République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abbes Laghrour de Khenchela

N° d'ordre :
N° de série :

Institut des Sciences et Technologie

Département de Mathématiques et Informatique

Ecole Doctorale Mathématiques Appliquées

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

Filière: Mathématiques
Option: Mathématiques Appliquées

Par
AOUINE Ahmed Chaouki

Thème:

Théorèmes du point fixe commun de plusieurs fonctions avec Application aux inéquations variationnelles

Date de soutenance: Le 02 Juillet 2012

Devant le jury

Ayadi Abdelhamid	Professeur	Université Oum-El-Bouaghi	Président
Aliouche Abdelkrim	Maître de conférences	Université Oum-El-Bouaghi	Rapporteur
Zeraoulia Elhadj	Maître de conférences	Université Tébessa	Examinateur
Adjroud Nacer	Maître de conférences	Université Khenchela	Examinateur

Année Universitaire: 2011/2012.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

à ma mère

à mon père à mes

sœurs et mes

frère

à tous mes amis et tous mes enseignants et mes

collègues

Sans exception.

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à Mon directeur de mémoire **Dr. ALIOUCHE Abdelkrim** maître de conférences à l'Université de **LARBI Ben M'Hidi Oum-El-Bouaghi** pour m'avoir proposé le sujet de ce mémoire. C'est grâce à sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations, et ses encouragements Que j'ai pu mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont également à **Dr. AYADI Abdelhamid** professeur à l'Université **d'Oum-El-Bouaghi** pour l'honneur qui m'a fait d'accepter de présider le jury.

De même je remercie **Dr. ZERAOULIA Elhadj** Maître de conférences à l'Université de **Tébessa** et **Dr. ADJROUD Nacer** Maître de conférences à l'Université de **Khenchela** pour l'honneur qu'ils m'on fait de bien vouloir accepter de Faire partie du jury.

Je remercie également tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin à L'élaboration De ce mémoire.

Enfin, je n'oublie pas de remercier toutes les personnes qui m'ont facilité la tâche et Tous ceux que j'ai connus aux départements de mathématiques et informatique d'**Oum-El-Bouaghi** et **Khenchela** qui ont rendu mon séjour agréable.

Table des matières

Introduction

Un point fixe est un point qui reste immobile par une application ou une transformation. La théorie du point fixe trouve ses applications dans plusieurs domaines différents par exemple : les inéquations variationnelles qui apparaissent dans le contrôle optimal stochastique et aussi dans des autres problèmes dans la physique mathématique, par exemple : déformation des corps élastiques poussés à travers les obstacles du solide, torsion elasto-plastique etc.

Le théorème qui garanti l'existence de ce point immobile est le théorème de point fixe.

L'auteur de ce résultat très constructif est S. Banach (1922) (c.f. [4]). Ce théorème était une concrétisation de travaux antérieurs en particulier ceux de E. Picard qui avait bien auparavant utilisé la méthode des approximations successive pour résoudre de nombreux problèmes s'exprimant en termes d'équations différentielles, intégrales, ou aux dérivées partielles. Le théorème de Banach s'est récemment révélé être un outil fondamental dans l'étude des équations de la physique mathématique.

En des termes quantifiés, étant donnée une fonction f, le problème de point fixe consiste à résoudre l'équation $f(x) = x$. L'expérience nous montre qu'en étant capable de résoudre le problème de point fixe on sera aussi capable de résoudre une quantité d'autres problèmes qui, à première vue, ne ressemble pas à un problème de point fixe. Par exemple :

– Si on cherche un point x tel que $f(x) = 0$, on peut trouver un tel point en résolvant le problème de point fixe $g(x) = x$ où $g(x) = f(x) + x$.

- Si on cherche un point x tel que $f(x) = y$, on peut obtenir un tel x en résolvant l'équation $g(x) = f(x) - y + x$.
- L'étude de systèmes dynamiques se réduit souvent à un problème de recherche de points fixes d'un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; i.e., $f^n(x) = x$, $n \in \mathbb{N}$.
- Les questions d'existences et d'unicités de solutions de problèmes à valeur initiale de la forme $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$, $x(0) = x_0$ sont résolues affirmativement par le théorème de point fixe de Banach.
- Questions d'existence et d'unicité de certains problèmes de réaction-diffusion sont aussi résolues affirmativement par la théorie de point fixe.

Ainsi, on s'aperçoit que la théorie de point fixe est un point de rencontres de bon nombres de disciplines. Par conséquent, notre sujet est incontestablement un sujet d'actualité.

Nous nous sommes intéressés à cette théorie de point fixe et nous avons étudié plusieurs articles publiés dans ce domaine.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres. De toute évidence le premier chapitre, comme dans toutes les thèses contient les éléments indispensables dont on aura besoin pour le chapitre suivant. Dans ce chapitre nous allons rappeler le théorème de Boyd-Wong et aussi un théorème intéressant de Jachymski [13] qui a établit une équivalence entre huit définitions d'applications contractives. Lorsqu'on manipule plus d'une fonction, l'existence d'un point fixe commun exige une certaine commutativité entre ces fonctions. Pour cela, on va rappeler certaines définitions de commutativité utilisées dans notre mémoire. En particulier, on parlera amplement des applications compatibles, applications faiblement compatibles et des applications tangentielles.

Dans le deuxième chapitre on va démontrer trois théorèmes :

- un théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles dans des espaces métriques complets satisfaisant une contraction généralisée.
- un théorème du point fixe commun en utilisant une contraction stricte pour deux paires d'applications faiblement compatibles et tangentielles dans des espaces métriques.
- un théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles dans des espaces métriques convexes et complets en utilisant une contraction généralisée.

On trouvera dans le troisième chapitre une application du premier théorème pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution commune pour un système des inéquations variationnelles.

Chapitre 1

Propriétés contractives équivalentes et compatibilité de fonctions

Dans ce chapitre nous allons rappeler un théorème intéressant due à Jachymski (c.f. [13]) qui a pu établir une équivalence entre huit définitions d'applications contractives. Il a aussi formulé (voir théorème 2, [13]) un théorème de séparation pour les fonctions semi-continues supérieurement à droite. Il a appliqué ce théorème pour obtenir une caractérisation complète entre le théorème du point fixe de "Boyd-Wong" et celui de "Browder".

Nous allons rappeler aussi les concepts de commutativité, commutativité faible, compatibilité, compatibilité de type (A), compatibilité de type (B), compatibilité de type (P), compatibilité de type (C), compatibilité faible et les applications tangentielles.

Définition 1.1. *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une application* $T : X \to X$ *est dite Lipschitziènne s'il existe un nombre réel* $k \geq 0$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ on a

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

Si $k < 1$*, on dit que* T *est une application contractante ou une contraction, tandis que si* $k = 1$, on dit que T *est nonexpansive. Enfin,* T est *dite contractive si pour tout* $x, y \in X$ *et* $x \neq y$ on a

$$d(Tx, Ty) < d(x, y).$$

Remarque 1.2. *Contraction implique contractive implique nonexpansive implique Lipschitziènne et que toute ces fonctions sont uniformément continues.*

Théorème 1.3. (c.f. [4]) *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une contraction. Alors*

(i) T *admet un point fixe unique dans* X *; i.e.,* $\exists! u \in X$ *tel que* $Tu = u$*.*

(ii) Pour tout $x_0 \in X$*, on a* $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = u$ et $d(T^n x_0, u) \leq \dfrac{k^n}{1-k} d(x_0, Tx_0)$.

Preuve. Voir [4]. ■

Il est facile aussi de vérifier la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application. Si* T^n *est une contraction pour un certain entier* n*, alors* T *admet un point fixe unique dans* X*.*

Théorème 1.5. *Soit* (X, d) *un espace métrique compact. Si* $T : X \to X$ *est une application contractive, alors* T *admet un point fixe unique* u *dans* X*. En outre, pour tout* $x_0 \in X$*, on a* $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = u$*.*

Définition 1.6. *Soient $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, une fonction telle que $\phi(t) < t$ pour $t > 0$ et $T : X \to X$ une application. On dit que T est ϕ-contractive (ou que T est une contraction non linéaire) si*

$$d(Tx, Ty) \leq \phi(d(x, y)) \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Le théorème suivant est le théorème de Boyd-Wong (c.f. [7]).

Théorème 1.7. S*oient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application. Supposons qu'il existe une fonction semi-continue supérieurement $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que T soit ϕ-contractive. Alors T admet un point fixe unique u dans X. En outre, pour tout $x_0 \in X$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x_0 = u$.*

Preuve. Voir [7]. ■

1.1 Equivalence de certaines propriétés contractives de fonctions

Dans cette section, nous allons rappeler un résultat intéressant due à Jachymski [13] établit en 1997. Dans son théorème, Jachymski (c.f. [13]) a établi un théorème faisant l'équivalence de huit définitions d'applications contractives. Son travail est basée sur le lemme suivant.

Lemme 1.8. *Supposons que $0 \leq a < b \leq \infty$ et considérons la fonction*

$\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\phi(t) < t$ pour tout $t > 0$ et *vérifiant*

$$\lim_{s\to t} \sup \phi(s) < t \text{ pour } t \in (a, b) \text{ et}$$

$$\limsup_{s\to a^+} \phi(s) < a, \text{si } a > 0.$$

Alors, il existe une fonction strictement croissante et continue $\psi : [a, b) \to \mathbb{R}_+$ *telle que* $\phi(t) \leq \psi(t) < t$ pour tout $t \in [a, b) \cap (0, \infty)$.

Preuve : Nous considérons deux cas.

1. $a > 0$: Soit $\{b_n\}$ une suite strictement croissante avec $b_0 := a$ et $b_n \to b$. Pour $n \in \mathbb{N}$ définissons

$$\alpha_n := \sup \left\{ \frac{\phi(t)}{t} : t \in [a, b_n] \right\}.$$

D'après les hypothèses on a $\alpha_n < 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Posons : $\alpha = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\alpha = 1$ et (si nécessaire en passant à une sous-suite) $\{\alpha_n\}$ est strictement croissante. Définissons la fonction $\psi : [a, b) \longmapsto \mathbb{R}_+$ par

graphe (ψ) := la ligne polygonale avec des nœuds $\{(b_n, \alpha_{n+1} b_n) : n \in \mathbb{N}\}$

Il est facile de vérifier qu'elle a toutes les propriétés requises.

