الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عباس لغرور خنشلة
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR- KHENCHELA

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Mathématiques & Informatique

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques Appliquées

Existence ou non-existence des solutions pour une équation évolutionnaire avec des dérivées fractionnaires

Réalisé par : **-BENGHELLAB Ourada**
-CHERMIME Hakima

Dirigé par : **Dr. TEBESSI Faouzi**

Membres de jury :

Présenté le 01/07/2019

SAHRAOUI A Dr. Président
BRAGDI A Dr. Examinateur

Table des matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles sont un outil essentiel de modélisation et étude qui occupe les mathématiciens depuis le dix -huitiéme siécle avec les travaux d'Euler, d'Alembert, Lagrange et Laplace... ; au fill de cette derniére quarantaine d'années beaucoup de phènoménes et de problémes modernes physiques biologiques et technologique ont été modélés par des équations aux dérivées partielle (EDP), paraboliques ou hyperboliques (modélisant des phénomènes de propagation, émergeant par exemple naturellement en mécanique). Un simple type d'équation aux dérivées partielles hyperbolique est l'équation d'onde :

$$\partial_{tt}^2 u - \triangle u = 0$$

Il existe un grand nombre d'équations différentielles partielles non linéaires de type hyperbolique dont la solution pour une donnée de données initiales ne peut pas être étendue globalement dans le temps et développer une singularité dans le temps fini

Un tel phénomène est appelé explosion et T est appelé le temps de l'explosion, L'explosion est connue pour se produire dans diverses équations, Par exemple celles trouvées dans la théorie de la combustion et les modèles de chimiotaxis.

L'étude des phénomènes d'explosion est non seulement intéressante du point de vue mathématique, mais aussi importante pour une compréhension profonde de la nature des phénomènes que ces équations décrivent.

Depuis 1966, avec le travail de Fujita, le phénomènes d'explosion dans les équation non-linéaires parabolique et hyperbolique ont une grande attention en étude

Un accent particulier a été mis sur les questions comme : quand, ou et comment les solutions explosent.

Bien que le calcule différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénoménes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que présentent certains systémes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de lasociété.Les résultats expérimentaux montrent que plusieurs processus liés aux systémes complexes ont une dynamique non-locale impliquant des effets à long terme.Les opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaire présentent des similitudes avec certaines de ces caractéristiques,ce qui en fait un outil plus adapté pour la modélisation de ces phénoménes.

Le but du calcul fractionnaire est de généraliser les dérivées traditionnelles à des ordres non-entiers,Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept de calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous. Plusieurs études théoriques et expérimentales montrent que certains systèmes électrochimiques,thermiques et viscoélastiques sont régis par des équations différentielles à dérivées non-entières.L'utilisation de modèles classiques basés sur une dérivation entière n'est donc pas appropriée. Par ce fait, des modèles basés sur des équations différentielles à dérivées non-entières ont été développés . Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du 17ème siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral,mais ce n'est que l'ors des trois dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et les applications des dérivées fractionnaires se sont le plus diversifiées.

Notre travail se compose de trois chapiters :

Le premier chapitre est consacré aux rappels de certaines notions préliminaires fondamentales sur l'espace des fonctions integrables et les dérivées fractionnaire.

Dans le deuxième chapitre : On mentionne le phénomène d'amortissement et puis on introduit les problèmes de type Fujita et par suite la définitions de l'explosion d'une solution de ce type de problème et on termine par mettre en détail la première partie du travaille de Mokhtar Kirane et Nassere-ddine Tatar Intitulé " la non-existence d'une solution à une équation hyperbolique avec un amortissement fractional du temps " concernant la non-existence d'une solution global en utilisant la démonstration par l'absurde.

Dans le troisième chapitre : On conclut avec la deuxième partie du travaille de Mokhtar Kirane et Nasser-eddine Tatar mentionné ci déçus concernant les conditions nécessaires pour l'existence des solutions globales et locales.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, on donne des outils de base et des résultats préliminaires essentiels à notre travail

1.1 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.1 *Soient E et F deux espaces mesurables muni de leurs tribus respectives Σ ,$\mathcal{F}$ Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite $(\Sigma, \mathcal{F})-$mesurable si :*

$$\forall B \in \mathcal{F}, f^{-1}(B) \in \Sigma$$

Définition 1.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$*

$1-$ *Pour $1 \leq p < \infty$, L'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et*

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty$$

muni de la norme :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$2-$ *Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des classes de fonctions mesurables bornées presque partout (p.p) sur Ω muni de la norme :*

$$\|f\|_{\infty} = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \ \ p.p \ sur \ \Omega\}$$

Définition 1.3 *Une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est dite localement intégrable si sa restriction à tout compact K de Ω est $p-$intégrable :*

c-à-d

$$L^p_{Loc}(\Omega) = \{f \mid f \in L^p(K) \quad \forall \ K \subset \Omega\}$$

1.1.1 Inégalité importantes

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} u(x)\, v(x) \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Inégalité de Hôlder

Soient $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors :

$$\int_{\Omega} u(x)\, v(x) \leq \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |v(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.1}$$

Cette inégalité est la généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy avec ϵ

Pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout a, b dans $\mathbb{R}$, nous avons l'inégalité :

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\epsilon}|b|^2$$

Inégalité de Young avec ϵ

pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout a, b dans $\mathbb{R}^N$ et $p, q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nous avons l'inégalité :

$$|ab| \leq \frac{1}{P} |\epsilon a|^p + \frac{p-1}{p} \left| \frac{b}{\epsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}}$$

Or

$$|ab| \leq \epsilon |a|^p + C_\epsilon |b|^q \tag{1.2}$$

avec

$$C_\epsilon = \frac{1}{q} (p\epsilon)^{\frac{-q}{p}}$$

qui est la généralisation de l'inégalité de Cauchy avec ϵ

Proposition 1.1 *Soit $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable*

$$\int_X f \; d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0 \;\; \mu - \textit{presque partout} \tag{1.3}$$

Corollaire 1.1 *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Si pour tout fonction $\varphi \in D(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega f(u) \varphi(u) = 0 \Rightarrow f(u) = 0 \;\; \textit{presque partout} \; \forall u \in \Omega \tag{1.4}$$

Proposition 1.2 *Soient $-\infty < a < b < +\infty$ et $f \in L^1([a, b])$ on a*

$$(b-a) \inf_{x \in [a,b]} f(x) \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a,b]} f(x) \tag{1.5}$$

Théorème 1.1 (Fubuni)

Soient A, B deux sous ensembles de $\mathbb{R}^N$; Si $f(x,y)$ est sommable sur $A \times B$, alors :

$$\begin{aligned}\int_{A\times B} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) &= \int_A \left(\int_B f(x,y)\,d\mu(y)\right) d\mu(x) \\ &= \int_B \left(\int_A f(x,y)\,d\mu(x)\right) d\mu(y)\end{aligned} \tag{1.6}$$

Si de plus

$$f(x,y) = g(x)\,h(y)$$

oŭ $g(x), h(y)$ sont sommables sur A, B respectivement, alors :

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu(y) = \left(\int_A g(x)\,d\mu x\right)\left(\int_B h(y)\,d\mu y\right)$$

Lemme 1.1 *Soit u et v deux fonctions définis sur Ω , alors :*

$$\int_\Omega (\triangle u)\,v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma \qquad (\textit{formule de Green})$$

1.1.2 Fonctions test

Définition 1.4 *On appelle support de f, noté $supp(f)$, l'adhérence de l'ensemble des points en lesquels la fonction ne s'annule pas*

c-à-d

$$supp(f) = \overline{\{x \in X, f(x) \neq 0\}}$$

Définition 1.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, On appelle fonction test tout fonction indéfiniment différentiable et à support compact*

Les fonctions test sont des utiles dans la théorée des distrubutions ou l'orsqu'on cherche des solutions faibles d'équations aux dérivées partielles

On appelle $C_0^\infty(\Omega)$ ou bien $D(\Omega)$ espace des fonctions test

1.2 Calcule fractionnaire

1.2.1 Historique

Nous présentons ici les principales étapes historiques de l'élaboration du calcule fractionnaire

L''histoire du calcul fractionnaire commença par une question clé de Leibniz, qui on doit l'idée de la dérivation fractionnaire. Il introduisit le symbole de dérivation d'ordre n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = D^n y$$

où n est un entier positif.

Ce fut peut être un jeu naïf des symboles qui poussa L'Hospital à s'interroger sur la possibilité davoir n dans $\mathbb{Q}$.

Il posa la question : Et si $n = \frac{1}{2}$? : En 1695, dans une lettre à L'Hospital, Leibniz écrivit prophétiquement : « Ainsi il s'ensuit que $d^{\frac{1}{2}}x$ un paradoxe apparent dont l'on tirera un jour d'utiles conséquences ». Dans une autre lettre à Bernoulli, il mentionne des dérivées "d'ordres généraux".

1730

Euler est le second grand mathématicien à aborder la question. Il introduit sa célèbre fonction Gamma Γ qui généralise la factorielle ($\Gamma(n+1) = n!$), il conclut en proposant une définition pour la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ de x^β, avec $\beta > 0$. Son cheminement est le suivant : pour m, $n \in N$ avec $m \geq n$, on a tout d'abord :

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$$

Grâce à sa fonction Gamma cette formule s'étend directement à une puissance $m > 0$:

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{1.7}$$

Le terme de droite de (1.7) conservant un sens pour un réel $n > 0$ (tel que $n < m+1$), on peut donc le considérer comme une définition pour la dérivée d'ordre réel $\alpha > 0$ de la puissance réelle

$\beta > 0$:

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{\beta-\alpha} \tag{1.8}$$

Notons ici qu'Euler ne considère en fait que des nombres rationnels (appelés aussi fractionnaires) et non des nombres réels. La dénomination actuelle de dérivée "fractionnaire" pour exprimer en fait une dérivée d'ordre réel pourrait donc trouver son origine historique dans ce travail.

