



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
PEOPLE'S DEMOCRATIC REPUBLIC OF ALGERIA
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
MINISTRY OF HIGHER EDUCATION AND SCIENTIFIC RESEARCH
جامعة عباس لغرور خنشلة
ABBES LAGHROUR- KHENCHELA UNIVERSITY



Faculty of Sciences and Technology

Department of Mathematics and Computer Science

N° de série :.....

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **Master**

Filière: **Mathématiques**

Spécialité: **Mathématiques Appliquées**

Intitulé par :

Résolution Numérique d'une Classe d'Équation Parabolique avec des Conditions aux Limites non Locales

Réalisé par : **ABABSA Nawal**

DERBAL Besma

Membres de jury :

Dr. ZAIDI Messaoud

Président

Dr. BRAHIMI Saadoun

Examineur

Prof. SAOUDI Khaled

Encadreur

Dr. CHATTOUH Abdeldjalil

Co-Encadreur

2021-2022

Remerciements

Nous remercions tout d'abord, ALLAH le tout puissant qui nous avoir donné la santé, la volonté, le courage et tous les moyens nécessaires pour réaliser ce mémoire.

Nous tenons à remercier vivement notre encadrant monsieur **Saoudi Khaled** professeur à l'université de Khenchela pour ses encouragements, sa disponibilité et son amitié. Également nous remercions notre co-encadrant monsieur **Chattouh Abdeldjalil** pour ses conseils précieux et pour toutes les commodités et aisances qu'il nous a apportées durant notre réalisation de ce projet.

Notre grands remerciements sont adressés aussi aux messieurs **Dr.ZAIDI MESSAOUD** et **Dr.BRAHIMI SAADOUN** pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant d'examiner notre travail.

Nous exprimons aussi notre gratitude à tous les professeurs et les enseignants qui nous guider a travers notre parcours, malgré leurs charge académiques et professionnelles.

Enfin, on remercie toutes les personnes qui nous ont aidées de près ou de loin pour l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Avant tout, merci à ALLAH qui m'a donné la force et la volonté pour accomplir ce travail.
Je dédie ce mémoire.

A mes chers parents, mon père et ma mère.

A mon frère.

A mes sœurs.

A ma tante "**Saida**", que ALLAH lui fasse miséricorde qui était fière de ma réussite et m'a encouragé tout au long de mon parcours universitaire.

A tout ce qui ma donné l'aide et l'encouragement de près ou de loin.

❖ "*Ababsa Nawal*"

Dédicaces

Je dédie ce travail :

A mon cher père,
pour son aide, soutien et son patience, cette aventure
n'aurait certainement pas existé sans vous !

A ma chère mère,
en témoignage de mon éternelle reconnaissance, que
dieu vous protégé et vous prête bonne santé et longue vie.

A mon frère,
qui a toujours me motivé même dans les moments de
doute, un grand merci pour ses encouragements et son
soutien moral.

A tous les gens qui m'aiment,
en témoignage de mon amour et de ma profonde
admiration.

"Besma Derbal"

Résumé

Le but de ce mémoire est d'approximer un problème aux limites non locales, concernant une équation d'advection-diffusion linéaire avec des conditions aux limites non locale de type de Dirichlet.

Nous proposons un algorithme de discrétisation totale (Spatiale & Temporelle) efficace et facile à mettre en œuvre pour la résolution numérique du problème considéré. Ce dernier est basé sur les méthodes spectrales pour la discrétisation spatiale secondé par un schéma de différences finies pour la discrétisation temporelle.

Enfin, quelques exemples numériques illustrant éventuellement l'efficacité de cette méthode.

Mots clés : Discrétisation Spatiale ; Discrétisation Temporelle ; Méthode de Différences Finies ; Méthodes Spectrale ; Équation d'Advection-Diffusion Linéaire ; Conditions aux Limites non Locales.

Abstract

The purpose of this memory is to approximate a non-local boundary problem, concerning a linear advection-diffusion equation with non-local boundary conditions of Dirichlet type.

We propose an effective and easy to implement total algorithm for a total discretization (Spatial & Temporal) for the numerical resolution of the considered problem. This latter is based on spectral methods for the spatial discretization followed by a finite difference scheme for the temporal discretization.

Finally, some numerical examples possibly illustrating the effectiveness of this method.

Keywords : Spatial Discretization ; Temporal Discretization ; Finite Difference Method ; Spectral Method ; Linear Advection-Diffusion Equation ; Non-Local Boundary Conditions.

ملخص:

الهدف من هذه المذكرة هو تقريب مسألة قطع مكافئ بشروط حدية غير محلية خاصة بمعادلة التآفق و الانتشار الخطية بشروط حدودية غير محلية من نوع ديريكلي .

تم اقتراح خوارزمية تقديرية كاملة (مكانية/زمنية) بسيطة و فعالة، ليتم تنفيذها من أجل الحل العددي للمسألة المدروسة و ذلك مستندا بطرق طيفية مدعومة بمخطط الفروق المحدودة.

أخيرا، ندعم المذكرة ببعض الأمثلة العددية قصد توضيح فعالية هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية: التقدير المكاني، التقدير الزمني، طرق الفروق المحدودة، الطرق الطيفية، معادلة التآفق و الانتشار الخطية، شروط الحدود الغير محلية .

Notations

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$:	Un domaine borné de dimension $n \geq 1$.
$\partial\Omega$:	Frontière du domaine Ω .
Λ	:	L'intervalle $(-1, 1)$.
$\bar{\Lambda}$:	L'adhérence de Λ .
$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$:	Un multi-indice.
$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$:	Laplacien de u .
$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n})^t$:	Gradient de u .
$D(\Omega)$ ou C_0^∞	:	L'espace des fonctions C^∞ sur Ω à support compact dans Ω .
$D'(\Omega)$:	L'espace des formes linéaire continues sur $D(\Omega)$ ou l'espace des distributions.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$:	Produit dualité .
(\cdot, \cdot)	:	Produit scalaire.
$L^2(\Omega)$	$:=$	$\{u : \Omega \mapsto \mathbb{R} \mid u \text{ mesurable ; } \int_\Omega u ^2 < \infty\}$.
$H^m(\Omega)$	$:=$	$\{u \in D'(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega); \alpha \leq m, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\}$.
P_N	:	Espace des polynômes de degré inférieur ou égale à N .
P_N^0	:	Espace des polynômes de degré inférieur ou égale à N qui s'annulent au bord.
$L_n(x)$:	Polynôme de Legendre.
$T_k(x)$:	Polynôme de Tchebychev.

Introduction

Depuis longtemps, la compréhension des phénomènes physiques a poussée de nombreux scientifiques à chercher un langage pour les traduire : C'est la modélisation mathématique.

Les modèles mathématiques sont présentés sous forme des équations aux dérivées partielles (EDP) de divers types avec des conditions aux bords qui reflètent en quelque sorte le processus modélisé en dehors du domaine considéré.

Parfois, les conditions aux limites ne donnent pas des informations sur la solution ponctuellement aux bords, mais, elles sont données sous forme d'une intégrale de la solution elle-même ou de ses dérivées, appelées conditions non locales [10, 11].

L'approximation numérique des problèmes avec des conditions aux limites non-locales est devenue récemment un sujet de recherche important [3, 8, 9], qui ait des applications dans des nombreux domaines de la physique et de la science moderne.

Dans notre travail, nous adoptons une approche numérique basée sur les méthodes spectrales, pour l'approximation de l'équation d'Advection-Diffusion avec des conditions aux limites de type Dirichlet non-locales. L'idée de base est de considérer les solutions approchées comme un développement en série tronqué de polynômes orthogonaux, appelées fonction de base, en particulier, les polynômes de Legendre et de Tchebychev.

Notre mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre, comporte quelques résultats préliminaires notamment d'analyse fonctionnelle, de plus, on rappelle les polynômes orthogonaux, en particulier, les polynômes de Legendre et de Tchebyshev, avec leurs propriétés.

Le second chapitre est consacré à la présentation des méthodes spectrales, telles que celles de Galerkin, de Galerkin-Tau et de Collocation.

Le troisième chapitre, but (centre) de notre mémoire, est destiné à l'approximation de l'équation d'Advection-Diffusion linéaire avec des conditions aux limites non locales de type Dirichlet, pour laquelle, on développe une méthode numérique qui consiste d'appliquer une discrétisation totale, où on implémente les méthodes spectrales (Galerkin-Tau & Collocation) pour la discrétisation partielle spatiale, et un schéma aux différences finies pour la discrétisation partielle temporelle.

Enfin, nous terminons notre étude par quelques exemples numériques illustrant l'efficacité et la fiabilité des méthodes utilisées.

En **Conclusion**, nous présentons quelques observations importantes et quelques perspectives possibles.

Table des matières

Remerciements	2
Dédicaces	2
Résumé	5
Abstract	6
Résumé (arabe)	7
Notations	8
Introduction	9
1 Notions de bases et Préliminaires	13
1.1 Espaces fonctionnelles	14
1.1.1 Espace de Hilbert	14
1.1.2 Notions des distributions	14
1.1.3 Espace de Sobolev	15
1.2 Certains concepts dans les EDP	16
1.2.1 Classification des EDP	16
1.2.2 Classification des conditions aux limites	17
1.3 La méthode de différences finies (MDF)	17
1.4 Les polynômes orthogonaux	18
1.4.1 Polynôme de Legendre	18
1.4.2 Les polynômes de Tchebychev	20
2 Méthodes spectrales pour les problèmes aux limites élliptiques	23
2.1 Le problème et la formulation variationnelle	24
2.2 Position du problème	24
2.3 Approche variationnelle	24

2.4	Principe des méthodes spectrales	26
2.4.1	Méthode de Legendre-Galerkin	28
2.4.2	Méthode spectrale de Legendre-Galerkin Tau	31
2.4.3	La méthode de Tchebychev-Collocation	33
3	Résolution de l'équation d'advection-diffusion avec des conditions aux limites non locale par les méthodes spectrales	36
3.1	Position de problème	37
3.1.1	Existence et unicités	37
3.2	Méthode de Legendre-Galerkin-Tau	38
3.2.1	Discrétisation spatiale	38
3.2.2	Discrétisation temporelle	40
3.3	Méthode de Collocation	41
3.3.1	Discrétisation spatiale	41
3.3.2	Discrétisation temporelle	44
3.4	Validation numérique	45
	Conclusion et perspectives	47
	Bibliographie	48

Chapitre 1

Notions de bases et Préliminaires

*L*e contenu de ce chapitre s'articule sur quelques notions de bases fondamentales d'analyse fonctionnelle, définitions élémentaires et théorèmes essentiels. Le choix étant réduit aux définitions et aux propriétés utilisées dans ce mémoire (voir [1, 2, 5, 13]).

1.1 Espaces fonctionnelles

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. Soit H un \mathbb{K} -espace vectoriel (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), un produit scalaire sur l'espace H est une application : $\varphi : H \times H \mapsto \mathbb{K}$ tel que :

- $\forall x \in H, \varphi(x, x) \geq 0$.
- $\forall x \in H, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \varphi(x + \lambda y, z) = \varphi(x, z) + \lambda \varphi(y, z)$.
- $\forall x, y \in H, \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$.

