الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
جامعة عباس لغرور خنشلة
UNIVERSITE ABBES LAGHROUR- KHENCHELA

Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Mathématiques & Informatique

N° de série :……

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de Master

Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques Appliquées

SUR CERTAINES CLASSES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES DANS DES ESPACES DE TYPE BV

Réalisé par : **BERRAOUDI Ilyas**
ZIDI Salim

Dirigé par : **Dr. RAMOUL Hichem**
maitre de conférence classe A

Membres de jury :

M. A.Abdelkarim **Président**
M. O.Zahi **Examinateur**

Présenté le 03/07/2019

Dédicace

je dédice ce travail a ...
A la lumière de mes jours ,la source de mes efforts ,la flamme de mon coeur ,ma vie et mon bonheur ,qui n'a pas de m'encourage de prier pour moi; Maman que j'adore.
A mon père, mon exemple éternel, mon soutien moral, etmatériel , tu représente pour moi le symbole de la bonté par excellence , ce travail est le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation
A mon frère "ABD ELHAk" et mes soeurs "HIBAT ARRAHMAN,NOUR EL HOUDA,MINET ALLAH,MANAR" et les petits enfants des la famille :TWABA,DHOHA,ANFEL,RAHMA,MOUATAZ BILLAH,MOUAADH"
Je dédie mes proches amies CHAMSEDDINE KALIL BADIS TAMER ATAHER et tous mes amies

Dédicace

A ma chère mère et cher père
A mes frères et ma soeur
A toute ma famille
A tous mes amies
Je dédie mon travail

Remerciements

Je tiens à remercier mon Dieu tout puissante se la santé, de la volonté, de la patience et de courage
Et avec mes agréable d'exprime ma gratitude et mes sincères remerciement à tout ceux qui ont contribués de prés ou de loin à l'achèvement de se présent ;particulier:
DR. HICHEM Ramoul notre encadreur, qui ma dérigé soigneusement ce travail vec sa grande attention et sa patience qu'il accepte encor une fois l'expression renouvelée de mes remerciement

Abstract

This memoir is devoted to study properties of bounded variation solutions for some integral equations. Utilizing F-contractions in b-metric spaces and Banach fixed point theorem, we prove the existence and uniqueness of solutions for a functional equation in suitable Banach spaces .

.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude des propriétés de solutions à variation bornée pour certaines équations intégrales. En utilisant les F-contractions dans des espaces b-métriques et le théorème du point fixe de Banach, nous prouvons l'existence et l'unicité des solutions pour une équations integrale dans des espaces de Banach appropriés.

Table des matières

Introduction

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'une classe d'équations intégrales dans des espaces appropriés. Ce genre de problèmes est d'actualité en analyse fonctionnelle surtout avec toutes les généralisations effectuées ces dix dernières années pour les espaces de type variation bornée. On propose ici deux approches, une première se basant sur des contractions généralisées et une seconde suscitant des espaces fonctionnels adéquats de type variation bornée. Les deux approches font appel à un outil très puissant de l'analyse fonctionnelle c'est la théorie du point fixe.

Le mémoire est organisé comme suit :
Le chapitre 1 est consacré à rappel sur les espaces b-métriques et les F-contractions ainsi que quelques théorèmes indispensables pour mieux situer les différentes approches relatives à la théorie du point fixe.

Au chapitre 2, on démontre un résultat concernant les F-contractions en affaiblissant les hypothèses par rapport aux résultats existants dans la littérature. A la fin du chapitre, on donne une application à une équation intégrale de type Fredholm dans l'espace des fonctions à variation bornée.

Le chapitre 3 est destiné à étudier les propriétés d'une classe d'équations intégrales de type Hammerstein dans les espaces de type espace de fonctions à variation bornée . L'étude de l'existence locale et l'unicité se fait moyennant le théorème du point fixe de Banach.

Le mémoire s'achève par une conclusion et des perspectives à envisager

Chapitre 1

Préliminaires

Résumé

Ce chapitre est dédié essentiellement à un rappel sur les notions principales des espaces b-métriques et leurs propriétés ainsi qu'à la notion de F-contraction. Quelques théorèmes concernant les travaux existants dans littérature sont donnés ici pour mieux situer les éventuelles généralisations autour des F-contractions (cf. [C :93], [W :12], [P :14], [P :16] et [S :13]).

1.1 Espace b-métrique

Définition 1.1.1. Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application $d : X \times X$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

(a) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(b) $d(x,y) = d(y,x)$

(c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Le couple (X,d) est appelé un espace métrique.

Définition 1.1.2. Soit X un ensemble non vide et $s \geq 1$ un nombre réel donné.
Une fonction $\sigma : X \times X \longrightarrow [0,\infty[$ est dite b-métrique si elle satisfait pour tout $x,y,z \in X$

(σ_1) $\sigma\left(x,y\right) = 0$ ssi $x = y$;

(σ_2) $\sigma\left(x,y\right) = \sigma\left(y,x\right)$;

(σ_3) $\sigma\left(x,z\right) \leq s\left[\sigma\left(x,y\right) + \sigma\left(y,z\right)\right]$.

Le couple (X,σ) est appelé espace b-métrique de coefficient s .

Remarque 1.1.1. Si $s = 1$, on retrouve l'espace métrique habituel.

Exemple 1.1.1. 1) Soit $X = l_p(\mathbb{R})$ avec $0 < p < 1$ où $l_p(\mathbb{R}) = \left\{\{x_n\} \subset \mathbb{R} : \sum\limits_{n-1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$.

Soit $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ avec :

$$d(x,y) = \left(\sum_{n-1}^{\infty} |x_n - y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{où } x = \{x_n\}, y = \{y_n\}.$$

Alors d est un espace b-métrique de coefficient $s = 2^{\frac{1}{p}}$.

2) Soit $X = L_p([0,1])$ est l'espace de toutes les fonctions réelles $x(t)$, $t \in [0,1]$ telle que $\int_0^1 |x(t)|^p < \infty$ avec $0 < p < 1$; Définie $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ comme :

$$d(x,y) = \left(\int_0^1 \left|x(t) - y(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Alors d est un espace b-métrique de coefficient $s = 2^{\frac{1}{p}}$.

Exemple 1.1.2. Soit (X,d) un espace métrique, et $\rho(x,y) = \left(d(x,y)\right)^p$, où $p > 1$ est un nombre réel. Alors (X,ρ) est espace b-métrique avec $s = 2^{p-1}$.

