



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH  
جامعة عباس لغرور خنشلة  
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

**Mémoire de fin d'études**  
Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**  
Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

***Contrôlabilité d'un système  
linéaire fractionnaire***

Réalisé par : **Belaghmes Zahia**

**Belgroune Amel**

Membres de jury :

**Pr. A. Abdelkrim** Président

**M. L. Djebara** Examineur

Dirigé par : **M. A. Merghad**

Présenté le /09/2020

2019-2020

# Dédicace

Avec mes sentiments de gratitude les plus profonds, je dédie ce modeste travail :

A mes parents pour leur amour, leur confiance, leur encouragement et leur soutien tout le long de mes études

A mes frères A.Elhak, Masoud, Amer et mes sœurs Maryam, Chahinaz

A mes amis

A tous ceux qui m'aiment

*Amal*

# Dédicace

Avec mes sentiments de gratitude les plus profonds, je dédie ce modeste travail :

A mes parents pour leur amour, leur confiance, leur encouragement et leur soutien tout le long de mes études

A mon oncle Hamza et mes soeurs Chaima, Salsabil, Donya, Marwa, Asma, Ala Elrahman

A mes amis

A tous ceux qui m'aiment

***Zahia***

# Remerciements

A l'aide de dieu tout puissant, qui nous aidé compléter ce modeste travail.

Au terme des année de préparation de mémoire de master, nous tenons à remercier chaleureusement toutes les personnes qui ont contribuées à l'aboutissement de ce travail :

Nous remercions également « *M<sup>me</sup>*. A. Merghad » pour la qualité du sujet, son support et les orientations durant toute la réalisation de ce mémoire par ses conseils qui nous ont appris la patience.

**A** « Pr. A. Abdelkrim » de bien vouloir présider ce jury et d'examiner ce travail.

**A** « *M<sup>me</sup>*. L. Djabara » d'avoir accepté et juger ce travail.

Merci à tous les gens qui nous a aidés de près ou de loin.

# Résumé

# Résumé

# Résumé

Ce mémoire présente des résultats de contrôlabilité pour un système linéaire fractionnaire au sens du Caputo en dimension finie.

On commence par rappeler quelques résultats de calcul fractionnaire puis de donner la solution implicite du système considéré, en suite entamer l'objet de notre travail qui est la contrôlabilité de notre système, en présentant deux outils qui sont utilisés pour la caractériser.

On en déduit que tous les résultats sur le contrôle des systèmes linéaires de premier ordre en dimension finie sont étendus aux systèmes linéaires fractionnaires.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels et notions fondamentales</b>	<b>11</b>
1.1	Espaces fonctionnels . . . . .	11
1.2	Transformée de Laplace . . . . .	13
1.2.1	L'existence de la transformée de Laplace . . . . .	14
1.2.2	Quelques propriétés de la transformée de Laplace . . . . .	14
1.3	Fonctions spéciales . . . . .	18
1.3.1	La fonction Gamma . . . . .	18
1.3.2	La fonction Bêta . . . . .	20
1.3.3	La fonction Mittag-Leffler . . . . .	21
1.4	Continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue . . . . .	22
1.5	Opérateurs et semi groupes . . . . .	22
1.6	Rappels d'algèbre linéaire . . . . .	24
1.6.1	Polynôme caractéristique d'une matrice . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Équations différentielles fractionnaire de type Caputo</b>	<b>26</b>
2.1	Intégration fractionnaire . . . . .	26
2.1.1	La transformation de Laplace des intégrales fractionnaires . . . . .	28
2.2	Dérivée fractionnaire . . . . .	29
2.2.1	Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . . .	29
2.2.2	Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	31
2.2.3	Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville . . . . .	34
2.2.4	la comparaison entre la dérivée fractionnaire au Caputo et celle de Riemann-Liouville . . . . .	34
2.2.5	La transformation de Laplace des dérivées fractionnaires . . . . .	35
2.3	Fonction d'une matrice Mittag-Leffler généralisée . . . . .	36
2.4	Systèmes d'ordre fractionnaire . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Contrôlabilité d'un système linéaire fractionnaire</b>	<b>40</b>
3.1	Position du problème . . . . .	40
3.2	Matrice de transition d'un système linéaire fractionnaire . . . . .	41

---

3.2.1	<i>Propriétés de la matrice de transition . . . . .</i>	42
3.3	Contrôlabilité d'un système linéaire fractionnaire . . . . .	46
3.3.1	Gramian de contrôlabilité - Matrice de contrôlabilité .	48
	<b>bibliographie</b>	<b>55</b>

# Introduction

La théorie du calcul fractionnaire est un sujet presque aussi vieux que le calcul différentiel et remonte aux temps où Leibniz, Gauss, Newton ont développé les fondements de ce type de calcul, mais ce n'est pas que lors des trois dernières décennies que le. Le calcul fractionnaire est devenu une importante branche de mathématiques grâce à son immense application dans différents domaines tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finance et d'autres sciences qui ont été développés dans la dernière décennie, en plus de l'intérêt que lui portent beaucoup de chercheurs en mathématiques elle-même a des applications dans l'espace des fonctions intégrables.

La théorie du contrôle étudie la possibilité d'agir sur un système dynamique dépendant de la variable temporelle de façon à conduire l'état de ce système à un état donné à un instant donné.

Dans le premier chapitre nous donnons quelques notions préliminaires essentielles : la transformée de Laplace, fonctions spéciales, ... avec des exemples et quelques propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous avons commencé, par rappeler les définitions des dérivées et intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et Caputo, pour ensuite en poser la résolution explicite de quelques équations différentielles fractionnaires.

Le troisième chapitre présente la notion de contrôlabilité d'un système linéaire fractionnaire. La définition classique y est adaptée, pour on suite étendre le critère de Kalman.

Pour ce type de système on a défini la matrice de contrôlabilité et le Gramien de contrôlabilité.

# Chapitre 1

## Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions et théorèmes fondamentaux que nous utiliserons dans les autres chapitres.

### 1.1 Espaces fonctionnels

#### Espace $L^p$

En mathématiques, les espaces  $L^p$  sont des espaces de fonctions dont la puissance  $p^{\text{ième}}$  de la fonction est intégrable, au sens de Lebesgue.

Les espaces  $L^p$  sont très utilisés en analyse (et particulièrement en analyse fonctionnelle).

**Définition 1.1.1** Soit  $\Omega = (a, b)$  ( $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ) un intervalle borné ou non borné de  $\mathbb{R}$ . Pour  $1 \leq p \leq +\infty$ , on définit l'espace  $L^p$  comme suit :

1. pour  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(\Omega)$  est l'espace de classe ( de fonctions mesurables ) de puissance  $p^{\text{ième}}$  intégrables sur  $\Omega$  i.e.

$$f \in L^p(\Omega) \iff \int_a^b |f(t)|^p dt < \infty \quad (1.1)$$

$\|f\|_p = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$  est une norme sur  $L^p(\Omega)$ .

$(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$  est un espace de Banach.

En particulier, si  $p = 2$  alors

$$L^2(\Omega) = \left\{ f; \int_{\Omega} f^2 dt < \infty, f \text{ (classe de fonctions mesurables à carré intégrables sur } \Omega) \right\}$$

$(L^2(\Omega); \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)})$  est un espace de Hilbert; où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Omega)}$  est le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega) \quad (1.2)$$

2. Pour  $p = \infty$ ,  $L^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonction essentiellement bornée sur  $\Omega$ .

### Remarque 1.1.1

- En général, si  $p \neq q$ , on a ni  $L^p$  inclus dans  $L^q$ , ni  $L^q$  inclus dans  $L^p$ . Cependant si la mesure est finie (comme en probabilités par exemple), alors pour  $p < q$ ,  $L^q$  est inclus dans  $L^p$ .
- Pour  $1 < p < +\infty$ , l'espace dual de  $L^p$  est  $L^q$  où  $q$  est défini de façon que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

**Définition 1.1.2**  $f$  est dite essentiellement bornée sur  $\Omega$  si  $\exists M > 0$  telle que sauf peut être sur un ensemble de mesure nul  $|f(t)| \leq M, \forall t \in \Omega$ .

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \Omega} |f(t)| = \inf \{ M \geq 0; |f(t)| \leq M \text{ p.p sur } \Omega \} \quad (1.3)$$

$(L^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$  est un Banach.

### Espace $AC^n$

**Définition 1.1.3** Soit  $\Omega = (a, b)$ , un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ , alors l'espace des fonctions absolument continues noté  $AC^1(\Omega)$ , est définie comme l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , dérivable presque partout telle que  $f' \in L^1(\Omega)$   
On a ainsi

$$f \in AC^1(\Omega) \iff f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s) ds, \quad t \in \Omega \quad (1.4)$$

Pour  $n \geq 2$ , nous notons par  $AC^n(\Omega)$  l'espace des fonctions

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , telles que  $f^{(k)} \in C(\Omega)$   $k=1,2,\dots,n-1$  et  $f^{(n-1)} \in C^1(\Omega)$

**Notation :** On notera  $AC^1(\Omega)$  par  $AC(\Omega)$ . L'espace  $AC^n(\Omega)$  est caractérisé par le résultat suivant

**Lemme 1.1.1** Une fonction  $f \in AC^n(\Omega)$ , si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \quad \forall t \in \Omega. \quad (1.5)$$

## 1.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace intervient dans la résolution d'équations et des systèmes différentiels et tout particulièrement aujourd'hui en électricité, électronique, théorie de la Chaleur, théorie de signal,...