$1832 - 1837$

Liouville est le premier à étudier en détail le calcul fractionnaire, comme semblent l'attester les huit articles qu'il publia entre 1832 et 1837. Partant de la relation

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}e^{ax} = a^{n}e^{ax} \tag{1.9}$$

pour $n \in N$, il propose de l'étendre pour $\alpha > 0$, définissant ainsi la dérivée d'ordre α de e^{ax} Par conséquent toute fonction f pouvant s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x} \tag{1.10}$$

Admet une dérivée d'ordre $\alpha > 0$ donnée par

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \; a_k^{\alpha} \; e^{a_k x} \tag{1.11}$$

Afin d'étendre cette définition à d'autres types de fonctions que (1.10), Liouville remarque que :

$$\forall \beta > 0, \forall x > 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\infty} u^{\beta-1}e^{-xu}du.$$

et ceci est obtenu, à l'aide de changement de variable $xu = t$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} e^{-t}\frac{1}{x}dt \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{t}{x}\right)^{\beta-1} e^{-t}\frac{1}{x}dt \\
&= x^{-\beta}\int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}dt \\
&= x^{-\beta}\,\Gamma(\beta)
\end{aligned}$$

Donc

$$\forall\beta > 0, \forall x > 0, x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty u^{\beta-1}e^{-xu}du.$$

À l'aide de(1.9), il trouve :

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}e^{-xu}du$$

Soit

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}x^{-\beta} = \frac{(-1)^\alpha\,\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\beta)}x^{-\alpha-\beta} \tag{1.12}$$

même si (1.8) et (1.12) concernent des exposants β différents, la limite $\beta = 0$ est problématique.

Par exemple, pour $\alpha = 1/2$

avec la définition d'Euler

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

Alors qu'avec celle de Liouville

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x^0 = 0$$

Ce paradoxe est en fait résolu si on utilise les définitions modernes des dérivées fractionnaires. On peut vérifier que la définition d'Euler et Riemann correspondent tout les deux à la dérivée de Riemann-Liouville, seulement ces définitions diffèrent par les bornes de leurs intégrales :

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{Euler} x^\beta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^\beta dy$$

$$\left(\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\right)_{liouville} x^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy$$

Remarque 1.1 *L'expression*

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy$$

est définie ici comme

$$\lim_{s\to\infty}\frac{d}{dx}\int_s^x (x-y)^{-\alpha} y^{-\beta} dy$$

$1867-1868$

Grünwald puis Letnikov proposent de définir une dérivée fractionnaire comme limite de différences finies, par analogie avec la dérivée usuelle qui est la limite de la différence finie entre $f(x+h)$ et $f(x)$ divisée par h.

1.2.2 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section on présente quelques fonctions spéciales comme la fonction Gamma, Bêta, qui jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

La fonction Gamma.

Définition 1.6 *L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler* $\Gamma(z)$ *elle est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \qquad \textit{pour } \operatorname{Re}(z) > 0 \tag{1.13}$$

Remarque 1.2

1) *On a*

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma(0_+) = +\infty$$

Et aussi

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

2) $\Gamma(z)$ *est une fonction monotone et strictement décroissante pour*

$$0 < z \leq 1$$

3) *Une propriété importante de cette fonction est la relation de récurren, ce suivante :*

$$\forall \operatorname{Re}(z) > 0 \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Qu'en peut démontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\
&= \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car d'aprés la relation de récurrence précédente :

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times \ \Gamma(1)$$

Comme

$$\Gamma(1) = 1$$

Donc

$$\Gamma(n+1) = n! \ , \forall n \in N$$

1.2.3 La fonction Bêta

Définition 1.7 *La fonction Bêta est définie par :*

$$\beta(z,\omega) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\omega-1} dt \quad , \ \operatorname{Re}(z) > 0 \ , \operatorname{Re}(\omega) > 0 \tag{1.14}$$

Proposition 1.3 *La fonction Gamma et Bêta sont liées par la relation suivante :*

$$\beta(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} \tag{1.15}$$

Preuve On a

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t_1^{z-1}t_2^{\omega-1}e^{-t_1}e^{-t_2}dt_1dt_2 \\
&= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1}\left(\int_0^{+\infty} t_2^{\omega-1}e^{-(t_1+t_2)}\right)dt_2dt_1
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable

$$t_2' = t_{1+}t_2$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^{+\infty} t_1^{z-1}\int_{t_1}^{+\infty}(t_2'-t_1)^{\omega-1}e^{-t_2'}dt_2'dt_1 \\
&= \int_{t_1}^{+\infty} e^{-t_2'}\int_0^{t_1}(t_2'-t_1)^{\omega-1}t_1^{z-1}dt_1dt_2'
\end{aligned}$$

si on pose

$$t_1' = \frac{t_1}{t_2'},$$

On arrive a

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(\omega) &= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'} \left(\int_0^1 (t_2' - t_1' t_2')^{\omega-1} (t_1 t_2')^{z-1} t_2' dt_1' \right) dt_2' \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'} \left((t_2')^{z-1} \int_0^1 (1-t_1')^{\omega-1} (t_2')^{\omega-1} (t_2')^{z-1} (t_1')^{z-1} dt_1' \right) dt_2' \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'} \left((t_2')^{z+\omega-1} \int_0^1 (1-t_1')^{\omega-1} (t_1')^{z-1} dt_1' \right) dt_2' \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t_2'} (t_2')^{z+\omega-1} \ \left(\int_0^1 (1-t_1')^{\omega-1} (t_1')^{z-1} dt_1' \right) dt_2' \\
&= \Gamma(z+\omega)\ \beta(z,\omega)
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat désiré. ■

1.3 Dérivation d'ordre non entier

La dérivation d'ordre non entier est la généralisation de la dérivée entière classique à des ordres non entiers quelconques. Cette généralisation peut être obtenue par deux manières différentes. On obtient alors deux définitions, la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo.

Une autre définition de la dérivée d'ordre non entier est obtenue à partir de la généralisation de la dérivée entière usuelle qui est la définition de Grünwald-Letnikov.

1.4 Dérivées au sens de Reimann-Liouville

1.4.1 Intégrale au sens de Reimann-Liouville

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0, T]$ on a :

$$\begin{aligned}
{}_aI_t^n f(t) &= \int_a^t \int_a^{\tau_{n-1}} \cdots \int_a^{\tau_1} f(\tau)\, d\tau d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau \qquad (1.16)
\end{aligned}$$

Preuve On va démontré cette égalité par récurrence

Pour $n = 1$:

$$\int_a^t f(\tau)\, d\tau = I_a^1 f(t)$$

Pour $n = 2$

$$\frac{1}{(2-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{2-1} f(\tau)\, d\tau = \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau$$

Par intégration par partier on trouve :

$$\int_a^t (t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \left[(t-\tau) - \int_a^\tau f(r)\, dr\right]_\tau^{\tau=t} + \int_a^t \int_a^\tau f(r)\, dr d\tau$$

Alors :

$$\int_a^t \int_a^\tau f(r)\, dr = I_a^2 f(t)$$

On suppose que la formule est vraie pour n, et on montre pour $n+1$

$$\begin{aligned}
\int_a^t I_a^n f(r)\, dr &= \int_a^t \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau dr \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t \int_\tau^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, dr d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t f(\tau) \int_\tau^t (t-\tau)^{n--1}\, dr d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t f(\tau) \left[\frac{1}{n-1+1}(r-\tau)^{n-1+1}\right]_{r=\tau}^{r=t} d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t f(\tau) \left[\frac{1}{n}(t-\tau)^n - \frac{1}{n}(\tau-\tau)^n\right] d\tau \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t f(\tau)(t-\tau)^n\, d\tau = I_a^{n+1} f(t)
\end{aligned}$$

Donc

$$_aI_t^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau \tag{1.17}$$

■

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la génralisation du factoriel par la fonction Gamma -Euler $\Gamma(n+1) = n!$, Riemann rendu compte que le second membre de(1.17) pourait avoir un sens même quand α prenant une valeur non-entiére, il a défnit l'intégrale fractionnaire de la maniére suivante :

Définition 1.8 *Soit* $\alpha > 0$ *l'opérateur*

$$\left({}_aI_t^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau; \alpha > 0 \tag{1.18}$$

Est appelé opérateur d'intégration fractionnaire(à gauche) de Reimann-Liouville d'ordre α

Exemple 1.1 *Soit* f *une fonction telle que* $f(t) = (t-a)^n, a \in \mathbb{R}$. *On calcule l'intégrale fractionnaire de Riemann-liouville d'ordre* α

$${}_aI_t^\alpha (t-a)^n = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^n\, ds$$

à l'aide de changement de variable $s = a + (t-a)x$ *on obtient :*

$${}_aI_t^\alpha (t-a)^n = \frac{(t-a)^{n+1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t-a)^{\alpha-1} (1-x)^{\alpha-1} x^n dx$$

Pour $n = 2$, $\alpha = 0.5$ *on aura :*

$$I^{0.5}(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3.5)} (t-a)^{2,5}$$

Définition 1.9 (*Intégrale fractionnaire de Reimann-Liouville à droite*)

$$\forall t < T \quad \left({}_tI_T^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau$$

1.4.2 Dérivées au sens de Reimann-Liouville

Définition 1.10 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *et* f *une fonction localement intégrable définie sur* $[0, T]$.