Définition 1.1.2. Un espace préhilbertien est un couple (H, φ) où H est un \mathbb{K} -espace vectoriel et φ un produit scalaire sur H muni de la norme induite par un produit scalaire

$$\forall x \in H, \|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Définition 1.1.3. Un espace vectoriel normé $(H, \|\cdot\|)$ sur \mathbb{K} est dit complet si les suites de Cauchy sont en fait convergentes dans H .

Définition 1.1.4. On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet.

Définition 1.1.5. Soit H un espace de Hilbert et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteur avec $I = [a, b]$ on dit que F est une famille totale si et seulement si l'ensemble des combinaisons linéaire finies des éléments de F est dense dans H .

1.1.2 Notions des distributions

Définition 1.1.6. On note $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω .
 $D(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp}(f) \text{ compact}, \text{supp}(f) \subset \Omega\}$.

Définition 1.1.7. On définit l'espace dual $D'(\Omega)$ l'espace des formes linéaires continues sur $D(\Omega)$ vers \mathbb{K} i.e :

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \mapsto \mathbb{K} \mid T \text{ linéaire, continue}\}.$$

Définition 1.1.8. Soit $T \in D'(\Omega)$, la dérivée de T notée par T' est une distribution définie par :

$$\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega),$$

plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$:

$$\langle T^{(\alpha)}, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle T, \varphi^{(\alpha)} \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

1.1.3 Espace de Sobolev

Définition 1.1.9. Soit Ω un ouvert bornée de \mathbb{R}^n , on définit l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ par :

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est muni de produit scalaire suivant :

$$\forall u, v \in H^m(\Omega), \quad (u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

et de norme associée :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Définition 1.1.10. On note par $H_0^m(\Omega)$, l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $(H^m(\Omega), \|\cdot\|_{H^m(\Omega)})$, en particulier, c'est le sous-espace fermée de $H^m(\Omega)$ défini par :

$$H_0^m(\Omega) = \{v \in H^m(\Omega) \mid \partial^{m-1} v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Cet espace est muni de produit scalaire :

$$\forall u, v \in H_0^m(\Omega), \quad (u, v)_{H_0^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

et de norme associée :

$$\|\cdot\|_{H_0^m(\Omega)} = \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}.$$

Proposition 1.1.1. Soit Ω est un ouvert bornée de \mathbb{R}^n . Pour toute fonction $u \in H_0^m(\Omega)$ il existe une constante positive $C_\Omega > 0$ dépendante de Ω telle que :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^m(\Omega)$$

Proposition 1.1.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de classe C^1 , et soient $u, v \in H^1(\Omega)$, alors pour tout $i = 1, \dots, n$ on a :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} u v n_i d\sigma,$$

où n_i désigne la i -ème composant de la normale extérieure unitaire \vec{n} à $\partial\Omega$.

Théorème 1.1.3 (Lax-Milgram). Soient H un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$, $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur H . Alors il existe unique

$u \in H$ tel que :

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

De plus, si $a(., .)$ symétrique alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - L(v) \right\}.$$

1.2 Certains concepts dans les EDP

Soit $u = u(x, y, \dots)$ une fonction de plusieurs variables, une équation aux dérivées partielles pour la fonction u (EDP) est une relation qui lie les variables indépendants (x, y, \dots) , la fonction inconnue u et un nombre finie des dérivées partielles de u . Si u est une fonction de deux variables, un EDP peut s'écrire par la relation :

$$F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^3}, \dots\right) = 0$$

- ❖ On appelle ordre de l'EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP .
- ❖ L'EDP est dite linéaire si F est linéaire par rapport à ses arguments u et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de (x, y) ; sinon elle est non linéaire (le lecteur peut consulter [15, 16] pour plus de détails).

1.2.1 Classification des EDP

On considère la forme générale d'une EDP d'ordre 2 :

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

Où A, B, C, D, E, F et G sont considérés pour simplifier.

Le type de l'EDP dépend de signe de $B^2 - 4AC$:

Si : $B^2 - 4AC < 0$, alors l'EDP est dit **Elliptique**.

Si : $B^2 - 4AC = 0$, alors l'EDP est dit **Parabolique**.

Si : $B^2 - 4AC > 0$, alors l'EDP est dit **Hyperbolique**.

-Les équations de type **elliptique** interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c'est-à-dire n'évoluant pas au cours du temps). La plus connue des ces équations est l'équation de poisson

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

-Les équations de type **parabolique** modélisent l'évolution transitoire de phénomènes irréversibles associés à des processus de diffusion, par exemple, l'équation de diffusion de la chaleur

$$\partial_t u(x, t) - k^2 \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

- Pour les équations **hyperbolique**, elles modélisent le plus souvent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. Les exemples classiques sont l'équation d'advection ou de transport.

$$\partial_t^2 u(x, t) + a \partial_x^2 u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T).$$

1.2.2 Classification des conditions aux limites

Les conditions aux limites sont des contraintes sur les valeurs que prennent les solutions des EDPs sur une frontière. Il existe un grand nombre des conditions aux limites possibles en fonction de la formulation du problème et de la nature de l'équation, on définit dans cette partie les conditions aux limites les plus connues :

► **Condition de Dirichlet** : est imposée à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières du domaine, par exemple $-\Delta u = f$ sur Ω , la condition aux limites de Dirichlet sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par $u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$ où g est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$.

► **Condition de Neumann** : est imposée à une équation aux dérivées partielles lorsque l'on spécifie les valeurs que la solution doit vérifier sur les frontières du domaine, par exemple $-\Delta u = f$ sur Ω , la condition aux limites de Neumann sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ s'exprime par : $\frac{\partial u(x)}{\partial \vec{n}} = g(x), \quad \forall x \in \partial\Omega$ où g est une fonction connue définie sur la frontière $\partial\Omega$ et \vec{n} est le vecteur normale à la frontière $\partial\Omega$.

► **Condition de Robin** : il s'agit d'une relation linéaire entre les valeurs de la fonction et les valeurs de la dérivée de la fonction sur le bord du domaine, par exemple en dimension un, si $\Omega = [-1, 1]$ les conditions de Robin s'écrivent sous la forme :

$$au(-1) - bu'(-1) = g(-1),$$

$$au(1) + bu(1) = g(1) \text{ où } a, b, g \text{ sont des fonction connues définies sur } \partial\Omega.$$

► **Conditions aux limites non locales** : les conditions aux limites non locales peuvent être utilisées quand il est impossible de mesurer directement la quantité recherchée sur la frontière. Plus précisément, les conditions standards de type Dirichlet, Neumann et Robin qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours adéquates à mesure qu'elles dépendent du contexte physique dont les informations peuvent être mesurées sur la frontière du domaine physique, par exemple la condition $u(1) = u(s)$ où $s \in (0, 1)$ est une condition non locale de type Dirichlet, $u'(1) = u(s)$ où $s \in (0, 1)$ est une condition non locale de type Neumann.

1.3 La méthode de différences finies (MDF)

La méthode de différences finies est une technique numérique utilisée pour la discrétisation des équations différentielles (ODEs) où les équations aux dérivées partielles (EDPs).

Principe générale

L'idée fondamentale de la méthode des différences finies consiste à résoudre un système des fonctions inconnues en certains point suffisamment proches les unes des autres. Cette approche permet de développer des schémas par remplacer les dérivées dans les (EDPs) pour pouvoir envisager une solution numérique.

Soit U une fonction inconnue qui est définie pour les variables (x, t) . Selon la définition d'une dérivée nous avons :

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x, t+h) - U(x, t)}{h},$$

tel que h est le pas de discrétisation temporelle.

On définit le maillage $G_h = \{(x, t_i) \mid t_i = ih, \forall i \in \mathbb{N}\}$. On note par U_i et U'_i les valeurs approximatives de $U(t_i)$ et $\partial_x U(t_i)$ au point $t_i \in G_h$, respectivement. Pour obtenir un problème discret on remplace les dérivées partielles par des différences finies, ainsi :

$$\begin{aligned} -U'_i &= \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=t_i} \simeq \frac{U_{i+1} - U_i}{h}, & \text{(différence finie progressive);} \\ -U'_i &= \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=t_i} \simeq \frac{U_i - U_{i-1}}{h}, & \text{(différence finie rétrograd);} \\ -U'_i &= \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=t_i} \simeq \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{h}, & \text{(différence finie centrée);} \end{aligned}$$

1.4 Les polynômes orthogonaux

Définition 1.4.1. Soit $w : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ une fonction strictement positive telle que $\int_{\Omega} |x|^n w(x) dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est absolument convergente, la fonction w est appelée fonction de poids.

Définition 1.4.2. Les polynômes orthogonaux par rapport à la fonction de poids w sont des polynômes P_n de degré n vérifiant la relation d'orthogonalité

$$(P_n, P_m) = \int_{\Omega} P_n(x) P_m(x) w(x) dx = 0, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad n \neq m.$$

1.4.1 Polynôme de Legendre

Les Polynômes de Legendre définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec la fonction de poids $w(x) = 1$, notés par L_n . Ces polynômes sont définis de différentes manières.

► **Formule de Rodrigues :**

$$L_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n.$$

► **La relation de récurrence à trois termes :**

$$\begin{cases} L_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} L_k(x) - \frac{k}{k+1} x L_{k-1}(x), & k \geq 2, \quad x \in [-1, 1], \\ L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x. \end{cases}$$

► Relation d'orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases}$$

► Équation différentielle :

Les polynômes de Legendre sont des solutions de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

► Majoration :

$$\forall x \in (-1, 1), \quad |L_n(x)| \leq 1.$$

$$\forall x \in (-1, 1), \quad |L'_n(x)| \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

► Symétrie :

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x),$$

$$\text{on particulier : } L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n.$$

► La relation de récurrence dérivées :

$$(2n + 1)L_n(x) = L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

$$(1 - x^2)L'_n(x) = \frac{n(n + 1)}{2n + 1}(L_{n-1}(x) - L_{n+1}(x)).$$

► Différentiation

Soit u une fonction admettant le développement

$$u_N(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{u}_k L_k(x),$$

alors sa dérivée peut être donnée par :

$$u_N^{(1)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \tilde{u}_k^{(1)} L_k(x),$$

avec :

$$\tilde{u}_m^{(1)} = (2m + 1) \sum_{p=m+1}^{\infty} \tilde{u}_p$$

$p=m+1_{p+m \text{ impair}}$

Soit N un entier et $u_N = P_N u$ la troncature à l'ordre N de son développement en série de Legendre.