2. $a = 0$: Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites convergentes vers 0 et b respectivement avec $0 < a_{n+1} < a_n < b_n < b_{n+1} < b$ pour $n \in \mathbb{N}$. Posons

$$\alpha_n := \sup \left\{ \frac{\phi(t)}{t} : t \in [a_n, b_n] \right\} \text{ pour tout } n.$$

Comme dans le cas 1, nous avons $\alpha_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$. Posons aussi $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$. Sans perte de généralité, supposons que $\alpha = 1$ et $\{a_n\}$ est strictement croissante. Définissons les suites $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ et $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$en posant $n_0 := 0$ et pour $k \in \mathbb{N}$

$$r_k \quad : \quad = \max \{\alpha_{n+1} a_n \ : \ n > n_{k-1}\},$$

$$n_k \quad : \quad = \max \{n > n_{k-1} : \alpha_{n+1} a_n = r_k \ \}.$$

Nous introduisons maintenant une fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ telle que $\psi(0) := 0$ et $\psi(t) := \alpha_{n_1+1} t$ pour $t \in [a_{n_1}, b_{n_1}]$. D'autre part, définissons ψ sur $[b_{n_1}, \infty)$ comme dans le cas 1. (avec $a := b_{n_1}$) et sur $(0, a_{n_1}]$ par : graphe (ψ) :=la ligne polygonal avec des nœuds $\{(a_{n_k}, r_k) : \ k \in \mathbb{N}\}$.

La fonction ψ vérifie toutes les propriétés requises. ■

Théorème 1.9. *Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \to X$ une application. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) (c.f. [8]) *Il existe une fonction croissante et continue à droite $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que T est ϕ-contractive.*

(b) (c.f. [9]) *Il existe une application $\Theta : X \times X \to \mathbb{R}_+$ avec*

$$\inf \{\Theta(x, y); a \leq d(x, y) \leq b\} > 0 \text{ pour } a, b > 0, \text{telle que}$$

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \Theta(x, y) \text{ pour tout } x, y \in X.$$

(c) (c.f. [18]) *Il existe une application $\Gamma : X \times X \to \mathbb{R}_+$* avec

$$\sup \{\Gamma(x, y) : a \leq d(x, y) \leq b\} < 1 \text{ pour } a, b > 0, \text{telle que}$$

$$d(Tx, Ty) \leq \Gamma(x, y) d(x, y) \text{ pour tout } x, y \in X.$$

(d) (c.f. [17]) *Il existe une fonction continue $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\psi(t) > 0$* pour *$t > 0$ et*

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y)) \text{ pour tout } x, y \in X.$$

(e) (c.f. [10]) *Il existe une fonction semi-continue supérieurement* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telle que* T *est* ϕ*-contractive.*

(f) *Il existe une fonction* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *avec* $\lim sup_{s \to t} \phi(s) < t$ *pour* $t > 0$ *et* T *est* ϕ*-contractive.*

(g) (c.f [19]) *Il existe une fonction strictement croissante* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *vérifiant*

$$\lim_{n \to \infty} \phi^n(t) = 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \tag{1.1}$$

et T est $\phi-$*contractante.* (h) *Il existe une fonction strictement croissante et continue* $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telle que* T *est* ϕ*-contractive.*

Preuve. Nous allons vérifier $(b) \Leftrightarrow (c)$, $(d) \Leftrightarrow (e)$, $(h) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a) \Rightarrow (f) \Rightarrow (h)$, $(h) \Rightarrow (g) \Rightarrow (f)$ et $(h) \Rightarrow (c) \Rightarrow (f)$.

La relation $(b) \Leftrightarrow (c)$ a été prouvé dans [9]. $(d) \Rightarrow (e)$ suit avec $\phi(t) := t - \psi(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ et $(e) \Rightarrow (d)$ suit avec un résultat de Michael [21]. De plus, $(h) \Rightarrow (a)$ est triviale ainsi que $(e) \Rightarrow (f)$, D'ailleurs, $(a) \Rightarrow (e)$ est claire (chaque fonction croissante est semi-continue supérieurement à gauche) et $(f) \Rightarrow (h)$ résulte du lemme 1.8. De plus $(h) \Rightarrow (g)$ est vérifiée dans la manière décrite par [8] et $(f) \Rightarrow (h)$ découle du théorème 5. Enfin, supposons que (h) est vraie. Définissons l'application $\Gamma : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$ par $\Gamma(x,x) := 0, x \in X$, et $\Gamma(x,y) := \dfrac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)}$ pour $x \neq y$.

Soit $a, b > 0$, $a < b$. Puisque T *est* ϕ-contractive

$$\sup \{\Gamma(x,y) : a \leq d(x,y) \leq b\} \leq \ \sup\{\frac{\phi(t)}{t} : a \leq t \leq b\} < 1$$

(car la fonction $t \mapsto \dfrac{\phi(t)}{t}$ atteint son maximum sur $[a,b]$). Donc, (e) est satisfaite. Pour prouver $(c) \Rightarrow (f)$, définissons pour $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \{(x,y) \in X \times X : \frac{1}{n} \leq d(x,y) \leq n\}.$$

Ces ensembles sont non vides pour n suffisamment grand, $n \geq n_0$ posons, pour tous n

$$\alpha_n := \sup\{\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)} : (x,y) \in A_n\}.$$

Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}_+$ telle que $\phi(0) := 0, \phi(t) := \alpha_{n_0} t$ pour $t \in \left[\frac{1}{n_0}, n_0\right]$ et $\phi(t) := \alpha_n t$ pour $t \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right] \cup (n-1, n]$, $n > n_0$ Il est facile de voir que (f) est vérifiée. ■

Remarque 1.10. *Le concept général du théorème 1.7 de Boyd-Wong est le suivant.*

(E) *Il existe une fonction semi -continue supérieurement à droite $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que T est ϕ-contractive.*

Le contexte général de la condition (g) de Matkowski ci-dessus est le suivant.

(G) *il existe une fonction croissante $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ vérifiant* (1.1) *et T est ϕ-contractive.*

Par conséquent, on obtient d'après le théorème 1.9 que

$$(E) \Rightarrow (e) \Leftrightarrow (i) \text{ et } (G) \Rightarrow (g) \Leftrightarrow (i) \text{ pour } i \in \{a, ..., h\}.$$

Systématiquement on obtient comme conséquence la proposition suivante.

Proposition 1.11. *Si (X,d) est un espace métrique complet et $T : X \to X$ une application vérifiant la condition i, où $i \in \{a, ..., h\}$, alors T admet un point fixe unique.*

Preuve. Voir [13]. ■

Les principes mutuellement équivalents décrits de a à h sont alors réductibles à (E) principe due à Boyd-Wong où (G) principe due à Matkowski, mais il a été prouvé dans [13] que l'inverse n'est pas vrai et que le théorème de Boyd -Wong améliore celui de Browder et donne une caractérisation complète des relations entre ces deux derniers. C'est à dire que le théorème de Boyd-Wong reste essentiellement plus général que le théorème de Browder. Il a été démontré aussi que l'implication $(e) \Rightarrow (E)$ est en général fausse et que les conditions (E) et (G) sont indépendantes. Cela veut dire que le principe de Boyd-Wong n'est en général pas réductible à celui de Matkowski et l'inverse non plus.

1.2 Applications compatibles

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler certaines définitions de compatibilité de fonctions et de les comparer à l'aide des exemples concrets.

Sessa (c.f. [15]) a généralisé le concept des applications commutatives en introduisant le concept des applications faiblement commutatives. Jungck [14] a généralisé le concept de commutativité faible en introduisant le concept des applications compatibles. Jungck et al [15] ont généralisé le concept de compatibilité en introduisant le concept des applications compatibles de type (A). Pathak et al [22,24,26] ont généralisé le concept de compatibilité de type (A) en introduisant le concept des applications compatibles de type (B), les applications compatibles de type (P) et les applications compatibles de type (C). Il a été démontré dans [15,22,24,26] que ces notions sont équivalentes si les applications sont continues. Dans [16], Jungck a introduit le concept des applications faiblement compatibles. Il a été démontré dans [14,15,22,24,26] que chacun de ces concepts de compatibilité implique la compatibilité faible, mais la réciproque n'est pas vraie en général. Autrement dit la compatibilité faible est la notion la plus faible parmi toutes les compatibilités citées.

Dans la suite de ce chapitre S et T désignent deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui m$\hat{e}$me.

S et T sont dites commutatives si $STx = TSx$ pour tout $x \in X$.

Définition 1.12. (c.f. [29]) *S et T sont dites faiblement commutatives si* pour tout $x \in X$, on a

$$d(STx, TSx) \leq d(Sx, Tx).$$

De toute évidence la commutativité implique la commutativité faible, mais la réciproque n'est pas vraie en général comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple 1.13. Soient $(X, d) = ([0, 1], |.|)$, $Sx = \dfrac{x}{2}$ et $T(x) = \dfrac{x}{2+x}$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} |STx - TSx| &= \left| \frac{x}{4+2x} - \frac{x}{4+x} \right| \\ &= \frac{x}{(4+x)(4+2x)} \\ &\leq \frac{x^2}{4+2x} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{x}{2+x} \\ &= |Sx - Tx| \,. \end{aligned}$$

Alors, S et T sont faiblement commutatives. Mais

$$TSx = \frac{x}{4+x} > \frac{x}{4+2x} = STx,$$

pour tout $x \neq 0$ dans X. Donc, S et T ne sont pas commutatives.