Exemple 1.1.3. Soit $X = \mathbb{N} \cup [\infty]$ et soit $\sigma : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par

$$\sigma(m,n) = \begin{cases} 0 & \text{Si} \quad m = n \\ \left|\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{n}\right| & \text{Si} \quad \text{un des } m,\ n \text{ est pair ou l'autre est pair ou } \infty \\ 5 & \text{Si} \quad \text{un des } m,\ n \text{ est impair, } m \neq n \text{ ou l'autre est impair ou } \infty \\ 2 & \text{Sinon} \end{cases}$$

On a

$$\sigma(m,n) \leq \frac{5}{2}\left[\sigma(m,n)+\sigma(n,p)\right] \quad \forall m,n,p \in X$$

alors X est un espace b-métrique avec $s=\frac{5}{2}$.

Cet exemple montre aussi que la fonction b-métrique n'est pas toujours continue. En effet, si on prend $x_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sigma(2n,\infty) = \frac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$$

Ceci se traduit par $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} \infty$. Cependant $\sigma(x_n,1) = 2 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 5 = \sigma(\infty,1)$.

Définition 1.1.3. Soit (X,σ) un espace b-métrique, $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X et $x \in X$.

i) La suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite b-convergente en (X,σ) vers x si et seulement si

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ \forall n>n_0\ \ tel\ que\ \ :\ \sigma(x_n,x)<\varepsilon$$

ii) On dit que la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Cauchy dans (X,σ) si :

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \ tel\ que\ \ \sigma(x_n,x_{n+p})<\varepsilon\ \ pour\ tout\ \ n>n_0\ ,\ p\in\mathbb{N}$$

iii) L'espace b-métrique (X,σ) est b-complet si :tout suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de cauchy dans X converge vers $x \in X$.

Lemme 1.1.1. *Soit (X,d) un espace b-métrique avec $s \geq 1$.Si une suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ est b-convergent, alors elle admet une limite unique.*

Lemme 1.1.2. *Soit (X,σ) un espace b-métrique et $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(x_n,x_{n+1}) =$ 0. Si $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite de b-Cauchy, alors il existe $\epsilon>0$*

et deux suites $\left(m_{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$et $\left(n_{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ de positif entiers tels que pour les quatre séquences suivantes

$$\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)}})\ ,\ \sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)+1}})\ ,\ \sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)}})\ et\ \sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)+1}})$$

telle que

$$\epsilon \leq liminf_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)}})) \leq limsup_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)}})) \leq s\epsilon \tag{1.1}$$

$$\frac{\epsilon}{s} \leq liminf_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)+1}}))) \leq limsup_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)}},x_{n_{(k)+1}}))) \leq s^2\epsilon \tag{1.2}$$

$$\frac{\epsilon}{s} \leq liminf_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)}})) \leq limsup_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)}})) \leq s^2\epsilon \tag{1.3}$$

$$\frac{\epsilon}{s^2} \leq liminf_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)+1}})) \leq limsup_{k\to\infty}(\sigma(x_{m_{(k)+1}},x_{n_{(k)+1}})) \leq s^2\epsilon \tag{1.4}$$

1.2 F-contractions

En 2012, Wardowski a introduit la notion de F-contraction comme suit :

Définition 1.2.1. Soit (X,d) un espace métrique. Une application $T : X \to X$ est dite F-contraction s'il existe $F \in \mathscr{F}$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$,

$$d(Tx,Ty) > 0 \Longrightarrow \tau + F\left(d(Tx,Ty)\right) \leq F\left(d(x,y)\right),$$

où $\mathscr{F}$ la famille de toute les fonctions $F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :
(F_1) F est strictement croissante, *i.e.,* pour tout $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$, si $\alpha < \beta$, alors $F(\alpha) < F(\beta)$.
(F_2) pour chaque suite $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres positifs,

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} F(\alpha_n) = -\infty.$$

(F_3) Il existe $k \in (0,1)$ tel que $\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$.

En utilisant cette notion de F-contraction, Wardowski a démontré le résultat suivant

Théorème 1.2.1. *Soit(X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une F-contraction. Alors T admet une point fixe unique x^* et pour chaque $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers x^*.*

Ensuite Secelean a montré que la condition (F_2) dans Définition 1.2.1 peut être remplacée par la condition suivante, notée (F_2'), donnée comme suit :

(F_2') $\inf_{t\in(0,+\infty)} F(t) = -\infty.$

Piri and Kumam ont étendu les résultats de Wardowski en remplaçant la condition (F_3) in Définition 1.2.1 avec la suivante :

(F_3') F est continue sur $(0,+\infty)$.

Si on note $\mathfrak{F}$ la famille des fonctions $F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions (F_1), (F_2') and (F_3'), on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.2. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$. On suppose qu'il existe $F \in \mathfrak{F}$ et $\tau > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$,*

$$d(Tx,Ty) > 0 \Longrightarrow \tau + F\left(d(Tx,Ty)\right) \leq F\left(d(x,y)\right).$$

Alors T admet un point fixe unique x^* et pour chaque $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers x^*.

Dans la littérature, on a la définition de la contraction de type F-Suzuki comme suit :

Définition 1.2.2. Soit (X,d) un espace métrique complet. Une application $T : X \to X$ est dite F-Suzuki contraction s'il existe $F \in \mathfrak{F}$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$

$$\frac{1}{2} d(x,Tx) < d(x,y) \Longrightarrow \tau + F\left(d(Tx,Ty)\right) \leq F\left(d(x,y)\right).$$

Le théorème du point fixe correspondant à F-Suzuki contraction est donné comme suit :

Théorème 1.2.3. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une F-Suzuki contraction. Alors T admet un point fixe unique x^* et pour chaque $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers x^*.*

On pose :

$$\Phi_1 = \{F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad F \text{ satisfait} (F_1)\},$$

$$\Phi_2 = \{F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad F \text{ satisfait } (F_1) \text{ et} (F_3)\},$$

$$\Phi_3 = \{F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad F \text{ satisfait } (F_1) \text{ et} (F_3')\},$$

On note aussi

$$M_T(x,y) = \max\left\{\begin{array}{c} d(x,y), \dfrac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}, \dfrac{d(T^2x,x)+d(T^2x,Ty)}{2}, \\ d(T^2x,Tx), d(T^2x,y), d(T^2x,Ty)+d(x,Tx), \\ d(y,Tx)+d(y,Ty) \end{array}\right\}.$$

Définition 1.2.3. Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. T est dite F-contraction généralisée modifiée de type (A) s'il existe $F \in \Phi_3$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$d(Tx,Ty) > 0 \Longrightarrow \tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(M_T(x,y)),$$

Définition 1.2.4. Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. T est dite F-contraction généralisée modifiée de type (B) s'il existe $F \in \Phi_2$ et $\tau > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$d(Tx,Ty) > 0 \Longrightarrow \tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(M_T(x,y)).$$

On a les résultats suivants :

Théorème 1.2.4. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une F-contraction généralisée modifiée de type (A). Alors T admet un point fixe unique x^* et pour chaque $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers x^*.*

Remarque 1.2.1. Le théorème ci dessus est une extension du théorème 1.2.1 sans la condition (F_2).