On note :

$$U_N^{(1)} = D^{(1)}U_N,$$

$$[D^{(1)}]_{m,n} = (L_m, L_n^{(1)}),$$

$$U_N^{(1)} = (\tilde{u}_0^{(1)}, \tilde{u}_1^{(1)}, \dots, \tilde{u}_N^{(1)})^t,$$

$$U_N = (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_N)^t.$$

$D^{(1)}$ est la matrice de dérivation première dont les coefficients non nuls sont donnés par :

$$D_{m,n}^{(1)} = (2m + 1), \text{ avec } m - n + 1 \leq 0 \text{ et pair.}$$

De même pour la matrice de dérivation seconde dont les coefficients non nuls sont donnés par :

$$D_{m,n}^{(2)} = \frac{2m+1}{2}[n(n + 1) - m(m + 1)], \text{ avec } m - n + 2 \leq 0 \text{ et pair.}$$

Il existe des relations de récurrence pour déterminer $\tilde{u}_m^{(2)}$:

$$\tilde{u}_m^{(2)} = (m + \frac{1}{2}) \sum_{p=m+2}^{\infty} [p(p+1) - m(m+1)] \tilde{u}_p, \quad m \geq 0.$$

Remarque 1.4.1. Les polynôme $L_n(x)$ de Legendre forment un sous espace dense dans l'espace des fonction sur continues sur $[-1, 1]$. Par conséquent, la famille $\{L_n\}_{n=0}^N$ des polynômes de Legendre est une famille totale de l'espace $L^2(-1, 1)$, alors pour u une fonction dans $L^2(-1, 1)$ on peut s'écrire comme une combinaison linéaire des polynômes de Legendre comme suit :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{u}_k L_k(x), \quad tq : \quad \tilde{u}_k = (k + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 u(x) L_k(x) dx.$$

Lemme 1.4.1. Pour $k \geq 0$, $\exists \{a_k, b_k\}$ tel que :

$$\phi_k(x) = L_k(x) + a_k L_{k+1}(x) + b_k L_{k+2}(x),$$

satisfaisant les conditions aux bords homogènes de type Dirichlet ou Neumann.

Remarque 1.4.2. Dans notre étude on considère des conditions aux limites homogènes de types Dirichlet, alors :

$$a_k = 0 ; b_k = -1. \text{ D'où, on obtient : } \phi_k(x) = L_k(x) - L_{k+2}(x).$$

Corollaire 1.4.1. Pour $k \geq 0$, on a :

$$\phi'_k(x) = -(2k + 3)L_{k+1}(x).$$

Lemme 1.4.2. Soient $k, j \in \mathbb{N}$

$$m_{k,j} = m_{j,k} = (\phi_k, \phi_j) = \int_{-1}^1 \phi_k(x) \phi_j(x) dx,$$

$$c_{k,j} = c_{j,k} = (\phi'_k, \phi'_j) = \int_{-1}^1 \phi'_k(x) \phi'_j(x) dx.$$

Alors, pour tout $0 \leq j, k \leq N - 2$:

$$m_{k,j} = m_{j,k} = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+5}, & j = k, \\ -\frac{2}{2k+5}, & j = k \pm 2, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad s_{k,j} = s_{j,k} = \begin{cases} 4k + 6, & \text{si } k = j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 1.4.3. La preuve de cette lemme est basée sur le lemme(1.3.1), le corollaire(1.3.1) et les propriété des polynômes de Legendre.

1.4.2 Les polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev de première espèce sont définis sur $[-1, 1]$ par rapport à la fonction de poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et sont notés habituellement par $T_k(x)$ où k désigne le degré du polynôme $T_k(x)$.

► Formulation explicite :

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

► Formulation récurrence :

$$\begin{cases} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), & k \geq 1, \quad x \in [-1, 1], \\ T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x. \end{cases}$$

► Équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad y = T_k(x).$$

► Orthogonalité : Les polynômes de Tchebychev sont vérifiés la relation d'orthogonalité :

$$(T_j, T_k)_w = \frac{\pi}{2} c_k \delta_{j,k}, \quad i, k \in \mathbb{N},$$

telles que les constantes $(c_k)_k$ étant définies par :

$$c_0 = 2, \quad c_k = 1 \quad k \geq 1.$$

► Quelques propriétés des polynômes de Tchebychev :

$$-T_k(-x) = (-1)^k T_k.$$

$$-T_k(\pm 1) = (\pm 1)^k.$$

$$-\left(\frac{dT_k}{dx}\right)(\pm 1) = (\pm 1)^{k+1} k^2.$$

$$-2T_k(x) = \frac{1}{k+1} T'_{k+1}(x) - \frac{1}{k-1} T'_{k-1}(x), \quad k \geq 2.$$

► Série de Tchebychev

Tout fonction $f \in L_w^2(\Omega)$ peut être développer en série de Tchebychev :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k T_k(x), \quad \tilde{f}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) w(x) dx.$$

► Différentiation :

Notons $u_N = P_N u$ la troncature à l'ordre N de son développement en série de Tchebyshev :

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k T_k(x),$$

alors :

$$u_N^{(1)}(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k T_k'(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{(1)} T_k(x).$$

Nous allons exprimer les coefficients de la dérivée en fonction de ceux de u_N

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m^{(1)} &= (u_N^{(1)}, T_m)_w = \left(\sum_{n=0}^N \tilde{u}_n^{(1)} T_n, T_m \right)_w, \\ &= \left(\sum_{n=0}^N \tilde{u}_n T_n', T_m \right)_w = \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n (T_n', T_m)_w. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$U_N^{(1)} = D^{(1)}U_N, \quad ; \quad D_{m,n}^{(1)} = (T_m, T_n^{(1)})_w,$$

$$U_N^{(1)} = (\tilde{u}_0^{(1)}, \dots, \tilde{u}_N^{(1)})^t, \quad \text{et} \quad U_N = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_N)^t,$$

$D^{(1)}$ est la matrice de dérivation première dont les coefficients non nuls sont donnés par :

$$D_{m,n}^{(1)} = \frac{2n}{c_m}, \quad \text{avec } m - n + 1 \leq 0 \text{ et pair.}$$

où $c_0 = c_N = 2$ et $c_m = 1$ pour $1 \leq m \leq N - 1$.

De même, pour la second dérivée :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_m^{(2)} &= (u_N^{(2)}, T_m)_w = \left(\sum_{n=0}^N \tilde{u}_n^{(2)} T_n, T_m \right)_w \\ &= \left(\sum_{n=0}^N \tilde{u}_n T_n'', T_m \right)_w = \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n (T_n'', T_m)_w. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$U_N^{(2)} = D^{(2)}U_N, \quad D_{m,n}^{(2)} = (T_m, T_n'')_w$$

$$U_N^{(2)} = (\tilde{u}_0^{(2)}, \dots, \tilde{u}_N^{(2)})^t, \quad \text{et} \quad U_N = (\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_N)^t.$$

$D^{(2)}$ est la matrice de dérivation seconde dont les coefficients non nuls sont donnée par .

$$D_{m,n}^{(2)} = \frac{n}{c_m} (n^2 - m^2), \quad \text{avec } m - n + 1 \leq 0 \text{ et pair.}$$

Chapitre 2

Méthodes spectrales pour les problèmes aux limites élliptiques

Le but de ce chapitre est de donner un aperçus sur les méthodes spectrales en tant que classe des techniques pour la discrétisation des équations différentielles, ou on expose la formulation intrinsèque de ces méthodes et leur application pratique pour la résolution numérique des problèmes aux limites elliptiques.

2.1 Le problème et la formulation variationnelle

2.2 Position du problème

Présentons d'abord le problème aux limites que nous allons résoudre. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$ de frontière $\partial\Omega$ assez régulière, f est une fonction de $L^2(\Omega)$ et g est la trace sur $\partial\Omega$ d'un élément $u_0 \in H^1(\Omega)$.

On considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

Le changement d'inconnue $u \rightarrow u - u_0$ et de donnée $f \rightarrow f - \Delta u_0 + \lambda u_0$ permet de se ramener au problème de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

2.3 Approche variationnelle

L'approximation des équations aux dérivées partielles pose naturellement plusieurs questions. La principale question est celle de l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation que l'on souhaite à résoudre. L'approche que nous allons suivre est appelée approche variationnelle. L'intérêt de cette approche dépasse le cadre théorique des équations aux dérivées partielles elliptiques ou évolution. En effet, elle sera cruciale pour construire la méthode numérique "spectrale de Galerkin" que nous allons voir.

Le principe de l'approche variationnelle [14] pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente dite variationnelle obtenue par l'intégration de l'équation multipliée par une fonction test. En d'autre terme, il s'agit de trouver une forme bilinéaire $A(\cdot, \cdot)$, une forme linéaire $L(\cdot)$ et un espace de Hilbert V tel que (2.2) équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ A(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Dans ce but, on multiplie l'équation (2.2) par une fonction test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on intègre sur Ω , et à l'aide de la formule de Green on trouve

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}(s) v(s) ds + \lambda \int_{\Omega} u(x) v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) dx. \quad (2.3)$$

Comme $u \in V$ doit satisfaire les conditions aux limites Dirichlet, on choisit l'espace V de sorte que la fonction test s'annule sur le bord $\partial\Omega$. Dans ce cas, l'équation (2.3) s'écrit

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \lambda \int_{\Omega} u(x)v(x) dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \quad (2.4)$$

Pour que le premier terme à gauche de (2.4) ait un sens, il suffit que ∇u et ∇v appartienne à $L^2(\Omega)$, et pour que le terme à droite de (2.4) ait un sens il suffit que $v \in L^2(\Omega)$ sachant que on a déjà supposé que $f \in L^2(\Omega)$.

Par conséquent, un choix adéquat à ces conditions sur l'espace V est de prendre $V = H_0^1(\Omega)$. Donc la formulation variationnelle du problème (2.2) se reformule comme suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ A(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (2.5)$$

avec

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \lambda \int_{\Omega} u(x)v(x) dx, \\ L(v) &= \int_{\Omega} f(x)v(x) dx. \end{aligned}$$

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème variationnelle (2.5).

Théorème 2.3.1. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Supposons que $f \in L^2(\Omega)$. Il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (2.5).*

Démonstration. L'existence et l'unicité de la solution pour le problème variationnelle (2.5) est obtenue grâce au théorème de Lax-Milgram. En effet, on voit facilement en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la fonctionnelle $A(\cdot, \cdot)$ est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et que $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. De plus, en vertu de l'inégalité de Poincaré la forme bilinéaire $A(\cdot, \cdot)$ est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$A(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Comme $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, alors toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont satisfaites et on peut donc conclure qu'il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ de la formulation variationnelle (2.5). □

Il faut signaler que la solution de (2.5) est aussi une solution de (2.2) sous quelques hypothèses sur la régularité de solution u . En effet, si l'on suppose que la solution de la formulation variationnelle

(2.5) suffisamment régulière, par exemple $u \in H^2(\Omega)$, et que l'ouvert Ω est de classe \mathcal{C}^1 , utilisons la formule de Green en prenant en compte que $v \in H_0^1(\Omega)$ pour avoir

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} \Delta u v dx.$$

Puisque $\overline{\mathcal{D}(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, on en déduit alors

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + \lambda u - f) v dx = 0, \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ce qui implique que

$$-\Delta u + \lambda u = f, \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

De plus, puisque Ω est un ouvert borné supposé régulier de classe \mathcal{C}^1 alors, d'après le théorème de trace, $u \in H_0^1(\Omega)$ a une trace nulle sur $\partial\Omega$ dans $L^2(\Omega)$, à savoir,

$$u = 0, \quad \text{presque partout dans } \partial\Omega.$$

On a donc bien retrouvé l'équation et la condition aux limites de (2.2).