La dérivée d'ordre α *de* f *est définie par :*

1- Dérivée au sens de Reimann-Liouville à gauche

$$ {}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\int_{0}^{t}\frac{f\left(\tau\right)}{\left(t-\tau\right)^{\alpha-n+1}}d\tau \tag{1.19}$$

2- Dérivée au sens de Reimann-Liouville à droite

$$ {}_{t}^{R}D_{T}^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\int_{t}^{T}\frac{f\left(\tau\right)}{\left(\tau-t\right)^{\alpha-n+1}}d\tau \tag{1.20}$$

Où le nombre entier n est choisi telle que : $n-1<\alpha\ <n$

Remarque 1.3 *On a*

$$\begin{aligned}
{}_{0}^{R}D_{t}^{\alpha}C &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\int_{0}^{t}\frac{C}{\left(t-\tau\right)^{\alpha-n+1}}d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}d\tau \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\left[-\left(t-\tau\right)^{n-\alpha}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\
&= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}t^{n-\alpha} \\
&= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}t^{n-\alpha}
\end{aligned}$$

1.5 Dérivées au sens de Caputo.

1.5.1 Introduction

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a jouée un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo $(1967-1969)$ ont rendu compte que cette défnition doit être révisé, car les problémes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie, exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques, ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires

1.5.2 Dérivées au sens de Caputo.

Définition 1.11 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$ *et* f *une fonction localement intégrable définie sur* $[0, T]$.

La dérivée d'ordre α *de* f *est définie par :*

1- Dérivée au sens de Caputo à gauche

$$ {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \tag{1.21} $$

2- Dérivée au sens de Caputo à droite :

$$ {}_{t}^{C}D_{T}^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t}^{T} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}} d\tau \tag{1.22} $$

avec n *un entier positif vérifiant l'inégalité :* $n-1 \; < \alpha < n$

Remarque 1.4 *La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :*

$$ \begin{aligned} {}^{C}D^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{t} \frac{0}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau \\ &= 0 \end{aligned} $$

1.6 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald –Letnikov

1.6.1 L'intégrale farctionnnaire

Définition 1.12 *Soit* $\alpha > 0$, $f(t)$ *est une fonction continues, l'intégrale fractionnaire de G–L est définie par :*

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{GL}I_{t}^{\alpha} f(t) &= \lim_{h \to \infty} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} f(t-kh) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s) \, ds \end{aligned} $$

où

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!}$$

et les valeurs de n et h sont relées par

$$nh = t - a$$

Si la dérivée $f'(t)$ est continue dans $[a,b]$, alors l'intégration par parties donne :

$${}_{a}^{GL}I_t^{\alpha} f(t) = \frac{f(a)}{\Gamma(\alpha+1)}(t-\alpha)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f'(s)\,ds$$

Si la fonction $f(t)$ est de classe $C^{(n)}$, nous obtenos :

$${}_{a}^{GL}I_t^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(\alpha+k+1)}(t-\alpha)^{\alpha+k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+n-1} f^{(n)}(s)\,ds$$

1.6.2 Dérivée fractionnaire au sens de Grünwald –Letnikov

Définition 1.13 *Soit $\alpha > 0$,et $f(t)$ est une fonction continue sur un intervalle fini $[a,b]$,la dérivée fractionnaire de $(G-L)$ est définie par :*

$$\begin{aligned} {}_{a}^{G-L}D_t^{\alpha} f(t) &= \lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\alpha}{k} f(t-kh) \qquad (1.23)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(t-\alpha)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha+1)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(s)\,ds \end{aligned}$$

La formule (1.23) est obtenue sous l'hypothése que les dérivées $f^{(k)}(t) = (k = 1, ...n+1)$ sont continues dans l'intervalle fermé $[a,b]$ et que n est un nombre entier vérifiant la condition

$$n > \alpha - 1$$

1.7 Propriétés des dérivées fractionnaires

1.7.1 Linéarité

La différentiation fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}\left(\lambda f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=\lambda D^{\alpha}f\left(x\right)+D^{\alpha}g\left(x\right)$$

où D^{α} désigne n'importe quelle approche de dérivation considérééе dans ce mémoire

1.7.2 Non–commutation

$$\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left(D^{\alpha}f\left(x\right)\right)=D^{n+\alpha}f\left(x\right)\neq D^{\alpha}\left(\frac{d^{n}}{dx^{n}}f\left(x\right)\right)$$

1.8 La relation entre la dérivée au sens de Caputo et celle de Riemann-liouville

Soit $\alpha>0$ avec $n-1 \ <\alpha<n,(n\in\mathbb{N})$ la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et celle de Caputo sont relies par la formule :

$$\left({}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}\ f\right)(t)=\left({}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\ f\right)(t)+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{\left(k-\alpha+1\right)}\left(t-1\right)^{k-\alpha} \tag{1.24}$$

Quand

$$f^{(k)}\left(a\right)=0 \text{ pour } k=0,1,2,...,m-1$$

La dérivée au sens de Caputo coïncide avec celle de Riemann-Liouville c'est–à–dire :

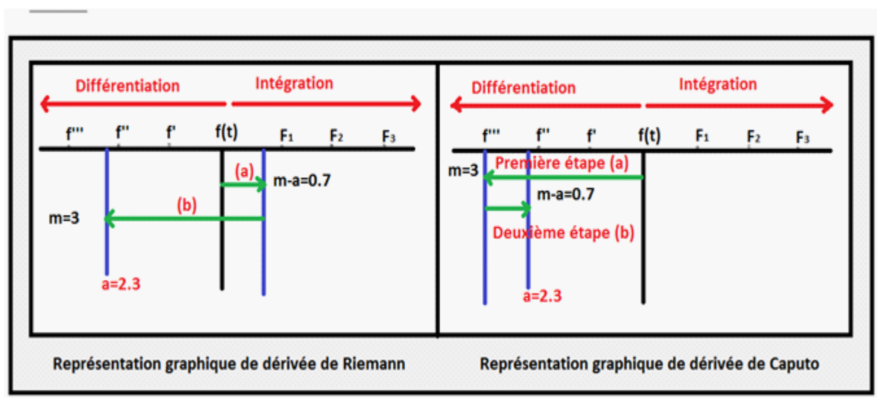
$$\left({}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}\ f\right)(t)=\left({}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\ f\right)(t)$$

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est–à–dire, contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $t = a$

Graghiquement on peut dire que le chemin suit pour arriver la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit le sans de Riemann-Liouville comme le montre la fugure (FIG. 1.1) c'est–à–dire :

Pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha < m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m - \alpha)$ pour la fonction $f(t)$ et puis on dérive le résultat obtenu l'ordre entier m.

Mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre où $m - 1 \leq \alpha < m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(t)$ et puis on l'intégre d'ordre fractionnaire $(m - \alpha)$



$(FIG.1.1)$ La diffirence entre l'approche de Rimanne et l'approche de caputo

Chapitre 2

Non existence de la solution global d'une équation hyperbolique avec amortissement fractionelle

2.0.1 Introduction

L'amortissement date depuis plusieurs siècles, cette ancienneté n'est pas, pourtant, la seule particularité de cette histoire. Un autre trait marquant réside dans le fait que l'usage de l'amortissement a été mis en place pour la première fois par les ingénieurs et les architectes qui ont en vue un moyen pour l'estimation de la valeur d'un eptions prises par le concept de l'amortissement tout au long de son histoire : l'amortissement en tant que diminution du prix, l'amortissement en tant que détérioration physique, ou l'amortissement en tant que diminution de la valeur.

Ainsi, ce n'est qu'avec l'industrialisation et le développement des chemins de fer que l'interprétation de l'amortissement en tant que détérioration physique du bien vient en évidence. A force d'employer une immobilisation, des phénomènes physiques de frottement et autres se produisent entre ses diverses parties provoquant la réduction de la quantité et la qualité des services qu'elle rend.