Théorème 1.2.5. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une F-contraction généralisée modifiée continue de type (B). Alors T admet un point fixe unique x^* et pour chaque $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers x^*.*

1.3 Fonctions à variation bornée

Considérons une fonction réel f définie sur l'intervalle fermé $[a,b]$ .Si

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$$

est une subdivision de [a,b],considérons la somme :

$$V_\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$$

qui dépend de la subdivision σ.Si S est l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$,la borne supèrieur des V_σ(lorsque $\sigma \in S$) est un nombre positif fini ou égale à $+\infty$,noté $V_f[a,b]$, et appelé la variation totale de f sur $[a,b]$

<u>Définition</u>
On dit que $f : [a,b] \longrightarrow R$ est à variation bornée (en abrégé V.B.) si

$$V_f[a,b] < +\infty.$$

Si f est une fonction constante,alors $V_f[a,b] = 0$.
Si f est à VB sur [a,b] *,elle l'est sur tout intervalle contenu dans* [a,b].

Soit f à variation bornée sur $[a,b]$ .Si $a < c < b$,on a :

$$V_f[a,b] = V_f[a,c] + V_f[c,b] \qquad (1)$$

En effet, soient S_1 l'ensemble des subdivisions se [a,c] *et S_2 l'ensemble des subdivisions de* [c,b].
Si

$$\sigma_1 : \quad a = x_0 < x_1 < ... < x_m = c$$
$$\sigma_1 : \quad c = x_{m+1} < x_{m+2} < ... < x_n = b$$

alors

$$a = x_0 < x_1 < ... < c < ... < x_n = b$$

est une subdivision de [a,b]*.Or quelle que soit la subdivision $\sigma \in S$,on a :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{m-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + \sum_{k=m}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq V_f[a,b] + V_f[c,b] \quad ...(2)$$

d'ou

$$V_f[a,b] \leq V_f[a,c] + V_f[c,b]$$

D'autre part,comme la réunion d'une subdivision de [a,c] *et d'une subdivision de* [c,b] *et d'une(en comptant c une seule fois) est une subdivision de* [a,b]*, de l'égalité figurant dans (2) on obtient :*

$$V_f[a,b] \geq V_f[a,c] + V_f[c,b]$$

d'ou l'égalité (1)

Si f est à V.B sur [a,b], $|f(b) - f(a)| \leq V_f[a,b]$

Toute fonction réelle monotone sur [a,b] est à variatin bornée,et :

$$V_f[a,b] = |f(b) - f(a)|$$

Si f et g sont à V.B sur[a,b] *et* $\alpha, \beta \in R$*, la fonction* $h = \alpha f + \beta g$ *est à V.B*

Les fonctions réelle à V.B sur [a,b] *forment un espace vectoriel sur R*

En effet, soit $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$*, une subdivision de [a,b] ; on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} |h(x_{k+1}) - h(x_k)| &\leq |\alpha| \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |\beta||g(x_{k+1}) - g(x_k)| \\ &\leq |\alpha|.V_f[a,b] + |\beta|.V_g[a,b] < +\infty \qquad .\end{aligned}$$

Donc,

$$V_h[a,b] < +\infty.$$

Chapitre 2

Étude d'une équation intégrale via F-contraction

Résumé

L'objet de ce chapitre est de donner un résultat d'existence et d'unicité pour une équation intégrale dans les espaces à variation bornée. L'outil principal est de démontrer un résultat de point fixe concernant les F- contractions. Ce résultat en question est une amélioration considérable des résultats antérieurs. L'étude de l'équation intégrale est donnée à titre d'application via des résultats obtenus pour les F-contractions. (cf. [P :14] et [P :16]).

On démontre dans cette section un théorème du point fixe concernant les F- contractions pour nous permettre à la fin d'étudier une équation intégrale dans les espaces à variation bornée.

2.1 F- Contraction généralisée de type rationnel

☛ On note $\mathbb{L}$ la famille de toutes les fonctions $\tau : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ satisfaisant la propriété suivante :

$$\lim_{t\to s^+} \inf \tau(t) > 0, \quad \text{for all } s \geq 0. \qquad (H)$$

☛ on note aussi

$$\Phi_1 = \left\{F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad F \text{ satisfait} (F_1)\right\}$$

Définition 2.1.1. Soit (X,σ) un espace b-métrique avec une constante $s \geq 1$. Une application T de X dans lui même est dite F-contraction généralisée de type rationnel s'il existe $F \in \Phi_1$ et $\tau \in \mathbb{L}$ tels que

$$\sigma\left(Tx, Ty\right) > 0 \Rightarrow F(d(Tx,Ty)) \leq F(R(d(x,y))) - \tau(d(x,y)) \qquad (2.1)$$

tq : $R : R_+ \longmapsto R_+$

$$R(d(x,y)) = \alpha d(x,y) + \beta \frac{d(x,Tx)d(x,Ty) + d(y,Ty)d(y,Tx)}{1 + s(d(x,Tx) + d(y,Ty))} + \gamma \frac{d(x,Tx)d(x,Ty) + d(y,Ty)d(y,Tx)}{1 + d(x,Ty) + d(y,Tx)}$$

Théorème 2.1.1. *Soit (X,σ) un espace b-métrique b-complet avec une constante $s \geq 1$ et $T : X \to X$ une F-contraction généralisée de type rationnel avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\alpha + \beta + \gamma \leq 1$ et $\alpha < \frac{1}{s^3}$. Alors T admet un point fixe unique.*