2.4 Principe des méthodes spectrales

Les méthodes spectrales [6, 7] sont une classe de techniques utilisées pour obtenir des solutions approchées pour les équations aux dérivées partielles. L'idée est d'écrire la solution de l'équation différentielle comme une somme de certaines *fonctions de base*, notamment les polynômes orthogonaux, puis de choisir déterminer les coefficients de la somme afin de satisfaire l'équation différentielle aussi bien que possible.

Afin d'exposer la procédure de construire une approximation en utilisant les méthodes spectrales, on considère le problème aux limites elliptique (2.1) comme un modèle d'étude.

Le point de départ des méthodes spectrales est d'approximer la solution u de (2.1) par une solution approchée u_N qui peut s'exprimer sous forme d'une série tronquée

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \phi_k(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

où $\{\phi_k\}_{k=0}^N$ sont les fonctions de base de l'espace d'approximation dans lequel on cherche la solution approchée u_N , et les coefficients $\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^N$ sont à déterminer. La substitution de u_N à u dans l'équation

conduit au résidu

$$\mathbf{R}_N(x) = -\Delta u_N(x) + \lambda u_N(x) - f(x).$$

L'idée de base pour déterminer les coefficients $\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^N$ est de rendre le résidu \mathbf{R}_N le plus petit possible en exigeant que, soit

$$(\mathbf{R}_N, \psi_i)_\omega := \int_{\Omega} \mathbf{R}_N(x) \psi_i(x) \omega(x) dx = 0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.6)$$

où $\{\psi_i\}_{i=0}^N$ sont les fonctions de test, et ω est une fonction de poids positive, ou bien soit

$$\langle \mathbf{R}_N, \psi_i \rangle_{\omega, N} := \sum_{k=0}^N \mathbf{R}_N(x_k) \psi_i(x_k) \omega_k = 0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.7)$$

où $\{x_k\}_{k=0}^N$ et ω_k sont un ensemble de points de collocation et des poids correspondants à une formule de quadrature numérique, respectivement.

Le choix des fonctions de base/test ne se fait pas d'une façon arbitraire. En fait, ce choix est dépend pratiquement de plusieurs paramètres à prendre en considération dès la formulation du problème (par exemple les conditions aux bords). Les fonctions de base / test les plus couramment utilisées sont les polynômes trigonométriques et les polynômes orthogonaux qui comprennent les polynômes de Tchebychev et les polynômes de Legendre.

Selon le choix des fonctions de base/test il y'a en générale trois approches pour construire une méthode numérique qui sont :

- **Méthode de Galerkin** : Les fonctions de test sont les mêmes que celles de base (i.e., $\phi_i = \psi_i$ dans (2.6)), en supposant que les conditions aux limites sont périodiques ou homogènes. De plus, les fonctions de doivent satisfaire les conditions aux limites.
- **Méthode de Collocation** : Les fonctions de test $\{\psi_i\}_{i=0}^N$ dans (2.4.2) sont les polynômes d'interpolation de Lagrange, correspondants aux points $\{x_k\}_{k=0}^N$ dits de Collocation, vérifiant $\psi_i(x_k) = \delta_{k,i}$. Par conséquent, le résidu est forcé à s'annuler aux points $\{x_k\}_{k=0}^N$, c'est-à-dire $R_N(x_k) = 0, \quad 0 \leq k \leq N$.
- **Méthode de Galerkin-Tau** : Les fonctions de test sont différentes de celles de base.

Remarque 2.4.1. *Dans la littérature, le terme de méthode pseudo-spectrale est souvent utilisé pour décrire toute méthode spectrale où certaines opérations impliquent une approche de Collocation ou une quadrature numérique.*

Remarque 2.4.2. *La méthode dite Galerkin-Tau est une classe particulière de la méthode de Petrov-Galerkin.*

Dans la prochaine section, nous allons exposer la façons de construire des méthodes spectrales pour résoudre des équations différentielles en examinant plusieurs schémas spectraux basés sur les formulations

de Galerkin, Galerkin-Tau et de Collocation. Pour une simple exposition, on se place dans toute la suite dans le cas uni-dimensionnel. Donc le problème générale (2.1) se reformule comme suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in \Lambda, \\ u(-1) = a, \quad u(1) = b, \end{cases} \quad (2.8)$$

où Λ désigne l'intervalle $(-1, 1)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ et f est une fonction de carré intégrable sur Λ .

2.4.1 Méthode de Legendre-Galerkin

Sans perte de généralité, on considère (2.8) avec $a = b = 0$. Les conditions aux limites non-homogènes peuvent être facilement manipulées en considérant $v = u - \bar{u}$, où \bar{u} est une fonction vérifiant les conditions aux limites non-homogènes.

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in \Lambda, \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

En écrivant la formulation variationnelle, on obtient un problème de la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Lambda) \text{ tel que :} \\ A(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Lambda), \end{cases} \quad (2.10)$$

avec :

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \int_{-1}^1 u'(x)v'(x)dx + \lambda \int_{-1}^1 u(x)v(x)dx, \\ L(v) &= \int_{-1}^1 f(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

La méthode de Galerkin pour résoudre (2.9) consiste à choisir d'abord un sous-espace d'approximation de dimension finie, à le noter $V_N(\Lambda) \subset H_0^1(\Lambda)$, des approximants possibles de la solution exacte u , ensuite on cherche à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_N \in V_N(\Lambda) \text{ tel que :} \\ A(u_N, v) = L(v), \quad \forall v \in V_N(\Lambda). \end{cases} \quad (2.11)$$

Définissons l'espace :

$$V_N(\Lambda) = P_N(\Lambda) \cap H_0^1(\Lambda),$$

où $P_N(\Lambda)$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égale à N . $V_N(\Lambda)$ étant de dimension finie

(plus précisément $\dim V_N = N - 1$), donc c'est un fermé de l'espace $H_0^1(\Lambda)$ qui est de Hilbert, d'où l'existence d'une unique solution u_N est assuré d'après le théorème de Lax-Milgram.

Passons à caractériser l'espace $V_N(\Lambda)$. Soit L_k le polynôme de Legendre d'ordre $k \in \mathbb{N}$, on définit [17, 19]

$$\phi_k(x) = L_k(x) - L_{k+2}(x), \quad x \in [-1, 1], \quad 0 \leq k \leq N.$$

L'ensemble $\{\phi_k\}_{k=0}^{N-2}$ est constitué de $(N - 1)$ éléments linéairements indépendants, et par suite il forme une base de V_N . Alors, on peut décomposer la solution u_N sur cette base :

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N-2} \tilde{u}_k \phi_k(x), \quad x \in \bar{\Lambda}.$$

En remplaçant l'expression de u_N donnée par la formule au-dessus dans la formulation variationnelle d'approximation (2.11) et en prenant $v = \phi_j$ comme fonctions test pour $0 \leq j \leq N - 2$, il résulte :

$$\sum_{k=0}^{N-2} \tilde{u}_k \int_{-1}^1 \phi'_k(x) \phi'_j(x) dx + \lambda \sum_{k=0}^{N-2} \tilde{u}_k \int_{-1}^1 \phi_k(x) \phi_j(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) \phi_j(x) dx, \quad 0 \leq j \leq N - 2. \quad (2.12)$$

On adopte les notations

$$m_{k,j} = \int_{-1}^1 \phi'_k(x) \phi'_j(x) dx, \quad s_{k,j} = \int_{-1}^1 \phi_k(x) \phi_j(x) dx, \quad f_j = \int_{-1}^1 f(x) \phi_j(x) dx,$$

d'où (2.12) s'écrit sous forme simple

$$\sum_{k=0}^{N-2} \tilde{u}_k m_{k,j} + \lambda \sum_{k=0}^{N-2} \tilde{u}_k s_{k,j} = f_j, \quad 0 \leq j \leq N - 2.$$

Finalement, la discrétisation du problème (2.9) par la méthode de Legendre-Galerkin se conduit à la résolution du système linéaire de $(N - 1)$ équations algébriques suivant :

$$(\mathbf{M} + \lambda \mathbf{S}) \mathbf{U} = \mathbf{F},$$

tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [m_{k,j}]_{(N-2) \times (N-2)}, & \mathbf{S} &= [s_{k,j}]_{(N-2) \times (N-2)}, \\ \mathbf{F} &= (f_0, f_1, \dots, f_{N-2})^t, & \mathbf{U} &= (\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_{N-2})^t. \end{aligned}$$

Les éléments des matrices \mathbf{M} et \mathbf{S} sont donnés explicitement par Lemme (1.3.1), de plus chaque composante f_i de \mathbf{F} peut être calculer à l'aide d'une méthode d'intégration numérique.

Exemple 2.4.1. Pour l'application numérique, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + \pi^2 u(x) = (x^2 - 4x - 3)e^x, & -1 < x < 1, \\ u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

où la solution exacte est donnée par $u^*(x) = (x^2 - 1)e^x$.

Au cours de ce test numérique, on choisit le degré polynomial N égal à 8. Les résultats numériques sont reportés dans le Tableau (2.1).

TABLE 2.1 – Résultats numériques pour l'exemple (2.4.1)

x_i	$u^*(x_i)$	$u_N(x_i)$	Erreur
0	-1.000000	-1.000002	5.7541 e-005
0.1	-1.094119	-1.094119	3.0297 e-004
0.2	-1.172546	-1.172546	3.2927 e-004
0.3	-1.228371	-1.228370	1.2030 e-004
0.4	-1.253132	-1.253131	1.6948 e-004
0.5	-1.236540	-1.236537	3.1183 e-004
0.6	-1.166156	-1.166156	1.7563 e-004
0.7	-1.027013	-1.027014	1.2515 e-004
0.8	-0.801194	-0.801196	2.4833 e-004
0.9	-0.467324	-0.467327	3.1682 e-005
1.0	0.000000	-0.000001	1.1102 e-005

De plus les profiles de la solution exacte u et la solution approchée u_N ainsi que l'erreur $e_N = |u^* - u_N|$ sont montrés dans la Figure (2.1).