Définition 2.1 *Un amortissement est l'évolution d'un phénomène vibratoire, survrnant quand il n'est plus énergétiquement entretenu.Alors ce phénomène subit une diminution d'énergie* (*par exemple énergie perdue par frottement*), *d'où diminution de l'amplitude de l'onde porteuse*

Exemple 2.1 *- Probléme sans amortissement :*

Considérons un corps de masse m *suspendu à un ressort de raideur* k *sans masse. Supposons que l'on communique à la masse* m *un déplacement de* z *vers le bas, à partir de sa position d'équilibre et qu'on l'abandonne sans vitesse initiale. L'équation du mouvement s'écrit :*

$$m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + kz = 0$$

- Probléme avec amortissement

Considérons pour cela à nouveau l'exemple du corps de masse m *suspendu a un ressort de raideur* k *sans masse et relié à un amortisseur dont le rôle est d'introduire une force de freinage proportionnelle à la vitesse relative. Le coefficient de proportionnalité noté* ρ*, L'équation du mouvement s'écrit donc :*

$$m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \rho\frac{\partial z}{\partial t} + kz = 0$$

2.0.2 Explostion de la solution d'un problème et l'exposant critique

Définition 2.2 *On dit que* $u(x,t)$ *est une solution locale du probléme d'évolution si elle définie sur un temps finie c-à-d*

$$\exists T > 0; \forall t \in [o, T] : \ u(x,t) \ \textit{ existe}$$

Définition 2.3 *Si* $u(x,t)$ *est définie pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$*,alors* $u(x,t)$ *est appelé solution globale c-à-d*

$$\forall t \in [0, +\infty[: u(x,t) \ \textit{ existe}$$

Définition 2.4 *Explosion*

Soit $u(x,t)$ *est une solution d'un probléme d'évolution, telle que* $x \in \mathbb{R}^N$ *et* $t \geq 0$; *on dit que* $u(x,t)$ *explose en temps fins* T *si*

$$\lim_{\substack{\leq \\ t \to T}} |u(x,t)| = +\infty$$

Dans ce cas

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x,t)| = +\infty$$

Le phénméne de l'explosion est a paris une grande importance depuis 1966; *quand Fujita a etudié le problème sous la forme*

$$\begin{cases} \partial_t u = \triangle u + u^p \ \ dans\ \mathbb{R}^N \times [0,+\infty[\\ u(.,0) = \varphi \qquad dans\ \ \mathbb{R}^N \\ \qquad\qquad\quad u \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Fujita a cherché des fonctions continues $u(x,t)$ *sur* $\mathbb{R}^N \times [0,T]$ *avec* $T > 0$ *et prouvé que :*

i) si $p< 1 + \frac{2}{N}$ *la solution de explose en temps finis*

ii) si $p > 1 + \frac{2}{N}$ *alors pour chaque* $t > 0$ *le probléme* $(2,1)$ *admet une solution positive non triviale globale*

En 1973 *Hayakawa complétent l'etude de Fujita en démontrant que si* $p = 1 + \frac{2}{N}$ *il n'existe pas de solution globale positive*

En 1997 *Kiyoshi Mochizuki et Ryuichi Suzuki géneralisent les résultats de Fujita en étudient les solutions faibles de probléme* $(2,1)$ *et démontrent que le phénoméne de Fujita s'étend à ces solutions faible avec le méme exposent*

$$p = 1 + \frac{2}{N} = p_c$$

l'exposant p_c*est appelé exposant critique de Fujita pour l'equation* $(2,1)$

Définition 2.5 *Exposent critique*

L'exposant critique p_c *est un nombre réel positive vérifieé les caractéristiques suivantes :*

lorsque $p_c < p$, *toutes les solutions de*$(2,1)$ *avec des données initiales suffisamment petites, sont globales, tandis que lorsque* $1 < p < p_c$, *toutes les solutions du probleme d'evolution avec des données moyennes positives explosent dans un temps fini, quelque petites que puissent être ces données.*

2.1 Etude d'un probléme avec amortissement

2.1.1 L'équation d'onde avec amortissement

L'équation d'onde en physique est une équation partielle du deuxième degré qui décrit généralement le mouvement des vagues, qu'il s'agisse de sons, de lumière ou d'ondes d'eau. Elle est donc l'équation générale qui décrit la propagation d'une onde.

Cependant L'équation d'onde avec amortissement

$$u_{tt} - \triangle u + u_t = 0 \tag{2.2}$$

Est un modèle qui décrit la propagation de l'onde avec frottement. Cette équation est également connue sous le nom d'équation télégraphique développée par Oliver Heaviside. De nombreux mathématiciens ont étudié le fait que la solution de l'équation d'onde avec amortissement a un phénomène dit de diffusion, c'est-à-dire que la solution se comporte comme celle de l'équation de chaleur correspondante :

$$u_t - \triangle u = 0 \tag{2.3}$$

quand $t \to \infty$.

2.1.2 Non existence de la solution global

Dans cette partie, on va étudiée la non existence de la solution global du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \triangle u + D_{+}^{\alpha} u = h(t,x)\,|u|^p \\ u(0,x) = u_{0}(x)\,;\ u_t(0,x) = u_{1}(x) \end{cases} \tag{2.4}$$

avec

$$Q = [0, +\infty[\times \mathbb{R}^N;\ 0 < \alpha < 1$$

oŭ La fonction $h(x,t)$ est supposé être positive et satisfaisant :

$$h\left(R^2 t, xR\right) = R^{\rho} h(t,x)$$

La non-existence de solutions globaux qu'on va démontrer signifieraient ; qu'en cas d'existence d'une solution locale, cette solution doit exploser en temps fini.

L'étude du problème (2.4) est motivé par d'autres études précédentes, comme pour Qi. Zhang qui étudie le problème :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t + \triangle u = |u|^p & (t,x) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}^N \\ u(0,x) = u_0(x) \quad u_t(0) = u_1(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{2.5}$$

avec

$$\int_k u_i(x)\, dx > 0$$

Et conclut que : Si : $1 < p < 1 + \frac{2}{N}$; la solution de $(2,5)$ n'éxiste pas, et montre que le cas :

$$p < 1 + \frac{2}{N}$$

appartient au cas d'explosion

Ensuite, Todorova etYordanov changent les conditions initiale du problème de Qi. Zhang et montrent que :

Si $1 + \frac{2}{N} < p < \frac{N}{N-2}$ et $N \geq 3$ ou si $1 + \frac{2}{N} < p < +\infty$ pour $N = 1,2$, le problème $(2,5)$ admet une unique solution globale telle que

$$u(0,x) = \epsilon u_0(x), \quad u_t(0) = \epsilon u_1(x), \ x \in \mathbb{R}^N$$

Sinon ; si $1 < p < 1 + \frac{2}{N}$, la solution u explose en temps finis.

Pour le problème (2.4), la non éxistence de la solution global du problème est démontré par l'absurd et ceci en supposant que le problème (2.4) admet une solution globale faible et on arrive a une contradiction

Définition 2.6 *On dit que $u(x,t) \in L^1_{loc}(Q_T)$ est une solution faible du problème $(2,4)$, si $u \in L^p_{loc}(Q_T, h\ dtdx)$ et vérifiée*

$$\int_Q \varphi u_{tt} dtdx - \int_Q \varphi \triangle u dtdx + \int_Q D^\alpha_+ u \varphi dtdx = \int_Q h(t,x)\, \varphi\, |u|^p\, dtdx \tag{2.6}$$

pour tout $\varphi \in C_0^2(Q_T), \varphi \geq 0$ *et satisfaisant*

$$\begin{cases} \varphi(T,x) = \varphi_t(T,x) = 0 \\ \varphi_t(0,x) = 0 \\ \varphi(0,x) = \varphi_0(x) \end{cases}$$

Remarque 2.1 *i* $-\ u \in L^p_{loc}(Q_T, h\ dtdx)$ *signifie que* $\int\limits_{Q_T} |u|^p h\ dtdx < \infty$

ii$-$ *L'équation* (2.6) *donne :*

$$\int_Q h(t,x)\varphi|u|^p\,dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x)\varphi_0(x)\,dx = \int_Q \left(u\varphi_{tt} - u\triangle\varphi + uD_-^\alpha\varphi\right)dtdx \tag{2.7}$$

Théorème 2.1 *On suppose que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_1(x)\,dx > 0 \text{ et } 1 < p \leq 1 + \frac{2\alpha+\rho}{2+N-2\alpha}$$

Alors le problème $(2,4)$ *n'admet pas une solution globale non trivial.*

Preuve On suppose que la solution du problème $(2,4)$ est globale.

Considérons une fonction $\varphi_0 \in C_0^2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\begin{cases} \varphi_0 \geq 0 \\ \varphi_0 \text{ est décroissante} \\ \varphi_0(y) = \begin{cases} 1, \text{ si } |y| \leq 1 \\ 0, \text{ si } |y| \geq 2 \end{cases} \end{cases}$$

Choisissons comme fonction test, la fonction $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(t,x) = \varphi_0^\lambda(\xi) \text{ oŭ } \xi = R^{-4}\left(t^2 + |x|^4\right)$$

avec

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \lambda > p \text{ et } R \in \mathbb{R}_+^*$$

et telle que

$$\int_{supp\ p\ \varphi} |\triangle\varphi|^q |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} dtdx + \int_{supp\varphi} |\varphi_{tt}|^q |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} dtdx + \int_{supp\varphi} \left|D_-^\alpha\varphi\right|^q |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} dtdx < \infty$$

On peut écrire :

$$\int_Q u\varphi_{tt}dtdx = \int_Q u\,(h\varphi)^{\frac{1}{p}}\,\varphi_{tt}\,(h\varphi)^{\frac{-1}{p}}\,dtdx \tag{2.8}$$