Démonstration. Soit x_0 un point arbitraire dans X. Soit $\{x_n\}$ la suite de Picard dont le terme initial est x_0, i.e., $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$.
S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $x_{n_0} = x_{n_0+1}$, alors x_{n_0} est un point fixe de T. D'où la preuve.
Si $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, i.e., $T^n x_0 \neq T^{n+1} x_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui entraîne

$$\sigma_n := \sigma(x_n, x_{n+1}) = \sigma\left(T^n x_0, T^{n+1} x_0\right) = \sigma(Tx_{n-1}, Tx_n) > 0.$$

dans ce cas on passe par quatre étapes :
1⋆ On a besoin de la décroissance de $d(x_{n+1}, x_n)$ comme :

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) > 0$$

donc :

$$F(d(x_{n+1}, x_n)) \leq F(R(d(x_n, x_n)))) - \tau(d(x_n, x_{n-1}))$$

donc :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq R(d(x_n, x_{n-1})) \qquad (1)$$

on a :

$$R(d(x_n,x_{n-1})) = \alpha d(x_n,x_{n-1}) + \beta \frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})}{1+s(d(x_n,x_{n+1})+d(x_n,x_{n-1}))}$$
$$+\gamma \frac{d(x_{n-1},x_n)d(x_{n-1},x_{n+1})}{1+d(x_{n+1},x_{n-1})}$$
$$\leq \alpha d(x_n,x_{n-1}) + \beta d(x_n,x_{n-1}) + \gamma d(x_n,x_{n-1})$$
$$\leq (\alpha+\beta+\gamma) d(x_n,x_{n-1})$$

$$R(d(x_n,x_{n-1})) \leq d(x_n,x_{n-1}) ...(2) \quad ,\underline{car:} \quad \alpha+\beta+\gamma \leq 1$$

d'aprés (1) et (2) on a :

$$d(x_{n+1},x_n) \leq d(x_n,x_{n-1}) \quad ,\forall n \in N \qquad (3)$$

or la suite $d(x_{n+1},x_n)$ est décroissante.

2⋆ on va démontrer que $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x_{n-1}) = 0$ on suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x_{n-1}) = r \quad tq: \quad r>0 \qquad (4)$$

c-â-d :

$$\forall \epsilon>0, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n_0: \quad r-\epsilon \leq d(x_n,x_{n-1}) \leq r+\epsilon$$

donc : $\forall \epsilon>0, \exists n_0 \in N, \forall n \geq n_0$:

$$F(r-\epsilon) \leq F(d(x_n,x_{n-1})) \leq F(r+\epsilon) \qquad (5)$$

et d'aprés (4) on a :

$$\exists \delta>0 \quad tq: \quad 0<\delta \leq d(x_n,x_{n-1}) \qquad ,\forall n \in N$$

on a alors :

$$F(d(x_{n+1},x_n)) \leq F(R(d(x_n,x_{n-1}))) - \tau(\beta(R(d(x_n,x_{n-1}))))$$

$\exists n_1 \in \mathbb{N}$ et d'aprés (2) et (3) on a :

$$F(d(x_{n+1},x_n)) \leq F(d(x_{n_1+1},x_{n_1})) - \sum_{K=n_1}^{n} \tau(d(x_K,x_{K-1}))$$

par passage a la limsup et d'aprés (5) on conclus la conradiction car la série $\sum_{K=n_1}^{n} \tau(d(x_K,x_{K-1}))$ sa diverge vers $+\infty$
donc :

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x_{n-1}) = 0.$$

3⋆ On utilisant la démonstration par absurd pour démontrer que la suite $(x_n)_{n\in N}$ est de cauchy ,alors : il existe $\epsilon>0$ et une suite $\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$ et $\{q(n)\}_{n=0}^{\infty}$ des nombres naturels tq : $\forall n \in N$

$$p(n) > q(n) > n, \quad d(x_p(n), x_q(n)) \geq \epsilon, \quad d(x_{p(n)-1}, x_q(n)) < \epsilon$$

alors, on a :

$$\epsilon \le d(x_{p(n)}, x_{q(n)}) \le sd(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}) + s^2 d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) + s^2 d(x_{q(n)+1}, x_{q(n)}) \qquad (*)$$

Et comme :

$$\lim_{n\to+\infty} (d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1})) = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} (d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1})) = 0 \quad (**)$$

pour $n \ge N_1$:

$$d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}) \le \frac{(1-\alpha s^3)\epsilon}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} \; et \; d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}) \le \frac{(1-\alpha s^3)\epsilon}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

$$\epsilon \le d(x_{p(n)}, x_{q(n)}) \le s^2 d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) + \frac{(1-\alpha s^3)s\epsilon}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} + \frac{(1-\alpha s^3)s^2\epsilon}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

donc :

$$\frac{\frac{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2 - (1-\alpha s^3)(s+s^2)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}}{s^2} \epsilon \le d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) = d(Tx_{p(n)}, Tx_{q(n)})$$

$$\frac{\alpha s^3 + 2(\beta+\gamma)s^2 + \alpha s^3(s+s^3)}{[\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2]s^2} \epsilon \le d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) = d(Tx_{p(n)}, Tx_{q(n)}) \qquad (1)$$

on va montrer que :

$$d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) > 0 \qquad , \forall n \in \mathbb{N}$$

d'aprés (*) et(**) on a :$\exists n_5 \in \mathbb{N}, \forall n \ge n_5$:

$$d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}) < \frac{\epsilon}{4s} \quad et \quad d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}) < \frac{\epsilon}{4s^2} \qquad (2)$$

d'aprés (*) et (2) on trouve :

$$0 < \frac{\epsilon}{2s^2} \le d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1})$$

c-à-d :

$$d(x_{p(n)+1}, x_{q(n)+1}) > 0 \qquad , \forall n \in \mathbb{N}$$

donc :

$$F(d(x_{p(n+1)}, x_{q(n)+1})) = F(d(Tx_{p(n)}, Tx_{q(n)})) < F(R(d(x_{p(n)}, x_{q(n)})))$$

donc :

$$d(Tx_{p(n)}, Tx_{q(n)}) < R(d(x_{p(n)}, x_{q(n)})) \qquad (3)$$

et on a :

$$R(d(x_{p(n)},x_{q(n)})) = \alpha d(x_{p(n)},x_{q(n)}) + \beta \frac{d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1}) + d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})}{1+s(d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})+d(x_{q(n)},x_{q(n)+1}))}$$
$$+\gamma \frac{d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1}) + d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})}{1+d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})+d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})} \quad (4)$$

d'aprés (1),(3) et (4) on a :

$$\frac{\alpha s^3+2(\beta+\gamma)s^2+\alpha s^3(s+s^2)}{[\alpha s^3+s+(1+2(\beta+\gamma))s^2]s^2}\epsilon < \alpha d(x_{p(n)},x_{q(n)})$$