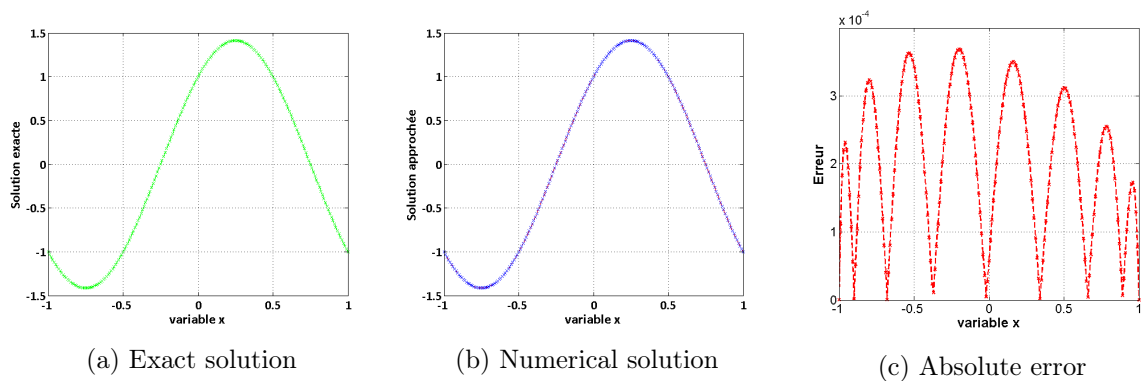


FIGURE 2.1 – Les profiles de la solution exacte, solution approchée pour $N = 8$ et l'erreur absolue.

2.4.2 Méthode spectrale de Legendre-Galerkin Tau

L'approche Galerkin-Tau, introduite initialement par **C. Lanzas**, est une variation de la méthode de Galerkin avec quelques modifications. La méthode Galerkin-Tau est applicable aux problèmes avec des conditions aux limites non-homogènes. Dans la méthode Galerkin-Tau, on cherche toujours les solutions $u_N \in V_N(\Lambda)$. Cependant, on ne projette pas le résidu sur l'espace $V_N(\Lambda)$ mais plutôt sur l'espace polynomial $P_{N-k}(\Lambda)$, où k est le nombre des conditions aux limites, pour obtenir un système algébrique de $(N - k)$ équations avec N inconnus, et compléter ce système par k équations résultantes de l'utilisation des conditions aux limites. Pour illustrer cette procédure, on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & \forall x \in \Lambda, \\ u(-1) = a, & u(1) = b. \end{cases}$$

Pour obtenir une approximation numérique de u , on prend comme espace d'approximation $V_N(\Lambda)$ l'espace $P_N(\Lambda)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à N . On cherche à résoudre le problème approché

$$\begin{cases} -u_N''(x) + \lambda u_N(x) = f(x), & \forall x \in \Lambda, \\ u_N(-1) = a, & u_N(1) = b. \end{cases}$$

On définit :

$$\phi_k(x) = \begin{cases} L_k(x) - L_{k+2}(x), & 0 \leq k \leq N - 2, \\ \frac{1}{2}(L_0(x) + L_1(x)), & k = N - 1, \\ \frac{1}{2}(L_0(x) - L_1(x)), & k = N. \end{cases} \quad (2.13)$$

L'ensemble $\{\phi_k\}_{k=0}^N$ est constitué de $(N + 1)$ polynômes linéairements indépendants, donc il forme une base pour l'espace $V_N(\Lambda)$. Alors, on peut décomposer u_N sur cette base :

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \phi_k(x), \quad x \in \Lambda. \quad (2.14)$$

Pour déterminer les coefficients inconnus $\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^N$, on construit $(N - 1)$ équations en exigeant que le résidu défini par la formule (2.6) soit orthogonal à $\{\phi_j\}_{j=0}^{N-2}$, i.e :

$$\int_{-1}^1 \left(-\sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \phi_k''(x) + \lambda \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k \phi_k(x) - f(x) \right) \phi_j(x) dx = 0, \quad 0 \leq j \leq N - 2,$$

TABLE 2.2 – Résultats numériques pour l'exemple (2.4.2)

x_i	$u^*(x_i)$	$u_N(x_i)$	Erreur
0	1.0000	0.9999	5.7541 e-005
0.1	1.2601	1.2598	3.0297 e-004
0.2	1.3968	1.3965	3.2927 e-004
0.3	1.3968	1.3967	1.2030 e-004
0.4	1.2601	1.2602	1.6948 e-004
0.5	1.0000	1.0003	3.1183 e-004
0.6	0.6420	0.6422	1.7563 e-004
0.7	0.2212	0.2211	1.2515 e-004
0.8	-0.2212	-0.2214	2.4833 e-004
0.9	-0.6420	-0.6420	3.1682 e-005
1.0	-1.0000	-1.0000	1.1102 e-016

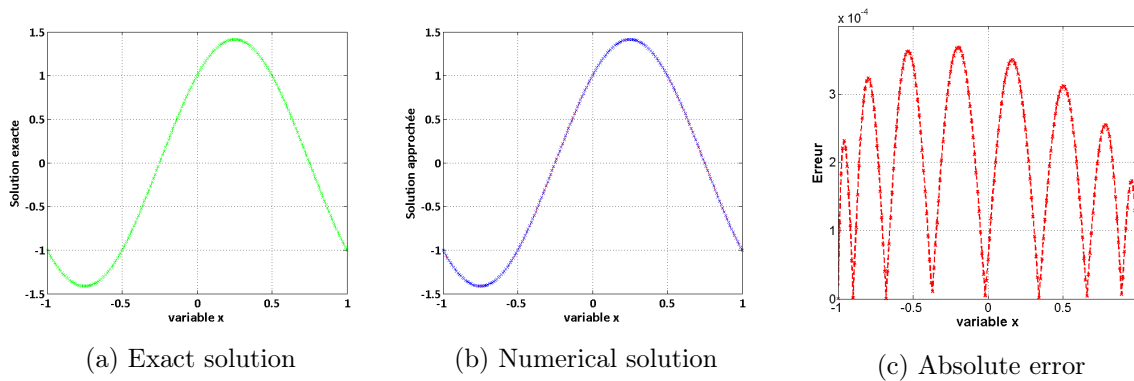


FIGURE 2.2 – Les profils de la solution exacte, solution approchée pour $N = 8$ et l'erreur absolue.

Au cours de ce test numérique, on choisit le degré polynomial N égal à 8. Les résultats numériques sont reportés dans le Tableau (2.2). De plus les profils de la solution exacte u et la solution approchée u_N ainsi que l'erreur $e_N = |u^* - u_N|$ sont montrés dans la Figure (2.2).

2.4.3 La méthode de Tchebychev-Collocation

On considère à nouveau le problème :

$$\begin{cases} -u''(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in \Lambda, \\ u(-1) = a, & u(1) = b. \end{cases} \quad (2.19)$$

Dans la méthode de collocation [4, 12], le résidu est forcé à s'annuler judicieusement à un ensemble de points, dite de collocation $\{x_j\}_{j=0}^N$ (avec $x_0 = -1$ et $x_N = 1$), généralement choisi les points de Gauss-Lobatto. La méthode de collocation spectrale pour (2.19) revient à trouver $u_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$ tel que le résidu $\mathbf{R}_N(x_j) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq N - 1$. D'une façon équivalente

$$R_N(x_j) = -u_N''(x_j) + \lambda u_N(x_j) - f(x_j) = 0, \quad 1 \leq j \leq N - 1,$$

u_N satisfait exactement les conditions aux limites, i.e.,

$$u_N(x_0) = a, \quad u_N(x_N) = b.$$

Sachant que l'ensemble des polynômes de Tchebyshev $\{T_k\}_{k=0}^N$ forme une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$, alors la solution approchée s'écrit

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k T_k(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

une autre forme de u_N est donnée par :

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N u_N(x_k) \psi_k(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

où ψ_k sont les polynômes d'interpolation de Lagrange associés aux points $\{x_j\}_{j=0}^N$ vérifiant $\psi_k(x_j) = \delta_{k,j}$. Etant les points de collocation au les noeuds de Tchebyshev-Gauss-Lobatto donnée par la formule suivantes :

$$\left\{ x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) \right\}_{j=0}^N.$$

Donc les polynômes ψ_k sont définis explicitement en terme des polynômes de Tchebychev par la formule :

$$\psi_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}(1-x^2)T'_N(x)}{\bar{c}_k N^2(x-x_k)}, \quad 0 \leq k \leq N.$$

En dérivant l'expression de u_N m fois, on arrive à :

$$\frac{d^m}{dx^m} u_N(x_j) = \sum_{k=0}^N u_N(x_k) \frac{d^m}{dx^m} \psi_k(x_j) = \sum_{k=0}^N d_{j,k}^{(m)} u_N(x_k), \quad \text{avec } d_{j,k}^{(m)} = \frac{d^m}{dx^m} \psi_k(x_j).$$

La matrice $\mathcal{D}^m = [d_{j,k}^{(m)}]_{0 \leq j,k \leq N}$ s'appelle la matrice de différentiation numérique d'ordre m . En particulier, si on note \mathbf{U} , $\mathbf{U}^{(2)}$ les vecteurs dont les composantes sont les valeurs de u_N et u_N'' aux points de collocation $\{x_j\}_{j=0}^N$ respectivement, il résulte que :

$$\mathbf{U}^{(2)} = \mathcal{D}^{(2)} \mathbf{U}.$$

Retournons au problème (2.4.14), en substituant l'expression de u_N dans l'équation conduit à :

$$-\sum_{j=0}^N d_{j,k}^{(2)} u_N(x_j) + \lambda \sum_{j=0}^N u_N(x_j) = f(x_j), \quad 1 \leq k \leq N-1, \tag{2.20}$$

$$u_N(x_0) = a, \quad u_N(x_N) = b.$$

Le système linéaire (2.20) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline & \mathcal{D}_N + \lambda \tilde{I}_N & & & \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_N(x_0) \\ u_N(x_1) \\ \vdots \\ u_N(x_{N-1}) \\ u_N(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ b \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

telles que $\mathcal{D}_N = [d_{j,k}^{(2)}]_{(N-2) \times N}$ et \tilde{I}_N est une matrice de dimension $(N-2) \times N$ définie par $\tilde{I}_N = [0, I_d, 0]$.

Exemple 2.4.3. Pour l'application numérique, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + 2u(x) = -e^x(x^2 - 4x - 3), & -1 < x < 1, \\ u(-1) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases}$$

où la solution exacte est donnée par $u^*(x) = e^x(x^2 - 1)$.

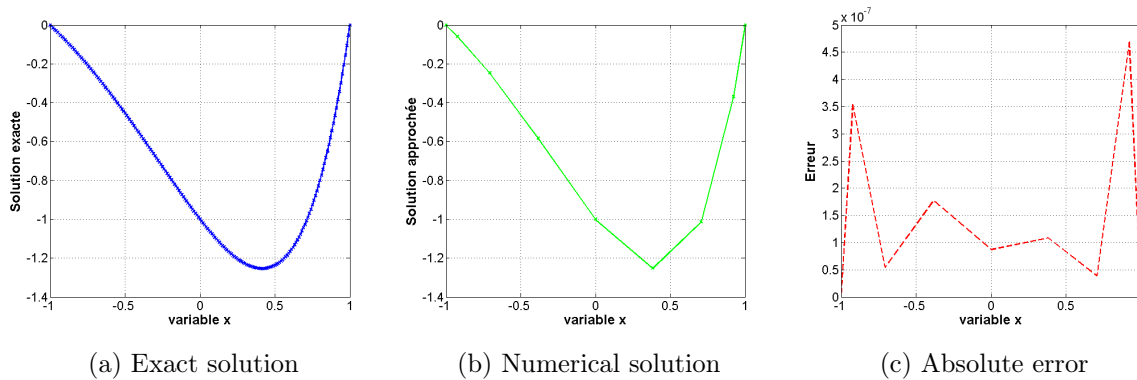


FIGURE 2.3 – Les profils de la solution exacte, solution approchée pour $N = 8$ et l'erreur absolue pour l'exemple (2.4.3).