**Définition 1.2.1** La transformée de Laplace d'une fonction  $f$  de la variable réelle  $t \in \mathbb{R}^+$  est continue est donnée par l'expression suivante :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Où le symbole  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  veut dire la transformée de Laplace de  $f(t)$  on utilise aussi l'expression  $F(s)$  pour décrire la transformée de Laplace :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

### Exemple 1.2.1

1.  $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ .
2.  $\mathcal{L}[\exp(-at)] = \frac{1}{(s+a)}$ .
3.  $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$ . Pour le démontrer il suffit d'effectuer une intégration par partie

$$\int_0^{\infty} te^{-st} dt = 0 + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}.$$

4.  $\mathcal{L}[t^k] = \frac{k!}{s^{k+1}}$ , (Par récurrence).

### 1.2.1 L'existence de la transformée de Laplace

**Définition 1.2.2** On dit que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\text{ou } \mathbb{C})$ , est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$  si pour tout  $0 < \alpha < \beta$ , l'intervalle  $[\alpha, \beta]$  peut être découpé en un nombre fini d'intervalles (fermes) sur lesquels  $f$  est continue.

**Définition 1.2.3** On dit que la fonction  $f$  est d'ordre exponentielle, s'il existe  $M > 0$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$  tels que :

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$$

Si  $f(t)$  continue par morceaux sur l'intervalle  $]0, \infty[$  et bornée sur cet intervalle, i.e ( $f(t)$  est d'ordre exponentielle) alors la transformée de Laplace de  $f(t)$  existe pour toute phase  $\text{Re}(s) > 0$

### 1.2.2 Quelques propriétés de la transformée de Laplace

Dans ce qui suit, nous supposons, à moins que nous ne l'indiquions explicitement, que toutes les fonctions satisfont aux conditions du théorème (condition suffisante d'existence de la transformée de Laplace).

#### 1. Linéarité

Si  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes réelles quelconque et  $f, g$  sont deux fonctions dont les transformées de Laplace existent, alors

$$\mathcal{L}(c_1 f + c_2 g) = c_1 \mathcal{L}(f) + c_2 \mathcal{L}(g)$$

Cette linéarité est due, tout simplement, à la linéarité de l'opérateur intégrale.

#### 2. Translation

Si on pose  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$  alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$  on a

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = F(s - a)$$

En effet

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s - a).$$

**3. 2<sup>ème</sup> Propriété de linéarité**

Si on pose  $\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$  et

$$g(t) = \begin{cases} f(t - a) & \text{si } t > a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors on a

$$\mathcal{L}(g)(s) = e^{-as}F(s)$$

En effet  $\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t - a)dt$

Posons  $u = t - a$  alors cette intégrale devient

$$\mathcal{L}(g)(s) = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du = e^{-as} \int_0^\infty e^{-su}f(u)du = e^{-as}F(s)$$

**4. Transformée de Laplace d'un produit de convolution**

Soient  $f, g$  deux fonctions causales et convolvable en tout point  $t \geq 0$  telles que  $\mathcal{L}(f)$ ,  $\mathcal{L}(g)$  et  $\mathcal{L}(f * g)$  existent. Alors

$$\mathcal{L}(f * g) \equiv \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(f * g)(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left[ \int_0^\infty f(t - x)g(x)dx \right] dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st}e^{sx}e^{-sx}f(t - x)g(x)dxdt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t-x)}f(t - x)e^{-sx}g(x)dxdt \end{aligned}$$

$$\text{Posons } \begin{cases} \alpha = t - x \\ \beta = x \end{cases} \quad \text{Ainsi } |Jac_{(\alpha,\beta)}(t, x)| = 1$$

De plus  $\{(t, x) \in \mathbb{R}_+^2\}$  devient  $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ , donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(t-x)} f(t-x) e^{-sx} g(x) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s\alpha} f(\alpha) e^{-s\beta} g(\beta) d\beta d\alpha \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-s\alpha} f(\alpha) d\alpha \right) \left( \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s\beta} g(\beta) d\beta \right) \\ &\stackrel{f|_{\mathbb{R}_-} \equiv 0}{=} \left( \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s\alpha} f(\alpha) d\alpha \right) \left( \int_{\mathbb{R}_+} e^{-s\beta} g(\beta) d\beta \right) \\ &= F(s)G(s) \end{aligned}$$

### 5. Transformée de Laplace d'une dérivée

Si  $f$  est de classe  $C^1$  par morceaux sur  $[0, \infty[$  et telles que  $f$  et  $f'$  soient d'ordre exponentiel, alors

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s) - f(0), \quad s > 0.$$

La transformée de Laplace de la dérivée d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  de la fonction  $f$  est donnée par :

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n \mathcal{L}(f(t))(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0)$$

sous l'hypothèse d'existence des intégrales.

### 6. La transformée de Laplace de quelques fonctions usuelle

Fonction	$f(t)$	$\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$
impulsion	$\delta(t)$	1
échelon	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
rampe	$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
polynome(général)	$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
sinus	$\sin(wt)u(t)$	$\frac{w}{s^2+w^2}$
cosinus	$\cos(wt)u(t)$	$\frac{s}{w^2+s^2}$
sinus amorti	$e^{-at}\sin(wt)u(t)$	$\frac{w}{(s+a)^2+w^2}$
cosinus amorti	$e^{-at}\cos(wt)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w^2}$

**Remarque 1.2.1** Si  $f$  n'est pas continue en  $t_0 = 0$  alors on remplace  $f(0)$  par  $f(0^+)$  sur tout lorsqu'on utilise une intégration par parties dans une démonstration.

## 7. La transformée de Laplace inverse

L'intérêt le plus important venant de l'utilisation de la transformation de Laplace, est qu'elle transforme une équation différentielle, accompagnée des conditions aux limites, en équation algébrique, dont l'inconnue est la transformée de Laplace de la fonction, en incluant les conditions aux limites. Pour revenir à la fonction recherchée, on fait appel à la transformation de Laplace inverse, dont la définition est rappelée ci-dessous.

**Définition 1.2.4** Pour une fonction  $f : [0; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dont sa transformée de Laplace existe et notée  $F$  alors, on définit la transformée de Laplace inverse si l'on considère uniquement les variables sont réelles, ainsi

$$f(t) = \int_0^\infty e^{st} F(s) ds, \quad t > 0$$

On trouve aussi parfois

$$(\mathcal{L}^{-1}F)(t) = \int_0^\infty e^{st} (\mathcal{L}f)(s) ds, \quad t > 0$$

### Propriété 1.2.1

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \iff f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

## 1.3 Fonctions spéciales

### 1.3.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel  $n!$ .

**Définition 1.3.1** *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) \times t^{x-1} dt \quad x \in \mathbb{R}^+$$

#### Quelques propriétés sur la fonction Gamma

La fonction Gamma satisfait les propriétés suivantes :

1. La propriété importante de la fonction Gamma  $\Gamma(x)$  est la relation de récurrence suivant :

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad x > 0$$

Qu'on puet démontre par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(x + 1) &= \int_0^{+\infty} \exp(-t)t^x dt \\ &= [-\exp(-t) \times t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} \exp(-t) \times t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

2.

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Comme conséquence de cette propriété, on a :

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factoriel.

3.  $\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(0_+) = +\infty$   
 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

4. La fonction  $\Gamma(x)$  est une fonction monotone et strictement décroissante pour  $0 < x \leq 1$

**Exemple 1.3.1**

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} \exp(-t) \times t^{-\frac{1}{2}} dt$$

posons

$$t = u^2$$

donc

$$dt = 2udu$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} \exp(-u^2) 2udu \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du \end{aligned}$$

L'intégrale de Gausse et donnée par

$$\int_0^{+\infty} \exp(-u^2) du = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

d'où

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{2}{2} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$$

### 1.3.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire, la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

**Définition 1.3.2** La fonction Bêta est définie par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad x, y \geq 0$$

Le changement de variable

$$u = 1 - t$$

Permet de montrer que la fonction Bêta est symétrique c'est-à-dire que :

$$B(x, y) = B(y, x)$$

Elle peut prendre aussi les formes intégrales suivantes :

$$B(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$$

$$B(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta$$

**Proposition 1.3.1** La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit

$\forall x, y > 0$ , on a :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Preuve

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} t_2^{y-1} e^{-t_1} e^{-t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} \left( \int_0^{+\infty} t_2^{y-1} e^{-|t_1+t_2|} dt_2 \right) dt_1 \end{aligned}$$

En effectuant le changement de la variable

$$t'_2 = t_1 + t_2$$

on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} t_1^{x-1} dt_1 \int_0^{+\infty} (t'_2 - t_1)^{y-1} e^{-t'_2} dt'_2 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \int_0^{t'_2} (t'_2 - t_1)^{y-1} t_1^{x-1} dt_1 \end{aligned}$$

Si on pose  $t'_1 = \frac{t_1}{t'_2}$ , on arrive à :

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 \left( \int_0^1 (t'_1 t'_2)^{x-1} (t'_2 - t'_1 t'_2)^{y-1} t'_2 dt'_1 \right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} dt'_2 ((t'_2)^{x+y-1} B(x, y)) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t'_2} (t'_2)^{x+y-1} dt'_2 B(x, y) \\ &= \Gamma(x + y) \beta(x, y) \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat décrire.