$$+\beta \frac{d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1}) + d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})}{1+s(d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})+d(x_{q(n)},x_{q(n)+1}))}$$

$$+\gamma \frac{d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1}) + d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})}{1+d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})+d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\alpha s^3+2(\beta+\gamma)s^2+\alpha s^3(s+s^2)}{[\alpha s^3+s+(1+2(\beta+\gamma))s^2]s^2}\epsilon < \alpha d(x_{p(n)},x_{q(n)}) + \beta \frac{d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1})}{1+s(d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})+d(x_{q(n)},x_{q(n)+1}))}$$

$$+\beta \frac{d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})}{1+s(d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})+d(x_{q(n)},x_{q(n)+1}))} + \gamma \frac{d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1})}{1+d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})+d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})}$$

$$+\gamma \frac{d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})}{1+d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})+d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})}$$

$$\begin{aligned}\frac{\alpha s^3+2(\beta+\gamma)s^2+\alpha s^3(s+s^2)}{[\alpha s^3+s+(1+2(\beta+\gamma))s^2]s^2}\epsilon < \alpha d(x_{p(n)},x_{q(n)}) &+ \beta d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1})\\ &+\beta d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})\\ &+\gamma d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1})\\ &+\gamma d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}< \alpha d(x_{p(n)},x_{q(n)}) &+ (\beta+\gamma)d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1})\\ &+(\beta+\gamma)d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&< \alpha s d(x_{p(n)},x_{p(n)-1}) + \alpha s d(x_{p(n)-1},x_{q(n)})\\ &\quad +(\beta+\gamma)d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1})\\ &\quad +(\beta+\gamma)d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&< \alpha s d(x_{p(n)-1},x_{p(n)}) + \alpha s\epsilon\\ &\quad +(\beta+\gamma)d(x_{p(n)},x_{p(n)+1})d(x_{p(n)},x_{q(n)+1})\\ &\quad +(\beta+\gamma)d(x_{q(n)},x_{q(n)+1})d(x_{q(n)},x_{p(n)+1})\end{aligned}$$

car : $d(x_{p(n)-1}, x_{q(n)}) < \epsilon$
donc :

$$\frac{\alpha s^3 + 2(\beta+\gamma)s^2 + \alpha s^3(s+s^2)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} < \alpha s^3 \epsilon + \alpha s^3 d(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}) + (\beta+\gamma)s^2 d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}) d(x_{p(n)}, x_{q(n)+1}) + (\beta+\gamma)s^2 d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}) d(x_{q(n)}, x_{p(n)+1})$$

d'aprés (**) *et :* $\lim_{n\to+\infty}(d(x_{q(n)-1}, x_{q(n)})) = 0$ *, il existe* $N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1$ *tq :*

$$d(x_{p(n)}, x_{p(n)-1}) \leq \frac{(1-\alpha s^3)\epsilon}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

$$et \quad d(x_{p(n)}, x_{p(n)+1}) d(x_{p(n)}, x_{q(n)+1}) \leq \frac{(1-\alpha s^3)\epsilon}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

$$et \quad d(x_{q(n)}, x_{q(n)+1}) d(x_{q(n)}, x_{p(n)+1}) \leq \frac{(1-\alpha s^3)\epsilon}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

donc :

$$\frac{\alpha s^3 + 2(\beta+\gamma)s^2 + \alpha s^3(s+s^2)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} < \alpha s^3 + (\alpha s^3 + 2(\beta+\gamma)s^2)\frac{(1-\alpha s^3)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

$$\frac{\alpha s^3(s+s^2)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} < \alpha s^3 + (\alpha s^3 + 2(\beta+\gamma)s^2)\frac{-\alpha s^3}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

$$\frac{\alpha(s+s^2)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} < \alpha + (\alpha s^3 + 2(\beta+\gamma)s^2)\frac{-\alpha}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

$$\frac{\alpha(s+s^2)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} < \frac{\alpha[\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2]}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} + (\alpha s^3 + 2(\beta+\gamma)s^2\frac{-\alpha}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2}$$

$$\frac{\alpha(s+s^2)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2} < \frac{\alpha[\alpha s^3 + s + (1+2(\beta+\gamma))s^2] - \alpha(\alpha s^3 + 2(\beta+\gamma)s^2)}{\alpha s^3 + s + (1+2(\alpha+\gamma))s^2}$$

$$\alpha(s+s^2) < \alpha(s+s^2)$$

$$\Longrightarrow \alpha < \alpha \quad contradicition$$

donc : la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de cauchy*
4⋆ Montrons que : $\exists x \in E$ tq : $Tx = x$
Supposons que :

$$\forall x \in E, Tx \neq x \Rightarrow d(Tx, x) > 0, \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 tq : d(Tx, x) = \delta > 0, \forall x \in E$$

$$\Rightarrow 0 < \delta = d(Tx, x) \leq sd(Tx, x_n) + sd(x_n, x), \forall n \in N \qquad (1)$$

Comme :

$$\lim_{n\to+\infty}(d(x_n, x)) = 0 \Rightarrow \exists N_0 \in N$$

Tels que pour tout $n \geq N_0$:

$$d(x_n, x) \leq \frac{\delta}{2s} \qquad (2)$$

D'aprés (1) et (2) on a :

$$0 < \frac{\delta}{2s} \leq d(Tx, x_n) \qquad (*)$$

Donc :

$$0 < d(Tx, x_n)$$

Et comme :

$$d(Tx, x_n) = d(Tx, Tx_{n-1}) \quad , \forall n \in N$$

alors :

$$F(d(Tx, tx_{n-1}) < F(R(d(Tx, x_{n-1})))$$
$$\Rightarrow d(Tx, Tx_{n-1}) < Rd(x, x_{n-1}) \forall n \in N \qquad (3)$$

D'autre part on a :

$$\frac{d(x, Tx)d(x, x_n) + d(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, Tx)}{1 + s(d(x, Tx) + d(x_{n-1}, x_n))} \leq sd(x, x_n)$$

$$+sd(x_n, x_{n-1})$$

$$\frac{d(x, Tx)d(x, x_n) + d(x_{n-1}, x_n)d(x_{n-1}, Tx)}{1 + d(x, Tx) + d(x_{n-1}, x_n)} \leq s^2 d(x, x_n)$$

$$+s^2 d(x_n, x_{n-1})$$

Donc :

$$R(d(x, x_{n-1})) \leq (s^2 + s + 1)d(x, x_n) + (s^2 + s)d(x_n, x_{n-1}) \qquad (4)$$

