^t \lambda(t,s)\,ds\right|,$
$\mu^* = \left(\int_0^1 (\mu(s))^{\frac{1}{k}}\,ds\right)^k$
Puis

$$\Lambda_0 = \frac{(1+2|a|)\,\mu^*}{|1+a|\,\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k}\right)^{1-k}$$

$$\Lambda_1 = \frac{\mu^*}{\Gamma(\alpha-1)}\left(\frac{1-k}{\alpha-k-1}\right)^{1-k}$$

$$\eta_0 = \frac{|b|\,(1+2|a|)}{|1+a|\,|1+b|}$$

$$\eta_1 = \frac{|b|}{|1+b|}$$

Exemple. Soit le problème (P) suivant :

$$\left\{\begin{array}{c} {}^cD^{\frac{7}{4}}u(t) = \frac{e^{-\pi t}}{24\sqrt{\pi}+e^{-\pi t}}\left[\frac{\sin t\,+e^t}{1+t^3}+\frac{|u(t)|}{1+|u(t)|}\right. \\ \left.+\frac{e^{-\pi t}\cos\pi t}{1+t^2}\left(1+\frac{\left|(\phi u)(t)+{}^cD^{\frac{1}{2}}u(t)\right|}{1+\left|(\phi u)(t)+{}^cD^{\frac{1}{2}}u(t)\right|}\right)+\frac{1+\sin^2\pi t}{2\left(t^{\frac{3}{2}}+4\right)}\left((\psi u)(t)+\frac{\left|{}^cD^{\frac{3}{4}}u(t)\right|}{1+\left|{}^cD^{\frac{3}{4}}u(t)\right|}\right)\right] \\ u(0)+u(1)=0, u'(0)+u'(1)=0 \end{array}\right. \quad (3.12)$$

Posons :

$$f\left(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\beta_1} u(t), {}^c D^{\beta_2} u(t), ..., {}^c D^{\beta_n} u(t)\right)$$
$$= \frac{e^{-\pi t}}{24\sqrt{\pi} + e^{-\pi t}} \left[\frac{\sin t \ + e^t}{1+t^3} + \frac{|u(t)|}{1+|u(t)|} \right.$$
$$+ \frac{e^{-\pi t} \cos \pi t}{1+t^2} \left(1 + \frac{\left|(\phi u)(t) + {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t)\right|}{1 + \left|(\phi u)(t) + {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t)\right|} \right)$$
$$\left. + \frac{1+\sin^2 \pi t}{2\left(t^{\frac{3}{2}}+4\right)} \left((\psi u)(t) + \frac{\left|{}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)\right|}{1+\left|{}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)\right|} \right) \right]$$
$$= f\left(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)\right).$$

Il est clair que la fonction f est continue.
où $(\phi u)(t) = \int_0^t \frac{e^{-(s-t)}}{8} u(s)\, ds$ et $(\psi u)(t) = \int_0^t \frac{e^{\frac{-(s-t)}{2}}}{8} u(s)\, ds$,avec $\gamma_0 = \frac{e-1}{8}, \lambda_0 = \frac{\sqrt{e}-1}{8}$.

Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$on a :

$$\left| f\left(t, u(t), (\phi u)(t), (\psi u)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} u(t), {}^c D^{\frac{3}{4}} u(t)\right) \right.$$
$$\left. - f\left(t, v(t), (\phi v)(t), (\psi v)(t), {}^c D^{\frac{1}{2}} v(t), {}^c D^{\frac{3}{4}} v(t)\right) \right|$$
$$\leq \frac{1}{24\sqrt{\pi}} \left(|u(t) - v(t)| + |(\phi u)(t) - (\phi v)(t)| + |(\psi u)(t) - (\psi v)(t)| \right.$$
$$\left. + \left|{}^c D^{\frac{1}{2}} u(t) - {}^c D^{\frac{1}{2}} v(t)\right| + \left|{}^c D^{\frac{3}{4}} u(t) - {}^c D^{\frac{3}{4}} v(t)\right| \right).$$

alors $k = \frac{1}{4}$ et $\mu(t) = \frac{1}{24\sqrt{\pi}} \in L^4([0,1])$, et $\mu^* = \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{24\sqrt{\pi}} \right)^4 ds \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{24\sqrt{\pi}}$,et $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \approx 1,2254, \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,9064, \Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \approx 0,9191$.