### 1.3.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle,  $\exp(z)$  joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad \alpha > 0$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

Cette fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres à été introduite par Argawal et elle est définie par un développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad \alpha, \beta > 0$$

Pour  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$ , on retrouve la relation :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

**Exemple 1.3.2** Pour des valeurs spéciales de  $\alpha$  et  $\beta$  on a

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_{1,1}(z) \\ &= e^z \\ E_{1,2}(z) &= \frac{e^z - 1}{z} \end{aligned}$$

**Propriété 1.3.1** *La fonction de Mittag-Leffler possède les propriétés suivantes :*

1. *C'est une fonction entière.*
2. *Pour  $|z| < 1$  la fonction de Mittag-Leffler généralisée vérifie*

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(zt^\alpha) dt = \frac{1}{1-z}.$$

3. *La dérivée d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  de la fonction de Mittag-Leffler est donnée par :*

$$\frac{d^n}{dz^n} (z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha)) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(\lambda z^\alpha) \quad n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

4. *Intégration de la fonction de Mittag-Leffler :*

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^\alpha).$$

*Cette relation est un cas particulier de l'égalité :*

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^z (z-t)^{\mu-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) t^{\beta-1} dt = z^{\beta+\mu-1} E_{\alpha,\beta+\mu}(\lambda z^\alpha) \quad \beta > 0, \mu > 0.$$

## 1.4 Continuité absolue de l'intégrale de Lebesgue

**Théorème 1.4.1** *Si  $f(t)$  est une fonction intégrable au sens de Lebesgue (sommable) sur l'ensemble  $B$ , alors pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que*

$$\left| \int_e f(t) d\mu \right| < \delta,$$

*pour tout ensemble mesurable  $e \subset B$  tel que  $\mu(e) < \epsilon_0$ .*

## 1.5 Opérateurs et semi groupes

Une propriété concernant les opérateurs linéaires bornés est donnée par le théorème suivant.

**Théorème 1.5.1** *Soit  $A$  un opérateur linéaire bornée sur un espace de Banach  $E$  dans  $E$ . Supposons que.*

$$\|I - A\| < 1$$

Alors  $A$  possède un inverse linéaire borné  $A^{-1}$  donné par la série de Neumann i.e.

$$A^{-1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (I + (I - A)^2 + \dots + (I - A)^n)(x), \quad x \in E$$

$$A^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (I - A)^n$$

**Définition 1.5.1** Soit  $E$  un espace de Banach. Un semi groupe d'opérateurs linéaires bornés sur  $E$  est une famille qu'on note  $(S(t))_{t \geq 0}$  d'éléments de  $\mathcal{L}(E)$  (l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés sur  $E$ ) tels que

$$\begin{cases} s(0) = I_E \\ S(s + \tau) = S(s) \circ S(\tau) \quad \forall s, \tau \geq 0, \end{cases}$$

ou  $I_E$  désigne l'opérateur identité i.e.  $I_E(f) = f$ .

**Définition 1.5.2** Un semi groupe  $(s(t))_{t \geq 0}$  sur  $E$  dit fortement continu si pour  $f \in E$  on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)f - Sf\| = 0$$

un semi groupe fortement continu sera appelé  $C_0$  - semi groupe .

**Définition 1.5.3** Soit  $E$  un espace de Banach.  $A$  est un opérateur linéaire borné sur  $E$ , alors :

$$\exp(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{A^n}{n!} \quad \text{où} \quad A^n = A \circ \dots \circ A, (n \text{ fois}),$$

on peut dire que

1.  $\exp(A)$  est bien défini
2.  $\|\exp(tA)\| \leq \exp |t| \|A\| \quad t \in \mathbb{R}$
3.  $\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A \cdot \exp(tA) = \exp(tA) \cdot A \quad \forall t \in \mathbb{R}$

4. La fonction

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$t \longmapsto \exp(tA)$$

est infiniment différentiable On pose pour  $t \geq 0$

$$S(t) = \exp(tA) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{t^n A^n}{n!} \quad t \geq 0 \quad (*)$$

$(S(t))_{t \geq 0}$  est un semi groupe fortement continu et de type  $(*)$  si et seulement si  $A \in \mathcal{L}(E)$

Enfin, on a le résultat suivant

**Proposition 1.5.1**

Soit  $A$  un opérateur linéaire borné sur  $E$ . Pour tout  $T > 0$  et tout  $u_0 \in E$ , il existe une unique  $u \in C^1([0, T], E)$  du problème

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) & , \forall t \in [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Cette solution est

$$u(t) = S(t)u_0 = \exp(At)u_0$$

où  $(S(t))_{t \geq 0}$  est le semi groupe fortement continu engendré par  $A$ .

## 1.6 Rappels d'algèbre linéaire

**Définition 1.6.1** Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est symétrique si et seulement si

$$A^T = A$$

**Définition 1.6.2** Le noyau d'une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , noté  $\text{Ker}(A)$ , est le noyau de l'application linéaire canonique associée à  $A$  et on a

$$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0_{\mathbb{R}^n}\}$$

L'image d'une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , notée  $\text{Im}(A)$ , est l'image de l'application linéaire canonique associée à  $A$  et on a

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists x \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } Ax = y\}$$

Le rang de  $A$  est la dimension de l'image de  $A$ . C'est le nombre maximal de colonnes de  $A$  formant une famille libre de  $\mathbb{R}^n$ .

$$\text{rang}(A) = \dim[\text{Im}(A)]$$

**Théorème 1.6.1** (du rang) Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$  espaces vectoriels ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $E$  étant de dimension finie. Soit l'application linéaire de  $E$  dans  $F$  représentée par la matrice  $A$ .

On a :

$$\text{rang}(A) = \dim(E) - \dim[\text{Ker}(A)]$$

**Corollaire 1.6.1** Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

1.  $A$  inversible
2.  $\text{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
3.  $\text{rang}(A) = n$

**Définition 1.6.3** Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^n$  sont orthogonaux si et seulement si  $\langle x, y \rangle = 0$ . On note  $x \perp y$ .

### 1.6.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

**Définition 1.6.4** Soit  $A$  une matrice carrée à coefficients dans un corps  $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C})$ . Le polynôme caractéristique de  $A$  est le polynôme  $P_A(\lambda)$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  défini par :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

C'est un polynôme de degré égal à  $n$  et dont le coefficient du monôme de degré  $n$  est égal à  $(-1)^n$ .

**Théorème 1.6.2** (Cayley-Hamilton) Si  $A$  est une matrice carrée de dimension  $n$  et  $P_A(\lambda)$  son polynôme caractéristique alors,

$$P_A(A) = 0_{nn}$$

## Chapitre 2

# Équations différentielles fractionnaire de type Caputo

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont reçu un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes sont généralement décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le domaine fréquentiel, ils sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. A cause de ces fonctions irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Comme ils n'ont pas de solutions analytiques exactes, les techniques numériques et d'approximation sont largement utilisées pour leur résolution, analyse et implémentation.

### 2.1 Intégration fractionnaire

Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $[a; b]$ . On considère l'intégrale

$$\begin{aligned} I^{(1)} f(x) &= \int_a^x f(t) dt \\ I^{(2)} f(x) &= \int_a^x I^{(1)} f(u) du \end{aligned}$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient

$$\begin{aligned} I^{(2)} f(x) &= \int_a^x \left( \int_a^u f(t) dt \right) du \\ &= \int_a^x \left( \int_t^x du \right) f(t) dt \\ &= \int_a^x (x - t) f(t) dt \end{aligned}$$

Plus généralement le  $n^{\text{ième}}$  itéré de l'opérateur  $I$  peut s'écrire

$$I^{(n)} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

pour tout entier  $n$ .

Cette formule est appelée formule de Cauchy.

### Transformée de Laplace d'une intégrale

Une telle intégrale n'est qu'un cas particulier de convolution.

Rappelons que  $I^{(1)} f(t) = \int_0^t f(x) dx$ .