D'aprés (1),(3),(4) on trouve :

$$\delta = d(Tx, x) \leq d(Tx, x_n)$$

$$\leq s(s^2 + s + 1)d(x, x_n) + (s^2 + s)d(x_n, x_{n-1}) + sd(x_n, x)$$

$$\leq s(s^2 + s + 2)d(x, x_n) + (s^2 + s)d(x_n, x_{n-1})$$

Comme :

$$\lim_{n \to +\infty} (d(x, x_n)) = 0 \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} (d(x_{n-1}, x_n)) = 0$$

Alors pour n assez grand tq :

$$d(x,x_n) \leq \frac{\delta}{4s(s^2+s+2)} \quad et \quad d(x_n,x_{n-1}) \leq \frac{\delta}{4(s^2+s)}$$

On a alors :

$$\delta = d(Tx,x) \leq d(Tx,x_n) \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow \delta \leq \frac{\delta}{2} \qquad ...contradiction$$

Alors :

$$\exists x \in E \ \ tq: \ Tx = x$$

2⋆ Unicité :
soient x_1, x_2 deux points fixe différents de T c-á-d : $Tx_1 = x_1 \neq x_2 = Tx_2$ ce qui implique que $d(Tx_1, Tx_2) > 0$ donc :

$$F(d(Tx_1,Tx_2)) + \tau(d(x_1,x_2)) = F(d(x_1,x_2)) + \tau(d(x_1,x_2)) \leq F(R(d(x_1,x_2)))$$

d'autre part on a : $R(d(x_1,x_2)) \leq d(x_1,x_2)$,alors :

$$F(d(x_1,x_2)) + \tau(d(x_1,x_2)) \leq F(d(x_1,x_2))$$

$$\Longleftrightarrow \tau(d(x_1,x_2)) \leq 0 ...contradiction$$

d'ou le point fixe est unique. ☛ On note $\mathscr{L}$ la famille de toutes les fonctions $\tau : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ satisfaisant la propriété suivante : pour chaque $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,+\infty)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \tau(t_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} t_n = 0 \qquad (H')$$

Proposition 2.1.1. *Si on change l'hypothèse (H) par (H'), le Théorème 2.1.1 reste toujours valable.*

Démonstration. En suivant a mème démarche que dans le théorème ci-dessus, on á :

$$F(d(x_{n+1},x_n)) + \tau(d(x_n,x_{n-1})) \leq F(R(d(x_{n+1},x_n)))$$

$$F(d(x_{n+1},x_n)) \leq F(R(d(x_{n+1},x_n))) - \sum_{K=0}^{K=n} \tau(d(x_K,x_{K-1}))$$

et on a $\lim_{n\to+\infty} d(x_n,x_{n-1}) = \alpha_n > 0$ alors : $\sum_{K=0}^{K=n} \tau(d(x_K,x_{K-1}))$ tendent vers $+\infty$,et le reste de la preuve est identiquement le même. ■

Remarque 2.1.1. Les résultats ci-dessus sont démontrés avec seulement la croissance de la fonction F ; ce qui représente une originalité par rapport aux travaux existant dans la littérature.

2.2 Application à une équation intégrale

Dans cette section, on donne une application de nos résultats obtenus consistant à démontrer l'existence et l'unicité d'une certaine équation intégrale dans l'espace des fonctions à variation bornée

on a :

$$U(t) = g(t) + \int_I K(t,s) f(u(s)) ds$$

$$\|u\|_{BV} = |u(0)| + \sup \sum_{j=1}^{n} |u(b_j) - u(a_j)|$$

on suppose que :

$$T(U(t)) = g(t) + \int_I K(t,s) f(u(s)) ds$$

tq :

$$g, u : I \longrightarrow R \text{ ,avec : } \ g, u \in BV$$

et :

$$f : R \longrightarrow R \text{ ,est une fonction tq : } \quad \sup_{t\in I} |f(u(t))| \leq \check{c} \sup_{t\in I} |u(t)|$$

et il $\exists \alpha > 0$ *tq :*

$$\sup_{t\in I} |u(t)| \leq \alpha \|u\|_{BV}$$

$K : I \times I \longrightarrow R$ *,tq :*

$$\forall t \in I : \quad \int_I |K(0,s)| ds + \sum_{j=1}^{n} |K(b_j, s) - K(a_n, s)| \leq \frac{e^{-\tau}}{\alpha \check{c}} / \quad \tau > 0$$

soient $U_1, U_2 \in BV$ *alors on a :*

$$\begin{aligned}
\sup \sum_{j=1}^{n} |T(U_1(b_j) - T(U_2(a_j))| &\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{I_n} |K(b_j, s) - K(a_j, s)| |f(U_1(s)) - f(U_2(s))| ds \\
&\leq \sup_{s\in I} |f(U_1(s)) - f(U_2(s))| \sup \sum_{j=1}^{n} \int_{I_n} |K(U_1(b_j) - K(U_2(a_j))| \\
&\leq \check{c} \sup_{s\in I} |U_1(s) - U_2(s)| \sup \int_{I_n} \sum_{j=1}^{n} |K(U_1(b_j) - K(U_2(a_j))| \\
&\leq e^{-\tau} \|U\|_{BV}
\end{aligned}$$

On passons á la limite $n \longrightarrow \infty$ *on a alors :*

$$\|Tu_1 - Tu_2\|_{BV} \leq e^{-\tau} \|u_1 - u_2\|_{BV}$$

donc :

$$ln\|Tu_1 - Tu_2\|_{BV} \leq -\tau + ln\|u_1 - u_2\|_{BV}$$

Chapitre 3

Sur une équation intégrale dans un espace de type fonctions à variation bornée

Résumé

Dans ce chapitre on étudie l'existence et l'unicité d'une équation intégrale de type Hammerstein dans les espaces de type espace de fonctions à variation bornée. (cf. [B :05]).