Définition 1.14. (c.f. [14]) *S et T sont dites compatibles si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, TSx_n) = 0, \tag{1.2}$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t \text{ pour un certain } t \in X. \tag{1.3}$$

Il est facile de montrer que commutativité faible implique compatibilité, mais la réciproque n'est pas vraie en général comme il a été prouvé dans [14].

Définition 1.15. (c.f. [15]) *S et T sont dites compatibles de type (A) si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) = 0, \tag{1.4}$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant (1.3). Clairement, commutativité faible implique compatibilité de type (A), mais la réciproque n'est pas vraie en général. Néanmoins, ces deux concepts de compatibilité sont indépendants si S et T ne sont pas continues (c.f. [15]).

Définition 1.16. (c.f. [22]) *S et T sont dites compatibles de type (B) si*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) \le \frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} d(STx_n, St) + \lim_{n\to\infty} d(St, S^2x_n)] \text{ et} \qquad (1.5)\\ &\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) \le \frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, Tt) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, T^2x_n)], \end{aligned}$$

pour toute suite $\{x_n\}$ dans X vérifiant (1.3).

Définition 1.17. (c.f. [25]) *S et T sont dites compatibles de type (P) si*

$$\lim_{n\to\infty} d(S^2x_n, T^2x_n) = 0, \tag{1.6}$$

pour toute suite $\{x_n\}$ *dans* X *vérifiant* (1.3).

Définition 1.18. (c.f. [26]) *S et T sont dites compatibles de type (C) si*

$$\lim_{n\to\infty} d(STx_n, T^2x_n) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(STx_n, St) + \lim_{n\to\infty} d(St, T^2x_n) + \lim_{n\to\infty} d(St, S^2x_n)] \text{ et} \tag{1.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, S^2x_n) \leq \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty} d(TSx_n, Tt) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, S^2x_n) + \lim_{n\to\infty} d(Tt, T^2x_n)],$$

pour toute suite $\{x_n\}$ *dans* X *vérifiant* (1.3).

Proposition 1.19. *Supposons que S et T sont continues sur X. Alors toutes les définitions de* (1.14) à (1.18) *sont équivalentes.*

Preuve. Voir [15, 22, 25, 26]. ■

Proposition 1.20. *Si S et T sont deux applications compatibles ou compatibles de type (A), (B), (P) ou (C), alors*

(1) *$ft = gt$ pour un certain $t \in X$, implique $fgt = g^2t = gft = f^2t$.*

(2) *Supposons que* $\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = t$ *pour un certain $t \in X$. Alors*

(a) *f est continue en t, implique* $\lim_{n\to\infty} g^2x_n = ft$.

(b) *g est continue en t, implique* $\lim_{n\to\infty} f^2x_n = gt$.

(c) *f et g sont continues en t, implique $ft = gt$ et $fgt = gft$.*

Preuve. Voir [15,22,25,26]. ■

Définition 1.21. (c.f. [16]) *S et T sont dites faiblement compatibles si elles commutent aux points de coïncidence ; i.e., si $St = Tt$ pour $t \in X$, alors $STt = TSt$.*

Lemme 1.22. *Si S et T sont compatibles, ou compatibles de type (A), (P), (B), ou (C), alors ils sont faiblement compatibles.*

Preuve. Voir [14,15,22,25,26]. ■

L'exemple suivant montre que les implications inverses du Lemme 1.22 ne sont pas vraies en général.

Exemple 1.23. Soit $(X,d) = ([0,10],\ |.|)$. Définissons S et T par

$$Sx = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x \in (0,2] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \{0\} \cup (2,10] \end{cases}, \quad Tx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in 0 \\ x+8 & \text{si} \quad x \in (0,2] \\ x-2 & \text{si} \quad x \in (2,10] \end{cases}.$$

Clairement, $Sx = Tx$ si et seulement si $x = 0$. $T(0) = S(0) = 0, TS(0) = ST(0) = 0$. Alors, (S,T) est faiblement compatible. Soit $\{x_n\}$ la suite de X définie par : $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

$$Sx_n = S(2 + \frac{1}{n}) = 0, Tx_n = T(2 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}.$$

On a $Sx_n, Tx_n \to t = 0$ lorsque $n \to \infty$. De plus

$$STx_n = S(\frac{1}{n}) = 3, TSx_n = T(0) = 0 \text{ pour tout } n \geq 1.$$

On voit là que

$$\lim_{n\to\infty} |STx_n - TSx_n| = 3 \neq 0,$$

et donc (S,T) n'est pas compatible. D'autre part

$$S^2x_n = S(0) = 0, T^2x_n = T(\frac{1}{n}) = 8 + \frac{1}{n} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Mais

$$\lim_{n\to\infty} \left|TSx_n - S^2x_n\right| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \left|STx_n - T^2x_n\right| = 5 \neq 0,$$

cela implique que (S,T) n'est pas compatible de type (A). Aussi

$$\lim_{n\to\infty} \left|STx_n - T^2x_n\right| = 5 > \frac{1}{2}[\lim_{n\to\infty} |STx_n - St| + \lim_{n\to\infty} \left|St - S^2x_n)\right|] = \frac{3}{2}.$$

Cela veut dire que (S,T) n'est pas compatible de type (B). Puisque

$$\lim_{n\to\infty}\left|S^2x_n - T^2x_n\right| = 8 \neq 0,$$

alors (S,T) n'est pas compatible de type (P). Enfin, comme

$$\begin{aligned} 5 &= \lim_{n\to\infty}\left|STx_n - T^2x_n\right| \\ &> \frac{1}{3}[\lim_{n\to\infty}|STx_n - St| + \lim_{n\to\infty}\left|St - T^2x_n\right| + \lim_{n\to\infty}\left|St - S^2x_n\right|] = \frac{11}{3}, \end{aligned}$$

on conclut que (S,T) n'est pas compatible de type (C).

Définition 1.24. (c.f [12]). *Soient (X,d) est un espace métrique et K un sous-ensemble non vide de X et F, G, S* et *$T : K \longrightarrow X$ des applications satisfaisant*

$$\begin{aligned} d(Fx,Gy) \quad &\leq \quad a\ \max\{\frac{1}{2}d(Tx,Sy), d(Tx,Fx), d(Sy,Gy)\} \\ &+b\{d(Tx,Gy) + d(Fx,Sy)\} \end{aligned}$$

pour tout $x,y \in K$ et $x \neq y$, $a,b \geq 0$ tels que $a+2b<1$. Alors (F,G) est dit (T,S) contraction généralisée dans K.

Définition 1.25. (c.f [12]). *un espace métrique (X,d) est dit convexe si pour tout $x,y \in X$ et $x \neq y$ il existe un point $z \in X$, $x \neq z \neq y$ tel que*

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y).$$

Lemme 1.26. (c.f [12]). Soit K est un sous-ensemble fermé non vide de X, où X est un espace métrique convexe.

Si $x \in K$ et $y \notin K$, alors il existe un point $z \in \delta\,(K)$ (la frontière de K) tel que

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y).$$

1.3 Applications tangentielles

Définition 1.27. (c.f [28]) *Le point* $t \in X$ *est dit tangent à* S *et* T *s'il existe une suite* $\{x_n\}$ de X *telle que*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = t.$$

Deux applications qui possèdent un point tangent sont dites tangentielles.

Exemple 1.28. Soit $(X, d) = ([0, +\infty[, |.|)$. Définissons S, $T : X \to X$ par : $Sx = 3x+1$ et $Tx = 2x+3$, pour tout $x \in X$. Considérons la suite $\{x_n\}$ de X définie par $x_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$ Clairement, $\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = 7 = t$, donc S *et* T sont tangentielles.

Chapitre 2

Théorèmes du point fixe commun de plusieurs fonctions via compatibilité faible

Dans ce chapitre, on va prouver

- Un théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles dans des espaces métriques satisfaisant une contraction généralisée.
- Un théorème du point fixe commun en utilisant une contraction stricte pour deux paires d'applications faiblement compatibles et tangentielles dans des espaces métriques.
- Un théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles dans des espaces métriques convexes et complets en utilisant une contraction généralisée.

2.1 Théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles dans des espaces métriques satisfaisant une contraction généralisée.

Théorème 2.1. *Soient A, B, S et T des applications d'un espace métrique dans lui même satisfaisant*

$$A(X) \subset T(X) \text{ et } B(X) \subset S(X) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} d(Ax, By) \leq\ & h[\delta \max d(Sx, Ty), d(Sx, Ax), d(Ty, By), \\ & \frac{d(Sx, By) + d(Ty, Ax)}{2}\} + (1 - \delta) \max\{d(Ax, Sx), \\ & d(By, Ty)\}] + L \min\{d(Sx, Ax), d(Ty, By), \\ & d(Sx, By), d(Ty, Ax)\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

pour tout $x, y \in X$, où $0 < \delta \leq 1$, $0 < h < 1$ et $L \geq 0$. Supposons que $S(X)$ ou $T(X)$ est complet et les paires (A, S) et (B, T) sont faiblement compatibles, alors A, B, S et T possèdent un point fixe commun et unique dans X.