Alors  $\mathcal{L}\{I^{(1)} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{(H * f)(t)\}(s) = \mathcal{L}(H)(s)F(s)$

où  $H$  est la fonction de Heaviside, dont la transformée de Laplace est

$$\mathcal{L}(H)(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}.$$

Donc

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x) dx\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}, \quad s > 0.$$

plus généralement  $I^{(n)} f(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{n-1}}{\Gamma(n)} f(x) dx$ . Et pour  $n \geq 0$  quelconque, pas nécessairement entier

$$\mathcal{L}\{I^{(n)} f(t)\}(s) = \frac{F(s)}{s^n}, \quad s > 0.$$

Cette formule sera utilisée pour déterminer la transformée de Laplace des dérivées fractionnaires des fonctions.

### L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

**Définition 2.1.1** Si  $f \in C[a, b]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  l'intégral

$$I_{a+}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad a \in ]-\infty, +\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$ , et l'intégrale

$$I_{b-}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \quad b \in ]-\infty, +\infty[$$

est appelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre  $\alpha$

**Propriétés :**

1. Si  $f \in L^1[a, b]$  avec  $a$  fini, alors  $I_{a+}^\alpha f(t)$  existe pour presque tout  $t \in [a, b]$
2. L'opérateur d'intégration fractionnaire  $I_{a+}^\alpha$  est borné dans  $L^p[a, b]$ , ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) et on a :

$$\|I_{a+}^\alpha f\|_p \leq k\|f\|_p$$

pour toute  $f \in L^p[a, b]$

3. Soit  $\alpha, \beta > 0$ , alors pour toute  $f \in L^1[a, b]$  on a :

$$I_{a+}^\alpha I_{a+}^\beta f(t) = I_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) = I_{a+}^\beta I_{a+}^\alpha f(t)$$

**2.1.1 La transformation de Laplace des intégrales fractionnaires**

Si  $\alpha > 0$ , l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est donnée par :

$$I = I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1} f(y) dy$$

$$\mathcal{L}[I] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}[t^{\alpha-1}] \mathcal{L}[f(t)] = \frac{F(s)}{s^\alpha}$$

**Exemple 2.1.1** Soit la fonction  $f(t) = t^\beta$  où  $\beta > -1$

$$I_{0+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

$$I_{0+}^\alpha t^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta ds$$

On effectue le changement de variable  $s = tz$

$$\begin{aligned}
 I_{0+}^{\alpha} t^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - tz)^{\alpha-1} (tz)^{\beta} t dz \\
 &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 z^{\beta} (1 - z)^{\alpha-1} dz \\
 &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\beta + 1, \alpha) \\
 &= \frac{t^{\alpha+\beta} \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1) \Gamma(\alpha)} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 1)} t^{\alpha+\beta}
 \end{aligned}$$

## 2.2 Dérivée fractionnaire

### 2.2.1 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a; t]$ , alors la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  (avec  $n - 1 < \alpha < n$ ) au sens de Riemann-Liouville est définie par :

$${}^L D_{a+}^{\alpha} f(x) = D^n (I_{a+}^{n-\alpha} f(x)) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x - s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

Et nous avons :

$${}^L D_a^{\alpha} f(x) = {}^L D_{a+}^{\alpha} f(x)$$

#### Remarque 2.2.1

1. Contrairement à la dérivée usuelle d'une fonction  $f(t)$  en un point qui ne dépend que des valeurs de  $f(t)$  au voisinage de ce point, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre non-entier dépend de toutes les valeurs de  $f(t)$  dans l'intervalle  $[a, t]$  : On dit qu'elle est à caractère non-local.
2. Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^*$  la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée ordinaire.
3. En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'exemple si  $\alpha > 0$

est non entier alors

$${}^L D_a^\alpha k = \frac{k(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad a < t < b$$

pour toute constante  $k \in \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 2.2.1** Soit  $\alpha, \beta > 0$  tels que  $n-1 \leq \alpha \leq n$  et  $m-1 \leq \beta \leq m$ .

1. Pour  $f \in L^1([a, b])$ , légalité :

$${}^L D_a^\alpha (I_{a^+}^\alpha f(t)) = f(t)$$

est vrai pour presque tout  $t \in [a, b]$

2. Si  $\alpha > \beta > 0$ , alors pour  $f \in L^1([a, b])$ , la relation :

$${}^L D_a^\beta (I_{a^+}^\alpha f)(x) = (I_{a^+}^{\alpha-\beta} f)(x)$$

est vrai presque partout sur  $[a, b]$

3. Si  $\beta \geq \alpha > 0$  et la dérivée fractionnaire  ${}^L D_a^{\beta-\alpha} f$  existe, alors on a :

$${}^L D_a^\beta (I_{a^+}^\alpha f)(x) = (D_a^{\beta-\alpha} f)(x)$$

**Exemple 2.2.1**

$f(t) = (t-a)^\alpha$  Soit  $p$  non entier  $0 \leq n-1 < p < n$  et  $\alpha > -1$ ,

alors on à :

$${}^L D_{a^+}^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau) d\tau$$

$${}^L D_{a^+}^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^\alpha d\tau$$

En faisant le changement de variable  $\tau = a + s(t - a)$ , on aura :

$$\begin{aligned} {}^L D_{0^+}^p (t - a)^\alpha &= \frac{1}{\Gamma(n - p)} \frac{d^n}{dt^n} (t - a)^{n+\alpha-p} \int_0^t (1 - s)^{n-p-1} s^\alpha ds \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha - p + 1) \beta(n - p, \alpha + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - p + 1) \Gamma(n + \alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(n + \alpha - p + 1) \Gamma(n - p) \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - p + 1) \Gamma(n + \alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - p + 1)} (t - a)^{\alpha-p} \end{aligned}$$

A titre d'exemple

$${}^L D_{0^+}^{0.5} t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5)$$

## 2.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre  $\alpha > 0$  d'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est donnée par :

$${}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds$$

La définition de caputo peut être écrite comme :

$${}^c D^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} (f^{(n)}(t)) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds$$

$$(n - 1 < \alpha < n)$$

## Quelques propriétés de dérivation fractionnaire de Caputo

### 1. Linéarité

Soit  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$  et soient les deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  telles que  ${}^c D^\alpha f(t)$  et  ${}^c D^\alpha g(t)$  existent. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire :

$${}^c D^\alpha (\lambda f(t) + g(t)) = \lambda {}^c D^\alpha f(t) + {}^c D^\alpha g(t)$$

**preuve :**

on a :

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha f(t) &= I^{n-\alpha} D^n f(t) \\ {}^c D^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) &= I^{n-\alpha} D^n[\lambda f(t) + g(t)] \\ &= \lambda I^{n-\alpha} D^n[(f + g)(t)] \end{aligned}$$

Comme la dérivée n-ème et l'intégrale sont linéaires alors,

$$\begin{aligned} {}^c D^\alpha(\lambda f(t) + g(t)) &= \lambda I^{n-\alpha} D^n f(t) + I^{n-\alpha} D^n g(t) \\ &= \lambda {}^c D^\alpha f(t) + {}^c D^\alpha g(t). \end{aligned}$$

## 2. Non-commutativité

**Lemme 2.2.1** *On suppose que  $n - 1 < \alpha < n$ , ( $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ) et soit la fonction  $f(t)$  telle que  ${}^c D^\alpha f(t)$  existe, alors :*

$${}^c D^\alpha D^m f(t) = {}^c D^{\alpha+m} f(t) \neq D^m {}^c D^\alpha f(t) \quad (2.1)$$

**Corollaire 2.2.1** *Supposons que  $n - 1 < \alpha < n$ ,  $\beta = \alpha - (n - 1)$ , ( $0 < \beta < 1$ ),  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et soit la fonction  $f(t)$  telle que  ${}^c D^\alpha f(t)$  existe, alors :*

$${}^c D^\alpha f(t) = {}^c D^\beta D^{n-1} f(t).$$

**preuve :**

On remplace  $\beta$  par  $\alpha$  et  $n - 1$  par  $m$  dans (2.1), alors

$$\begin{aligned} {}^c D^\beta D^{n-1} f(t) &= {}^c D^{\beta+n-1} f(t) \\ &= {}^c D^{\alpha-(n-1)+n-1} f(t) \\ &= {}^c D^\alpha f(t). \end{aligned}$$

## Remarque 2.2.2

1. De même l'opérateur de Riemann-Liouville est aussi non-commutative  
i.e :

$$D^m {}^L D_{0+}^\alpha f(t) = {}^L D_{0+}^{\alpha+m} f(t) \neq {}^L D_{0+}^\alpha D^m f(t) \quad (2.2)$$

2. Pour trouver la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre arbitraire  $\alpha$ , ( $n - 1 < \alpha < n$ ) d'une fonction  $f(t)$ , il suffit à trouver la dérivée de Caputo d'ordre  $\beta = \alpha - (n - 1)$ , où  $\alpha - (n - 1)$  est un nombre réel compris entre 0 et 1. Par conséquent l'étude de dérivée de Caputo d'ordre  $\beta \in (0, 1)$  est suffisante pour trouver la dérivée de Caputo d'ordre arbitraire.
3. Les inégalités (2.1) et (2.2) deviennent des égalités dans les conditions additionnelles suivantes :

$$f^{(s)}(0) = 0, s = n, n + 1 \dots m, \text{ pour } {}^c D^\alpha$$

et

$$f^{(s)}(0) = 0, s = 0, 1, 2 \dots m, \text{ pour } {}^L D_{0+}^\alpha.$$

Il convient de noter que, dans le cas de la dérivée de Caputo, il n'y a pas de restriction sur les valeurs  $f^{(s)}(0)$ ,  $s = 0, 1, 2 \dots n - 1$ , par exemple, pour  $m = 3$ ,  $n = 2$  la fonction

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \dots$$

Satisfait la condition de Caputo mais ne satisfait pas la condition de Riemann-Liouville.