Comme φ est une fonction à support $supp\varphi$ compact et en utilisant l'inégalité de Holder$(1,1)$, on trouve :

$$\int_Q u\varphi_{tt}dtdx \leq \left(\int_{supp\varphi} |u|^p\,|h\varphi|\,dtdx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{supp\ \varphi_{tt}} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}}\,|\varphi_{tt}|^q\,dtdx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.9}$$

et en faisant appel à l'inégalité de $\epsilon-$Young$(1,2)$, on a :

$$\int_Q u\varphi_{tt}dtdx \leq \epsilon\int_{supp\ \varphi} |u|^p\,|h\varphi|\,dtdx + C_\epsilon\int_{supp\ \varphi_{tt}} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}}\,|\varphi_{tt}|^q\,dtdx \tag{2.10}$$

pour $\varepsilon > 0$

De même pour le deuxième terme du membre droit de (2.7), nous obtenons les estimations :

$$\int_Q u\triangle\varphi dtdx \leq \left(\int_{supp\varphi} |u|^p\,|h\varphi|\,dtdx\right)^{\frac{1}{P}} \cdot \left(\int_{supp\triangle\varphi} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}}\,|\triangle\varphi|^q\,dtdx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.11}$$

et

$$\int_Q u\triangle\varphi dtdx \leq \epsilon\int_{supp\varphi} |u|^p\,|h\varphi|\,dtdx + C_\epsilon\int_{supp\triangle\varphi} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}}\,|\triangle\varphi|^q\,dtdx \tag{2.12}$$

pour $\varepsilon > 0$

et de même pour le troisième terme de (2.7), on a :

$$\int_Q uD_+^\alpha\varphi dtdx \leq \left(\int_{supp\varphi} |u|^p\,|h\varphi|\,dtdx\right)^{\frac{1}{P}} \cdot \left(\int_{suppD_+^\alpha\varphi} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}}\,\left|D_+^\alpha\varphi\right|^q\,dtdx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.13}$$

et

$$\int_Q uD_+^\alpha \varphi dtdx \leq \epsilon \int_{supp\varphi} |u|^p |h\varphi| dtdx + C_\epsilon \int_{suppD_+^\alpha\varphi} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} \left|D_+^\alpha\varphi\right|^q dtdx \tag{2.14}$$

D'aprés $(2,10), (2,12)$ et $(2,14)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_Q h(t,x)|u|^p \ dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x)\varphi_0(x)dx &\leq 3\epsilon \int_{supp\varphi} |u|^p |h\varphi| dtdx \\ &+C_\epsilon \int_{supp\varphi} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} \left(|\varphi_{tt}|^p + |\triangle\varphi|^q + \left|D_-^\alpha\varphi\right|^q\right) dtdx \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dans cette partie ,nous introduisons les variables (τ, y) définies par :

$$t = R^2\tau, x = Ry$$

On pose :

$$\Omega = \left\{(\tau, y) \in [0, +\infty] \times \mathbb{R}^N \text{ tq } \tau^2 + |y|^2 \leq 2 \ \right\}$$

Par conséquent, on écrit :

$$\varphi(t,x) = \varphi\left(R^2\tau, Ry\right) = \chi(\tau, y)$$

Comme :

$$\begin{aligned} \varphi_t(t,x) &= \frac{\partial\varphi\left(R^2\tau, +Ry\right)}{\partial R^2\tau} \\ &= R^{-2}\chi_\tau(\tau, y) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_{tt}(t,x) &= \frac{\partial}{\partial R^2\tau}\left(\frac{\partial\varphi\left(R^2\tau, +Ry\right)}{\partial R^2\tau}\right) \\ &= R^{-4}\chi_{\tau\tau}(\tau, y) \end{aligned}$$

et

$$dt = R^2 d\tau \ \ dx = R^N dy$$

alors

$$\int_{supp\varphi} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} |\varphi_{tt}|^q \, dtdx = R^{\frac{-\rho q}{p}-4q+N+2} \int_{\Omega} |h(\tau,y)|^{\frac{-p}{q}} |\chi(\tau,y)|^{\frac{-p}{q}} |\chi_{tt}(\tau,y)|^q \, d\tau dy \tag{2.16}$$

Aussi

$$\begin{aligned}\triangle\varphi(t,x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, ..., \frac{\partial^2}{\partial x_N^2},\right)\varphi(t,x) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial (Ry_1)^2}, \frac{\partial^2}{\partial (Ry_2)^2}, ..., \frac{\partial^2}{\partial (Ry_N)^2}\right)\varphi\left(R^2\tau, Ry\right) \\ &= R^{-2}\triangle\chi_{xx}(\tau,y)\end{aligned}$$

donc

$$\int_{supp\ p\ \varphi} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} |\triangle\varphi|^q \, dtdx = R^{\frac{-\rho q}{p}-2q+N+2} \int_{\Omega} h^{\frac{-p}{q}} \chi^{\frac{-p}{q}} |\triangle\chi|^q \, d\tau dx \tag{2.17}$$

Or

$$\begin{aligned}D_-^{\alpha}\varphi(t,x)(t) &= D_-^{\alpha}\varphi\left(R^2\tau, Ry\right) \\ &= R^{2\alpha}D_-^{\alpha}\chi(\tau,y)\end{aligned}$$

Par conséquence

$$\int_{supp\varphi} |h\varphi|^{\frac{-q}{p}} \left|D_-^{\alpha}\varphi\right|^q \, dtdx = R^{\frac{-\rho q}{p}-2\alpha q+N+2} \int_{\Omega} h^{\frac{-p}{q}} \chi^{\frac{-p}{q}} \left|D_-^{\alpha}\chi\right|^q \, d\tau dx \tag{2.18}$$

D'aprés $(2,16), (2,17)$ et $(2,18)$; on a

$$\begin{aligned}\int_Q h\,|u|^p\,\varphi dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x)\,\varphi_0(x)\,dx \quad &\leq \quad C_\epsilon R^{\frac{-\rho q}{p}-4q+N+2}\int_\Omega h^{\frac{-p}{q}}\,|\chi|^{\frac{-p}{q}}\,\left|\chi_{\tau\tau}\right|^q d\tau dy \\ &+R^{\frac{-\rho q}{p}-4q+N+2}\int_\Omega h^{\frac{-p}{q}}\,|\chi|^{\frac{-p}{q}}\,|\triangle\chi|^q\,d\tau dx \\ &+R^{\frac{-\rho q}{p}-2\alpha q+N+2}\int_\Omega h^{\frac{-p}{q}}\,|\chi|^{\frac{-p}{q}}\,\left|D_-^\alpha\chi\right|^q d\tau dx\end{aligned}$$

donc

$$\int_Q h(t,x)\,|u|^p\,\varphi dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x)\,\varphi_0(x)\,dx \leq C\left(R^{\frac{-\rho q}{p}-2\alpha q+N+2} + R^{\frac{-\rho q}{p}-4q+N+2}\right) \tag{2.19}$$

Notons que $\varphi_{_0}$ est choisi de manière à avoir $\left|\chi_{\tau\tau}\right|^q$ et $|\triangle\chi|^q$ ont la même grandeur en R

Maintenant, nous imposons la condition

$$\frac{-\rho q}{p} - 2\alpha q + N + 2 \leq 0$$

Comme p et q sont conjugués, on a

$$q = \frac{p}{p-1}$$

donc

$$\frac{-\rho\frac{p}{P-1}}{p} - 2\alpha\frac{p}{p-1} + N + 2 \leq 0$$

alors

$$\frac{-\rho}{p-1} - 2\alpha\frac{p}{p-1} + N + 2 \leq 0$$

ainsi

$$\frac{-\rho - 2\alpha P}{p-1} \leq -N - 2$$

Par conséquence

$$p \leq \frac{N+2-\rho}{-2\alpha+N+2}$$

alors

$$p \leq 1 + \frac{2\alpha + \rho}{2 + N - 2\alpha} = p_c$$

On distingue deux cas

Si $p < p_c$, en passant à la limite quand R tend vers ∞ dans (2.19) ; on trouve

$$\lim_{R \to \infty} \left[\int_Q h \left| u \right|^p \varphi dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1 \left(x \right) \varphi_0 \left(x \right) dx \right] \leq 0$$

D'aprés $(1,4)$ on a

$$\lim_{R \to \infty} \left[\int_Q h \left| u \right|^p \varphi dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1 \left(x \right) \varphi_0 \left(x \right) dx \right] = \int_Q h \left| u \right|^p dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1 \left(x \right) dx \leq 0$$

Par conséquence

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_1 \left(x \right) dx \leq 0$$

Contradiction avec l'hypotése $\int_{\mathbb{R}^N} u_1 \left(x \right) dx \geq 0$

si $p = p_c$; de l'estimation (2.19), on obtient

$$\int_Q h \left| u \right|^p \varphi dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1 \left(x \right) \varphi_0 \left(x \right) dx \leq C$$

donc

$$\int_Q h \left| u \right|^p \varphi dtdx \leq C$$

On pose

$$C_R = \left\{ (t, x) : R^2 \leq t^2 + \left| x \right|^4 \leq 2R^4 \right\}$$

Par conséquence

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} h \left| u \right|^p \varphi dtdx = 0$$

D'aprés $(2,9),(2,11)$ et $(2,13)$ on a

$$\int_Q h\,|u|^p\,\varphi dtdx+\int_{\mathbb{R}^N}u_1\,(x)\,\varphi_0\,(x)\,dx \le \left(\int_{c_R}|u|^p\,|h\varphi|\,dtdx\right)^{\frac{1}{P}}\times \left\{\begin{array}{c}\left(\int_{supp\ \varphi_{tt}}|h\varphi|^{\frac{-q}{p}}\,|\varphi_{tt}|^q\,dtdx\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\int_{supp\ \triangle\varphi}|h\varphi|^{\frac{-q}{p}}\,|\triangle\varphi|^q\,dtdx\right)^{\frac{1}{q}}\\ +\left(\int_{supp\ D_+^{\alpha}\varphi}|h\varphi|^{\frac{-q}{p}}\,\left|D_+^{\alpha}\varphi\right|^q\,dtdx\right)^{\frac{1}{q}}\end{array}\right\} \tag{2.20}$$

Passant à la limite quand $R\to+\infty$ dans (2.20) ; on a :