Preuve. Soit x_0 un point arbitraire dans X. D'après (2.1), il existe un point $x_1 \in X$ tel que $Ax_0 = Tx_1$. Pour ce point x_1, on peut choisir un point x_2 tel que $Bx_1 = Sx_2$. Par récurrence, on peut définir une suite $\{y_n\}$ dans X telle que

$$y_{2n} = Ax_{2n} = Tx_{2n+1} \quad \text{et} \quad y_{2n+1} = Sx_{2n+2} = Bx_{2n+1},\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

On va montre que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy. Supposons d'abord que $y_n \neq y_{n+1}$ pour tout n. En utilisant (2.2) et (2.3) et on posant $x = x_{2n}$ et $y = x_{2n+1}$, on a

$$\begin{aligned} d(Ax_{2n}, Bx_{2n+1}) &\leq h[\delta \max\{d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), \\ &\frac{d(Sx_{2n}, Bx_{2n+1}) + d(Tx_{2n+1}, Ax_{2n})}{2}\} + (1-\delta)\max\{d(Ax_{2n}, Sx_{2n}), \\ &d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\}] + L\min\{d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), \\ &d(Sx_{2n}, Bx_{2n+1}), d(Tx_{2n+1}, Ax_{2n})\}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} d(y_{2n}, y_{2n+1}) &\leq h[\delta \max\{d(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}), d(Sx_{2n}, Ax_{2n}), d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), \\ &\frac{d(Sx_{2n}, Bx_{2n+1}) + d(Tx_{2n+1}, Ax_{2n})}{2}\} + \\ &(1-\delta)\max\{d(Ax_{2n}, Sx_{2n}), d(Bx_{2n+1}, Tx_{2n+1})\}] \\ &= h[\delta \max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1}), \frac{d(y_{2n-1}, y_{2n+1})}{2}\} \\ &+(1-\delta)\max\{d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(y_{2n+1}, y_{2n})\}]. \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{aligned} d(y_{2n}, y_{2n+1}) &\leq h[\delta \max\{d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n+1}, y_{2n}), \frac{d(y_{2n-1}, y_{2n+1})}{2}\} \\ &+(1-\delta)\max\{d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(y_{2n+1}, y_{2n})\}]. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{d(y_{2n-1}, y_{2n+1})}{2} \leq \frac{d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})}{2}.$$

Si

$$d(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq d(y_{2n+1}, y_{2n}),$$

on obtient

$$\begin{aligned} d(y_{2n}, y_{2n+1}) &\leq h[\delta d(y_{2n+1}, y_{2n}) + (1-\delta) d(y_{2n+1}, y_{2n})] \\ &< d(y_{2n+1}, y_{2n}), \end{aligned}$$

impossible. Donc

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) < d(y_{2n-1}, y_{2n}).$$

D'où

$$\begin{aligned} d(y_{2n}, y_{2n+1}) &\leq h[\delta d(y_{2n-1}, y_{2n}) + (1-\delta) d(y_{2n}, y_{2n-1})] \\ &= hd(y_{2n-1}, y_{2n}). \end{aligned}$$

De la même manière on trouve

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq hd(y_{2n}, y_{2n+1}).$$

Il suit que

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq hd(y_{n-1}, y_n),$$

ce qui implique que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy.

La suite $\{y_{2n+1}\} = \{Sx_{2n+2}\} \subset S(X)$ est une suite de Cauchy dans $S(X)$. Supposons que $S(X)$ est complet. Alors elle converge vers un point $z = Su$ pour $u \in X$. Par conséquent, les sous-suites $\{Ax_{2n}\}$, $\{Bx_{2n+1}\}$, $\{Tx_{2n+1}\}$ convergent aussi vers z. Si $Au \neq z$, en utilisant (2.2) on a

$$\begin{aligned} d(Au, Bx_{2n+1}) \leq\ & h[\delta \max\{d(Su, Tx_{2n+1}), d(Su, Au), d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), \\ & \frac{d(Su, Bx_{2n+1}) + d(Tx_{2n+1}, Au)}{2}\} + (1-\delta) \max\{d(Au, Su), \\ & d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1})\}] + L \min\{d(Su, Au), d(Tx_{2n+1}, Bx_{2n+1}), \\ & d(Su, Bx_{2n+1}), d(Tx_{2n+1}, Au)\}. \end{aligned}$$

En faisant $n \to \infty$ on obtient

$$\begin{aligned} d(Au, z) &\leq h[\delta d(Au, z) + (1 - \delta) d(Au, z)] \\ &< d(Au, z), \end{aligned}$$

qui est une contradiction. D'où, $z = Au = Su$. Comme $A(X) \subset T(X)$, il existe $v \in X$ tel que $z = Tv$. Si $z \neq Bv$, en utilisant (2.2) on trouve

$$\begin{aligned} d(Au, Bv) &= d(z, Bv) \leq h[\delta \max\{d(Su, Tv), d(Su, Au), d(Tv, Bv), \\ &\quad \frac{d(Su, Bv) + d(Tv, Au)}{2}\} + (1 - \delta) \max\{d(Au, Su), d(Tv, Bv)\}] \\ &\quad + L \min\{d(Su, Au), d(Tv, Bv), d(Su, Bv), d(Tv, Au)\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} d(z, Bv) &\leq h[\delta d(z, Bv) + (1 - \delta) d(z, Bv)] \\ &< d(z, Bv), \end{aligned}$$

qui est une contradiction. Donc, $z = Bv = Tv$. Comme (A, S) est faiblement compatible, on trouve $SAu = ASu$; i.e., $Az = Sz$. Si $Az \neq z$, en utilisant (2.2) on a

$$\begin{aligned} d(Az, Bv) &= d(Az, z) \leq h[\delta \max\{d(Sz, Tv), d(Sz, Az), d(Tv, Bv), \\ &\quad \frac{d(Sz, Bv) + d(Tv, Az)}{2}\} + (1 - \delta) \max\{d(Az, Sz), d(Tv, Bv)\}] \\ &\quad + L \min\{d(Sz, Az), d(Tv, Bv), d(Sz, Bv), d(Tv, Az)\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} d(Az, z) &\leq h[\delta d(Az, z) + (1 - \delta) d(Az, z)] \\ &< d(z, Az), \end{aligned}$$

qui est une contradiction. D'*où* $z = Az = Sz$. Par analogie, on trouve $z = Bz = Tz$. Supposons qu'il existe un n tel que $y_n = y_{n+1}$. Par induction, $y_n = y_{n+k}$ pour $k \geq 1$. Ainsi, il existe $u, v \in X$ tels que $Au = Su$ et $Bv = Tv$, on peut montrer que $z = Az = Bz = Tz$.

Montrons enfin que z est unique. Supposons que $w \in X$ est un autre point fixe commun de A, B, S *et* T, d'après (2.2) on a

$$\begin{aligned} d(Az, Bw) \leq\ & h[\delta \max\{d(Sz, Tw), d(Sz, Az), d(Tw, Bw), \\ & \frac{d(Sz, Bw) + d(Tw, Az)}{2}\} + (1-\delta)\max\{d(Az, Sz), d(Tw, Bw)\}] \\ & + L\min\{d(Sz, Az), d(Tw, Bw), d(Sz, Bw), d(Tw, Az)\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} d(z, w) &\leq h\delta d(z, w) \\ &< d(z, w), \end{aligned}$$

qui est une contradiction, d'où $z = w$. Alors A, B, S *et* T admettent un point fixe commun et unique dans X. ■

Si $B = A$ et $T = S$ dans le théorème 3.1, on trouve le corollaire suivant.

Corollaire 2.2. *Soient A et S deux applications d'un espace métrique (X, d) dans lui même satisfaisant*

$$A(X) \subset S(X)$$

$$\begin{aligned} d(Ax, Ay) \leq\ & h[\delta \max d(Sx, Sy), d(Sx, Ax), d(Sy, Ay), \\ & \frac{d(Sx, Ay) + d(Sy, Ax)}{2}\} + (1-\delta)\max\{d(Ax, Sx), \\ & d(Ay, Sy)\}] + L\min\{d(Sx, Ax), d(Sy, Ay), d(Sx, Ay), d(Sy, Ax)\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

pour tout $x, y \in X$*, où* $0 < \delta \leq 1$, $0 < h < 1$ et $L \geq 0$*. Supposons que* $S(X)$ *est complet et* (A, S) *est faiblement compatible. Alors,* A *et* S *admettent un point fixe commun et unique dans* X*.* Si on pose $S = I_X$ dans le corollaire (2.4), où I_X est l'application identité dans X, alors on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *Soit* A *une application d'un espace de Banach* (X, d) *dans lui même satisfaisant*

$$\begin{aligned} d(Ax, Ay) \leq \; & h[\delta \max d(x, y), d(x, Ax), d(y, Ay), \\ & \frac{d(x, Ay) + d(y, Ax)}{2}\} + (1 - \delta) \max\{d(Ax, x), \\ & d(Ay, y)\}] + L \min\{d(x, Ax), d(y, Ay), d(x, Ay), d(y, Ax)\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

pour tout $x, y \in X$*, où* $0 < \delta \leq 1$, $0 < h < 1$ et $L \geq 0$*. Alors,* A *admet un point fixe unique dans* X*.*

Maintenant, on va prouver aussi un théorème du point fixe commun en utilisant une condition stricte avec des applications tangentielles.

2.2 Théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles et tangentielles dans des espaces métriques

Théorème 2.4. *Soient* (X,d) *un espace métrique et* A, B, S et $T : Y \longrightarrow X$ *telles que*

$$\begin{aligned} d(Ax,By) &< \max\{d(Sx,Ty), \alpha d(Ax,Sx), \alpha d(By,Ty), \\ & \quad [d(By,Sx)+d(Ax,Ty)]/2\}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $0 \leq \alpha < 1$, *pour laquelle le côté droit de* (2.6) *est positif,* A *et* S *ou* B *et* T *sont tangentielles,* $\overline{A(Y)} \subset T(Y)$ *et* $\overline{B(Y)} \subset S(Y)$.