### Exemple 2.2.2

La dérivée de  $f(t) = (t - a)^\alpha$  au sens de Caputo

Soit  $p$  non entier et  $0 \leq n - 1 < p < n$  avec  $\alpha > n - 1$  alors, on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - n + 1)} (\tau - a)^{\alpha - n}$$

d'où

$${}_a D_t^p (t - a)^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n - p) \Gamma(\alpha - n + 1)} \int_a^t (t - \tau)^{n-p-1} (\tau - a)^{\alpha - n} d\tau$$

En effectuant le changement de variables  $\tau = a + s(t - a)$  on aura :

$$\begin{aligned}
 {}^c D_t^p (t-a)^\alpha &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_0^1 (1-s)^{n-p-1} (s)^{\alpha-n} ds \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)} (t-a)^{\alpha-p}
 \end{aligned}$$

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$${}^c D_t^p C = 0$$

### 2.2.3 Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit  $p > 0$  avec  $n-1 < \alpha < n$ , ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) supposons que  $f$  est une fonction telle que  ${}^c D_t^\alpha$  et  ${}^L D_{a^+}^\alpha$  existent alors :

$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}^L D_{a^+}^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

On déduit que si  $f^{(k)}(a) = 0$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , on aura

$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}^L D_{a^+}^\alpha f(t)$$

### 2.2.4 la comparaison entre la dérivée fractionnaire au Caputo et celle de Riemann-Liouville

- (a) L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure  $x = a$
- (b) Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante  $c$  est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est  $\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$ .

- (c) Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  où  $m - 1 \leq \alpha \leq m$  par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre  $(m - \alpha)$  pour la fonction  $f(x)$  et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier  $m$ , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  où  $m - 1 \leq \alpha \leq m$  par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier  $m$  de la fonction  $f(x)$  et puis on intègre d'ordre fractionnaire  $(m - 1)$

## 2.2.5 La transformation de Laplace des dérivées fractionnaires

### Transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville

En tenant compte des transformées de Laplace de fonctions usuelles, on obtient la formule suivante :

Pour  $N - 1 \leq \alpha < N$ ,

$$\mathcal{L}[{}^L D_{0+}^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{N-1} s^k [{}^L D_{0+}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (2.3)$$

**Remarque 2.2.3** Cette transformée est bien connue, cependant son application pratique est limitée vu absence d'une interprétation physique des limites des valeurs initiales des dérivées fractionnaires à la borne inférieure  $t = 0$ .

### Transformée de Laplace de la dérivée de Caputo

En utilisant les propriétés de la transformée de Laplace on arrive à, pour  $N - 1 \leq \alpha < N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathcal{L}[{}^C D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{N-1} s^{\alpha-k-1} [D^k f(t)]_{t=0} \quad (2.4)$$

### Remarque 2.2.4

On voit bien que cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo induit des valeurs initiales de la fonction et de ses dérivées à la borne inférieure.  $t = 0$  pour les quelles une certaine interprétation physique existe par exemple  $f(0)$  est la position initiale,  $f'(0)$  la vitesse

initiale,  $f''(0)$  accélération initiale, on peut alors espérer que ça peut être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant à des équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnés de conditions initiales dans leurs formes traditionnelles.

## 2.3 Fonction d'une matrice Mittag-Leffler généralisée

$$E_\rho(B; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{\Gamma(k\rho + \mu)} \quad (2.5)$$

où  $\rho > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{C}$  ( $\mathbb{C}$  est l'ensemble des nombres complexes),  $B$  est une matrice carée arbitraire d'ordre  $m$ .

La fonction matrice de Mittag-Leffler généralisée est d'une grande importance pour l'étude des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire. nous désignons une matrice unitaire de l'ordre  $m$  par  $I$ . Le lemme suivant est nous permet de trouver la transformée de Laplace des expressions contenant la fonction matrice de Mittag-Leffler généralisé.

**Lemme 2.3.1** Soit  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  et  $A$  une matrice carée d'ordre  $m$ . alors on a :

$$\mathcal{L} \left\{ t^{\beta-1} E_\alpha(At^\alpha; \beta); s \right\} = s^{\alpha-\beta} (s^\alpha I - A)^{-1}$$

### Preuve

On considère les définitions de la fonction matrice de Mittag-Leffler généralisée de la fonction Gamma d'Euler et en utilisant le changement  $\tau = st$ ,

nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} \left\{ t^{\beta-1} E_{\alpha}(At^{\alpha}; \beta); s \right\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} E_{\alpha}(At^{\alpha}; \beta) dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{\alpha k + \beta - 1} dt \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) s^{\alpha k + \beta}} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{\alpha k + \beta - 1} d\tau \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(\alpha k + \beta)}.
 \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant que  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(\alpha k + \beta)} = s^{\alpha - \beta} (s^{\alpha} I - A)^{-1}$ .

Ce dernier est equivalent à l'egalité

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} = (s^{\alpha} I - A)^{-1}. \tag{2.6}$$

On multiplie à gauche les deux membres de l'egalité (2.6) par  $(s^{\alpha} I - A)$  :

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-(k+1)\alpha} (s^{\alpha} I - A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k s^{-k\alpha} - \sum_{k=0}^{\infty} A^{(k+1)} s^{-(k+1)\alpha} = I.$$

Ce qui donne d'après la définition de l'inverse. La preuve est achevée .

## 2.4 Systemes d'ordre fractionnaire

Soit  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable bornée. Alors  $g(t)e^{-st} \in L^1(0, \infty)$ ,  $s \in \mathbb{C}$ . Par conséquence, à la fonction  $g(t)$  la transformée de Laplace est applicable.

Considérons maintenant un système dynamique dont l'évolution est décrite par l'équation

$${}^L D_{0+}^{\alpha} z = Az + g, n - 1 < \alpha < n \tag{2.7}$$

avec des conditions initiales

$${}^L D_{0+}^{\alpha - k} z(t)|_{t=0} = z_k^0, k = 1, \dots, n. \tag{2.8}$$

**Lemme 2.4.1** *La solution du systeme (2.7), (2.8) est donnee par :*

$$z(t) = \sum_{k=1}^n t^{\alpha-k} E_{\alpha}(At^{\alpha}; \alpha - k + 1) z_k^0 + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha}(A(t - \tau)^{\alpha}; \alpha) g(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

**Preuve**

En appliquant la transformee de Laplace au systeme (2.7) et en tenant compte de la formule (2.3) on obtient l'equation

$$s^{\alpha} Z(s) - \sum_{k=1}^n s^{k-1} z_k^0 = AZ(s) + G(s),$$

ou

$$Z(s) = \sum_{k=1}^n s^{k-1} (s^{\alpha} I - A)^{-1} z_k^0 + (s^{\alpha} I - A)^{-1} G(s). \quad (2.10)$$

Maintenant utilise la transformee de Laplace inverse, et en vertu du lemmme (2.3.1) on a :

$$z(t) = \sum_{k=1}^n t^{\alpha-k} E_{\alpha}(At^{\alpha}; \alpha - k + 1) z_k^0 + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha}(A(t - \tau)^{\alpha}; \alpha) g(\tau) d\tau$$

La preuve est aachevee.

Considerons le systeme dynamique d'ordre fractionnaire au sens de Caputo decrit par l'equation

$${}^c D^{\alpha} z = Az + g, \quad n - 1 < \alpha < n. \quad (2.11)$$

Aux conditions initiales

$$z^{(k)}(0) = z_k^0 \quad k = 0, \dots, n - 1. \quad (2.12)$$

**Lemme 2.4.2** *La solution d'un systeme (2.11), (2.12) est donnee par :*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\alpha}(At^{\alpha}; k + 1) z_k^0 + \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha}(A(t - \tau)^{\alpha}; \alpha) g(\tau) d\tau \quad (2.13)$$

**Preuve**

En appliquant la transformation de Laplace au systeme (2.11) et au vu de la formule (2.2) on obtient l'equation

$$s^\alpha Z(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} z_k^0 = AZ(s) + G(s),$$

ou

$$Z(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (s^\alpha I - A)^{-1} z_k^0 + (s^\alpha I - A)^{-1} G(s) \quad (2.14)$$

On utilise la transformee de Laplace inverse a l'egalite (2.14), alors on a :

$$z(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_\alpha(At^\alpha; k+1) z_k^0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_\alpha(A(t-\tau)^\alpha; \alpha) g(\tau) d\tau$$

**Application**

$$\begin{cases} {}^c D^\alpha y(t) = y(t) \\ y(0) = b_0 \end{cases}$$

Pour trouver la solution de ce probleme, nous avons :

$${}^c D^\alpha y(t) - y(t) = 0$$

Nous passons a la transformee de Laplace, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ {}^c D^\alpha y(t) \} (s) &= \mathcal{L}\{ y(t) \} (s) \\ Y(s) &= s^\alpha Y(s) - s^{\alpha-1} y(0) \\ s^\alpha Y(s) - Y(s) &= s^{\alpha-1} y(0) \\ (s^\alpha - 1) Y(s) &= s^{\alpha-1} y(0) \\ Y(s) &= b_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1} \\ \mathcal{L}^{-1}\{ Y(s) \} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{ b_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1} \right\} \\ y(t) &= b_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - 1} \right\} \end{aligned}$$

Si on identifie cette expression avec le resultat du theoreme precedant nous aurons  $k = 0, \beta = 1, a = 1$  donc

$$y(t) = b_0 E_{\alpha,1}(t^\alpha)$$

# Chapitre 3

## Contrôlabilité d'un système linéaire fractionnaire

Dans l'analyse interne des systèmes, la notion de contrôlabilité (ou commandabilité) est un concept basique et important. La contrôlabilité permet de savoir, pour un système dynamique donné, s'il est possible de transférer son état vers des états choisis a priori.