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_Q h\,|u|^p\,\varphi dtdx+\int_{\mathbb{R}^N}u_1\,(x)\,\varphi_0\,(x)\,dx\right]=0$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^N}u_1\,(x)\,dx=0 \tag{2.21}$$

Contradiction avec

$$\int_{\mathbb{R}^N}u_1\,(x)\,dx>0$$

■

Chapitre 3

Conditions nécessaires pour l'existence des solutions locales et globales

Théorème 3.1 *Soit u une solution locale de* (2.4) *où* $T < \infty$ *et* $p > 1$ *alors ils existent des constantes* γ *et* L *telles que*

$$\liminf_{|x|\to\infty}\left(u_1(x)\,h^{\frac{p}{p-1}}(t,x)\right) \leq \frac{1}{q}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{q}{p}}\left(\frac{\gamma^q}{T^{2q-1}} + LT^{(1-\alpha)q}\right)$$

Preuve De la définition d'une solution faible , et pour toute fonction test $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)\,, \varphi \geq 0$ telle que

$$supp\varphi \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N \quad |x| > R > 0\right\}$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_1(x)\,\varphi_0(x)\,dx + \int_{Q_T} h(t,x)\,|u|^p\ \ \varphi\ dtdx \leq \int_{Q_T}\left(|u|\,|\varphi_{tt}| + |u|\,|\triangle\varphi| + |u|\left|D_-^\alpha\varphi\right|\right)dtdx \quad (3.1)$$

En écrit

$$|u|\,|\varphi_{tt}| = |u|\,(\varphi h)^{\frac{1}{p}}\,(\varphi h)^{\frac{-1}{p}}\ \varphi_{tt}$$

En utilisant l'inégalité de $\epsilon-$Young$(1,2)$, on trouve :

$$\int_{Q_T} u\varphi_{tt}dtdx \leq \epsilon \int_{Q_T} |u|^p (\varphi h) dtdx + C_\epsilon \int_{supp\ \varphi_{tt}} (\varphi h)^{\frac{-q}{p}} |\varphi_{tt}|^q dtdx \tag{3.2}$$

Pour $\varepsilon > 0$ et $C_\varepsilon = \frac{1}{q}(p\varepsilon)^{\frac{q}{p}}$

De mème pour le deuxième terme du membre droit de (2.7) , nous obtenons l'estimations :

$$\int_{Q_T} |u| \ \ |\triangle\varphi| dtdx \leq \epsilon \int_{Q_T} |u|^p |\varphi h| dtdx + C_\epsilon \int_{Q_T} |\varphi h|^{\frac{-q}{p}} |\triangle\varphi|^q dtdx \tag{3.3}$$

Le mème est vrai pour le troisième terme (2.7) :

$$\int_{Q_T} |u| \left|D_-^\alpha\varphi\right| dtdx \leq \epsilon \int_{Q_T} |u|^p \varphi h \ dtdx + C_\epsilon \int_{Q_T} (\varphi h)^{\frac{-q}{p}} \left|D_-^\alpha\varphi\right|^q dtdx \tag{3.4}$$

Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}$ d'aprés $(3,2)\,,(3,3)$ et$(3,4)$

$$\begin{aligned}\int_{Q_T} h(t,x)|u|^p \varphi \ dtdx + \int_{\mathbb{R}^N} u_1(x)\varphi_0(x)dx \ \ &\leq \ \ 3\epsilon\int_{Q_T} |u|^p \ \ h(t,x)\varphi dtdx \\ &+C_\epsilon\int_{Q_T} \ (h\varphi)^{\frac{-q}{p}} \left(|\varphi_{tt}|^p + |\triangle\varphi|^q + \left|D_-^\alpha\varphi\right|^q\right) dtdx\end{aligned} \tag{3.5}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_1(x)\varphi_0(x)dx \leq C_{\frac{1}{3}} \int_{Q_T} (h\varphi)^{\frac{-q}{p}} \left(|\varphi_{tt}|^p + |\triangle\varphi|^q + \left|D_-^\alpha\varphi\right|^q\right) dtdx \tag{3.6}$$

avec

$$C_\epsilon = \frac{1}{q}\left(\frac{3}{p}\right)^{\frac{q}{p}}$$

Choisissons la fonction test φ définie comme suit :

$$\varphi(t,x) = \Phi\left(\frac{x}{R}\right)\left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right)^{2q}$$

avec

$$\begin{cases} \Phi \in C_0^\infty(Q_T) \\ \Phi \geq 0 \\ \quad supp\varphi \subset \left\{x \in \mathbb{R}^N \ \ 1 < x < 2\right\} \\ |\triangle\Phi| \leq k\Phi \end{cases}$$

Il est clair que φ ainsi définie, satisfait :

$$\begin{cases} \varphi(T,x) = 0 \\ \varphi_t(T,x) = \varphi_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

Faisons le changement de variables suivant

$$t = T\tau \qquad T > 0$$

On a

$$\varphi_{tt} = (12-16q)^q \, T^{-2q} \Phi^q$$

et

$$0 < t < T \Rightarrow 0 < \tau < 1$$

on obtient

$$\int_{Q_T} |\varphi_{tt}|^q (\varphi h)^{\frac{-q}{p}} \, dtdx \leq \gamma^q T^{1-2q} \int_{Q_1} h^{1-q} \Phi \, dx \tag{3.7}$$

avec

$$\gamma = (12-16q)$$

Aussi

$$\triangle\varphi(t,x) = R^{-2} \triangle\Phi\left(\frac{x}{R}\right)$$

D'aprés l'hypothése

$$|\triangle\Phi| \leq k\Phi$$

on trouve :

$$\int_{Q_T} |\triangle\varphi|^q (\varphi h)^{\frac{-q}{p}} \, dtdx \leq R^{-2q} T k^q \int_{Q_1} h^{1-q} \Phi \, dx \tag{3.8}$$

Pour le troisième terme

$$\int_{Q_T} \left|D_{-}^{\alpha}\varphi\right|^{q} (h\varphi)^{\frac{-q}{p}}\, dtdx = \int_{Q_T} h^{1-q}\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^{2q(q-1)} \Phi \left|D_{-}^{\alpha}\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^{2q}\right|^{q} d\tau dx$$

On va calculer le terme

$$D_{-}^{\alpha}\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^{2q}$$

Utilisons la dérivé fractionnair au sens de Reimann-Liouville à droite

$$\begin{aligned} D_{-}^{\alpha} f(t) &= \frac{-1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_t^T \frac{f(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha-n+1}} d\sigma \\ &\Rightarrow \Gamma(n-\alpha) D_{-}^{\alpha} f(t) = -\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_t^T \frac{f(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha-n+1}} d\sigma \end{aligned}$$

Pour $n=1$

$$\Gamma(1-\alpha) D_{-}^{\alpha} f(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_t^T \frac{f(\sigma)}{(\sigma-t)^{\alpha}} d\sigma$$

On a

$$\Gamma(1-\alpha) D_{-}^{\alpha}\left(\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^{2q}\right) = \frac{d}{dt}\int_t^T \frac{\left(1-\frac{\sigma^2}{T^2}\right)^{2q}}{(\sigma-t)^{\alpha}} d\sigma$$

alors

$$T(1-\alpha) D_{-}^{\alpha}\left(\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^{2q}\right) = -T^{-4q}\frac{d}{dt}\int_t^T \frac{(T^2-\sigma^2)^{2q}}{(\sigma-t)^{\alpha}} d\sigma$$

On pose

$$I = \int_t^T \frac{(T^2-\sigma^2)^{2q}}{(\sigma-t)^{\alpha}} d\sigma$$

On fait le chengement de variable suivant

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\sigma - t}{T - t} \\
&\Rightarrow 1 - y = \frac{T - \sigma}{T - t} \\
&\Rightarrow 1 - y^2 = \frac{T^2 - \sigma^2}{(T - t)^2} - 2t\frac{1 - y}{T - t} \\
&\Rightarrow T^2 - \sigma^2 = \left(1 - y^2 + 2t\frac{1 - y}{T - t}\right)(T - t)^2 \\
&\Rightarrow \sigma - t = (T - t)\, y \\
&\Rightarrow d\sigma = (T - t)^{-1}\, dy
\end{aligned}
$$

Alors

$$I = \int_t^T \frac{(T^2 - \sigma^2)^{2q}}{(\sigma - t)^{\alpha}} d\sigma = (T - t)^{4q - \alpha + 1} \int_0^1 \left[\left(1 - y^2\right) + 2t\frac{1 - y}{T - t}\right] y^{-\alpha} dy$$

Donc

$$I = (T - t)^{4q - \alpha + 1} \int_0^1 y^{-\alpha} (1 - y)^{2q} \left[\ (1 + y) + \frac{2t}{T - t}\right]^{2q} dy$$

Utilison la formule binomial pour ;

$$(X + Y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \quad tq \quad C^n_{k = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

aors

$$\left((1 + y) + \frac{2t}{T - t}\right)^{2q} = \sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} (T - t)^{-2q+l} \ \ t^{2q-l} (1 + y)^l$$

où

$$C_l^{2q} = \frac{2q\,(2q - 1)\,(2q - 2)\ldots(2q - l + 1)\,(2q - l)!}{l\,(2q - l)!}{}^{2q}_{l}$$

donc

$$I = \sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} (T - t)^{2q - \alpha + l + 1} \ \ t^{2q-l} \int_0^1 y^{-\alpha} (1 - y)^{2q} (1 + y)^l$$