Alors :

(i) A *et* S *ont un point de coïncidence,*

(ii) B *et* T *ont un point de coïncidence.*

En outre, si $Y = X$, *alors*

(iii) A *et* S *ont un point fixe commun et unique, si* A *et* S *sont faiblement compatibles.*

(iv) B *et* T *ont un point fixe commun et unique, si* B *et* T *sont faiblement compatibles.*

(v) A, B, S *et* T *ont un point fixe commun et unique, si les paires* (A,S) *et* (B,T) *sont faiblement compatibles.*

Preuve. Supposons que B et T sont tangentielles. Alors il existe une suite $\{x_n\}$ dans Y telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty} Bx_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} Tx_n = z$ pour un certain $z \in X$. Puisque

$\overline{B(Y)} \subset S(Y)$, alors pour chaque x_n il existe $y_n \in Y$ tel que $Bx_n = Sy_n$ et $Sy_n \to z$. Maintenant, montrons que $Ay_n \to z$. Sinon, il existe une suite $\{Ay_{n(i)}\}$ de $\{Ay_n\}$, un entier positif N et un nombre réel $r > 0$ tels que pour un certain entier positif $k \geq N$, on a $d(Ay_k, z) \geq r$, $d(Ay_k, Bx_k) \geq r$ et

$$\begin{aligned} d(Ay_k, Bx_k) &< \max\{d(Sy_k, Tx_{_K}), \alpha d(Ay_k, Sy_k), \alpha d(Bx_k, Tx_k), \\ &\quad [d(Bx_k, Sy_k) + d(Ay_k, Tx_k)]/2\} \\ &= d(Ay_k, Bx_k), \end{aligned}$$

qui est une contradiction. Donc $Ay_n \longrightarrow z$. Comme $z \in \overline{B(Y)}$ et $\overline{B(Y)} \subset S(Y)$, il existe un élément $u \in Y$ tel que $z = Su$. Si $Au \neq z$, en utilisant la condition (2.6) on obtient

$$\begin{aligned} d(Au, Bx_n) &< \max\{d(Su, Tx_n), \alpha d(Au, Su), \alpha d(Bx_n, Tx_n), \\ &\quad [d(Bx_n, Su) + d(Au, Tx_n)]/2\}. \end{aligned}$$

En faisant $n \to \infty$ on a $d(Au, Su) \leq \alpha d(Au, Su) < d(Au, Su)$, donc $Au = Su = z$. Ce qui prouve (i).

Puisque $\overline{A(Y)} \subset T(Y)$, il existe un point $v \in Y$ tel que $Au = Tv$. Si $Tv \neq Bv$, d'après (2.6), on trouve

$$\begin{aligned} d(Au, Bv) &< \max\{d(Su, Tv), \alpha d(Au, Su), \alpha d(Bv, Tv), \\ &\quad [d(Bv, Su) + d(Au, Tv)]/2\} \\ &= \alpha d(Au, Bv) < d(Au, Bv) \end{aligned}$$

Par conséquent $Tv = Bv = z$. Ce qui prouve (ii). Maintenant, supposons que $Y = X$. Comme A et S sont faiblement compatibles, on obtient

$AAu = ASu = SAu = SSu$, c-a-d, $Az = Sz$. Si $z \neq Az$ en appliquant (2.6), on a

$$\begin{aligned} d(z, Az) &= d(Az, Bv) < \max\{d(Sz, Tv), \alpha d(Az, Sz), \alpha d(Bv, Tv), \\ &\quad [d(Bv, Sz) + d(Az, Tv)]/2\} \\ &= d(z, Az). \end{aligned}$$

Donc, $Az = Sz = z$. Ce qui prouve (iii). La preuve de (iv) est similaire, et la preuve de (v) est immédiate. ■

Si $B = A$ et $T = S$ dans le théorème 2.4, on trouve le corollaire suivant.

Corollaire 2.5. *Soient* (X, d) *un espace métrique et* $A, S : Y \longrightarrow X$ *telles que*

$$\begin{aligned} d(Ax, Ay) &< \max\{d(Sx, Sy), \alpha d(Ax, Sx), \alpha d(Ay, Sy), \\ &\quad [d(Ay, Sx) + d(Ax, Sy)]/2\}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

où $0 \leq \alpha < 1$, *pour laquelle le côté droit de* (2.7) *est positif,* A *ou* S *sont tangentielles,* $\overline{A(Y)} \subset S(Y)$.

Alors :

(i) A *et* S *ont un point de coïncidence.*

En outre, si $Y = X$, *alors*

(ii) A *et* S *ont un point fixe commun et unique si* A *et* S *sont faiblement compatibles.*

Exemple 2.6. Soient $X = [0, \infty)$ muni de la métrique usuelle et $Y = [\frac{1}{10}, \infty)$. 0n définit A, B, S, T de Y dans X par $Ax = x^2 + \frac{2}{9}$, $Bx = x^3 + \frac{2}{9}$, $Sx = 3x^2$ et $Tx = 3x^3$.

Alors $d(Ax, By) = |x^2 - y^3| < 3|x^2 - y^3| = d(Sx, Ty)$. Donc (2.6) et les autres hypothèses du théorème 2.4 sont satisfaites. On a $A(\frac{1}{3}) = S(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ *et* $B(9^{-\frac{1}{3}}) =$

$T(9^{-\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}$, c-a-d, A et S ont un point de coïncidence $x = \frac{1}{3}$ et B et T ont un point de coïncidence différent $x = 9^{-\frac{1}{3}}$.

Maintenant, on va prouver un théorème du point fixe commun dans un espace métrique convexe et complet en utilisant une contraction généralisée avec des applications faiblement compatibles.

2.3 Théorème du point fixe commun pour deux paires d'applications faiblement compatibles dans des espaces métriques convexes et complets en utilisant une contraction généralisée.

Théorème 2.7. *Soient (X, d) est un espace métrique convexe et complet et K sous-ensemble non vide fermé de X. Si (F, G) est une (T, S)-contraction généralisée de K dans X vérifiant*

$$\begin{aligned} d(Fx, Gy) \quad &\leq \quad a \ \max\{\frac{1}{2}d(Tx, Sy), d(Tx, Fx), d(Sy, Gy)\} \\ &+b\{d(Tx, Gy) + d(Fx, Sy)\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

(i) $\delta(K) \subseteq S(K) \cap T(K), F(K) \cap K \subseteq S(K), G(K) \cap K \subseteq T(K)$, où $\delta(K)$ est la frontière de K.

(ii) $Tx \in \delta(K) \Longrightarrow Fx \in K, Sx \in \delta(K) \Longrightarrow Gx \in K$,

(iii) $T(K)$ et $S(K)$ (ou $F(K)$ et $G(K)$) sont des sous-espaces fermés dans X.

Alors

(iv) F et T ont un point de coïncidence,

(v) G et S ont un point de coïncidence.

D'autre part, si les paires (F,T) et (G,S) sont faiblement compatible, alors F,G,S et T ont un point fixe commun et unique dans X.

Preuve. On construit d'abord deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ de la manière suivante.

Soit $x \in \delta(K)$. donc (à cause de $\delta(K) \subseteq T(K)$ il existe $x_0 \in K$ tel que $x = Tx_0$. Puisque $Tx \in \delta(K) \Longrightarrow Fx \in K$, on déduit que $Fx_0 \in F(K) \cap K \subseteq S(K)$. Soit $x_1 \in K$ tel que $y_1 = Sx_1 = Fx_0 \in K$, comme $y_1 = Fx_0$ il existe un point $y_2 = Gx_1$ tel que

$$d(y_1, y_2) = d(Fx_0, Gx_1).$$

Supposons que $y_2 \in K$. Alors $y_2 \in G(K) \cap K \subseteq T(K)$, ce qui implique qu'il existe un point $x_2 \in K$ tel que $y_2 = Tx_2$. Si $y_2 \notin K$ alors il existe un point $p \in \delta(K)$ tel que

$$d(Sx_1, p) + d(p, y_2) = d(Sx_1, y_2).$$

Puisque $p \in \delta(K) \subseteq T(K)$ il existe un point $x_2 \in K$, avec $p = Tx_2$ tel que

$$d(Sx_1, Tx_2) + d(Tx_2, y_2) = d(Sx_1, y_2).$$

Soit $y_3 = Fx_2$ est tel que $d(y_2, y_3) = d(Gx_1, Fx_2)$. En répétant ce qui précède, on obtient deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ telles que

(vi) $y_{2n} = Gx_{2n-1}, y_{2n+1} = Fx_{2n}$,

(vii) $y_{2n} \in K \Longrightarrow y_{2n} = Tx_{2n}$ ou $y_{2n} \notin K \Longrightarrow Tx_{2n} \in \delta(K)$ et

$$d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) + d(Tx_{2n}, y_{2n}) = d(Sx_{2n-1}, y_{2n}),$$

$(viii)$ $y_{2n+1} \in K \Longrightarrow y_{2n+1} = Sx_{2n+1}$ ou $y_{2n+1} \notin K \Longrightarrow Sx_{2n+1} \in K$ et

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) + d(Sx_{2n+1}, y_{2n+1}) = d(Tx_{2n}, y_{2n+1}).$$

Notons

$$\begin{aligned} P_0 &= \{Tx_{2i} \in \{Tx_{2n}\} : Tx_{2i} = y_{2i}\}, \\ P_1 &= \{Tx_{2i} \in \{Tx_{2n}\} : Tx_{2i} \neq y_{2i}\}, \\ Q_0 &= \{Sx_{2i+1} \in \{Sx_{2n+1}\} : Sx_{2i+1} = y_{2i+1}\}, \\ Q_1 &= \{Sx_{2i+1} \in \{Sx_{2n+1}\} : S_{x2i+1} \neq y_{2i+1}\}. \end{aligned}$$

Observons que $(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \notin P_1 \times Q_1$. Si $Tx_{2n} \in P_1$, on déduit que $y_{2n} \neq Tx_{2n}$ et $Tx_{2n} \in \delta(K)$ ce qui implique que $y_{2n+1} = Fx_{2n} \in K$ et d'où $y_{2n+1} = Sx_{2n+1} \in Q_0$. De la même façon, on peut prouver que $(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \notin Q_1 \times P_1$.

Maintenant, nous distinguons les trois cas suivants.

Cas 1. Si $(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \in P_0 \times Q_0$, on obtient

$$\begin{aligned}
d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) &= d(Fx_{2n}, Gx_{2n-1}) \\
&\leq \quad a \ \max\{\frac{1}{2}d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), d(Sx_{2n-1}, Gx_{2n-1}), d(Tx_{2n}, Fx_{2n})\} \\
&\quad +b\{d(Tx_{2n}, Gx_{2n-1}) + d(Sx_{2n-1}, Fx_{2n})\} \\
&= a \ \max \ \{\frac{1}{2}d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\} \\
&\quad +b\{d(y_{2n-1}, y_{2n+1})\} \\
&= a \ \max \ \{\frac{1}{2}d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n-1}, y_{2n}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\} \\
&\quad +b\{d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})\} \\
&\leq \begin{cases} \left(\dfrac{a+b}{1-b}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), si \ d(y_{2n-1}, y_{2n}) \geq d(y_{2n+1}, y_{2n}) \\ \left(\dfrac{b}{1-b-a}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), si \ d(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq d(y_{2n+1}, y_{2n}), \end{cases}
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq h \ d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}),$$

Dans la suite de cette preuve on pose $h = \max\{\left(\dfrac{a+b}{1-b}\right), \left(\dfrac{b}{1-b-a}\right)\} < 1$ puisque $a + 2b < 1$.