TABLE 2.3 – Résultats numériques pour l'exemple (2.4.3)

x_i	$u^*(x_i)$	$u_N(x_i)$	Erreur
1.00000	0.0000	0.0000	1.086 e-016
0.92388	-0.3689	-0.3689	4.716 e-007
0.70711	-1.0141	-1.0141	3.939 e-008
0.38268	-1.2525	-1.2525	1.092 e-007
0.00000	-1.0000	-1.0000	8.769 e-008
-0.38268	-0.5822	-0.5822	1.781 e-007
-0.70711	-0.2465	-0.2465	3.567 e-008
-1.00000	0.0000	0.0000	0.0000

Au cours de ce test numérique, on choisit le degré polynomial N égal à 8. Les résultats numériques sont reportés dans le Tableau (2.3). De plus les profils de la solution exacte u et la solution approchée u_N ainsi que l'erreur $e_N = |u^* - u_N|$ sont montrés dans la Figure (2.3).

Chapitre 3

Résolution de l'équation d'advection-diffusion avec des conditions aux limites non locale par les méthodes spectrales

Ce chapitre est consacré à l'approximation d'équation d'advection-diffusion linéaire avec des conditions aux limites non locale de type Dirichlet par la méthode spectrale de Legendre-Galerkin. Nous présente d'abord une discrétisation totale, en espace qui basée sur la méthode de Legendre-Galerkin-Tau et en temps par un schéma aux différences finies. Ensuite, on résoudre le même problème mais cette fois la discrétisation spatiale est basée sur l'approche de Legendre-Collocation. Enfin, nous présentons des tests numériques pour préciser l'efficacité de notre algorithme.

3.1 Position de problème

On note $\Lambda = (-1, 1)$, $Q = \Lambda \times (0, T]$ où $T < +\infty$ représente un temps final. On considère le problème d'advection-diffusion suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \alpha \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Lambda}, \end{cases} \quad (3.1)$$

avec les conditions aux limites non-locales

$$u(-1, t) = \int_{-1}^1 u(x, t) K_1(x) dx, \quad u(1, t) = \int_{-1}^1 u(x, t) K_2(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

où f est le terme source, u_0 la fonction d'état initial, K_1 et K_2 sont des fonction bien définies supposées suffisamment régulières et α est une constante positive.

3.1.1 Existence et unicités

Le point de départ est d'établir l'existence et l'unicité d'une solution au sens faible (à préciser ultérieurement) pour le problème(3.1)-(3.2), qui peut se faire en utilisant des diverses méthodes, à titre d'exemple, l'auteur dans [18] a montré en utilisant la méthode de Rothe l'existence et l'unicité d'une solution faible d'un problème aux limites non-locales pour l'équation parabolique suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(\nabla u(x, t)), & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}, \\ u(x, t) = \int_{\Omega} u(y, t) K(x, y) dy, & x \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \end{cases}$$

où la solution variationnelle satisfait le problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} u, v \right) + (\nabla u, \nabla v) = (f(\nabla u), v), & v \in H_0^1(\Omega), \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, t) = \int_{\Omega} u(y, t) K(x, y) dy, & x \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Omega}. \end{cases}$$

En fait, en prenant $f(u) = -\alpha u$ on se placera sous les hypothèses du Théorème [18, Théorème 4.2], par suite, on obtient comme conséquence directe le résultat suivant.

Théorème 3.1.1. *Supposons que $f \in L^2(\Lambda)$, $u_0 \in H^2(\Lambda)$ et $K_1, K_2 \in H^1(\Lambda)$. satisfait les majorations suivantes :*

$$\|K_1\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|K_2\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq 1, \quad \|\nabla K_1\|_{L^2(\Lambda)}^2 + \|\nabla K_2\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq C$$

Alors, le problème (3.1)-(3.2) admet une unique solution $u \in C([0, T], L^2(\Lambda)) \cap L^\infty((0, T); H^1(\Lambda))$ telle que $\partial_t u \in L^2((0, T); L^2(\Lambda))$.

3.2 Méthode de Legendre-Galerkin-Tau

3.2.1 Discrétisation spatiale

Suivant la même démarche que dans chapitre 2, on reformule le problème (3.1)-(3.2) sous forme d'un problème variationnel : trouver $u \in C([0, T]; L^2(\Lambda)) \cap L^\infty((0, T); H^1(\Lambda))$ tel que

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} u, v \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} u, \frac{\partial}{\partial x} v \right) + \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} u, v \right) = (f, v), & v \in H_0^1(\Lambda), \quad 0 < t \leq T, \\ u(-1, t) = \int_{\Lambda} u(x, t) K_1(x) dx, \quad u(1, t) = \int_{\Lambda} u(x, t) K_2(x) dx, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\Lambda}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Sur la base de la formulation faible (3.3), la formulation d'approximation par la méthode spectrale de Legendre-Galerkin se lit comme suit : trouver $u_N(t) \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$, tel que, pour tout $v \in P_N^0(\Lambda)$ on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, v \right) + \left(\frac{\partial u_N}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \alpha \left(\frac{\partial u_N}{\partial x}, v \right) = (i_N^C f, v), & t \in (0, T], \\ u_N(-1, t) = \int_{-1}^1 u_N(x, t) K_1(x) dx, \quad u_N(1, t) = \int_{-1}^1 u_N(x, t) K_2(x) dx, & t \in [0, T], \\ u_N(x, 0) = i_N^C u_0(x), & x \in \Lambda, \end{cases} \quad (3.4)$$

tels que $i_N^C f$ et $i_N^C u_0$ sont les interpolants de la fonction source f et de la fonction d'état initiale u_0 respectivement au points de Tchebyshev-Gauss-Lobatto.

Pour un entier positive $N \in \mathbb{N}^*$, on fait appel à l'ensemble $\{\phi_k\}_{0 \leq k \leq N}$ des polynômes définis par la formule :

$$\begin{cases} \phi_k(x) = L_k(x) - L_{k+2}(x), & 0 \leq k \leq N-2, \\ \phi_{N-1}(x) = \frac{1}{2}(L_0(x) + L_1(x)), & k = N-1, \\ \phi_N(x) = \frac{1}{2}(L_0(x) - L_1(x)), & k = N. \end{cases}$$

On rappelle que l'ensemble $\{\phi_k\}_{0 \leq k \leq N}$ est constitué de $(N+1)$ éléments linéairement indépendants, donc il forme une base pour $P_N(\Lambda)$. Par suite, la décomposition de u_N solution de la formulation d'approximation (3.4) sur cette base est donnée par :

$$u_N(x, t) = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \phi_k(x).$$

En substituant l'expression de u_N donné par la formule au-dessus dans la formulation (3.4) et prenons

$v = \phi_j$ avec $j = 0, \dots, N - 2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \phi_k, \phi_j \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \phi_k, \frac{\partial}{\partial x} \phi_j \right) + \\ \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \phi_k, \phi_j \right) = (i_N^C f(t), \phi_j), \quad t \in (0, T], \quad 0 \leq j \leq N - 2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

avec la condition initiale

$$\left(\sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(0) \phi_k, \phi_j \right) = (i_N^C u_0, \phi_j), \quad 0 \leq j \leq N - 2. \quad (3.6)$$

Le système différentiel (3.5)-(3.6) se réécrit sous forme

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^N \frac{d\tilde{u}_k(t)}{dt} m_{kj} + \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) s_{kj} + \alpha \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) c_{kj} = f_j(t), & t \in (0, T], \\ \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(0) m_{jk} = u_0^j, & \end{cases} \quad 0 \leq j \leq N - 2. \quad (3.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} m_{kj} &= \int_{-1}^1 \phi_k(x) \phi_j(x) dx, & s_{kj} &= \int_{-1}^1 \phi'_k(x) \phi'_j(x) dx, & c_{kj} &= \int_{-1}^1 \phi'_k(x) \phi_j(x) dx, \\ f_j(t) &= (i_N^C f(t), \phi_j), & u_0^j &= (i_N^C u_0, \phi_j). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant les conditions aux limites pour obtenir deux équations supplémentaires. En effet, on a :

$$\begin{aligned} u_N(-1, t) &= \int_{-1}^1 u_N(x, t) K_1(x) dx = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \int_{-1}^1 \phi_k(x) K_1(x) dx = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \phi_k(-1) = \tilde{u}_N, \\ u_N(1, t) &= \int_{-1}^1 u_N(x, t) K_2(x) dx = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \int_{-1}^1 \phi_k(x) K_2(x) dx = \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \phi_k(1) = \tilde{u}_{N-1} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{N-1}(t) &= \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \tilde{k}_k^+, & \tilde{k}_k^+ &= \int_{-1}^1 \phi_k(x) K_2(x) dx, \\ \tilde{u}_N(t) &= \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k(t) \tilde{k}_k^-, & \tilde{k}_k^- &= \int_{-1}^1 \phi_k(x) K_1(x) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Il ne reste que déterminer les valeurs des quantités , ce qui est fait grâce aux lemmes (1.3.1) et (1.3.2).

En effet, on a :

$$m_{kj} = \begin{cases} \frac{2}{2k+1} + \frac{2}{2k+5}, & k = j, \quad 0 \leq k, j \leq N-2, \\ \frac{-2}{2k+5}, & j = k \pm 2, \quad 0 \leq k, j \leq N-2, \\ 1, & j = 0, \quad k \geq N-1, \\ \frac{1}{3}, & j = 1, \quad k = N-1, \\ \frac{-1}{3}, & j = 1, \quad k \geq N, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$s_{kj} = \begin{cases} 4k+6, & k = j, \quad 0 \leq j \leq N-2, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$c_{kj} = \begin{cases} 2, & j = k-1, \\ -2, & j = k+1, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En conclusion, la discrétisation du problème (3.1)-(3.2) par la méthode spectrale de Legendre-Galerkin-Tau en espace nous ramène au système (3.7)-(3.8) qui est un système différentiel d'ordre un en temps.