On utilise la formule binomiale pour la deuxième fois :

$$(1+y)^l = \sum_{n=0}^{l} C_n^l 1^{l-n} y^n \quad tq \quad C^l_{n=\frac{l!}{n!(l-n)!}}$$

avec

$$I = \sum_{l=0}^{2q} \sum_{n=0}^{l} 2^{2q-1} C_l^{2q} C_n^l (T-t)^{2q-\alpha+l+1} t^{2q-1} \int_0^1 (1-y)^{2q} y^{n-\alpha} dy$$

D'aprés la relation entre la fonction Betta et Gamma ona :

$$\beta(u,v) = \int_0^1 y^{v-1} (1-y)^{u-1} dy = \frac{T(u)T(v)}{T(v+u)} = \frac{T(2q+1)T(n-\alpha+1)}{T(2q+1+n-\alpha+1)}$$

alors

$$I = \sum_{l=0}^{2q} \sum_{n=0}^{l} 2^{2q-l} C_l^{2q} C_n^l \ (T-t)^{2q-\alpha+l+1} t^{2q-l} m_l$$

avec

$$m_l = \sum_{n=0}^{l} C_n^l \frac{T(2q+1)T(n-\alpha+1)}{T(2q+1+n-\alpha+1)}$$

de plus

$$\begin{aligned}
D_-^\alpha\left(\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)^{2q}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{-T^{-4q}}{T(1-\alpha)}\sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} (T-t)^{2q-\alpha+l+1} t^{2q-l} m_l\right) \\
&= \frac{-T^{-4q}}{T(1-\alpha)} \sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} m_l \\
&\quad \times \left((2q-l) t^{2q-l-1} (T-t)^{2q-\alpha+l+1} - (2q-\alpha+l+1)(T-t)^{2q-\alpha+l} t^{2q-l}\right) \\
&= \frac{-T^{-4q}}{T(1-\alpha)} \sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} m_l (T-t)^{2q-\alpha+l} t^{2q-l-1} \\
&\quad \times ((2q-l)(T-t) - (2q-\alpha+l+1)t) \\
&= \frac{-T^{-4q}}{T(1-\alpha)} \sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} m_l (T-t)^{2q-\alpha+l} t^{2q-l-1} \\
&\quad \times ((2q-l)T - (4q-\alpha+1)t)
\end{aligned}$$

alors

$$\int_{Q_T} \left|D_-^\alpha \varphi\right|^q (\varphi h)^{-\frac{q}{p}} \, dtdx = \frac{T^{1-\alpha q}}{T(1-\alpha)} \int_{Q_1} h^{1-q} (1-\tau)^{2q(q-1)} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) \times \left|\sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} m_l (1-\tau)^{2q-\alpha+l} \tau^{2q-l-1} ((2q-l)-(4q-\alpha+1)\tau)\right|^q d\tau$$

On a

$$0 < t < T \Rightarrow 0 < \tau < 1$$

alors

$$\int_{Q_T} \left|D_-^\alpha \varphi\right|^q (\varphi h)^{-\frac{q}{p}} \, dtdx = \frac{T^{1-\alpha q}}{T(1-\alpha)} \int_{Q_1} h^{1-q} (1-\tau)^{2q(q-1)} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) \times \left|\sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} m_l (1-\tau)^{2q-\alpha+l} \tau^{2q-l-1} ((2q-l)-(4q-\alpha+1)\tau)\right|^q dx$$

D'apres l'inegalité triangulaire, on a :

$$\int_{Q_T} \left|D_-^\alpha \varphi\right|^q (\varphi h)^{-\frac{q}{p}} \, dtdx = \frac{T^{1-\alpha q}}{T(1-\alpha)} \int_{Q_1} h^{1-q} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx \times \left|\sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} m_l (6q-l-\alpha+1)\right|^q dx$$

donc

$$\int_{Q_T} \left|D_-^\alpha \varphi\right|^q (\varphi h)^{-\frac{q}{p}} \, dtdx \leq LT^{1-\alpha q} \int_{Q_1} h^{1-q} (1-\tau)^{2q(q-1)} \Phi\left(\frac{x}{R}\right) dx \tag{3.9}$$

avec

$$L = \frac{1}{T(1-\alpha)} \left|\sum_{l=0}^{2q} 2^{2q-l} C_l^{2q} m_l (6q-l-\alpha+1)\right|^q$$

D'apres $(3,7), (3,8)$ et $(3,9)$ dans $(3,6)$; on a :

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_1(x) \varphi_0(x) \, dx \leq C_{\frac{1}{3}} \left(\gamma^q T^{1-2q} + k^q R^{-2q} T + LT^{1-\alpha q}\right) \int_{Q_1} h^{1-q} \Phi dx$$

Comme

$$\int_{R^N} u_1(t,x)\varphi_0(x)\,dtdx = \int_{R^N} u_1(x)\Phi(x)\,dx$$

et

$$\inf_{|x|>R}\left(u_1(x)h^{q-1}\right)\int_{R^N} h^{1-q}\Phi(x)\,dtdx \le \int_{R^N} u_1(x)\Phi(x)\,dx$$

implique

$$\inf_{|x|>R}\left(u_1(x)h^{q-1}\right)\int_{R^N} h^{1-q}\Phi(x)\,dx \le C_{\frac{1}{3}}\left(\gamma^q T^{1-2q} + k^q R^{-2q}T + LT^{1-\alpha q}\right)\int_{Q_1} h^{1-q}\Phi dx \quad (3.10)$$

Or

$$\inf_{|x|>R} h(t,x) > 0$$

alors

$$\inf_{|x|>R}\left(u_1(x)h^{q-1}\right) \le C_{\frac{1}{3}}\left(\gamma^q T^{1-2q} + k^q R^{-2q}T + LT^{1-\alpha q}\right)$$

Passant à la limite quand $R \to +\infty$; on obtient :

$$\liminf_{|x|\to\infty}\left(u_1(x)h^{q-1}\right) \le C_{\frac{1}{3}}\left(\frac{\gamma^q}{T^{2q-1}} + +LT^{1-\alpha q}\right)$$

■

Corollaire 3.1 *Soit* $p > 1$

$$\liminf_{|x|\to\infty}\left(u_1(x)h^{\frac{p}{p-1}}(t,x)\right) = +\infty$$

Alors le probléme $(2,4)$ *n'admet aucune solution locale pour tout* $T > 0$

Preuve Soit $p > 1$, et $T > 0$

On a :

$$\liminf_{|x|\to\infty}\left(u_1(x)h^{\frac{p}{p-1}}(t,x)\right) = +\infty$$

C–à–d

$$\forall C > 0 \quad \liminf_{|x|>R} \left(u_1(x)\, h^{\frac{p}{p-1}}(t,x) \right) > C$$

On prend

$$C = \left(\frac{\gamma^q}{T^{2q-1}} + LT^{1-\alpha q} \right) C_{\frac{1}{3}}$$

donc

$$\liminf_{|x|>R} \left(u_1(x)\, h^{\frac{p}{p-1}}(t,x) \right) > \left(\frac{\gamma^q}{T^{2q-1}} + LT^{1-\alpha q} \right) C_{\frac{1}{3}}$$

D'aprés le théoreme precédent,on déduit que la solution du probléme $(2,4)$ est n'exist pas ■

Corollaire 3.2 *On suppoose que* $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$ *et* $u_1(x) > 0,$ *si* $(2,4)$ *admet une solution faible globale alors :*

$$\liminf_{|x|\to\infty} \left(u_1(x)\, h^{\frac{p}{p-1}}(t,x) \right) = 0$$

Preuve On suppoose que (2.4) admet une solution faible globale et que

$$\liminf_{|x|\to\infty} \left(u_1(x)\, h^{\frac{p}{p-1}}(t,x) \right) > 0$$

On pose

$$P = \liminf_{|x|\to\infty} \left(u_1(x)\, h^{\frac{p}{p-1}}(t,x) \right)$$

D'apres le théorème precédent on a

$$p \leq \left(\frac{\gamma^q}{T^{2q-1}} + \frac{L}{T^{\alpha q-1}} \right) C_{\frac{1}{3}}$$

Quand

$$T^{1-2q} \leq T^{\alpha q-1}$$

Alors

$$T \leq \left(\frac{\gamma^q + L}{T^{\alpha q-1}} \right) C_{\frac{1}{3}}$$

et quand

$$T^{\alpha q-1} \leq T^{1-2q}$$

on a

$$T \leq \left(\frac{\gamma^q + L}{T^{1-2q}}\right) C_{\frac{1}{3}}$$

Donc

$$T \leq \max\left\{\left(\frac{\gamma^q + L}{T^{\alpha q-1}}\right) C_{\frac{1}{3}}, \left(\frac{\gamma^q + L}{T^{1-2q}}\right) C_{\frac{1}{3}}\right\}$$

contradiction avec la définition de la solution globale

Théorème 3.2 *Supposon que* $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$ *et* u *est une solution globale du probléme* $(2,4)$ *alors il existe une constante* $k > 0$ *telle que :*

$$\liminf_{|x|>R} \left(u_1(x)\, h^{\frac{p}{p-1}}(t,x)\right) \leq K$$

Preuve Comme : $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$ et p et q sont conjugués, on a :

$$\begin{aligned} \frac{q}{q-1} &< \frac{1}{1-\alpha} \\ -\alpha q + q &< q - 1 \\ \alpha q - 1 &> 0 \end{aligned}$$