De la même manière, si $(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \in Q_0 \times P_0$. On a

$$\begin{aligned}
&d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \\
&\leq \begin{cases} \left(\dfrac{a+b}{1-b}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}), \text{si } d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \geq d(y_{2n-1}, y_{2n}) \\ \left(\dfrac{b}{1-b-a}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}), \text{si } d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \leq d(y_{2n-1}, y_{2n}), \end{cases}
\end{aligned}$$

donc

$$d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \leq h \ d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}).$$

Cas 2. Si $(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \in P_0 \times Q_1$, on trouve

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) + d(Sx_{2n+1}, y_{2n+1}) = d(Tx_{2n}, y_{2n+1}).$$

D'où

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq d(Tx_{2n}, y_{2n+1}) = d(y_{2n}, y_{2n+1}),$$

et donc

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq d(y_{2n}, y_{2n+1}) = d(Fx_{2n}, Gx_{2n-1}).$$

Maintenant, en procédant comme dans le cas 1, on a

$$\begin{aligned} &d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \\ &\leq \begin{cases} \left(\dfrac{a+b}{1-b}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), \text{si } d(y_{2n-1}, y_{2n}) \geq d(y_{2n+1}, y_{2n}) \\ \left(\dfrac{b}{1-b-a}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), \text{si } d(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq d(y_{2n+1}, y_{2n}) \end{cases}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq h\ d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}).$$

Dans le cas où $(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \in Q_1 \times P_0$, on obtient

$$\begin{aligned} &d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \\ &\leq \begin{cases} \left(\dfrac{a+b}{1-b}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}), si\ d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \geq d(y_{2n-1}, y_{2n}) \\ \left(\dfrac{b}{1-b-a}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}), si\ d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \leq d(y_{2n-1}, y_{2n}). \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}) \leq h\ d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n-2}).$$

Cas 3. Si $(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \in P_1 \times Q_0$, alors $Sx_{2n-1} \in Q_0$. Comme Tx_{2n} est la combinaison linéaire convexe de Sx_{2n-1} et y_{2n}, il suit que

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq \max\{d(Sx_{2n-1}, Sx_{2n+1}), d(y_{2n}, Sx_{2n+1})\}. \tag{2.9}$$

Maintenant, si $d(Sx_{2n-1}, Sx_{2n+1}) \leq d(y_{2n}, Sx_{2n+1})$, on trouve

$$\begin{aligned}
d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) &\leq d(y_{2n}, Sx_{2n+1}) = d(Fx_{2n}, Gx_{2n-1}) \\
&\leq \quad a \ \max\{\frac{1}{2}d(Tx_{2n}, Sx_{2n-1}), d(Tx_{2n}, Fx_{2n}), d(Sx_{2n-1}, Gx_{2n-1})\} \\
&\quad +b\{d(Tx_{2n}, Gx_{2n-1}) + d(Sx_{2n-1}, Fx_{2n})\} \\
&\leq \begin{cases} \left(\dfrac{a+b}{1-b}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), \text{si } d(y_{2n-1}, y_{2n}) \geq d(y_{2n+1}, y_{2n}) \\ \left(\dfrac{b}{1-b-a}\right) d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), \text{si } d(y_{2n-1}, y_{2n}) \leq d(y_{2n+1}, y_{2n}) \end{cases},
\end{aligned}$$

d'où

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq h \ d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}).$$

Ensuite, si $d(y_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq d(Sx_{2n-1}, Sx_{2n+1})$, d'après (2.9)

$$\begin{aligned}
d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) &\leq d(Sx_{2n-1}, Sx_{2n+1}) = d(Fx_{2n}, Gx_{2n-2}) \\
&\leq \quad a \ \max\{\frac{1}{2}d(Tx_{2n}, Sx_{2n-2}), d(Tx_{2n}, Fx_{2n}), d(Sx_{2n-2}, Gx_{2n-2})\} \\
&\quad +b \ \{d(Tx_{2n}, Gx_{2n-2}) + d(Sx_{2n-2}, Fx_{2n})\} \\
&= \quad a \ \max\{\frac{1}{2}d(y_{2n}, y_{2n-2}), d(y_{2n}, y_{2n+1}), d(y_{2n-2}, y_{2n-1})\} \\
&\quad +b \ \{d(y_{2n}, y_{2n-1}) + d(y_{2n-2}, y_{2n+1})\}
\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}d(y_{2n}, y_{2n-2}) &= \frac{1}{2}\{d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(y_{2n-1}, y_{2n-2})\} \\
&= \max\{d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(y_{2n-1}, y_{2n-2})\}.
\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\begin{aligned} d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) &\leq a \ \max\{d(y_{2n}, y_{2n-1}), d(y_{2n-1}, y_{2n-2}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\} \\ &+b\{d(y_{2n}, y_{2n-1}) + d(y_{2n-2}, y_{2n+1})\} \\ &= a \ \max\{d(y_{2n-1}, y_{2n-2}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\} \\ &+b\{d(y_{2n}, y_{2n-1}) + d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) + d(y_{2n-1}, y_{2n+1})\} \\ &= a \ \max\{d(y_{2n-1}, y_{2n-2}), d(y_{2n}, y_{2n+1})\} \\ &+b\{d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})\} \\ &\leq \begin{cases} \left(\dfrac{a+b}{1-b}\right) d(Tx_{2n-2}, Sx_{2n-1}), \text{si } d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \geq d(y_{2n}, y_{2n+1}) \\ \left(\dfrac{b}{1-b-a}\right) d(Tx_{2n-2}, Sx_{2n-1}), \text{si } d(y_{2n-2}, y_{2n-1}) \leq d(y_{2n}, y_{2n+1}). \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq h \ d(Tx_{2n-2}, Sx_{2n-1}).$$

Dans tous les cas, nous avons

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) \leq h \ \max\{d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), d(Tx_{2n-2}, Sx_{2n-1})\}.$$

Tandis que

$$d(Sx_{2n+1}, Tx_{2n+2}) \leq h \ \max\{d(Sx_{2n-1}, Tx_{2n}), d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1})\}.$$

Maintenant d'après d'Assad et Kirk [3], on peut démontré par induction que pour tout $n \geq 1$, on a

$$d(Tx_{2n}, Sx_{2n+1}) < h^n \ \alpha \text{ et } d(Sx_{2n+1}, Tx_{2n+2}) < h^{n+\frac{1}{2}}\alpha,$$

où

$$\alpha = h^{\frac{-1}{2}} \max\{d(Tx_0, Sx_1), d(Sx_1, Tx_2)\}.$$

Donc $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy dans X.

Nous supposons qu'il existe une sous-suite $\{Tx_{2n_k}\}$ qui est contenu dans P_0. Puisque $T(K)$ et $S(K)$ sont des sous-espaces fermés de X et $\{Tx_{2n_k}\}$ est une suite de Cauchy dans $T(K)$, elle converge vers un point $z \in T(K)$. On pose $u \in T^{-1}z$, donc il existe $u \in K$ tel que $Tu = z$. De même manière $\{Sx_{2n_k}\}$ est une suite de Cauchy dans $S(K)$ et comme $S(K)$ est fermé, elle converge aussi vers $z \in S(K)$. Si $z \neq Fu$, en utilisant (2.8), lorsque $k \to \infty$ on a

$$\begin{aligned} d(Fu, z) &\leq a \ \max\{0, d(z, Fu), 0\} + b\{0 + d(Fu, z)\} \\ &\leq (a+b) \ d(z, Fu) < d(z, Fu). \end{aligned}$$

Ce qui implique que $Fu = z$. Donc $Fu = z = Tu$ ce qui établit (iv).

En outre, puisque $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy, elle converge vers $z \in K$ et $z = Fu$, donc $z \in F(K) \cap K \subset S(K)$, alors $w \in K$ tel que $Sw = z$. Si $z \neq Gw$ en utilisant (2.8), on obtient

$$\begin{aligned} d(Sw, Gw) &= d(z, Gw) \\ &= d(Fu, Gw) \\ &\leq a \ \max\{\frac{1}{2}d(Tu, Sw), d(Tu, Fu), d(Sw, Gw)\} \\ &\quad +b\{d(Tu, Gw) + d(Sw, Fu)\} \\ &= a \ \max\{0, 0, d(Sw, Gw)\} + b\{d(z, Gw) + 0\} \\ &\leq (a+b)d(Sw, Gw) < d(Sw, Gw), \end{aligned}$$

ce qui implique que $z = Gw = Sw$ qui établit (v).