D'autre part,on a :

$$\Lambda_0 = \frac{1}{16\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{24\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\eta_0 = \frac{3}{4}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{2}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1+\gamma_0+\lambda_0)\left[\Lambda_0+\eta_0\Lambda_1+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Gamma(\alpha-k)}{\Gamma(\alpha-\beta_i-k+1)}\Lambda_1+\frac{\Lambda_1\eta_1}{\Gamma(2-\beta_i)}\right)\right] \\
&= \left(1+\frac{e-1}{8}+\frac{\sqrt{e}-1}{8}\right)\left[\frac{1}{16\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}}+\frac{1}{96\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\right. \\
&\quad +\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{24\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{\Gamma(2)}+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}\right)+ \\
&\quad \left.\frac{1}{48\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}\right)\right] \\
&\approx 0,1466 < 1.
\end{aligned}$$

alors (3.8) est satisfaite.
D'après le principe de l'application contractante de Banach,(2.4) le problème (3.12)a une unique solution,

Conclusion générale...

Dans ce mémoire, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions d'un problème présente par une équation intégro-différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire l'outil fondamental est le theoreme du point fixe de Banach .

Bibliographie

J. J. Trujillo. A. Kilbas, H. M. Srivastava. *Theory and Application of Fractional Differential equations*. Elsevier, North-Holland, 2006.

Sivasundaram S Ahmad, B. *On four-point nonlocal boundary value problems of nonlinear integro-differential equations of fractional orde.* Appl. Math. Comput. 217, 480-487, 2010.

F. Huang B. Guo, X. Pu. *Fractional Partial Differential Equations and Their Numerical Solutions.* China, 2015.

M. Well Being. *Efficient numerical methods for fractional differential equations and their*. Analytical Background, D. Univ Braunschweig, 2010.

Oberhettinger F Erdelyi A, Magnus W et Tricomi F. *Higher Transcendental Functions*. Krieger Pub, Melbourne, Florida, 1981.

J. Hale et S. Verduyn Lune. *,Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences.* 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

I.Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press,San Diego, 1999.

K.B. Oldham J. Spanier. *The Fractional Calculus, Academic Press.* New York, 1974.

B. Ross. K.S. Miller. *An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations*. Wiley, New York, 1993.

Luo XN Zhou Y Li, CF. *Existence of positive solutions of the boundary value problem for nonlinear fractional differential equation.* Comput. Math. Appl. 59, 1363-1375, 2010.

I Podlubny. *Fractional differential equations : an introduction to fractional derivatives,fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. vol. 198. Elsevier, 1998.

A.A. Kilbas S.G. Samko et O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

D.R. Smart. *Fixed point theory.* Combridge Uni. Press, Combridge, 1974.

T. Stuckless. *Brouwer's Fixed Point Theorem : Methods of Proof and Generalizations.* 2003.

Zhang S Su, X. *Solutions to boundary value problems for nonlinear differential equations of fractional order.* Electron. J. Differ. Equ. 2009, 26, 2009.

Landong L Xinwei, S. *Existence of solution for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*. Appl. Math. J. Chin. Univ. Ser. B 22(3), 291-298, 2007a.

Landong L Xinwei, S. *Existence of solution for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation.* Appl. Math. J. Chin. Univ. Ser. B 22(3), 291-298, 2007b.

E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Applications,Fixed Point Theorems SpringVerlag.* New York, 1986.

ملخص

تناولنا في هذه المذكرة وجود و وحدانية الحل لمعادلة تكاملية – تفاضلية غير خطية ذات رتبة كسرية α عندما $0 < \alpha < 1$ مع شروط حدودية وذلك باستخدام مبدأ الانكماش لبناخ .

الكلمات المفتاحية : مشتق كسري بمعنى كابتو ، مشتق كسري بمعنى ريمان ، معادلات تكاملية – تفاضلية ذات رتبة كسرية ،نظرية النقطة الثابتة، ممبدأ الانكماش لبناخ.

Résumé

Dans ce mémoire,on a traité l'existence et l'unicité des solutions d'une d'équations intégro-différentielle fractionnaires d'ordre α non linéaire avec des conditions non locales,en utilisant le principe de contraction de Banach.

Mots-clés :Dérivée fractionnaire au sens de Caputo,Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville,Équation intégro-différentielle fractionnaire,Principe de l'application contractante.

Abstract

This paper deals with the existence and uniqueness of the solution for a boundary value problem of fractional order α integro-differential equation nonlinear non-local, using the Banach contraction principle.

Keywords :Caputo fractional derivative,Riemann-Liouville fractional derivative,non-local nonlinear fractional differential equation, the Banach contraction principle.