

Correction Examen S2 : Systèmes asservis linéaires et continus

Correction Exercice1 (8 points):

1-Calculer les transformées de Laplace suivantes :

a) $\mathcal{L} \left[\left(t^2 + t - e^{-3t} \right) \mathcal{U}(t) \right]$

b) $\mathcal{L} \left[\left(t + 2 \right) \mathcal{U}(t) + \left(t + 3 \right) \mathcal{U}(t - 2) \right]$

a) $\mathcal{L} \left[\left(t^2 + t - e^{-3t} \right) \mathcal{U}(t) \right]$

$$f(t) = \left(t^2 + t - e^{-3t} \right) \mathcal{U}(t) = t^2 \mathcal{U}(t) + t \mathcal{U}(t) - e^{-3t} \mathcal{U}(t)$$

$$F(p) = \boxed{\frac{2}{p^3} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p+3}}$$

b) $\mathcal{L} \left[\left(t + 2 \right) \mathcal{U}(t) + \left(t + 3 \right) \mathcal{U}(t - 2) \right]$

$$f(t) = \left(t + 2 \right) \mathcal{U}(t) + \left(t + 3 \right) \mathcal{U}(t - 2) = \left(t + 2 \right) \mathcal{U}(t) + \left((t - 2) + 5 \right) \mathcal{U}(t - 2)$$

$$\mathcal{L} \left[\left(t + 5 \right) \mathcal{U}(t) \right] = \frac{1}{p^2} + \frac{5}{p}$$

$$\mathcal{L} \left[\left(t + 2 \right) \mathcal{U}(t) \right] = \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p}$$

$$\mathcal{L} \left[\left((t - 2) + 5 \right) \mathcal{U}(t - 2) \right] = \left(\frac{1}{p^2} + \frac{5}{p} \right) e^{-2p} = \frac{2p + 1}{p^2}$$

$$F(p) = \boxed{\frac{2p + 1}{p^2} + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{5}{p} \right) e^{-2p}}$$

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 4x(t) = e^{-2t}u(t) \text{ avec les conditions initiales : } x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$$

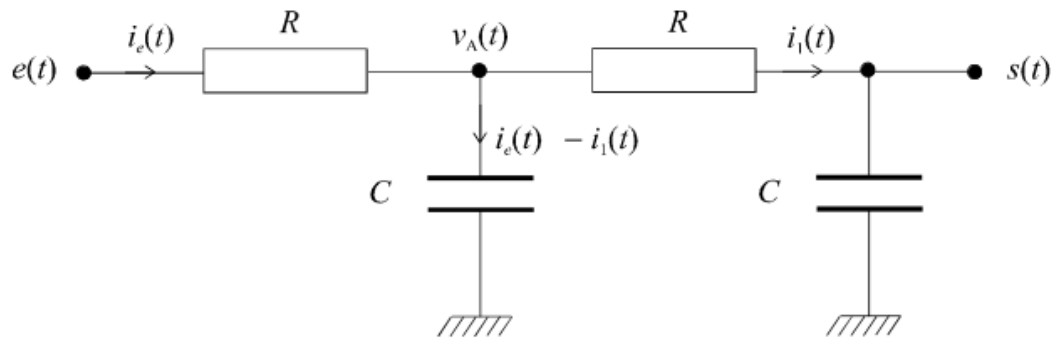
1- Trouver la fonction de transfert $X(p)$ puis $x(t)$

$$\begin{aligned}
 (p^2 X(p) - p - 0) + 5(p X(p) - 1) + 4X(p) &= \frac{1}{p+2} \\
 (p^2 + 5p + 4)X(p) &= \frac{1}{p+2} + p + 5 \\
 X(p) &= \frac{p^2 + 7p + 11}{(p+2)(p^2 + 5p + 4)} = \frac{p^2 + 7p + 11}{(p+2)(p+1)(p+4)} \\
 &= \frac{5/3}{p+1} + \frac{-1/2}{p+2} + \frac{-1/6}{p+4}
 \end{aligned}$$

$$x(t) = \left(\frac{5}{3} e^{-t} - \frac{e^{-2t}}{2} - \frac{e^{-4t}}{6} \right) \mathcal{U}(t)$$

Correction Exercice2 (06 points) :

On considère le montage électrique représenté sur la figure ci-dessous. On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon de tension de 0 à 5 V.



1-Déterminer l'équation différentielle qui lie $e(t)$ à la tension de sortie $s(t)$.

Appelons A le point commun aux deux résistances et $v_A(t)$ la tension en ce point. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit (figure 1.14) et appliquons la loi des nœuds au point A :

$$\frac{e - v_A}{R} = C \frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A - s}{R}$$

Par ailleurs, le courant $i_1(t)$ circulant dans le second condensateur, on peut écrire :

$$C \frac{ds}{dt} = \frac{v_A - s}{R}$$

Tirons de cette équation l'expression de la tension $v_A(t)$ et remplaçons celle-ci dans la première équation :

$$v_A = RC \frac{ds}{dt} + s(t)$$

$$e - RC \frac{ds}{dt} - s(t) = R^2 C^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 2RC \frac{ds}{dt}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle qui lie $s(t)$ à $e(t)$:

$$R^2 C^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + 3RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

2-En déduire la fonction de transfert du système $S(p)/E(p)$

La fonction de transfert est donc :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{R^2 C^2 p + 3RCp + 1}$$

3-Trouver le gain statique K , le coefficient d'amortissement ζ , et la pulsation propre ω_0 du Système en fonction de R et C :

$$K = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{1/R^2 C^2} = 1/RC$$

$$2\zeta\omega_0 = 3RC/R^2 C^2$$

$$\zeta = 3$$

Correction Exercice 3 : (06 points)

Soit le système asservis suivant:

$$G(p) = \frac{10K}{p(p+1)}$$

1. On s'impose une précision telle que la constante de vitesse $K_v=20 \text{ sec}^{-1}$; quelle est alors la valeur à donner à K .

$$K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p G(p) = 10K \Rightarrow K = 2$$

2. Pour cette valeur de K , tracer, à main levée, le diagramme de Bode.