Puisque (F, T) est faiblement compatible, on a $FTu = TFu$; i.e., $Fz = Tz$. Si

$Fz \neq z$, en utilisant (2.8) on trouve

$$\begin{aligned}
d(Fz,z) &= d(Fz,Gw) \\
&\leq a \ \max\{\frac{1}{2}d(Tz,Sw), d(Tz,Fz), d(Sw,Gw)\} \\
&\quad +b\{d(Tz,Gw)+d(Sw,Fz)\} \\
&\leq a \ \max\{\frac{1}{2}d(Fz,z),0,0\}+b\{d(Fz,z)+d(z,Fz)\} \\
&\leq (\frac{a}{2}+2b) \ d(z,Fz) < d(z,Fz).
\end{aligned}$$

D'où $Fz = z = Tz$. Puisque (S,G) est faiblement compatible, on a $SGw = GSw$; i.e., $Sz = Gz$. Si $Gz \neq z$, en utilisant (2.8) on obtient

$$\begin{aligned}
d(z,Gz) &\leq a \ \max\{\frac{1}{2}d(Tz,Sz), d(Tz,Fz), \\
&\quad d(Sz,Gz)\} \\
&\quad +b\{d(Tz,Gz)+d(Sz,Fz)\} \\
d(z,Gz) &\leq a \ \max\{0,0,d(z,Gz)\}\}+b\{d(z,Gz)+0\} \\
&\leq (a+b) \ d(z,Gz) < d(z,Gz)
\end{aligned}$$

ce qui implique que $Gz = z = Sz$. Donc, nous obtenons $z = Sz = Tz = Gz = Fz$, donc z est le point fixe de F, G, S et T. L'unicité du point fixe suit facilement de l'inégalité (2.8). ■

Si $B = A$ et $T = S$ dans le théorème 2.7, on trouve le corollaire suivant.

Corollaire 2.9. *Soient* (X,d) *est un espace métrique convexe et complet et* K *un sous-ensemble non vide fermé de* X. *Si* F *est une* S*-contraction généralisée de* K

dans X vérifiant

$$d(Fx,Fy) \leq a \max\{\frac{1}{2}d(Sx,Sy), d(Sx,Fx), d(Sy,Fy)\} + b\{d(Sx,Fy)+d(Fx,Sy)\} \qquad (2.10)$$

(i) $\delta(K) \subseteq S(K), F(K) \cap K \subseteq S(K)$,

(ii) $Sx \in \delta(K) \Longrightarrow Fx \in K$,

(iii) $T(K)$ *ou* $S(K)$ *sont des sous-espaces fermés de* X.

Alors

(iv) F *et* S *ont un point de coïncidence, d'autre part, si la paire* (F,S) *est faiblement compatible, alors* F *et* S *ont un point fixe commun et unique dans* X.

Exemple 2.10. Soient $X = [0,\infty[$ muni des métrique euclidienne et $K = [0,3]$. On Définit F, G, S et $T : K \longrightarrow X$ par

$$Fx = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 2 < x \leq 3, \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} 2x^4 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

$$Gx = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 2 < x \leq 3, \end{cases} \qquad Sx = \begin{cases} 2x^6 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{si } 2 < x \leq 3, \end{cases}$$

Puisque $\delta(K\ )$ la frontière de $K = \{0,3\}$. Clairement $T(K) \cap S(K) = [0,32] \cap [0,128] = [0,32]$ et donc $\delta(K) = \{0,3\} \subset T(K) \cap S(K)$. De plus $F(K) \cap K = [0,4] \cap [0,3] = [0,3] \subset S(K)$ et $G(K) \cap K = [0,8] \cap [0,3] \subset T(K)$.

On a

$$T(0) = 0 \in \delta(K) \Longrightarrow F(0) = 0 \in K,\ S(0) = 0 \in \delta(K) \Longrightarrow G(0) = 0 \in K,$$

$$T(3) = 3 \in \delta(K) \Longrightarrow F(3) = \tfrac{1}{2} \in K,\ S(3) = 3 \in \delta(K) \Longrightarrow G(3) = \tfrac{1}{2} \in K.$$

D'autre part, si $x \in [0,2]$ et $y \in [2,3]$, on obtient

$$\begin{aligned} d(Fx, Gy) &= |x^2 - \frac{1}{2}| \\ &\leq \frac{2}{3} \max\{\frac{1}{2}d(Tx, Sy), d(Tx, Fx), d(Sy, Gy)\} \\ &\leq \frac{1}{7}\{d(Fx, Sy) + d(Tx, Gy)\}. \end{aligned}$$

Si $x, y \in [2,3]$, on a

$$\begin{aligned} d(Fx, Gy) &= 0 = \frac{1}{2}d(Tx, Sy) \\ &\leq \frac{2}{3} \max \frac{1}{2}\{d(Tx, Sy), d(Tx, Fx), (Sy, Gy)\} \\ &\leq \frac{1}{7}\{d(Fx, Sy) + d(Tx, Gy)\}. \end{aligned}$$

Enfin, si $x, y \in [0,2]$, on trouve

$$\begin{aligned} d(Fx, Gy) &= |x^2 - y^3| \\ &\leq \frac{2}{3} \max \frac{1}{2}\{d(Tx, Sy), d(Tx, Fx), (Sy, Gy)\} \\ &\leq \frac{1}{7}\{d(Fx, Sy) + d(Tx, Gy)\}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la condition (2.8) est satisfaite pour tout $x, y \in K$. D'autre part'0 'est un point de coïncidence car$T(0) = F(0)$ et $S(0) = G(0)$.

Les deux paires (F, T) et (G, S) sont faiblement compatible car $TF(0) = 0 = FT(0)$ et $SG(0) = 0 = GS(0)$. aussi $F(K)$, $T(K)$, $G(K)$ et $S(K)$ sont fermés dans X, alors toutes les conditions du théorème 2.7 sont vérifiées et 0 est un point fixe commun et unique de F, G, S et T.

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, on va appliquer le théorème 2.1 pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution commune d'un système des inéquations variationnelles.

3.1 Application aux inéquations variationnelles

on va appliquer le théorème 2.1 pour montrer l'existence et l'unicité d'une solution commune d'un système des inéquations variationnelles. Les inéquations variationnelles apparaissent dans le contrôle optimal stochastique, c.f. Bensovssan-Lions [5] et aussi dans la physique mathématique, par exemples : déformation des corps élastiques poussés à travers les obstacles du solide, torsion elasto-plastique etc, c.f. Duvaut-Lions [10]. Considérons le problème de l'inéquation variationnelle suivant : trouver une fonction u telle que

$$\begin{aligned} \max\{Lu - f, u - \phi\} &= 0 \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où Ω est un ensemble ouvert, borné et convexe de $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière, L est un opérateur elliptique défini dans Ω par

$$L = -m_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)I_N,$$

où $c(x) \geq 0$, $[m_{ij}(x)]$ est une matrice strictement définie positive uniformément en x, pour $x \in \Omega$, $b_i(x)$ est un vecteur qui dépend de x, f et ϕ sont des fonctions régulières définies dans Ω et ϕ satisfaite la condition : $\phi(x) \geq 0$ for $x \in \Omega$.

Le problème lié à (3.1) est l'inéquation variationnelle à deux obstacles. Etant données deux fonctions ϕ et μ définies dans Ω telles que $\phi \leq \mu$ et $\phi \leq 0 \leq \mu$ sur $\partial\Omega$. L'inéquation variationnelle correspondante est :

$$\begin{aligned} \max\{\min[(Lu - f, u - \phi)], u - \mu\} &= 0 \ \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \ \text{ sur } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Le problème (3.2) apparaît dans la théorie stochastique des jeux. Dans cette situation, deux joueurs essayent de contrôler un processus de diffusion par le stop de ce processus ; le premier joueur essaye de maximiser une fonction coût et le deuxième joueur essaye de minimiser une fonction similaire. Ici, f représente le taux continu de coût pour les deux joueurs, ϕ est le coût de stop pour le joueur maximisant et μ est le coût de stop pour le joueur minimisant.

Soit M une matrice de type $N \times\ N$ correspondante à la discrétisation par les différences finies de l'opérateur L. Supposons que

$$M_{ii} = 1, \ \sum_{j, j \neq i} M_{ij} > -1, \ M_{ij} < 0 \text{ pour } i \neq j. \tag{3.3}$$

et Q est l'ensemble des vecteurs discrétisés, c.f. Bermon-Plemmons [6] et Varga [32].

Posons $H = I_N - M$, alors

$$H_{ii} = 0, \sum_{j,j\neq i} H_{ij} < 1, \; H_{ij} > 0 \text{ pour } i \neq j. \tag{3.4}$$

Si $q = \max_i \sum_j H_{ij}$ et M^* une matrice de type $N \times N$ telle que $M^*_{ii} = 1 - q$ et $M^*_{ij} = -q$ pour $i \neq j$, on a $H^* = I_N - M^*$. Maintenant, montrons l'existence des solutions itératives des inéquations variationnelles. Considérons les inéquations variationnelles discrètes suivantes

$$\max[\min\{M(x - M^* \|Sx - Ax\|) - f, x - M^* \|Sx - Ax\| - \phi\}, x - M^* \|Sx - Ax\| - \mu] = 0, \tag{3.5}$$

$$\max[\min\{M(x - M^* \|Tx - Bx\|) - f, x - M^* \|Tx - Bx\| - \phi\}, x - M^* \|Tx - Bx\| - \mu] = 0. \tag{3.6}$$

où (A, S) et (B, T) sont des pairs d'opérateurs faiblement compatibles de $\mathbb{R}^N$ dans lui-même définis implicitement par

$$\begin{aligned} Ax &= \min h[\max\{HSx + M(1 - H^*)\|Sx - Ax\| + f, \\ &\quad (1 - H^*)\|Sx - Ax\| + \phi\}, (1 - H^*)\|Sx - Ax\| + \mu], \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} Bx &= \min h[\max\{HTx + M(1 - H^*)\|Tx - Bx\| + f, \\ &\quad (1 - H^*)\|Tx - Bx\| + \phi\}, (1 - H^*)\|Tx - Bx\| + \mu], \end{aligned} \tag{3.8}$$

pour tout $x \in Q$, $0 < h < 1$. Alors (3.5) et (3.6) sont équivalentes au problème de point fixe commun suivant

$$x = Ax = Bx = Sx = Tx. \tag{3.9}$$

Théorème 3.1. Sous les hypothèses (3.3) et (3.4), une solution de (3.9) existe et unique.