Cela peut être instructif sur la façon dont évolue le système, sur la façon de choisir un contrôle pouvant réaliser un objectif, etc, si on se donne un système dynamique décrit par une équation d'états linéaire, l'étude de la contrôlabilité peut être vue de plusieurs manières.

### 3.1 Position du problème

Considérons le système linéaire fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo suivant :

$$(S) \begin{cases} {}^c D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) & 0 < \alpha \leq 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où

- $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
- $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$
- $u(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$

$x$  est appelé l'état du système,  $u(\cdot)$  est la fonction du contrôle,  $X$  est l'espace d'état et  $U$  c'est l'espace du contrôle le système (S) ou le système  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  a

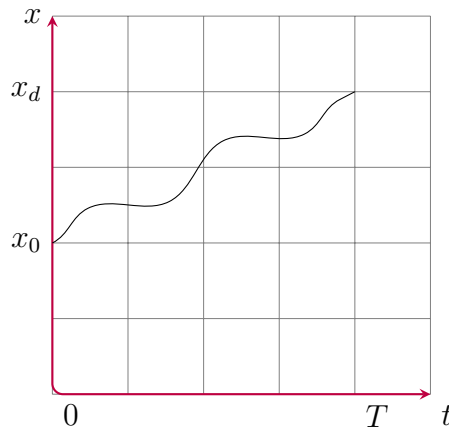
une unique solution donnée par la formule :

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-s)Bu(s)ds \quad (1)$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(At^\alpha) \\ \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^{(k+1)\alpha-1}}{\Gamma((k+1)\alpha)} = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha) \end{aligned}$$

$E_{\alpha,\alpha}(At^\alpha)$  est la fonction matrice de Mittag-Leffler à deux paramètres. Le concept de contrôlabilité consiste à savoir si l'on peut amener le système d'un état initial  $x_0$  à un état désiré donné  $x_d$  en temps fini



Un aperçu sur  $\Phi(t)$  la matrice de transition et ses propriétés sera bénéfique pour la suite.

### 3.2 Matrice de transition d'un système linéaire fractionnaire

Etant donnée un système linéaire fractionnaire homogène, lâché à l'instant  $t_0$  avec une condition initiale  $x(t_0)$ , l'état  $x(t)$  à l'instant  $t$  se déduit de l'état initial par l'application d'une certaine matrice de dimension  $n \times n$ .

**Définition 3.2.1** Soit le système linéaire fractionnaire homogène

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha x(t) = Ax(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

La solutions et donc

$$x(t) = \Phi_0(t - t_0)x_0 \quad (3.2)$$

La matrice  $\Phi_0(t - t_0)$  est la matrice de transition du système entre  $t_0$  et  $t$ .

**Remarque 3.2.1** Rappelons que

$$\Phi_0(t - t_0) = E_\alpha[A(t - t_0)^\alpha]$$

Il est donc clair que la fonction matrice de Mittag-Leffler ou fonction matrice exponentielle généralisée joue ici le même rôle que la fonction exponentielle dans le cas des systèmes d'ordre entier.

Elle constitue donc la matrice de transition pour les systèmes fractionnaires.

### 3.2.1 Propriétés de la matrice de transition

Nous citerons maintenant quelques propriétés de la matrice de transition, tout à fait semblables aux propriétés de la matrice de transition des systèmes linéaires standards.

**1. La matrice de transition est un solution de l'équation homogène.** i.e.,

$${}^c D^\alpha \Phi_0(t) = A\Phi_0(t) \quad (3.3)$$

En effet, pour toute condition initiale  $x_0$ , la solution du système (3.1) est

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0$$

alors

$${}^c D^\alpha x(t) = {}^c D^\alpha [\Phi_0(t)x_0]$$

or

$${}^c D^\alpha x(t) = Ax(t)$$

par conséquent

$$Ax(t) = {}^c D^\alpha[\Phi_0(t)]x_0$$

$$A\Phi_0(t)x_0 = {}^c D^\alpha[\Phi_0(t)]x_0$$

$$[{}^c D^\alpha[\Phi_0(t)] - A\Phi_0(t)]x_0 = 0$$

$${}^c D^\alpha[\Phi_0(t)] - A\Phi_0(t) = 0$$

enfin

$${}^c D^\alpha[\Phi_0(t)] = A\Phi_0(t)$$

2. On a comme conséquence de la définition

$$\Phi_0(0) = I_n \tag{3.4}$$

en effet,

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ &= I_n + A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + A^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots \end{aligned} \tag{3.5}$$

pour  $t = 0$  q

$$\Phi_0(0) = I_n$$

### 3. Propriété de semi-groupe

Etant donné trois temps  $t_0, t_1, t_2$ , on à

$$\Phi_0(t_2 - t_0) = \Phi_0(t_2 - t_1)\Phi_0(t_1 - t_0) \tag{3.6}$$

En effet, la solution de l'équation différentielle

$${}^c D_t^\alpha x(t) = Ax(t)$$

est

$$x(t) = \Phi_0(t - t_i)x(t_i), \quad \forall t \geq t_i$$

pour  $t_i = t_0$  et  $t = t_2$  on a :

$$x(t_2) = \Phi_0(t_2 - t_0)x(t_0)$$

pour  $t_i = t_0$  et  $t = t_1$  on a :

$$x(t_1) = \Phi_0(t_1 - t_0)x(t_0)$$

Pour  $t_i = t_1$  et  $t = t_2$  on a :

$$x(t_2) = \Phi_0(t_2 - t_1)x(t_1)$$

Les deux dernières relations donnent :

$$x(t_2) = \Phi_0(t_2 - t_1)\Phi_0(t_1 - t_0)x(t_0)$$

d'où, comparant avec la première relation, on obtient l'égalité(3.6).

#### 4. Inversion

Pour tous  $t_1 \geq 0$ ,  $t_2 \geq 0$  on a :

$$\Phi_0^{-1}(t_2 - t_1) = \Phi_0(t_1 - t_2)$$

Il suffit de faire  $t_0 = t_2$  dans (3.6) et de tenir compte de (3.4)

**Une autre méthode pour illustrer l'inversion de  $\Phi_0(t)$  est la suivante :**

Pour plus de détail voir [10]

**Lemme 3.2.1** *La matrice fondamentale.*

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}$$

est non singulière pour tout  $t \geq 0$  et toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  
i.e.,

$$\forall t \geq 0, \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det[\Phi_0(t)] \neq 0$$

**preuve :** Considérons la fonction

$$\Phi_0(z, t) = E_\alpha(z t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \quad (3.7)$$

Démontrons que  $\det[\Phi_0(A, t)] \neq 0$  pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ?

La fonction définie par la formule (3.7) est bien définie sur le spectre de la matrice  $A$ .

Notons  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , les valeurs propres de  $A$ , elles peuvent être réelles ou complexes (non nécessairement distinctes). De (3.7), il vient que pour tout réel  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$

$$\Phi_0(\lambda_i, t) \neq 0$$

et pour toute paire de conjugués  $(\lambda_i, \lambda_{i+1}), i = 1, \dots, n - 1$

$$\Phi_0(\lambda_i, t) \Phi_0(\lambda_{i+1}, t) \neq 0$$

Il est bien connu que les valeurs propres de  $\Phi_0(A, t)$  sont

$$\Phi_0(\lambda_1, t), \Phi_0(\lambda_2, t), \dots, \Phi_0(\lambda_n, t)$$

et de plus

$$\det[\Phi_0(A, t)] = \Phi_0(\lambda_1, t) \Phi_0(\lambda_2, t) \dots \Phi_0(\lambda_n, t) \neq 0$$

ce qui achève la démonstration.