3.1 Introduction et notations

Dans cette section nous rassemblons quelques définitions et résultats qui seront nécessaire dans la suite.Commenons par la notion de Λ variation bornée introduite par D. Waterman en 1972. soit f une fonction des valeurs réelle définie sur un intervalle [a,b], $\{I_n\}$ une suite d'intervalles ne se chevauchant pas d'intervalles $I_n = [a_n, b_n] \subset$ [a,b] et soit Λ notons une suite strictement décroissante des valeurs positifs λ_n tels que $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ est divergeante. Une fonction f est dite Λ a variation bornée (ΛBV) si pour tout suite $\{I_n\}$ ona : On a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(I_n)|}{\lambda_n} < +\infty, \quad tq: \quad f(I_n) = f(b_n) - f(a_n)$$

Dans le cas particulier où $\Lambda = \{n\}$, on dit que f est une variation liée harmonique (HBV). Si f a une variation liée à Λ, alors la variation de f sur un intervalle [a,x]$(a \leq x \leq b)$ est définie de la manière suivante :

$$V_\Lambda(f[a,x]) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{f(In)}{\lambda_n}|\}$$

oùle suprématie est prise sur toutes les suites d'intervalles $\{I_n\}$ se chevauchant pas telle que : $\cup I_n \subset [a,x]$. Nous remarquons que les fonctions ΛBV ont une partie de la propriétés que possède les fonctions qui ont une variation limitée au sens de Jordan). Par exemple, une fonction ΛBV est liés et ses discontinuité sont tout au plus dénombrables. Par $\Lambda BV(I,\mathbb{R})=\Lambda BV(I)$ on notera l'espace de toutes les fonctions $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $V_\Lambda(x,I) = V_\Lambda(x) < +\infty$ avec la norme $\|x\|_\Lambda = x(a) + V_\Lambda(x)$. $\Lambda BV(I)$ avec cette norme est un espace de Banach. Comme d'habitude, par $C(I) = C(I,\mathbb{R})$ nous désignerons l'espace de Banach de toutes les fonctions continues $I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec la norme classique $\|x\|_C = \sup|x(s)|$. Les fonction ΛBV continues sont un sous-espace fermé de BV. Le suivant est bien connu.

Lemme 01 :*Si $p_1 et p_2$ sont des semi-normes sur un espace linéaire X donné tels que pour chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élément de X on ait $p_1(x_n) \to 0$ implique $p_2(x_n) \to 0$, alors il existe une constante M tq : $p_2(x_n) \leq Mp_1(x_n)$ pour chaque x∈X*

Lemme 02 :*il existe un constant $\check{c}$ tq : $\sup_{t\in<I}|x(t)| \leq \check{c}\|x\|_\Lambda$ pour tout x∈ $\Lambda BV(I)$.*

3.2 Équation intégrale de Hammerstein

Concidérons l'équation intégrale de Hammerstein suivante :

$$U(t) = g(t) + \lambda \int_I K(t,s) f(u(s)) ds \qquad (1) \qquad (I = [0,a])$$

$$\|g\|_\Lambda = |g(0)| + V_\Lambda(g[0,a])$$

tq :

$$V_\Lambda(g[0,a]) = \sup \sum_{n\geq 1} |\frac{g(I_n)}{\lambda_n}| \qquad / I_n = [a_n, b_n] \subset I \quad ,et: \quad g(I_n) = g(b_n) - g(a_n)$$

$$T(u(t)) = g(t) + \lambda \int_I K(t,s) f(u(s)) ds$$

et on note :

$$F(u(t)) = \int_I K(t,s)f(u(s))ds$$

on suppose que :

- $g : I \longrightarrow R$ *tq* $g \in BV$
- $f : R \longrightarrow R$ *est une fonction localement Lipshitzienne*
- $K : I \times I \longrightarrow R$ *,tq :* $\forall (t,s) \in I^2, \exists c > 0$*tq :* $V_\Lambda(K(t,s),I) \le M(s)$

tq : $M : I \longrightarrow R_+$ *est intégrable et* $K(t,\bullet)$ *est* $L-$*intégrable*

Théorème :*Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un nombre* $\rho > 0$ *tel que pur tout* λ *avec :* $|\lambda| < \rho$*, l'équation (1) a une* Λ*BV-solution définie sur I.*

Preuve :

Soit $r > 0$ *tq :* $\|g\|_\Lambda < r$ *et* L_r *:constante de Lipschitz* $(|f(s) - f(t)| \le L_r|s-t|\ , \forall s,t \in [-r,+r])$

on choisir $\rho > 0$:

$$(\|g(0)\| + V_\Lambda(g[-r,+r]) + \sup_{t\in I\cap[-r,+r]} \rho|f(t)| \int_I K(t,s) + M(s))ds < r \qquad (\star)$$

et :

$$\rho L_r \int_I (|K(0,s)| + M(s))ds < 1 \qquad (2)$$

tq $\check{c}$ *est plus petit nombre satisfaisant l'inégalité :*

$$\sup_{t\in I} |g(t)|^p \le \check{c}\|g\|_\Lambda$$

soit $|\lambda| \le \rho$ *et* $I_n = [a_n, b_n] \subset I$ *on a alors :*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|F(u(I_j))|}{I_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{|F(u(b_j)) - F(u(a_j)|}{\lambda_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{|\int_I K(b_j,s)f(u(s))ds - \int_I K(a_j,s)f(u(s))ds|}{\lambda_j}$$

$$\le \sup_{t\in I} |f(u(s))| \int_I \sum_{j=1}^{n} \frac{|(K(b_j,s) - K(a_j,s))|}{\lambda j} ds$$

$$\le \sup_{t\in I} |f(u(s))| \int_I V_\Lambda(K(.,s))ds$$

$$\le \sup_{t\in I} |f(u(s))| \int_I M(s)ds < +\infty$$

donc : $F \in \Lambda BV$

d'autre part on a :

$$\|Tu\|_\Lambda = |Tu(0)| + V_\Lambda(Tu[-r,r]) \quad / V_\Lambda(Tu[-r,r]) = \sup \sum_{n\ge1} |\frac{(Tu)(I_n)}{\lambda_n}|$$

$$= |Tu(0)| + \sup \sum_{n\ge1} |\frac{(Tu)(I_n)}{\lambda_n}| \quad /tq : Tu(I_n) = Tu(b_n) - Tu(a_n)$$

on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|\frac{(Tu)(I_j)}{\lambda_j}| = \sum_{j=1}^{n}|\frac{g(b_j)+\lambda\int_I K(b_j,s)f(u(s))ds - g(a_j)-\lambda\int_I K(a_j,s)f(u(s))ds}{\lambda_j}|\\ \leq \sum_{j=1}^{n}(\frac{|g(b_j)-g(a_j)|}{\lambda_j}+|\lambda|\sup_{t\in I}|f(t)|\frac{\int_I|K(b_j,s)-K(a_j,s)|ds}{\lambda_j})\\ \leq V_\Lambda(g[-r,r])+|\lambda|\sup_{t\in I}|f(t)|\int_I\sum_{j=1}^{n}\frac{|K(b_j,s)-K(a_j,s)|}{\lambda_j}ds\\ \leq V_\Lambda(g[-r,r])+|\lambda|\sup_{t\in I}|f(t)|\int_I V_\Lambda(K(\bullet,s)[0,a])ds\\ \leq V_\Lambda(g[-r,r])+|\lambda|\sup_{t\in I}|f(t)|\int_I M(s)ds \qquad ...(\star\star)\end{aligned}$$