3.2.2 Discrétisation temporelle

Après avoir décrit la discrétisation spatiale qui nous a permis d'obtenir un système différentiel d'ordre 1, on passe maintenant à discrétiser ce dernier par rapport à la variable de temps t . Pour cela, nous choisissons le schéma de Euler, il s'agit d'un schéma des différences finies d'ordre 1 et qui consiste à remplacer la dérivée par rapport au temps par une différence finie progressive. Pour $M > 0$, on considère un pas du temps $\Delta t = \frac{T}{M}$, et on définit les point de maillage $t_i = i\Delta t$ avec $0 \leq i \leq M$. Par suite, on arrive au système :

$$\sum_{k=0}^N \frac{\tilde{u}_k^{i+1} - \tilde{u}_k^i}{\Delta t} m_{kj} + \sum_{k=0}^N (s_{kj} + \alpha c_{kj}) \tilde{u}_k^i = i_N^C f_j^i, \quad 0 \leq j \leq N-2, \quad 0 \leq i \leq M.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\sum_{k=0}^N m_{kj} \tilde{u}_k^{i+1} = \sum_{k=0}^N (-\Delta t (s_{kj} + \alpha c_{kj}) + m_{kj}) \tilde{u}_k^i + \Delta t i_N^C f_j^i, \quad 0 \leq j \leq N-2, \quad 0 \leq i \leq M,$$

où l'étape initiale est :

$$\sum_{k=0}^N m_{kj} \tilde{u}_k^0 = (i_N^C u_0, \phi_j), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (3.9)$$

De plus, on a d'après les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{N-1}^{i+1} &= \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i+1} \int_{-1}^1 \phi_k(x) k_2(x) dx, \\ \tilde{u}_N^{i+1} &= \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i+1} \int_{-1}^1 \phi_k(x) k_1(x) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Donc la discrétisation totale du problème d'advection-diffusion (3.1) avec les conditions aux limites (3.2) se ramène à la résolution du système algébrique suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \tilde{\mathbf{U}}^{i+1} &= \Delta t \mathbf{F}^i + \tilde{\mathbf{U}}^i (\mathbf{M} - \Delta t (\mathbf{S} + \alpha \mathbf{C})), \\ \tilde{u}_{N-1}^{i+1} &= \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i+1} \int_{-1}^1 \phi_k(x) K_2(x) dx, \\ \tilde{u}_N^{i+1} &= \sum_{k=0}^N \tilde{u}_k^{i+1} \int_{-1}^1 \phi_k(x) K_1(x) dx, \\ \mathbf{M} \mathbf{U}^0 &= \mathbf{U}_0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= [m_{kj}]_{(N-2) \times N}, \quad \mathbf{S}_{kj} = [s_{kj}]_{(N-2) \times N}, \quad \mathbf{C}_{kj} = [c_{kj}]_{(N-2) \times N}, \\ \tilde{\mathbf{U}}^i &= (\tilde{u}_0^i, \tilde{u}_1^i, \dots, \tilde{u}_{N-2}^i)^t, \\ \mathbf{U}^0 &= (\tilde{u}_0^0, \tilde{u}_1^0, \dots, \tilde{u}_N^0)^t, \quad \tilde{u}_j^0 = \int_{-1}^1 i_N^C u_0(x) \phi_j(x) dx, \\ \mathbf{F}^i &= (f_0^i, f_1^i, \dots, f_{N-2}^i)^t, \quad f_j^i = \int_{-1}^1 i_N^C f(x, t_i) \phi_j(x) dx. \end{aligned}$$

A chaque itération, le vecteur \mathbf{U}^i se détermine par la résolution du système linéaire (3.11), ce qui peut s'effectuer facilement en employant les méthodes numériques directes usuelles pour la résolution des systèmes linéaires.

3.3 Méthode de Collocation

3.3.1 Discrétisation spatiale

On s'intéresse dans cette sous-section à l'approximation de l'équation d'advection-diffusion (3.1) avec les conditions aux limites (3.2) par la méthode de Collocation. Cette méthode consiste à approximer

la solution exacte u par un interpolant u_N de la forme

$$u_N(x, t) = \sum_{i=0}^N u_N(x_i, t) \psi_i(x), \quad (x, t) \in [-1, 1] \times [0, T], \quad (3.12)$$

qui satisfait

$$u_N(x_i, t) = u(x_i, t), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (3.13)$$

où $\{x_i\}_{i=0}^N$ sont les nœuds de Legendre-Gauss-Labatto (LGL) choisis comme des points de Collocation, et les fonctions ψ_i sont les polynomes d'interpolation de Lagrange associée aux points $\{x_i\}_{i=0}^N$ définie explicitement en terme des polynomes de Legendre par la formule :

$$\psi_i(x) = \frac{1}{N(N+1)} \frac{(1-x^2) L'_N(x)}{x_i - x} \frac{L'_N(x_i)}{L'_N(x_i)}, \quad 0 \leq i \leq N.$$

Les valeurs de la dérivée de l'interpolant u_N aux points (LGL) sont définies en fonctions de ses valeurs aux ces points. En effet, puisque $\frac{d}{dx} u_N \in P_N(\Lambda)$, alors on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} u_N(x_j) = \sum_{i=0}^N u_N^{(1)}(x_j) \psi_i(x_j), \quad 0 \leq j \leq N.$$

De plus, on a :

$$\frac{d}{dx} u_N(x_j) = \sum_{i=0}^N u_N(x_j) \frac{d}{dx} \psi_i(x_j).$$

On note $(D_N^{(1)})_{ij} = \psi'_i(x_j)$, par suite on peut écrire :

$$\frac{d}{dx} u_N(x_j) = \sum_{i=0}^N (D_N^{(1)})_{ij} u_N(x_j), \quad 0 \leq j \leq N.$$

où les éléments $(D_N^{(1)})_{ij}$ sont données par les expressions suivantes :

$$(D_N^{(1)})_{ij} = \begin{cases} \frac{L_N(x_i)}{L_N(x_j)(x_i - x_j)}, & i \neq j, \\ -\frac{(N+1)N}{4}, & i = j = 0, \\ \frac{(N+1)N}{4}, & i = j = N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'une façons analogue, la matrice de différentiation d'ordre 2, $D_N^{(2)}$ est définie en termes de ces entrés comme suivant :

$$(D_N^{(2)})_{ij} = \begin{cases} -2 \frac{L_N(x_i)}{L_N(x_j)(x_i-x_j)^2}, & 1 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N, j \neq i, \\ \frac{L_N''(x_j)}{3L_N(x_j)}, & 1 \leq i = j \leq N-1, \\ \frac{(-1)^N N(N+1)(1+x_j)-4}{L_N(x_j) 2(1+x_j)^2}, & i = 0, 0 \leq j \leq N, \\ \frac{N(N+1)(N^2+N-2)}{24}, & i = j = 0, i = j = N, \\ \frac{1}{L_N(x_j)} \frac{N(N+1)(1-x_j)-4}{2(1-x_j)^2}, & i = N, 0 \leq j \leq N-1, \end{cases}$$

Supposons que la solution approchée satisfait l'équation (3.1) exactement au point de Collocation :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_N(x_j, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_N(x_j, t) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} u_N(x_j, t) = f(x_j, t), \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (3.14)$$

En substituant l'expression de u_N , $\partial_x u_N$ et $\partial_x^2 u_N$ données par les formules au-dessus dans l'équation (3.14), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_N(x_j, t) - \sum_{i=0}^N (D_N^{(2)})_{ij} u_N(x_j, t) + \alpha \sum_{i=0}^N (D_N^{(1)})_{ij} u_N(x_j, t) = f(x_j, t), \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (3.15)$$

C'est remarquable que le système (3.15) comprend $(N-1)$ équations différentielles ordinaires avec $(N+1)$ inconnues $(u_N(x_j, t))_{j=0}^N$ à déterminer. En utilisant les conditions aux bord (3.2), on complète le système (3.15) par deux équations supplémentaires.

$$\begin{cases} u_N(-1, t) = \int_{-1}^1 K_1(x) u_N(x, t) dx = \sum_{i=0}^N u(x_j, t) \int_{-1}^1 K_1(x) \psi_i(x) dx, \\ u_N(1, t) = \int_{-1}^1 K_2(x) u_N(x, t) dx = \sum_{i=0}^N u(x_j, t) \int_{-1}^1 K_2(x) \psi_i(x) dx. \end{cases} \quad (3.16)$$

Prenons en compte $x_0 = -1$ et $x_N = 1$, on peut mettre les équations au-dessus sous la forme :

$$\begin{cases} u_N(x_0, t) = \sum_{i=0}^N u(x_j, t) K_i^-, & K_i^- = \int_{-1}^1 K_1(x) \psi_i(x) dx, \\ u_N(x_N, t) = \sum_{i=0}^N u(x_j, t) K_i^+, & K_i^+ = \int_{-1}^1 K_2(x) \psi_i(x) dx, \end{cases} \quad (3.17)$$

tourçons maintenant à la condition initiale, c'est évidemment que :

$$u_N(x_j, 0) = u_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq N. \quad (3.18)$$

Donc, la discrétisation spatiale par la méthode de collocation du problème nous conduit à un système différentiel d'ordre 1 défini par les équations (3.15)-(3.17) avec la condition initiale (3.18).

3.3.2 Discrétisation temporelle

Après avoir décrite la discrétisation spatiale qui nous a permis d'obtenir le système différentiel (3.15)-(3.17)-(3.18), nous allons considérer maintenant l'intégration en temps de ce système à l'aide de la méthode des différences finies. Soit $M > 0$ un entier positif, on considère le pas du temps $\Delta t = \frac{T}{M}$, et on définit les points de maillage $t_k = k\Delta t$ avec $0 \leq k \leq M$. On arrive alors au système algébrique suivant de les inconnus $\tilde{u}_j^k = u_N(x_j, t_k)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0^{k+1} &= \sum_{i=0}^N \tilde{u}_0^k K_i^-, \\ \sum_{i=0}^N \frac{\tilde{u}_j^{k+1} - \tilde{u}_j^k}{\Delta t} - \sum_{i=0}^N (D_N^{(2)})_{ij} \tilde{u}_j^k + \alpha \sum_{i=0}^N (D_N^{(1)})_{ij} \tilde{u}_j^k &= f(x_j, t_k), \\ \tilde{u}_N^{k+1} &= \sum_{i=0}^N \tilde{u}_0^k K_i^-, \end{aligned} \tag{3.19}$$

avec l'étape initiale

$$\tilde{u}_j^0 = u_N(x_j, 0) = u_0(x_j), \quad 0 \leq j \leq N.$$

Donc, par la résolution du système (3.19) itérativement, on obtient alors à chaque instant t_k les valeurs de la solution approchée aux points de Collocation x_j .

Remarque 3.3.1. *Il faut signaler les deux algorithmes présentés dans les sections précédentes pour la résolution numérique du problème (3.14) peut être utilisée avec des conditions non-locales plus générales, notamment,*

$$u(\pm 1, t) = \int_{-1}^1 K(x, t)^\pm u(x, t) dx + p^\pm(t),$$

où $p^+(t), p^-(t), K^-(x, t)$ et $K^+(x, t)$ sont des fonctions supposées suffisamment régulières afin de garantir le caractère bien posé du problème considéré.

3.4 Validation numérique

Cette section a pour objectif résoudre numériquement quelques problèmes tests afin de montrer la fiabilité et l'efficacité de la méthode spectrale présentée.