Une 2<sup>ième</sup> autre méthode pour illustrer l'inversion de  $\Phi_0(t)$  est la suivante :

Appliquons la transformée de Laplace à la formule (3.3)

$$\mathcal{L}[{}^c D^\alpha \Phi_0(t)] = \mathcal{L}[A\Phi_0(t)]$$

$$s^\alpha \mathcal{L}[\Phi_0(t)] - s^{\alpha-1} I_n = A \mathcal{L}[\Phi_0(t)]$$

$$[s^\alpha I_n - A] \mathcal{L}[\Phi_0(t)] = s^{\alpha-1} I_n$$

$$s^{1-\alpha} [s^\alpha I_n - A] \mathcal{L}[\Phi_0(t)] = I_n$$

$$\mathcal{L}[\Phi_0(t)] = (s^{1-\alpha} [s^\alpha I_n - A])^{-1}$$

Comme l'opérateur  $\mathcal{L}$  est un isomorphisme, on déduit que  $\Phi_0(t)$  est inversible.

### 3.3 Contrôlabilité d'un système linéaire fractionnaire

**Définition 3.3.1** Un état initial  $x_0 (x_0 \neq 0)$  est dit contrôlable s'il existe un temps fini  $t$  et un contrôle  $u(\tau), \tau \in [0, t]$  qui transfère l'état du système de  $x_0$  à l'origine  $x = 0$  en temps  $t$ .

i.e.,

$$0 = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (3.8)$$

**Définition 3.3.2** Si toute condition initiale  $x_0$  est contrôlable en temps  $t$ , le système est dit contrôlable en temps  $t$ .

**Définition 3.3.3** Si pour toute condition initiale  $x_0$ , il existe un temps  $t$  tel que  $x_0$  soit contrôlable en  $t$  alors le système est dit contrôlable ou encore la paire  $(A, B)$  est contrôlable.

Notons que pour la contrôlabilité, on a besoin de résoudre l'équation (3.8). En appliquant la transformée de Laplace l'équation du système(S), on a :

$$\begin{aligned} X(s) &= [s^\alpha I_n - A]^{-1} [s^{\alpha-1} x(0) + BU(s)] \\ &= [s^\alpha I_n - A]^{-1} s^{\alpha-1} x_0 + [s^\alpha I_n - A]^{-1} s^{\alpha-1} BU(s) s^{1-\alpha} \end{aligned} \quad (3.9)$$

d'où

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \Phi_0(t) * B\hat{u}(t), t \geq 0 \quad (3.10)$$

avec

$$\Phi_0(t) = \mathcal{L}^{-1} [[s^\alpha I_n - A]^{-1} s^{\alpha-1}] = E_\alpha(At^\alpha) \quad (3.11)$$

$$\hat{u} = \mathcal{L}^{-1} [U(s)s^{1-\alpha}] \quad (3.12)$$

d'où

$$x(t) = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi_0(t-\tau)B\hat{u}(\tau)d\tau \quad (3.13)$$

par suite l'équation (3.8) peut être réécrite comme suit

$$0 = \Phi_0(t)x_0 + \int_0^t \Phi_0(t-\tau)B\hat{u}(\tau)d\tau \quad (3.14)$$

$$\Phi_0(t)x_0 = - \int_0^t \Phi_0(t-\tau)B\hat{u}(\tau)d\tau \quad (3.15)$$

or

$$\Phi_0(t) = E_\alpha(At^\alpha)$$

Comme la matrice de transition  $\Phi_0(t)$  est inversible et vérifie la propriétés de semi-groupe (voir propriétés de la matrice de transition dans le rappel ci dessus), alors

$$\Phi_0^{-1}(t) = \Phi_0(-t) \quad (3.16)$$

en prémultipliant la formule (3.15) par  $\Phi_0(-t)$ , on a,

$$\Phi_0(-t)\Phi_0(t)x_0 = - \int_0^t \Phi_0(-t)\Phi_0(t-\tau)B\hat{u}(\tau)d\tau \quad (3.17)$$

or

$$\Phi_0(-t)\Phi_0(t-\tau) = \Phi_0(-\tau)$$

et

$$\Phi_0(-t)\Phi_0(t) = I_n$$

d'où

$$x_0 = - \int_0^t \Phi_0(-\tau)B\hat{u}(\tau)d\tau \quad (3.18)$$

Tout revient alors à résoudre l'équation obtenue (3.18) qui n'est pas tout le temps praticable. En s'inspirant des résultats vus pour le cas de système d'ordre un, on introduit la notion de Gramian de contrôlabilité et matrice de contrôlabilité.

### 3.3.1 Gramian de contrôlabilité - Matrice de contrôlabilité

**Définition 3.3.4** *Le gramian de contrôlabilité du système (S) est la matrice, de dimension  $n \times n$ , notée  ${}_a W_c(t)$  et définie par :*

$${}_a W_c(t) = \int_0^t \Phi_0(-\tau) B B^T \Phi_0^T(-\tau) d\tau \quad (3.19)$$

**Théorème 3.3.1** *Le système (S) est contrôlable si et seulement si la matrice  ${}_a W_c(t)$  est inversible.*

**Preuve.**

**Suffisance :**

Si le gramian est inversible alors pour une condition initiale  $x_0$  on définit la pseudo-commande par :

$$\hat{u}(\tau) = -B^T \Phi_0^T(-\tau) {}_a W_c^{-1}(t) x_0, \tau \in [0, t] \quad (3.20)$$

alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_0(t) x_0 + \int_0^t \Phi_0(t - \tau) B \hat{u}(\tau) d\tau \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \int_0^t \Phi_0(t - \tau) B B^T \Phi_0^T(-\tau) {}_a W_c^{-1}(t) x_0 d\tau \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \int_0^t \Phi_0(t) \Phi_0(-\tau) B B^T \Phi_0^T(-\tau) {}_a W_c^{-1}(t) x_0 d\tau \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \Phi_0(t) \left[ \int_0^t \Phi_0(-\tau) B B^T \Phi_0^T(-\tau) d\tau \right] {}_a W_c^{-1}(t) x_0 \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \Phi_0(t) {}_a W_c(t) {}_a W_c^{-1}(t) x_0 \\ &= \Phi_0(t) x_0 - \Phi_0(t) x_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où  $\hat{u}(\tau), \tau \in [0, t]$  ainsi définie transfère l'état du système de  $x_0$  à l'origine ; pour trouver  $u(\tau), \tau \in [0, t]$ , de (3.8) on a pour commande

$$u(\tau) = \hat{u}(\tau) * \mathcal{L}^{-1}(s^{\alpha-1})$$

avec

$$\mathcal{L}^{-1}(s^{\alpha-1}) = \begin{cases} \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} & 0 < \alpha < 1 \\ \delta(\tau) & \alpha = 1 \end{cases} \quad (3.21)$$

donc le système est contrôlable.

**Nécessité :**

Supposons maintenant que le système est contrôlable et la matrice  ${}_{\alpha}W_c(t)$  est non inversible donc :

$$\ker({}_{\alpha}W_c(t)) \neq \{0\}$$

i.e.,  $\exists z \in \mathbb{R}^{n^*}$  tel que

$$\begin{aligned} {}_{\alpha}W_c(t)z = 0 &\implies z^T {}_{\alpha}W_c(t)z = 0 \\ &\iff \int_0^t z^T \Phi_0(-\tau) B B^T \Phi_0^T(-\tau) z d\tau = 0 \\ &\iff \int_0^t (B^T \Phi_0^T(-\tau) z)^T (B^T \Phi_0^T(-\tau) z) d\tau = 0 \\ &\iff \int_0^t \|B^T \Phi_0^T(-\tau) z\|^2 d\tau = 0 \\ &\iff \|B^T \Phi_0^T(-\tau) z\| = 0 \\ &\iff B^T \Phi_0^T(-\tau) z = 0 \\ &\iff z^T \Phi_0(-\tau) B = 0 \end{aligned}$$

Comme le système est supposé contrôlable pour toute condition initiale, il s'ensuit que l'équation (3.18) est solvable pour toute valeur initiale  $x_0$ , en particulier pour  $x_0 = z$ . En substituant  $z$  dans (3.18), on a :

$$z = - \int_0^t \Phi_0(-\tau) B \hat{u}(\tau) d\tau$$

alors

$$z^T z = - \int_0^t z^T \Phi_0(-\tau) B \hat{u}(\tau) d\tau = 0$$

i.e.,

$$\|z\|^2 = 0 \iff z = 0 (\text{contradiction})$$

on déduit que  ${}_{\alpha}W_c(t)$  est inversible.

**Remarque 3.3.1** Pour  $\alpha = 1$ ,

$${}_{\alpha}W_c(t) = \int_0^t e^{-\tau A} B B^T e^{-\tau A^T} d\tau$$

*Voici un deuxième résultat important.*

**Théorème 3.3.2** (*Critère de contrôlabilité*)

Le système (S) est contrôlable si et seulement si la matrice  ${}_{\alpha}C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  est de rang plein.

i.e.,

$$\text{rang}({}_{\alpha}C) = n \tag{3.22}$$

La matrice  ${}_{\alpha}C$  est dite matrice de contrôlabilité.