et on a :

$$\begin{aligned}|Tu(0)| = |g(0)+\lambda\int_I K(0,s)f(u(s))ds|\\ \leq |g(0)|+|\lambda|\int_I|K(0,s)||f(u(s))|ds\\ \leq |g(0)|+|\lambda|\sup_{t\in I}|f(u(s))|\int_I|K(0,s)|ds \quad ...(\star\star\star)\end{aligned}$$

d'aprés $(\star),(\star\star)et(\star\star\star)$ *on a :*

$$\|Tu\|_\Lambda \leq |g(0)|+V_\Lambda(g[0,a])+|\lambda|\sup_{t\in I}|f(t)|\int_I(|K(0,s)|+M(s))ds < r$$

donc :

$$T : B(0,r)\subset B(0,r)$$

Soit : $U_1,U_2\in BV$ *on a alors :*

$$\begin{aligned}\|T(U_1)-T(U_2)\|_\Lambda = |(T(U_1)-T(U_2))(0)|+V_\Lambda((T(U_1)-T(U_2))[0,a]) \qquad (3)\\ = |(T(U_1)-T(U_2))(0)|+\sup\sum_{n\geq 1}|\frac{(T(U_1)-T(U_2))(I_n)}{\lambda_n}|\\ = |(T(U_1)-T(U_2))(0)|+\sup\sum_{n\geq1}|\frac{\lambda\int_I K(t,s)(f(U_1(s))-f(U_2(s)))(I_n)ds}{\lambda_n}|\\ = |(T(U_1)-T(U_2))(0)|+|\lambda|\sup\sum_{n\geq1}|\frac{\int_I K(t,s)(f(U_1(s))-f(U_2(s)))(I_n)ds}{\lambda_n}|\end{aligned}$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\int_I K(t,s)(f(U_1(s)) - f(U_2(s)))(I_j)ds}{\lambda_j} \right| &\leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\int_I (K(b_j,s) - K(a_j,s))(f(U_1(s)) - f(U_2(s)))ds}{\lambda_j} \right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\int_I |K(b_j,s) - K(a_j,s)||f(U_1(s)) - f(U_2(s))|ds}{\lambda_j} \\
&\leq \sup_{s\in I} |f(U_1(s)) - f(U_2(s))| \sum_{j=1}^{n} \frac{\int_I |K(b_j,s) - K(a_j,s)|ds}{\lambda_j} \\
&\leq L_r \sup_{s\in I} |U_1(s) - U_2(s)| \int_I \sum_{j=1}^{n} \frac{|K(b_j,s) - K(a_j,s)|ds}{\lambda_j} \\
&\leq L_r \sup_{s\in I} |U_1(s) - U_2(s)| \int_I V_\Lambda(K(\bullet,s))ds \\
&\leq L_r \sup_{s\in I} |U_1(s) - U_2(s)| \int_I M(s)ds
\end{aligned}$$

on passant a la limite lorsque $n \longrightarrow \infty$ et on trouve :

$$V_\Lambda(F(U_1 - U_2), [-r,+r]) \leq L_r \sup_{s\in I} |U_1(s) - U_2(s)| \int_I M(s)ds \qquad (4)$$

d'autre part :

$$\begin{aligned}
|(T(U_1) - T(U_2))(0)| &= |\lambda| \int_I K(0,s)(f(U_1(s)) - f(U_2(s)))ds| \\
&\leq |\lambda| \sup |f(U_1(s)) - f(U_2(s))| \int_I |K(0,s)|ds \\
&\leq |\lambda| L_r \sup |U_1(s) - U_2(s)| \int_I |K(0,s)|ds \qquad (5)
\end{aligned}$$

d'aprés (2),(3),(4) et (5) on a :

$$\begin{aligned}
\|T(U_1) - T(U_2)\| &\leq |\lambda| L_r \sup_{s\in I} |U_1(s) - U_2(s)| \int_I M(s)ds + |\lambda| L_r \sup_{s\in I} |U_1(s) - U_2(s)| \int_I |K(0,s)|ds \\
&\leq |\lambda| L_r \sup_{s\in I} |U_1(s) - U_2(s)| \int_I (|K(0,s)| + M(s))ds \\
&\leq |\lambda| L_r \check{c} \|U_1 - U_2\|_\Lambda \int_I (|K(0,s)| + M(s))ds
\end{aligned}$$

d'ou l'application est contractante.

Conclusion et perspectives

Ce mémoire a été consacré à l'étude d'une certaine classe d'équations intégrales. Une approche indirecte a été menée dans au premier chapitre via les F-contractions. Dans le second chapitre on a présenté une étude directe et détaillée d'un problème concernant l'existence locale et l'unicité des solutions d'une équation intégrale de type Hammerstein dans les espaces de type espace de fonctions à variation bornée.

Comme perspectives, on se propose à l'avenir :

1. de donner des applications aux intégrales via une classe plus large de -contractions.
2. d'étendre les résultat obtenu au second chapitre pour classe plus large d'espaces de type BV (à variation bornée).

Bibliographie

[C :93] S. Czerwik, *Contractio mappings in b-metric spaces*, Acta mathematica et informatica universitatis ostraviensis, Vol 1, n=1.5-11, 1993.

[B :05] D. Bugajewska and D. O'regan, *On Nonlinear Integral Equations and* Λ*-bounded variation*, Acta Math. Hungar, 107 (4) (2005) 295-306.

[P :14] H. Piri1 and P. Kumam , *Some fixed point theorems concerning F-contraction in complete metric spaces* , Fixed point theory and applications, 2016 :210.

[P :16] H. Piri1 and P. Kumam , *Fixed point theorems for generalized F-Suzuki-contraction mappings in complete b-metric spaces* , Fixed point theory and applications, 2016 :90.

[S :13] N.A. Secelean *Iterated function systems consisting of F-contractions*, Fixed point theory and applications, 2013 :277.

[W :12] D. Wardowski, *Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces*, Fixed point theory and applications, 2012 :94.