Et pour $T > 1$ ■

D'aprés l'inégalité $(3,10)$ on a

$$\gamma^q T^{1-2q} + k^q R^{-2q} + LT^{1-\alpha q} \leq \frac{\gamma^q + L}{T^{\alpha q-1}} + k^q R^{-2q} T$$

donc

$$\inf_{|x|>R} \left(u_1(x)\, h^{q-1}(t,x)\right) \int_{\mathbb{R}^N} h^{1-q} \Phi dx \leq \left(\frac{\gamma^q + L}{T^{\alpha q-1}} + k^q R^{-2q} T\right) C_{\frac{1}{3}} \int_{Q_1} h^{1-\alpha q} \Phi dx \qquad (3.11)$$

On minimise $(3, 11)$ par rapport à T, et on pose

$$f(T) = \frac{\gamma^q + L}{T^{\alpha q - 1}} + k^q R^{-2q} T$$

On trouve :

$$f'(T) = (\gamma^q + L)(1 - \alpha q) T^{-\alpha q} + k^q R^{-2q}$$

Or

$$f'(T) = 0$$

donc

$$(\gamma^q + L)(\alpha q - 1) T^{-\alpha q} = k^q R^{-2q}$$

implique

$$T^{-\alpha q} = \frac{k^q R^{-2q}}{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)}$$

Par conséquence

$$T = \frac{((\gamma^q + L)(\alpha q - 1))^{\frac{1}{\alpha q}}}{(k^q R^{-2q})^{\frac{1}{\alpha q}}}$$

alors

$$\begin{aligned}
T^{1-\alpha q} &= \frac{((\gamma^q + L)(\alpha q - 1))^{\frac{1}{\alpha q}}}{(k^q R^{-2q})^{\frac{1}{\alpha q}}} \frac{k^q R^{-2q}}{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)} \\
&= \frac{((\gamma^q + L)(\alpha q - 1))^{\frac{1}{\alpha q} - 1}}{(k^q R^{-2q})^{\frac{1}{\alpha q} - 1}} \\
&= \left[\frac{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)}{k^q}\right]^{\frac{1-\alpha q}{\alpha q}} R^{-2\frac{\alpha q - 1}{\alpha}} \\
&= \left[\frac{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)}{k^q}\right]^{\frac{1-\alpha q}{\alpha q}} R^{-2\frac{\alpha q - 1}{\alpha}}
\end{aligned}$$

Comme

$$
\begin{aligned}
f(T) &= (\gamma^q + L)\, T^{1-\alpha q} + k^q R^{-2q} T \\
&= (\gamma^q + L)\left[\frac{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)}{k^q}\right]^{\frac{1-\alpha q}{\alpha q}} R^{-2\frac{\alpha q - 1}{\alpha}} + k^q R^{-2q} \frac{((\gamma^q + L)(\alpha q - 1))^{\frac{1}{\alpha q}}}{(k^q R^{-2q})^{\frac{1}{\alpha q}}} \\
&= \frac{(\gamma^q + L)}{\left[\frac{(\gamma^q+L)(\alpha q-1)}{k^q}\right]^{\frac{\alpha q - 1}{\alpha q}}} R^{-2\frac{\alpha q - 1}{\alpha}} + k^q R^{-2\left(\frac{\alpha q - 1}{\alpha}\right)} \left[\frac{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)}{(k^q)}\right]^{\frac{1}{\alpha q}} \\
&= \frac{(\gamma^q + L)}{\frac{(\gamma^q+L)(\alpha q-1)}{k^q}} \left[\frac{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)}{k^q}\right]^{\frac{1}{\alpha q}} R^{-2\frac{\alpha q - 1}{\alpha}} + k^q R^{-2\left(\frac{\alpha q - 1}{\alpha}\right)} \left[\frac{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)}{(k^q)}\right]^{\frac{1}{\alpha q}} \\
&= \left(\frac{(\gamma^q + L)}{k_1} + k^q\right) R^{-2\left(\frac{\alpha q - 1}{\alpha}\right)} k_1^{\frac{1}{\alpha q}}
\end{aligned}
$$

où

$$
k_1 = \frac{(\gamma^q + L)(\alpha q - 1)}{k^q}
$$

alors

$$
\inf_{|x|>R} \left(u_1(x)\, h^{q-1}(t,x)\right) \int_{\mathbb{R}^N} h^{1-q} \Phi dx \leq f(T)\, C_{\frac{1}{3}} \int_{Q_1} h^{1-\alpha q} \Phi dx
$$

donc

$$
\inf_{|x|>R} \left(u_1(x)\, h^{q-1}(t,x)\right) \int_{\mathbb{R}^N} h^{1-q} \Phi dx \leq \left(\frac{(\gamma^q + L)}{k_1} + k^q\right) R^{-2\left(\frac{\alpha q - 1}{\alpha}\right)} k_1^{\frac{1}{\alpha q}} C_{\frac{1}{3}} \int_{Q_1} h^{1-\alpha q} \Phi dx
$$

En utilisant maintenant l'hypothése sur Φ; à savoir

$$
R < |x| < 2R
$$

On obtient :

$$\begin{aligned}
\inf_{|x|>R}\left(u_1(x)\,h^{q-1}(t,x)\,|x|^{2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\,h^{1-q}\Phi dx \quad \leq \quad & \left(\frac{(\gamma^q+L)}{k_1}+k^q\right)\\
& \times\left(R^{-2\left(\frac{\alpha q-1}{\alpha}\right)}k_1^{\frac{1}{\alpha q}}C_{\frac{1}{3}}\,|x|^{2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\right)\\
& \times\left(\int_{Q_1}|x|^{-2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\,h^{1-\alpha q}\Phi dx\right)
\end{aligned}$$

implique

$$\begin{aligned}
\inf_{|x|>R}\left(u_1(x)\,h^{q-1}(t,x)\,|x|^{2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\,h^{1-q}\Phi dx \quad \leq \quad & \left(\frac{(\gamma^q+L)}{k_1}+k^q\right)\\
& \times\left(C_{\frac{1}{3}}2^{2\left(\frac{\alpha q-1}{\alpha}\right)}k_1^{\frac{1}{\alpha q}}\,|x|^{2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\right)\\
& \times\left(\int_{Q_1}|x|^{-2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\,h^{1-\alpha q}\Phi dx\right)
\end{aligned}$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}^N}\inf_{t\in\mathbb{R}^+}|x|^{-2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\,h^{1-q}\Phi dx>0$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{-2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\,h^{1-q}\Phi dx>0\quad\forall t>0$$

alors

$$\inf_{|x|>R}\left(u_1(x)\,h^{q-1}(t,x)\,|x|^{2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\right)\leq\left(\frac{(\gamma^q+L)}{k_1}+k^q\right)C_{\frac{1}{3}}2^{2\left(\frac{\alpha q-1}{\alpha}\right)}$$

On prend

$$K=\left(\frac{(\gamma^q+L)}{k_1}+k^q\right)C_{\frac{1}{3}}2^{2\left(\frac{\alpha q-1}{\alpha}\right)}$$

donc

$$\inf_{|x|>R}\left(u_1(x)\,h^{q-1}(t,x)\,|x|^{2\frac{\alpha q-1}{\alpha}}\right)\leq K$$

■

Bibliographie

[1] [1] Baras, P. and Kersner, R., Local and global solvability of a class of semilinear parabolic equations. J. Diff. Eqs. 68 (1987)(2), 238 – 252.

[2] [2] Baras, P. and Pierre, M., Crit'ere d'existence de solutions positives pour des ´ equations semi-lin´eaires non monotones. Ann. Inst. H. Poincar´ e Anal. Non Lin´eaire 2 (1985), 185 – 212.

[3] [3] Georgiev, V. and Todorova, G., Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. J. Diff. Eqs. 109 (1994), 295 – 308..

[4] .[4] Guedda, M. and M. Kirane, M., Criticality for evolution equation (in Russian). Differ. Uravn. 37 (2001)(4), 511 – 520, 574 – 575 (translation in Diff. Eqs. 37 (2001)(4), 540 – 550).
.

[5] .[5] Kirane, M. and Qafsaoui, M., Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear Reaction-Diffusion systems. J. Math. Anal. Appl. 268 (2002)(1), 217 – 243.

[6] [6] Kirane, M. and Qafsaoui, M., Fujita's exponent for a semilinear wave equation with linear damping. Adv. Nonlinear Stud. 2 (2002)(1), 41 – 50.

[7] [7] Mitidieri, E. and Pohozaev, S., A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities. Proc. Steklov Inst. Math. 234 (2001), 1 – 383.

[8] [8] Podlubny, I., Fractional Differential Equations. Math. Sci. Eng. 198. San Diego : Academic Press 1999.

[9] [9] Samko, S. G., Kilbas, A. A. and Marichev, O. I., Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications. Yverdon : Gordon and Breach 1993 (Engl. trans. from Russian edition 1987).

[10] [10] Tatar, N.-e., A blow-up result for a fractionally damped wave equation. Nonlin. Diff. Eqs. Appl. 12 (2005)(2), 215 – 226.

[11] [11] Tatar, N.-e., A wave equation with fractional damping. Z. Anal. Anwendungen 22 (2003)(3), 609 – 617.

[12] [12] Todorova, G. and Yordanov, B., Critical exponent for nonlinear wave equations with damping. J. Diff. Eqs. 174 (2001), 464 – 489.

[13] [13] Zhang, Q. S., Blow up and global existence of solutions to an inhomogeneous parabolic system. J. Diff. Eqs. 147 (1998)(1), 155 – 183.