**Preuve.** Le système (S) est contrôlable si et seulement si pour toute condition initiale  $x_0$ , il existe un temps finit et un controle  $\hat{u}(\tau), \tau \in [0, t]$  tel que :

$$\Phi_0(t)x_0 = - \int_0^t \Phi_0(t - \tau)B\hat{u}(\tau)d\tau$$

or d'après le théorème de Cayley-Hamilton

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k a_k(t) \end{aligned} \tag{3.23}$$

donc :

$$\begin{aligned} \Phi_0(t - \tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k (t - \tau)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A^k a_k(t - \tau) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Phi_0(t)x_0 &= - \int_0^t \left[ \sum_{k=0}^{n-1} A^k a_k(t - \tau)B\hat{u}(\tau) \right] d\tau \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \left[ \int_0^t a_k(t - \tau)\hat{u}(\tau)d\tau \right] \\ &= - [B, AB, \dots, A^{n-1}B] \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\Psi_k = \int_0^t a_k(t - \tau)\hat{u}(\tau)d\tau, k = 0, 1, \dots, n - 1 \tag{3.24}$$

alors

$$\Phi_0(t)x_0 = -\alpha C\Psi \quad (3.25)$$

avec

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_{n-1} \end{bmatrix}$$

L'équation (3.25) admet une unique solution  $\Psi$  si et seulement si  $rg(\alpha C) = n$ .

Dans le cas où ceci est réalisé, il sera aussi possible de déterminer au moins une fonction  $\hat{u}(\tau), \tau \in [0, t]$  telle que les conditions donnée par la formule (3.24) soient vérifiées.

Cette dernière affirmation est prouvée par le lemme suivant :

**Lemme 3.3.1** *Un contrôle de la forme*

$$\hat{u}(\tau) = \xi(t - \tau)\Xi^{-1}(t)\Psi, \tau \in [0, t] \quad (3.26)$$

où

$$\Xi(t) = \int_0^t \xi^T(t - \tau)\xi(t - \tau)d\tau \quad (3.27)$$

et

$$\xi(\tau) = [a_0(\tau), a_1(\tau), \dots, a_{n-1}(\tau)], \tau \in [0, t] \quad (3.28)$$

satisfait aux conditions(3.24).

Pour démontrer ce lemme on va utiliser ce lemme :

**Lemme 3.3.2** *Si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$ ,  $\lambda_i, 1 \leq \lambda_i \leq n$  sont distinctes, alors les fonctions  $a_k(t), 0 \leq k \leq n - 1$  de la formule (3.23) sont linéairement indépendantes.*

**Preuve :**

Remarquons que les conditions exprimées par la formule(3.24)peuvent être écrites sous forme matricielle comme suit :

$$\Psi = \int_0^t \xi^T(t - \tau)\hat{u}(\tau)d\tau \quad (3.29)$$

Le contrôle donné par la formule(3.26)existe si et seulement si la matrice  $\Xi(t)$  est inversible, ceci est prouvé par contradiction. Supposons que cette matrice n'est pas inversible, alors il va exister un vecteur non nul  $v$  tel que  $\Xi(t)v = 0$ . En prémultipliant par  $v^T$ , on a :

$$v^T\Xi(t)v = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^t v^T \xi^T(t-\tau) \xi(t-\tau) v d\tau &= 0 \\ \int_0^t (\xi(t-\tau)v)^T \xi(t-\tau)v d\tau &= 0 \\ \int_0^t \|\xi(t-\tau)v\|^2 d\tau &= 0 \end{aligned}$$

cette dernière formule ne peut être vraie que si

$$\xi(t-\tau)v = 0, \forall \tau \in [0, t]$$

Ceci veut dire que les fonctions  $a_k(t-\tau)$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  sont linéairement dépendantes ce qui est en contradiction avec l'énoncé de lemme (3.2.2), ceci dit la matrice  $\Xi(t)$  est donc inversible et le contrôle  $\hat{u}(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$  donnée par la formule (3.26) existe. Finalement, en substituant  $\hat{u}(\tau)$  dans (3.29) le lemme découle facilement. Une fois le contrôle fictif  $\hat{u}(\tau)$  déterminé, le vrai contrôle  $u(\tau)$ ,  $\tau \in [0, t]$  est obtenu à partir de

$$\begin{aligned} u(\tau) &= \hat{u}(\tau) * \mathcal{L}^{-1}(s^{\alpha-1}) \\ \mathcal{L}^{-1}(s^{\alpha-1}) &= \begin{cases} \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} & 0 < \alpha < 1 \\ \delta(\tau) & \alpha = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple 3.3.1** Étudions maintenant la contrôlabilité du système (s) ou cas où

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ u(t) &= \begin{cases} 0 & , t \geq 0 \\ 1 & , t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**1<sup>ère</sup> méthode**

Un calcul simple donne

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, k \geq 2$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(At^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \\ &= I_2 + A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + A^2 \frac{(t^{2\alpha})}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \dots + A^k \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)} + \dots \\ &= I_2 + A \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le Gramamain de contrôlabilité du système (s) et la matrice :

$${}_\alpha W_c(t) = \int_0^t \Phi_0(-\tau) B B^T \Phi_0^T(-\tau) d\tau$$

$$\Phi_0(-\tau) B B^T \Phi_0^T(-\tau) = \begin{pmatrix} \left( \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 & \frac{-\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ \frac{-\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t \Phi_0(-\tau) B B^T \Phi_0^T(-\tau) d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^t \left( \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 d\tau & \int_0^t \frac{-\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} d\tau \\ \int_0^t \frac{-\tau^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} d\tau & \int_0^t d\tau \end{pmatrix}$$

on obtient :

$${}_\alpha W_c(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^{2\alpha+1}}{(\Gamma(\alpha+1))^2(2\alpha+1)} & \frac{-t^{\alpha+1}}{(\Gamma(\alpha+1))^2(\alpha+1)} \\ \frac{-t^{\alpha+1}}{(\Gamma(\alpha+1))^2(\alpha+1)} & t \end{pmatrix} \quad t \geq 0$$

donc :

$$\begin{aligned} \det_{\alpha} W_c(t) &= \frac{t \cdot t^{2\alpha+1}}{(\Gamma(\alpha+1))^2(2\alpha+1)} - \left( \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)} \right)^2 \\ &= \frac{t^{2\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2(2\alpha+1)} - \frac{t^{2\alpha+2}}{(\Gamma(\alpha+1))^2(\alpha+1)^2} \end{aligned}$$

on a :

$\det_{\alpha} W_c(t) > 0$  pour  $t > 0 \implies$  le système (s) contrôlable

### 2<sup>ème</sup> méthode

La matrice de contrôlabilité du système (s) est définie par :

$$C_{\alpha} = [B, AB]$$

et

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$C_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

posons

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  on a :

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire que  $v_1$  et  $v_2$  sont linéairement indépendants, Ainsi

$\text{rg} C_{\alpha} = 2$ , donc le système (s) contrôlable

# Bibliographie

- [1] A. A Chikrii, I. I. Matichin, Presentation of Solutions of Linear Systems with Fractional Derivatives in the sense of Riemann-Liouville, Caputo, and Miller-Ross, J. of Automation and Information Sciences 40, No 6(2008), 8-10.
- [2] Bekadour Kadda, Transformé de Laplace et Applications aux equations Différentielles fractionnaires, Mémoire de Master Académique, université Dr Tahar Moulay-saida, 2016/2017
- [3] Benaissa Assia, Quelques propriétés et applications de L'opérateur fractionnaire de caputo, mémoire de Master Académique, Université Dr Tahar Moulay -Saida, 2016/2017
- [4] Dr. Kerboua Mourad, contrôlabilité approchée des systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire, Mémoire de Master en mathématique, Univercité 8 Mai 1995 Guelma, 2019
- [5] Harrat Aicha, Systèmes d'évolution abstraits d'ordres fractionnaires et leurs applications, thèse de Doctorat, universite 8 mais 1995 Guelma, 12/12/2018
- [6] Kerboua Mourad, Contrôle dynamique de quelques systèmes fractionnaires non-locaux et leurs applications, thèse de Doctorat en Mathématiques, Université 8 Mai 1945 – Guelma, 2016
- [7] Marir Saliha, Problèmes De Contrôlabilité Des Systèmes Différentiels Fractionnaires, Le Diplome de Magister, universtie Abdelhamid Ibn Badis de Mostaghnem, 2011/2012
- [8] M. Moulai Abderrezak, dérivée non entières en viscoélastisité linéaire. Modèles et problèmes overts, Mémoire de Master, université Abderrahmane Mira-béjaia, 10/06/2012
- [9] Sari Radia, sur les equations differentielles et aux dérivées partielles avec des serivées temporelles fractionnaires, thèse de Doctorat en sciences, universite badji mokhtar annaba, 2017/2018

- [10] T. Kaczorek and M. Bustowicz, Pointwise Completeness and Pointwise Dégeneracy of Linear Continuous-Time Fractional Order Systems, (Nov 2008)