Preuve. Considérons

$$(By)_i = h[(1 - H^*_{ij}) \|Ty_j - By_j\| + \mu_i],$$

pour tout $y \in cl(Q)$, $i, j = 1, 2, ..., N$. Puisque pour tout $x \in cl(Q)$,

$$(Ax)_i \leq h[(1 - H^*_{ij}) \|Sx_j - Ax_j\| + \mu_i],$$

on a

$$(Ax)_i - (By)_i \leq h[(1 - H^*_{ij}) \|Sx_j - Ax_j\| - \|Ty_j - By_j\|],$$

ou bien

$$(Ax)_i - (By)_i \leq h[(1 - H^*_{ij}) \max\{\|Sx_j - Ax_j\|, \|Ty_j - By_j\|\}. \tag{3.10}$$

Si

$$(By)_i = \max h\{H_{ij}Ty_j + (1 - H^*_{ij}) \|Ty_j - By_j\| + f_i, (1 - H^*_{ij}) \|Ty_j - By_j\| + \phi_i\},$$

on introduit les opérateurs

$$\begin{aligned} B^+x &= \max h\{HSx + (1 - H^*_{ij}) \|Tx - Bx\| + f, (1 - H^*) \|Tx - Bx\| + \phi\}, \\ A^+x &= \max h\{HSx + (1 - H^*_{ij}) \|Sx - Ax\| + f, (1 - H^*) \|Sx - Ax\| + \phi\}. \end{aligned}$$

Donc, on obtient $(By)_i = (B^+y)_i$. Comme $(Ax)_i \leq (A^+x)_i$, on trouve

$$(Ax)_i - (By)_i \leq (A^+x)_i - (B^+y)_i, \tag{3.11}$$

si

$$(Ax)_i = h[H_{ij}Sx_j + M_{ij}(1 - H^*_{ij}) \|Sx_j - Ax_j\| + f_i,$$

Or

$$(By)_i \geq h[H_{ij}Ty_j + M_{ij}(1 - H^*_{ij}) \|Ty_j - By_j\| + f_i,$$

en utilisant (3.3), on a

$$(A^+x)_i - (B^+y)_i \leq h[H^*_{ij} \|Sx_i - Ty_i\| + (1 - H^*_{ij}) \max\{\|Sx_j - Ax_j\|, \|Ty_j - By_j\|\}], \tag{3.12}$$

si

$$(Bx)_i = h[(1 - H^*_{ij}) \|Sx_j - Ax_j\| + \phi_i.$$

Comme

$$(By)_i \geq h[(1 - H^*_{ij}) \|Ty_j - By_j\| + \phi_i,$$

on obtient

$$(Ax)_i - (By)_i \leq h[(1 - H^*_{ij}) \max\{\|Sx_j - Ax_j\|, \|Ty_j - By_j\|\}]. \tag{3.13}$$

D'après $(3.10) - (3.13)$, on trouve

$$(Ax)_i - (By)_i \leq h[q \|Sx - Ty\| + (1 - q) \max\{\|Sx - Ax\|, \|Ty - By\|\}]. \tag{3.14}$$

Puisque x et y sont arbitrairement choisis, en changeant les rôles de A et B, on obtient

$$(By)_i - (Ax)_i \leq h[q \|Sx - Ty\| + (1 - q) \max\{\|Sx - Ax\|, \|Ty - By\|\}]. \tag{3.15}$$

D'après (3.14) et (3.15), on déduit que

$$
\begin{aligned}
\|Ax - By\| \leq\ & h[q \max \|Sx - Ty\|, \|Sx - Ay\|, \|Ty - By\|, \\
& \frac{\|Sx - By\| + \|Ty - Bx\|}{2}\} + (1-q)\max\{\|Ax - Sx\|, \\
& \|Bx - Ty\|] + L\min\{\|Sx - Ax\|, \|Ty - By\|, \\
& \|Sx - By\|, \|Ty - Ax\|\}.
\end{aligned}
$$

Donc, toutes les conditions du Théorème 2.1 sont satisfaites et d'où l'existence et l'unicité d'une solution de (3.9).

Conclusion

La théorie du point fixe trouve ses applications dans plusieurs domaines différents par exemple : les inéquations variationnelles qui apparaissent dans le contrôle optimal stochastique et aussi dans des autres problèmes dans la physique mathématique, par exemple : déformation des corps élastiques poussés à travers les obstacles du solide, torsion elasto-plastique etc. Dans ce mémoire, on a appliqué le premier théorème pour établir l'existence et l'unicité d'une solution commune pour un système des inéquations variationnelles.

REFERENCES

[1] M. Abbas, G.V. R. Babu and G. N. Alemayehu, on common fixed point of weakly compatible mappings satisfying generalized condition (B), Filomat 25 :2 (2011), 9–19.

[2] A. Aliouche, Thèse de doctorat, Annaba 2007.

[3] N. A. Assad and W. A. Kirk, Fixed point theorems for set valued mappings of contractive type, Pacific J. Math. 43(3) (1972), 553-562.

[4] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, Fund. Math., 3 (1922), 133–181.

[5] A. Bensovssan and J. L. Lions, Applications des Inequations Variationnelles en Control Stochastique, Dunod, Paris, 1978.

[6] A. Bermon and R. J. Plemmons, Nonnegative Matrices in Mathematical Science, Academic Press, New York, 1979.

[7] D. W. Boyd and J. S. W.Wong, On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458-464.

[8] F. Browder, On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations, Indag. Math. 30 (1968), 27-25.

[9] J. Dugundji and A. Granas, Weakly contractive maps and elementary domain invariance theorems, Bull. Greek. Math. Soc., 19 (1978), 441-451.

[10] G. Duvaut and J. L. Lions, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer Berlin, 1976.

[11] M. Gregus Jr, A fixed point theorem in Banach spaces, Boll. Un. Mat. Ital., 17-A (5) (1980), 193-198.

[12] M. Imdad, ladlay khan and D. R. Sahu common fixed point theorems for two pairs of non-self mappings J. Appl. Math. & Computing Vol. 21(2006), No. 1 - 2, pp. 269 - 287.

[13] J. Jachymski, Equivalence of some contractive properties over metrical structures, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (8) (1997), 2327-2335.

[14] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, Internat J. Math. Math. Sci., 9 (1986), 127-179.

[15] G. Jungck, P. P. Murthy and Y. J. Cho, Compatible mappings of type (A) and common fixed points, Math. Japonica., 38 (2) (1993), 381-390.

[16] G. Jungck, Common fixed points for non-continuous non-self maps on non metric spaces, Far East J. Math. Sci., 4 (2) (1996), 199-215.

[17] M. A. Krasnoselskij and V. J. Stetsenko, About the theory of equations with concave operators, Sib. Mat. Zh. 10 (1969), 565-572

[18] M. A. Krasnoselskij and G. M. Vainikko et All, Approximate solution of operator equations, Wolters Noordhoff, Groningen 1972.

[19] J. Matkowski, Integrable solutions of functional equations, Diss. Math., 127 (1975).

[20] J. Matkowski and R. Wegrzyk, On equivalence of some fixed point theorems for self-mappings of metrically convex space, Boll. Un. Mat. Ital., 17-A (5) (1978), 359-369.

[21] E. Michael, Continuous selections. I, Ann. of Math. 63 (1956), 361-382.

[22] H. K Pathak and M. S. Khan, Compatible mappings of type (B) and common fixed point theorems of Gregus type, Czechoslovak Math. J., 45 (120) (1995), 685-698.

[23] H. K Pathak and R Tiwari, A Gregus tupe common fixed point theorem in normed spaces with application, Banach J. Math. Anal. 5 (2011), no. 1, 136–147.

[24] H. K. Pathak,Y. J. Cho, S. M. Kang, B. S. Lee, Fixed point theorems for compatible mappings of type (P) and applications to dynamic programming, Le Matematiche., Fasc. I, 50 (1995), 15–33.

[25] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. Chang, S. M. Kang, Compatible mappings of type (P) and fixed point theorem in metric spaces and probabilistic metric spaces, Novi Sad J. Math., 26 (2) (1996), 87-109.

[26] H. K. Pathak, Y. J. Cho, S. M. Khan and B. Madharia, Compatible mappings of type (C) and common fixed point theorems of Gregus type, Demonstratio Math., 31 (3) (1998), 499-518.

[27] H. K. Pathak, Applications of fixed point technique in solving certain dynamic programming and variational inequalities, Nonlinear Analysis., **63** (2005), 309 – 319.

[28] K. P. R. Sastry and I. S. R. Krishna Murthy, Common fixed points of two partially commuting tangential self-maps on a metric space, J. Math. Anal. Appl. 250 (2000), 731–734.

[29] S. Sessa, On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publ. Inst. Math. Beograd., 32 (46) (1982), 149-153.

[30] S. L. Singh and Ashish Kumar common fixed point theorems for contractive maps matematiqki vesnik 58 (2006), 85–90.

[31] S. P. Singh and B. A. Meade, On common fixed point theorems, Bull. Austral. Math. Soc., 16 (1977), 49-53.

[32] R. S. Varga, Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ, 1982.

الملخص

الهدف من هذا العمل هو برهنة ثلاث نظريات خاصة بالنقطة الثابتة المشتركة لأربع تطبيقات في فضاء متري والتي تشكل زوجين من التطبيقات المتوافقة بضعف، وبعد ذلك نطبق النظرية الأولى لإثبات وجود ووحدانية الحل المشترك لجملة متراجحات متغيرة.

الكلمات الدالة : النقطة الثابتة المشتركة، فضاء متري، التوافق بضعف، متراجحة متغيرة.

Résumé

Le but de ce travail est de démontrer trois théorèmes du point fixe commun pour quatre applications dans des espaces métriques dont deux paires d'applications sont faiblement compatibles, ensuite, nous allons appliquer le premier théorème pour établir l'existence et l'unicité d'une solution commune d'un système des inéquations variationnelles.

Mots clés : Point fixe commun, espace métrique, compatibilité faible, inéquation variationnelle.

Abstract

The aim of this work is to prove three common fixed point theorems for four mappings in metric spaces including two pairs of mappings which are weakly compatible. Next, we will apply the first theorem to establish the existence and uniqueness of common solution of a system of variational inequalities.

Key words : Common fixed point, metric space, weak compatibility, variational inequality.