Exemple 3.4.1. *Commençons par considérer le problème suivant :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x, t) &= f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 2, \\ u(-1, t) &= - \int_{-1}^1 \cos(\pi x)u(x, t)dx, \quad u(1, t) = - \int_{-1}^1 \sin(\pi x)u(x, t)dx, \quad 0 \leq t \leq 2, \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x) + \cos(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

avec $f(x, t) = (\pi^2 - \pi - 1) \cos(\pi x)e^{-t} + (\pi^2 - \pi - 1) \sin(\pi x)e^{-t}$.

La solution exacte est donnée par la formule $u^*(x, t) = (\cos(\pi x) + \sin(\pi x))e^{-t}$.

Pour la résolution numérique, on prend les paramètres de discrétisation $N = 16$ et $\Delta t = 10^{-2}$. Afin d'évaluer nos résultats numériques, on trace sur la Figure (3.1) la courbe de l'erreur absolue $E_N(x) = |u^*(x, t_i) - u_N(x, t_i)|$ comme fonction de x avec trois valeurs de t . Clairement, les résultats numériques montrent que la solution exacte a été approchée en haute précision.

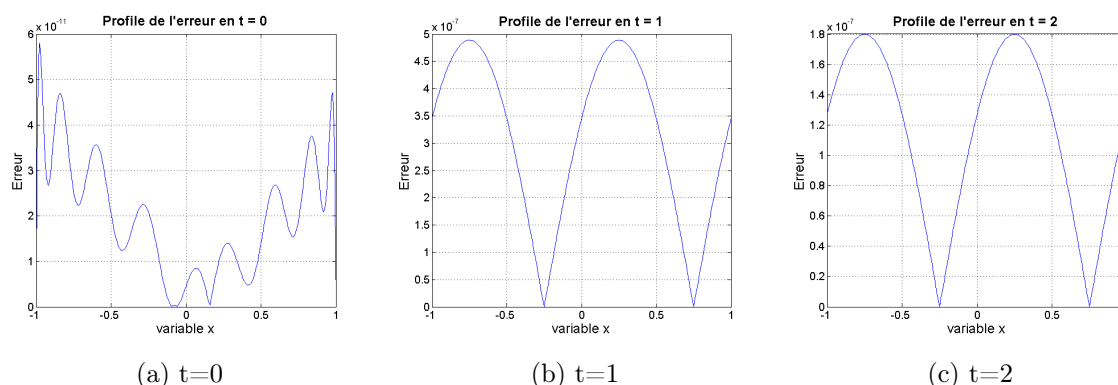


FIGURE 3.1 – Erreur ponctuel $E_N(x) = |u^*(x, t_i) - u_N(x, t_i)|$ en différents points t_i avec les paramètres de discrétisation $N = 16$ et $\Delta t = 10^{-2}$.

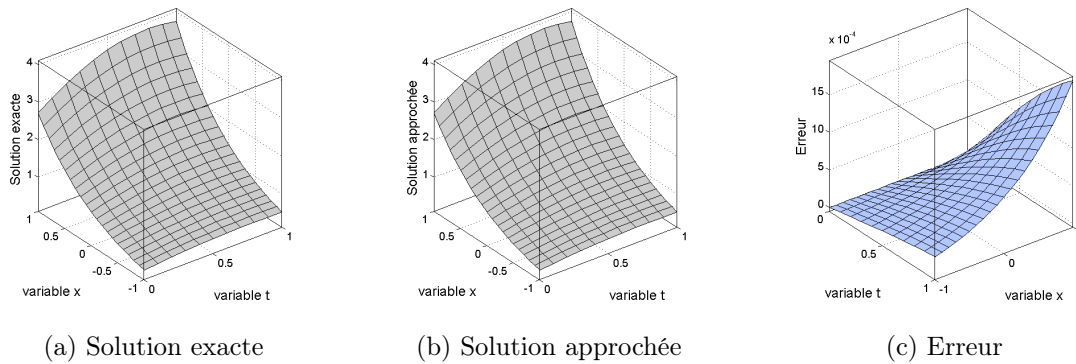


FIGURE 3.2 – Profile de l'erreur $E_N(x, t) = |u^*(x, t) - u_N(x, t)|$ avec les paramètres de discrétisation $N = 8$ et $\Delta t = 10^{-1}$ en fonction de x et t pour (3.4.2).

Exemple 3.4.2. Pour tester la méthode Legendre-Collocation, on considère le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) &= f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq \pi, \\ u(-1, t) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-(x+1)} u(x, t) dx, \quad u(1, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x+1} u(x, t) dx, \quad 0 \leq t \leq \pi, \\ u(x, 0) &= e^x, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

avec $f(x, t) = (\cos(t) - \sin(t))e^x$.

La solution exacte est donnée par la formule $u^*(x, t) = (\cos(t) + \sin(t))e^x$

Dans ce test numérique, nous allons monter la performance de la méthode de collocation développée dans la Section (3.3). Choisissons le degré polynomial $N = 8$ et le pas du temps $\Delta t = 10^{-1}$. Les graphes tracés sur la Figure (3.3) représente les profile de la solution exacte, la solution approchée et l'erreur absolue en fonction de la variable x avec t . Les résultats montrent un excellent accord entre les solutions exactes et approximatives, ce qui confirme la fiabilité de notre méthode numérique.

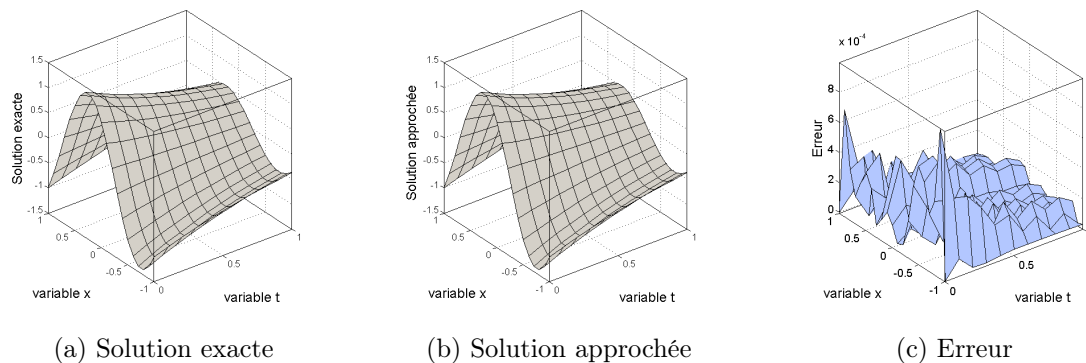


FIGURE 3.3 – Profile de l'erreur $E_N(x, t) = |u^*(x, t) - u_N(x, t)|$ avec les paramètres de discrétisation $N = 8$ et $\Delta t = 10^{-1}$ en fonction de x et t pour Exemple (3.4.2).

Conclusion et perspectives

*D*ans ce mémoire, nous avons traitées un problème différentiel parabolique modélisant une EDP d'advection-diffusion linéaire avec des conditions aux limites non locales de type Dirichlet, où notre objectif est d'approximer ce problème à l'aide des méthodes spectrales.

Après la présentation du principe de ces méthodes spectrales, nous avons entamé la résolution des problèmes elliptique, où nous avons adapté les méthodes spectrales de Legendre-Tau, ainsi que celle de Legendre-Collocation.

Pour l'approximation du problème d'advection-diffusion, on a utilisées ces méthodes pour la discrétisation partielle spatiale et un schéma aux différences finies pour la discrétisation partielle temporelle.

Nous avons données quelques testes numériques pour préciser l'efficacité des algorithmes proposés, où on a justifiées que l'approximation par le biais de ces méthodes spectrales est caractérisée par une simplicité au niveau de leurs implémentation sur ordinateur et elles seront meilleurs avec de bonnes précisions, si l'approximation engendre des polynômes de haut degré.

Enfin, dans les perspectives, nous essayons de programmer les méthodes utilisées et de généraliser cette étude en abordant l'analyse fractionnaire!

Bibliographie

- [1] BERNARDI, C. MADAY, Y. *Spectral methods*. Handbook of numerical analysis, 1997, vol. 5, p. 209–485.
- [2] BOUARICHA, I. *Méthodes spectrales et applications à des problèmes hyperboliques et paraboliques*, Département des Mathématiques, Université Abou Bekr Belkaid. TLEMCEM.
- [3] BOUZIANI, A., MERAZGA, N., & BENAMIRA, S. (2008). *Galerkin method applied to a parabolic evolution problem with nonlocal boundary conditions*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, 69(5-6), 1515–1524.
- [4] BOYD, John P. *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Corporation, 2001.
- [5] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [6] CANUTO, C. HUSSAINI, Y. QUARTERONI, T. ZANG, A. *Spectral methods, Fundamentals in single domains*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [7] CANUTO, C. QUARTERONI, A. *Approximation results for orthogonal polynomials in Sobolev spaces*. Mathematics of Computation, 1982, vol. 38, no 157, p. 67-86.
- [8] CHATTOUH, A. SAOUDI, K. *Legendre-Chebyshev pseudo-spectral method for the diffusion equation with non-classical boundary conditions*. Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis, 2020, vol. 6, no 2, p. 303-317.
- [9] CHATTOUH, A. SAOUDI, K. *Error analysis of Legendre-Galerkin spectral method for a parabolic equation with Dirichlet-Type non-local boundary conditions*. Mathematical Modelling and Analysis, 2021, vol. 26, no 2, p. 287-303.
- [10] Dupont, T., Fairweather, G., & Johnson, J. P. (1974). *Three-level Galerkin methods for parabolic equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 11(2), 392-410.
- [11] FAIRWEATHER, G. LÓPEZ-MARCOS, J. *Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions*. Advances in Computational mathematics, 1996, vol. 6, no 1, p. 243-262.

- [12] GUILLOU, A. et SOULÉ, J. L. *La résolution numérique des problèmes différentiels aux conditions initiales par des méthodes de collocation*. Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, 1969, vol. 3, no R3, p. 17-44.
- [13] LAVOIE, M. *Polynômes orthogonaux*, 2015.
- [14] LE DRET, H. *La méthode de Galerkin*. In : *Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. p. 83-97.
- [15] LEKBIR, Z. SAHLI, M. *Étude mathématique de quelques problèmes de chaleur parabolique et hyperbolique*. 2021. Thèse de doctorat. Université de Bordj Bou Arreridj Faculty of Mathematics and Computer Science.
- [16] SEHILI, I. *Méthodes spectrales pour les problèmes aux limites*, Département des Mathématiques, Université Mohamed Khider, BASKRA.
- [17] SHEN, J. *Efficient spectral-Galerkin methods IV. Spherical geometries*. SIAM Journal on Scientific Computing, 1999, vol. 20, no 4, p. 1438-1455.
- [18] SLODIČKA, M. *Semilinear parabolic problems with nonlocal Dirichlet boundary conditions*, J. Comput. App. Math., Vol. 19, No. 5 (2011), 705-716.
- [19] WAN, Z. CHEN, Y. HUANG, Y. *Legendre spectral Galerkin method for second-kind Volterra integral equations*. Frontiers of Mathematics in China, 2009, vol. 4, no 1, p. 181-193.